
Digitized by Google



BAND XX

1943

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

INHALTS-ÜBERSICHT

Verfasserverzeichnis.

Sachverzeichnis.



Luftfahrt-Forschung

Band 20 | 20. Januar 1943 | Lfg. 1

Festigkeitseigenschaften, Korrosions- und Witterungsverhalten hochwertiger Stahlbänder*).

Von Heinrich Cornelius, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Institut für Werkstofforschung, Berlin-Adlershof.

Untersuchung von kaltgewalzten bzw. vergüteten, 0,3 und 1,0 mm dicken Bändern aus unlegierten, niedriglegierten und austenitischen Stählen: Zerreiß- und Biegewechselversuche — letztere auch an einer Punktschweißverbindung. Einfluß des Anlassens auf die statischen Festigkeitswerte. Korrosionsversuche im Wechseltauchgerät (Leitungswasser und Kochsalzlösung) und im DVL-Rührgerät (Kochsalzlösung mit Zusatz von Wasserstoffsuperoxyd). Spannungskorrosionsversuche im Wechseltauchgerät (Kochsalzlösung bzw. Leitungswasser). Bewitterungsversuche in vier verschiedenen Atmosphären.

Gliederung.

Die mit Ausnahme von Bewitterungsversuchen schon vor längerer Zeit abgeschlossenen Untersuchungen bezweckten die Klärung der Abhängigkeit der Festigkeitseigenschaften und des Korrosionsverhaltens hochwertiger, 0,3 und 1,0 mm dicker Stahlbänder von der Stahlart und Herstellungsweise. Eine größere Zahl von Bändern stand für die Versuche zur Verfügung[1]). Diese erstreckten sich auf die Ermittlung der Festigkeitseigenschaften in Zerreiß- und Biegewechselversuchen sowie auf Korrosions- und Bewitterungsversuche. Zerreißversuche wurden nicht nur an den im Lieferzustand befindlichen Bändern durchgeführt, sondern es wurden auch die bei Temperaturen zwischen 200 und 450° angelassenen Bänder geprüft. Biegewechselversuche wurden außer mit den Bändern im Lieferzustand noch in einem Falle mit einer Punktschweißverbindung angestellt. — Das Korrosionsverhalten der Versuchsbänder wurde im Wechseltauchversuch mit Leitungswasser und 3 proz. Kochsalzlösung sowie im DVL-Rührgerät mit ebenfalls 3 proz., aber einen Wasserstoffsuperoxydzusatz von 0,1% enthaltender Kochsalzlösung geprüft. Weiterhin wurden Spannungskorrosionsversuche in 3 proz. Kochsalzlösung im Wechseltauchgerät durchgeführt. — Zur Ergänzung der Korrosionsversuche im Laboratorium wurden Bewitterungsversuche in Adlershof, Essen, Bitterfeld und auf Norderney, also in Stadt-, Industrie- und Seeluft angestellt.

Die Korrosions- und Bewitterungsversuche sollten weniger den recht gut bekannten Einfluß der Stahlzusammensetzung an sich, als die mögliche Auswirkung der Unterschiede im Herstellungsverfahren (z. B. verschieden starke Kaltwalzung, Vergütung bzw. Patentierung mit anschließendem Kaltwalzen) auf das Korrosionsverhalten und die Witterungsbeständigkeit der Versuchsbänder bei gegebener Stahlart beleuchten. Die Versuchsbänder wurden daher zum Teil auch unter Korrosionsbedingungen geprüft, denen der Bandwerkstoff nicht gewachsen ist.

I. Versuchsbänder.

Die chemische Zusammensetzung und die Art der Herstellung der zur Untersuchung gelangten Stahlbänder geht aus Zahlentafel 1 hervor. Stahl A ist ein niedriggekohlter 18% Cr-8% Ni-Stahl. Der ebenfalls kohlenstoffarme 17% Mn-15% Cr-Stahl B enthält noch einen Zusatz von 1,7% Ni. Statt mit Nickel in etwa dieser Höhe ist der 19% Mn-15% Cr-Stahl E mit rd. 0,2% N_2 legiert. Dieser Stahl weist ebenso wie der 6% Mn-4% Ni-17% Cr-Stahl F mit 1% Mo einen verhältnismäßig hohen Kohlenstoffgehalt von rd. 0,2% auf. Die Stähle A, B, E und F sind austenitisch, die Bänder aus ihnen durch Kaltwalzen hergestellt. — Die unlegierten Stähle H und K mit 0,58% C sind identisch und entstammen sogar der gleichen Schmelzung. Die unterschiedliche Bezeichnung bedeutet, daß die Bänder auf verschiedene Weise, nämlich durch Patentieren und Kaltwalzen (H) und durch Ölschlußhärten mit leichtem An-

Zahlentafel 1. Chemische Zusammensetzung und Herstellungsweise der Versuchs-Stahlbänder.

Bezeichnung	Gehalte in % C	Si	Mn	Cr	Ni	Mo	Cu	Art der Herstellung
A	0,06	0,20	0,39	17,9	8,3	—	n. b.	kaltgewalzt
B	0,07	0,42	17,3	14,7	1,7	—	»	»
E[1])	0,23	1,0	19,8	15,1	—	—	»	»
F	0,17	1,2	6,5	17,0	4,0	1,1	»	»
H	0,58	0,12	0,26	—	—	—	0,15	patentiert und kaltgewalzt
K	0,58	0,12	0,26	—	—	—	0,15	kaltgewalzt, in Öl gehärtet und angelassen
L	0,21	0,24	0,62	0,74	—	0,25	0,15	vergütet und kaltgewalzt
M[2])	0,25	0,71	0,92	0,70	—	0,25	0,13	weichgeglüht und kaltgewalzt
P[3])	0,25	0,20	1,10	0,70	—	—	0,10	vergütet und kaltnachgewalzt

[1]) Der Stahl enthält rund 0,2% N_2.
[2]) 0,07% Gesamt-Aluminiumgehalt.
[3]) 0,15% Vanadingehalt.

*) A 22 1, E 21 1.
[1]) Die Lieferung der Bänder vermittelte Herr Dr.-Ing. A. Väth, dem hierfür auch an dieser Stelle verbindlich gedankt sei.

lassen nach dem Kaltwalzen (K) hergestellt worden sind. — Die Bänder aus dem niedriglegierten Chrom-Molybdän-Stahl L wurden durch Vergüten und anschließendes Kaltwalzen auf die verlangten Festigkeitswerte gebracht. Dagegen wurde der ebenfalls niedriglegierte Chrom-Molybdän-Stahl M, der sich von Stahl L durch erhöhte Gehalte an Silizium und auch Mangan unterscheidet, ausgehend vom weichgeglühten Zustand durch Kaltwalzen zu Bändern verarbeitet. — Die vergüteten und kalt nachgewalzten Bänder aus dem Mangan-Chrom-Vanadin-Stahl P wurden nur zu den Bewitterungsversuchen herangezogen.

Mit Ausnahme der Bänder aus Stahl L, die eine schwarze Oberfläche hatten, wiesen alle übrigen Bänder eine blanke Oberfläche auf. Die Bänder aus Stahl L wurden daher vor den Versuchen fein überschliffen. Bei den übrigen Bändern verblieb die Oberfläche für die Versuche im Lieferzustand.

Die 0,3 und 1,0 mm dicken Bänder lagen vorwiegend in mehreren Festigkeitsstufen vor. Die Versuchsbänder erhielten daher neben der Stahlbezeichnung noch zusätzlich Nummern, die die Banddicke und die bei der Herstellung angestrebte Zugfestigkeit nach folgendem Schema kennzeichnen:

Banddicke in mm	Zusatz zur Stahlbezeichnung für die angestrebten Zugfestigkeiten in kg/mm² von		
	100/110	120/130	140/150
1,0	10	12	14
0,3	30	32	34

Die Bezeichnung B 10 bedeutet also: Band aus Stahl B mit 1 mm Dicke und einer angestrebten Zugfestigkeit von 100 bis 110 kg/mm², während A 34 zu lesen ist: Band aus Stahl A mit 0,3 mm Dicke und einer angestrebten Zugfestigkeit von 140 bis 150 kg/mm².

Folgende Bänder lagen für die Versuche vor:

A 10	A 12	A 14	A 30	A 32	A 34
B 10	B 12	B 14	B 30	B 32	B 34
E 10	E 12	E 14	E 30	E 32	E 34
F 10	F 12	F 14	F 30	F 32	F 34
H 10	H 12	H 14	H 30	H 32	H 34
—	K 12	—	—	K 32	K 34
L 10	—	—	—	L 32	—
M 10	M 12	—	M 30	M 32	—
P 10	—	P 14	—	—	—

Aus einer eingehenden Gefügeuntersuchung aller Bänder sei folgendes mitgeteilt: Alle Bänder aus Stahl A hatten ein rein austenitisches Gefüge mit zunehmender Kornstreckung und Gleitlinienzahl bei steigender Zugfestigkeit. Gleiches gilt für die Bänder aus Stahl B. Das Band B 14 hatte zahlreiche feine und langgestreckte nichtmetallische Einschlüsse. Bei den Bändern aus Stahl E sind im austenitischen Gefüge nur wenig Gleitlinien erkennbar. Die Streckung des Kornes nimmt mit steigender Zugfestigkeit nur wenig zu. Die Bilder 1 bis 3 zeigen das Gefüge der Bänder E 10, E 12 und E 14. Die Bänder F 10 bis F 34 haben ein uneinheitliches, in den Bildern 4 bis 9 (verschiedene Vergrößerungen beachten) wiedergegebenes Gefüge. In dem vorwiegend aus Austenit bestehenden Gefüge liegen in einigen Bändern weitere Gefügebestandteile vor, die in Bild 4 hell, in den Bildern 6 und 8 dunkel erscheinen. Es kann sich um Karbide, jedoch wahrscheinlicher um Ferrit (hell) bzw. zu γ- und σ-Phase zerfallenen Ferrit (dunkel) handeln. Die Korngrößen der Bänder F 30, F 32 und F 34 weisen große Unterschiede auf.

Die patentiert-kaltgewalzten Bänder aus Stahl H haben ein sorbitisches Gefüge mit kleinen Ferritresten, dessen Streckung mit der Zugfestigkeit zunimmt. Das Gefüge des ölschlußgehärteten und angelassenen Bandes K 12 zeigt Bild 10. Die Bänder K 32 und K 34 hatten ein weitestgehend entsprechendes Gefüge. Das Band L 10 hatte ein Vergütungsgefüge gemäß Bild 11, aus dem auf eine höchstens schwache Kaltverformung zu schließen ist. Das Band L 32 hingegen läßt nach Bild 12 eine starke Verformung des Vergütungsgefüges erkennen. Das Gefüge aller Bänder aus

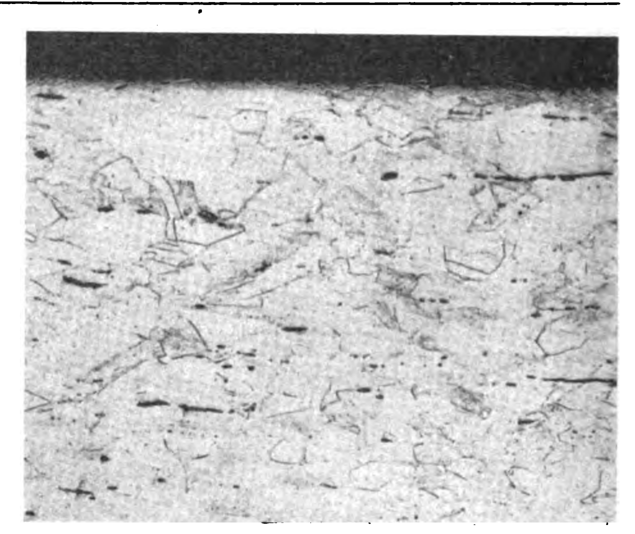


Bild 1. Band E 10. V = 200.

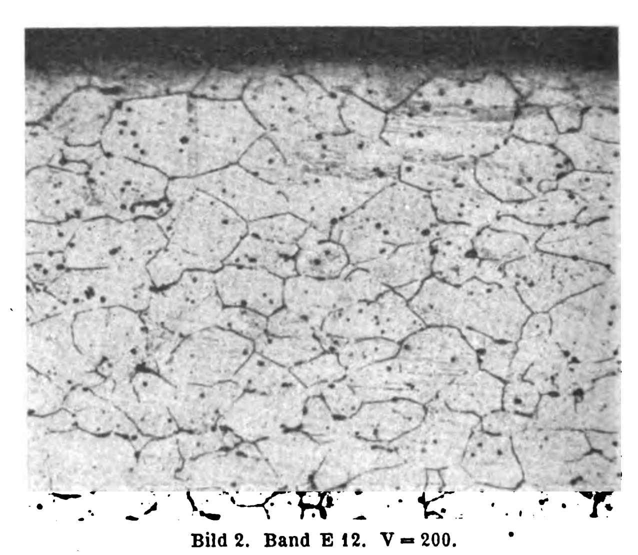


Bild 2. Band E 12. V = 200.

Bild 3. Band E 14. V = 200.

Stahl M ist stark gestreckt. Das Ausgangsgefüge für die Kaltwalzung bestand aus Ferrit mit körnigem Zementit. Bild 13 zeigt das Gefüge des Bandes M 10.

II. Statische und dynamische Festigkeitseigenschaften der Stahlbänder im Lieferzustand, erstere auch nach dem Anlassen.

Für die Zerreißversuche zur Ermittlung der statischen Festigkeitswerte der Stahlbänder im Lieferzustand wurden



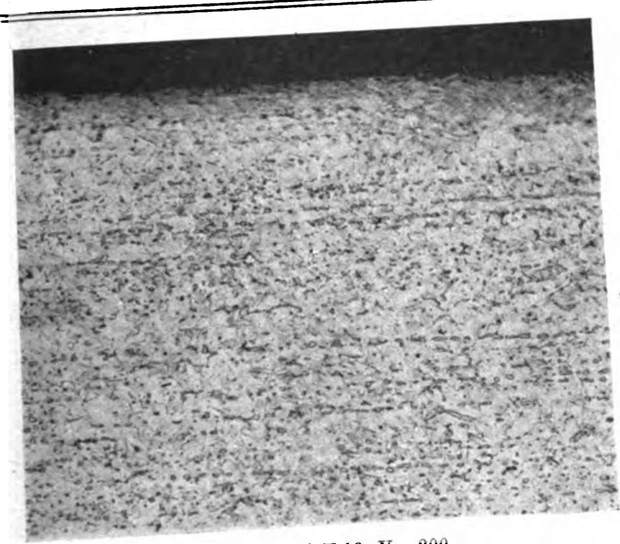


Bild 4. Band F 10. V = 200.

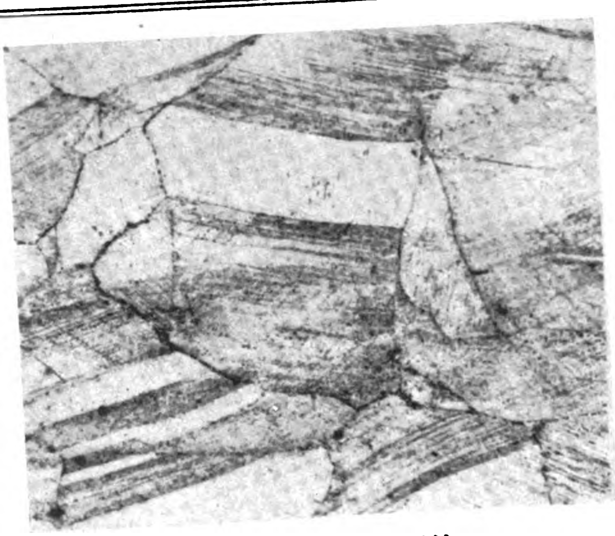


Bild 7. Band F 30. V = 500.



Bild 5. Band F 12. V = 200.

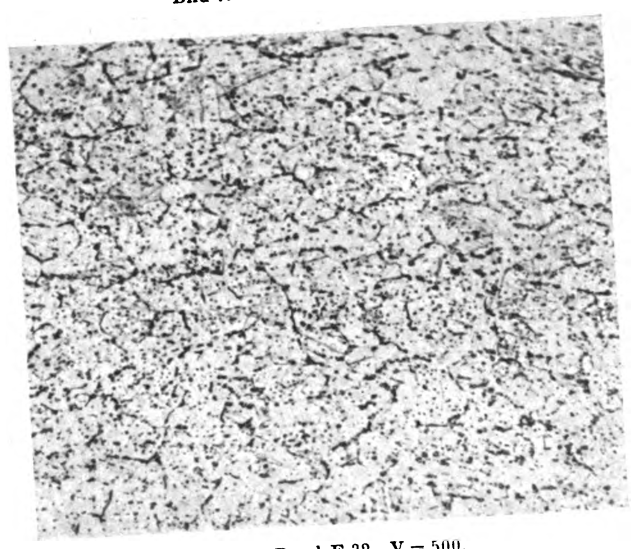


Bild 8. Band F 32. V = 500.



Bild 6. Band F 14. V = 200.

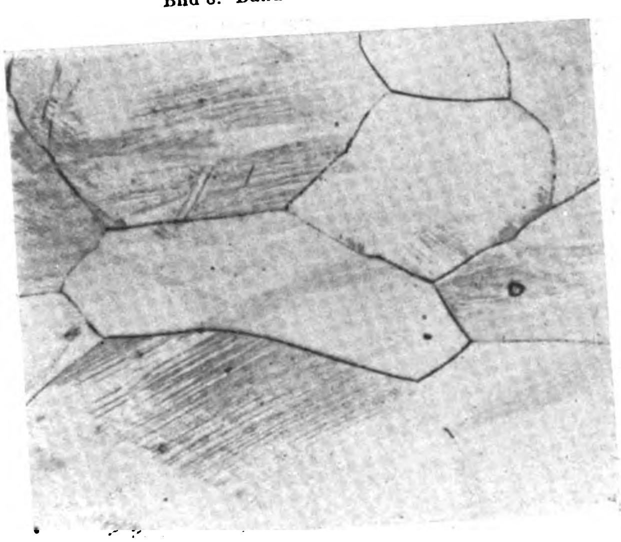


Bild 9. Band F 34. V = 500.

in Walzrichtung entnommene Proben mit einer Meßlänge von 45 mm und einer Breite von 15 mm aus den 1 mm dicken Bändern, mit einer Meßlänge von 20 mm und einer Breite von 10 mm aus den 0,3 mm dicken Bändern benutzt. Gemessen wurden die $\sigma_{0,02}$- und $\sigma_{0,2}$-Grenze, die Zugfestigkeit (σ_B) und Bruchdehnung (δ_{10}). Es ist zu berücksichtigen, daß die Ermittlung der $\sigma_{0,02}$-Grenze besonders bei den dünnen Bändern schwierig ist. — Die Ergebnisse der Zerreißversuche enthält Zahlentafel 2. Mit allen Bändern aus Stahl A wurden die angestrebten Zugfestigkeitsstufen angenähert eingehalten. Bei Zugfestigkeiten über 135 kg/mm² werden noch Bruchdehnungen über 4,5% erreicht. Die $\sigma_{0,02}$-Grenze liegt im Verhältnis zur Zugfestigkeit tief. Dies gilt für alle hier untersuchten, aus austenitischen Stählen kalzgewalzten Bänder. Das Streckgrenzenverhältnis von Stahl A erreicht für die Bänder mit hoher Zugfestig-

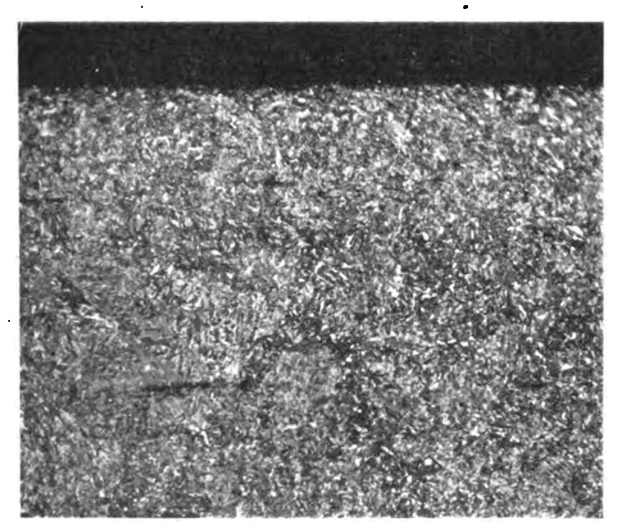


Bild 10. Band K 12. V = 200.

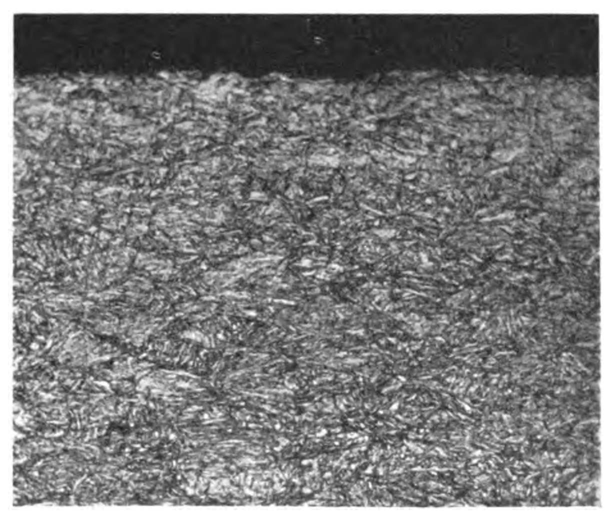


Bild 11. Band L 10. V = 200.

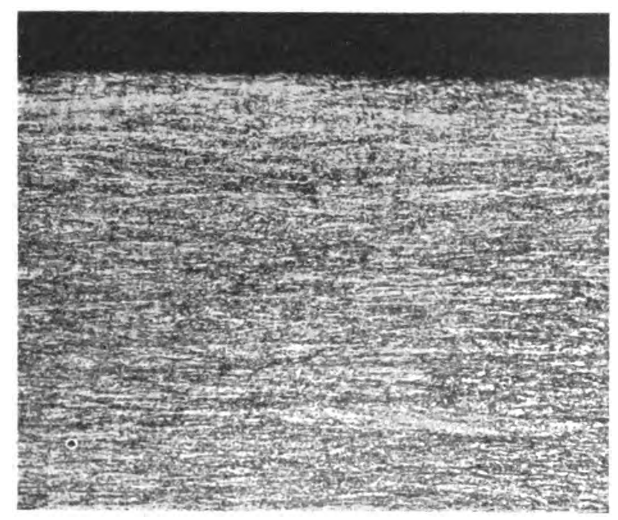


Bild 12. Band L 32. V = 200.

keit Werte bis zu 0,96. — Unter der Ergebnissen für die Bänder aus Stahl B in Zahlentafel 2 fällt auf, daß das Band B 12 zwar eine höhere Zugfestigkeit aber eine kleinere $\sigma_{0,02}$- und $\sigma_{0,2}$-Grenze als das Band B 10 hat. Die angestrebten Zugfestigkeitsbereiche sind mit Stahl B z. T. erreicht, z. T. über- oder unterschritten worden. Hervorzuheben ist die Bruchdehnung der Bänder aus Stahl B, die bei Band B 14 mit einer Zugfestigkeit von 150 bis 153 kg/mm² noch 8 bis 11% beträgt. Auch bei dieser Festigkeit über-

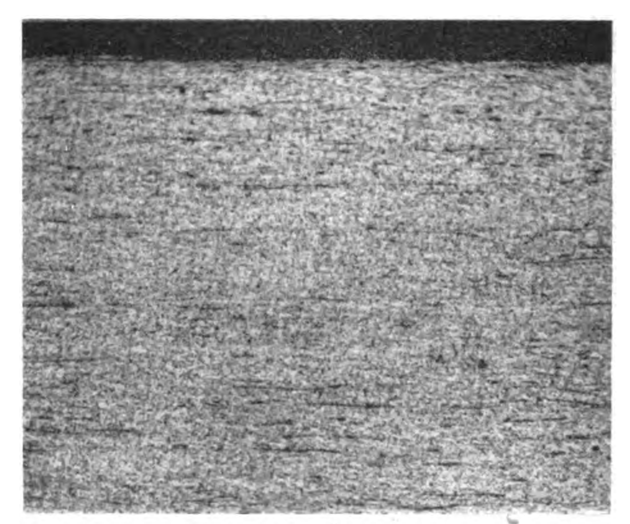


Bild 13. Band M 10. V = 200.

Zahlentafel 2. Statische Festigkeitswerte der Bänder im Lieferzustand. (Grenzwerte von je zwei Zerreißversuchen vom Anfang und Ende eines jeden Bandes.)

Band	$\sigma_{0,02}$-Grenze kg/mm²	$\sigma_{0,2}$-Grenze kg/mm²	σ_B kg/mm²	$\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_B}$	δ_{10} %
A 10	32,6—35,7	68,6—72,0	101—103	0,67—0,70	27—31
A 12	52,8—64,7	111—115	118—126	0,90—0,94	10—18
A 14	65,5—77,0	129—133	136—139	0,94—0,96	4,5—7,0
A 30	27,3—36,0	60,5—63,0	95,6—100	0,62—0,65	30—33
A 32	48,8—57,2	92,5—96,1	117—121	0,79—0,81	16—19
A 34	70,0—96,0	125—136	138—144	0,91—0,94	5,3—6,5
B 10	48,8—51,0	98,8—99,7	112	0,88—0,89	12—13
B 12	39,5—45,5	90 0—95,0	118—129	0,74—0,75	16—18
B 14	64,2—70,0	131—132	150—153	0,86—0,88	8—11
B 30	28,4—30,6	72,4—73,3	110—113	0,64—0,66	17—23
B 32	48,0—50,0	90,0—92,0	126—134	0,69	19—20
B 34	53,2—55,5	96,0—97,5	137—139	0,69—0,71	15—17
E 10	39,8—40,1	97,0—100	119—125	0,80—0,83	16—17
E 12	45,4—53,4	101—106	127—133	0,76—0,83	14—17
E 14	52,7—80,5	130—133	146—148	0,88—0,90	8—9
E 30	52,0—59,0	106—113	129—132	0,80—0,86	12—16
E 32	56,0—70,0	122—126	141—144	0,80—0,89	6—10
E 34	79,5—101	149—151	167—170	0,88—0,90	4,6—5,5
F 10	26,5—34,4	71,0—80,0	110—123	0,62—0,65	28—33
F 12	42,0—47,0	94,8—104	141—148	0,67—0,70	19—25
F 14	49,8—56,3	99,5—105	133—137	0,75—0,77	19—20
F 30	41,7—43,3	87,0—89,5	120—125	0,69—0,72	26—28
F 32	40,0—44,0	88,3—95,6	115—128	0,71—0,81	27—29
F 34	44,5—53,5	87,7—93,2	110—117	0,79	22—27
H 10	55,5—57,3	97,3—103	112—116	0,87—0,88	4,5—5,2
H 12	65,0—65,7	111—117	125—128	0,89—0,91	3,5—4,5
H 14	68.0—75,0	120—124	136—140	0,88—0,89	2,3—3,4
H 30	59,4—63,3	99,5—102	110—112	0,90—0,91	4,5—6,0
H 32	63,3—74,4	117—125	129—135	0,91—0,93	2,5—3,0
H 34	75,4—87,2	136—140	146—152	0,92—0,93	2,2—2,8
K 12	106—113	120—122	130—134	0,91—0,93	6,3—7,5
K 32	102—108	109—113	120—122	0,90—0,92	9—10
K 34	120—126	128—131	138—140	0,93—0,94	5—7
L 10	61,8—76,0	97,8—101	103—106	0,94—0,95	8—9
L 32	91,5—99,8	112—117	115—119	0,98—0,99	6—10
M 10	46,5—52,1	96,8—99,8	100—107	0,93—0,97	3,0—4,6
M 12	59,8—67,5	106—110	113—116	0,93—0,95	3,2—3,6
M 30	54,3—57,5	90,5—95,5	98,0—103	0,92—0,93	4—5
M 32	53,5—57,0	97,5—100	105—108	0,92—0,94	3—5

schreitet das Streckgrenzenverhältnis 0,88 nicht. — Mit Stahl E sind die angestrebten Zugfestigkeitsstufen bei den Bändern E 12, E 14 und E 32 eingehalten worden. Die übrigen Bänder überschreiten die vorgeschriebene Zugfestigkeit. Band E 34 hat bei der hohen Zugfestigkeit von 167 bis 170 kg/mm² noch Bruchdehnungen von mehr als



4,5%. Dabei ist das Streckgrenzenverhältnis nicht größer als 0,90. So wie der ebenfalls Mangan als ein wesentliches Legierungselement enthaltende, stark verfestigungsfähige Stahl B ist also auch der Stahl E zur Herstellung von Bändern mit hoher Festigkeit geeignet. — Diese Feststellungen gelten in gesteigertem Maße auch für den Chrom-Mangan-Nickel-Molybdän-Stahl F. Die angestrebten Festigkeitsstufen sind zwar durchweg nicht eingehalten worden. Doch zeigt z. B. das Band F 12 bei einer Zugfestigkeit von 141 bis 148 kg/mm² die hohen Dehnungswerte von 19 bis 25% und Streckgrenzenverhältnisse von nur 0,67 bis 0,70. Die $\sigma_{0,02}$-Grenze liegt tief. Für Bänder mit höchster Festigkeit muß der Stahl F als besonders geeignet angesehen werden.

Die patentiert-kaltgezogenen Bänder aus dem unlegierten Stahl H liegen sämtlich in den angestrebten Festigkeitsstufen. Die Dehnungswerte reichen an die der austenitischen Bänder etwa gleicher Festigkeit nicht heran und betragen bei Band H 14 mit 136 bis 140 kg/mm² Zugfestigkeit nur 2,3 bis 3,4%. Das Streckgrenzenverhältnis liegt bei allen Bändern nahe bei 0,90. Die $\sigma_{0,02}$-Grenze ist durchweg etwas höher als die der austenitischen Bänder vergleichbarer Zugfestigkeit. — Mit den ölschlußgehärteten und angelassenen Bändern K 12, K 32 und K 34 aus dem ebenfalls unlegierten Stahl K sind die vorgeschriebenen Festigkeitsstufen eingehalten worden. Die Bänder aus Stahl K haben auf Grund ihrer Vorbehandlung eine hohe $\sigma_{0,02}$-Grenze. Das Streckgrenzenverhältnis liegt für alle drei Bänder über 0,90. Die Bruchdehnung ist größer als die der patentiert-kaltgezogenen Bänder H 10 bis H 34. Hinsichtlich der $\sigma_{0,02}$-Grenze und der Bruchdehnung bietet demnach die Härtung bzw. Vergütung für unlegierten Kohlenstoffstahl mit etwa 0,5 bis 0,6% C Vorteile gegenüber dem Patentieren mit anschließendem Kaltwalzen. — Die vergüteten und kaltgewalzten Bänder L 10 und L 32 aus niedriglegiertem Chrom-Molybdän-Stahl haben eine verhältnismäßig hohe $\sigma_{0,02}$-Grenze, die jedoch die der entsprechenden Bänder aus Stahl K nicht erreicht. Die Zugfestigkeit von Band L 10 entspricht der Vorschrift, die von Band L 32 liegt darunter. Das Streckgrenzenverhältnis erreicht mit Band L 32 den sehr hohen Wert von 0,99. Die Bruchdehnung liegt über 6%. — Mit den kaltgewalzten Bändern aus dem schwachlegierten Mangan-Chrom-Molybdän-Stahl M ist die untere Festigkeitsvorschrift erfüllt worden. Die Bänder M 12 und M 32 erreichen diese nicht. Die $\sigma_{0,02}$-Grenze und die Bruchdehnung liegen verhältnismäßig niedrig, das Streckgrenzenverhältnis mit 0,92 als untere Grenze hoch. —

Die unlegierten und niedriglegierten Stahlbänder H, K, L und M erreichen die Dehnungswerte der austenitischen Bänder A, B, E und F bei gleicher Zugfestigkeit nicht. Im Hinblick auf eine möglichst hohe Bruchdehnung bei hoher Zugfestigkeit ist es für nichtaustenitische Bänder nach den Ergebnissen in Zahlentafel 2 zweckmäßiger, die erforderliche Festigkeit nicht vorwiegend durch Kaltwalzen, sondern soweit wie möglich durch Warmbehandlung zu erzielen. Man erhält auf diesem Wege nicht nur bessere Dehnungswerte — deren Größe als grob angenähertes Maß der spanlosen Verformbarkeit der Bänder angesehen werden darf —, sondern auch höhere Werte der Elastizitätsgrenze (vgl. in Zahlentafel 2 die Bänder H mit K und die Bänder L mit M) als durch starkes Kaltwalzen. In der Höhe der Elastizitätsgrenze sind die vorwiegend durch Warmbehandlung auf hohe Festigkeit gebrachten, unlegierten oder niedriglegierten Bänder auch den austenitischen Bändern gleicher Zugfestigkeit überlegen, bei denen die Kaltverfestigung das einzige Mittel zur Erzielung hoher Festigkeitswerte ist.

Die vorstehenden Ausführungen über den Einfluß der Herstellungsweise auf die Höhe der Bruchdehnung von Stahlbändern hoher Festigkeit werden durch neuere Versuche an 0,3 bis 1,0 mm dicken Bändern hoher Festigkeit aus niedriglegierten Stählen bestätigt. Bei diesen Versuchen zeigte sich außerdem, daß die in Zerreißversuchen an Querstäben erhaltenen Ergebnisse weitgehend den für Längsproben festgestellten entsprechen.

Der Einfluß eines einstündigen Anlassens auf die statischen Festigkeitseigenschaften wurde an den 1 mm dicken Bändern aus den Stählen A, B, F, H, K und L untersucht. Es sollte hierdurch vor allem festgestellt werden, ob und gegebenenfalls bei welcher Anlaßtemperatur eine — bei den stärker kaltgewalzten Bändern erwartete — Erhöhung der Elastizistätsgrenze (bei 0,02% bleibender Dehnung gemessen) eintritt. Die Bilder 14 bis 18 geben die Ergebnisse der Zerreißversuche in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur wieder.

Nach Bild 14 genügt für die Bänder A 12 und A 14 ein Anlassen bei 200°, für das Band A 10 bei 300° um eine mit der Bandfestigkeit, also auch mit dem Kaltwalzgrad steigende, bedeutende Zunahme der $\sigma_{0,02}$-Grenze zu erreichen. Diese Anlaßbehandlung erhöht auch die Streckgrenze und Zugfestigkeit, offenbar ohne die Dehnung zu beeinträchtigen, die erst nach dem Anlassen auf höhere Temperaturen absinkt. — Die Wirkung des Anlassens bei 200 bzw. 300° ist nach Bild 15 für die Bänder B 10 und B 14 ähnlich wie die vorstehend für Stahl A angegebene. Ähnlich wie auf die Bänder A und B wirkt sich das Anlassen auch auf die ebenfalls austenitischen Bänder aus Stahl F mit der Abweichung (Bild 16) aus, daß schon für das Band F 10 die niedrigere Anlaßtemperatur von 200° ausreicht, da dieses Band bereits eine hohe Zugfestigkeit (Kaltverfestigung) von 110 bis 123 kg/mm² im Lieferzustand besaß.

Die $\sigma_{0,02}$-Grenze der patentiert-kaltgewalzten Bänder H 10, H 12 und H 14 steigt nach Bild 17 durch das Anlassen bei 300° auf fast das Doppelte ihres Ausgangswertes. Bei dieser Anlaßtemperatur fallen die Zugfestigkeit und Streckgrenze schon wieder leicht ab, bleiben aber noch über

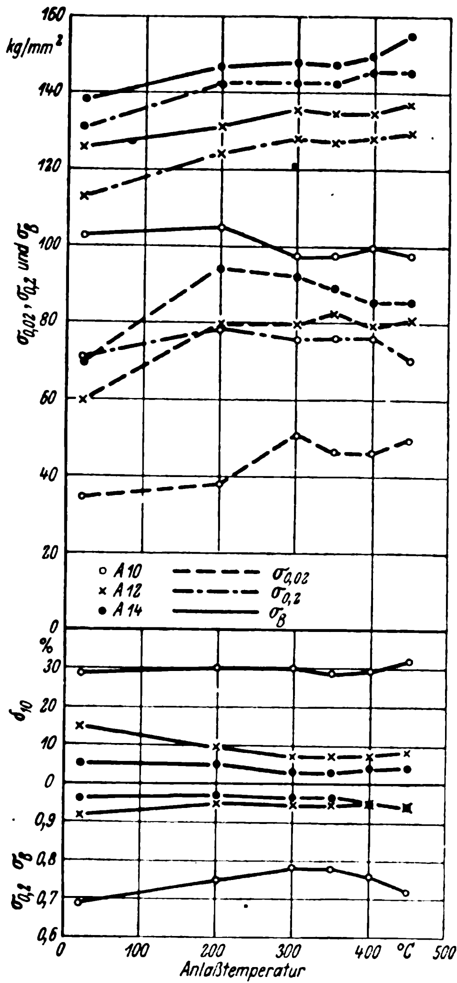


Bild 14. Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der Bänder A 10, A 12 und A 14.

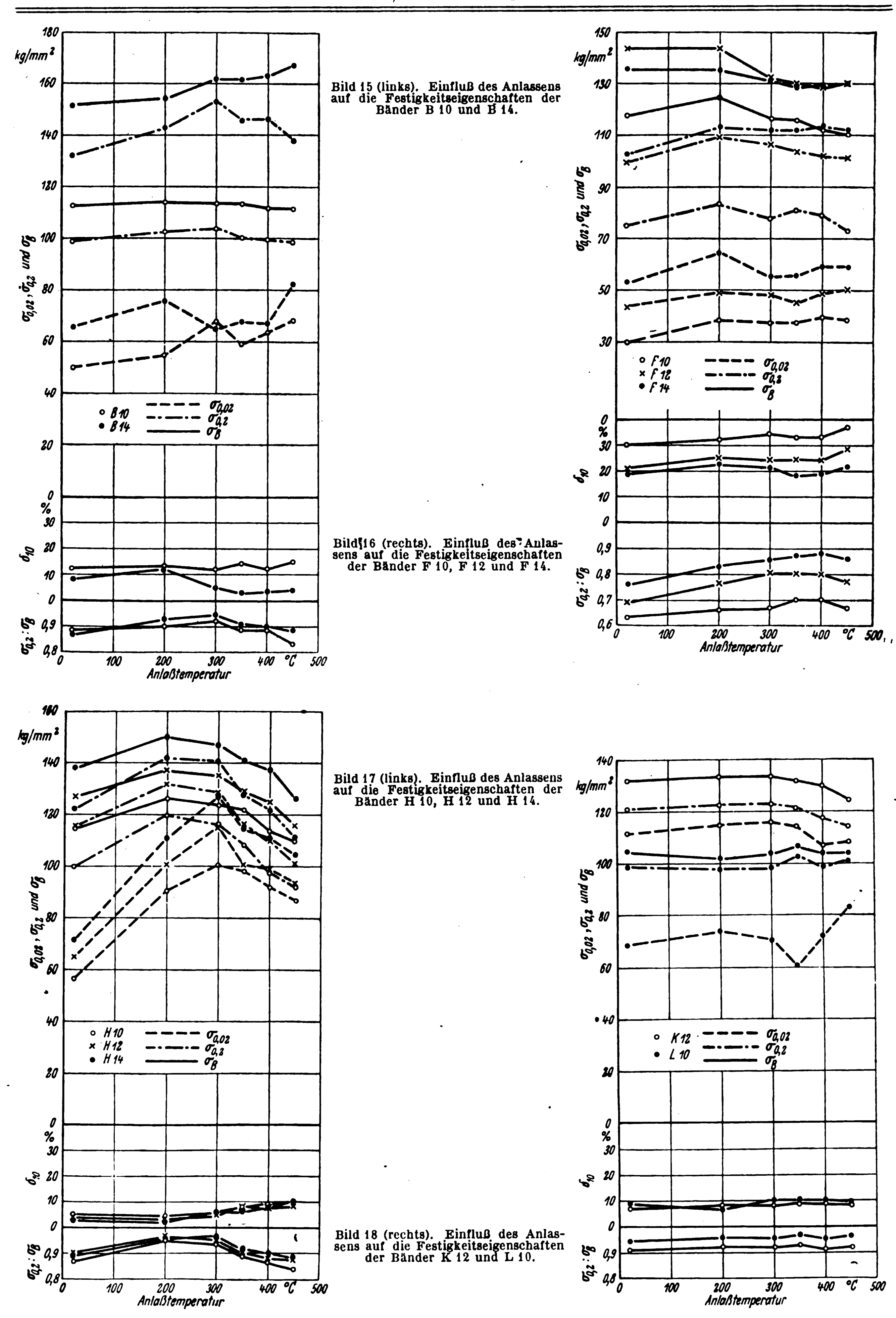


Bild 15 (links). Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der Bänder B 10 und B 14.

Bild 16 (rechts). Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der Bänder F 10, F 12 und F 14.

Bild 17 (links). Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der Bänder H 10, H 12 und H 14.

Bild 18 (rechts). Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der Bänder K 12 und L 10.

ihren Ausgangswerten. Die Bruchdehnung erfährt durch das Anlassen bei 300° eine kleine Zunahme. — Die Änderung der Festigkeitseigenschaften durch Anlassen des Bandes K 12 und des ebenfalls ein Vergütungsgefüge aufweisenden Bandes L 10 (s. Bild 11) ist nach Bild 18 bedeutungslos. Insbesondere erfährt die Elastizitätsgrenze keine Steigerung, da die Voraussetzung hierfür, eine stärkere Kaltverfestigung, nicht erfüllt ist bzw. bei der Bandherstellung bereits ein Anlassen durchgeführt wurde.

Ein Anlassen bei niedrigen Temperaturen bietet besonders für kaltgewalzte austenitische Bänder einen praktischen, in der Erhöhung der Elastizitätsgrenze zum Ausdruck kommenden Nutzen. Für nichtaustenitische Stahlbänder hoher Festigkeit ist das Vergüten dem Kaltwalzen wegen des Erreichens einer höheren Formänderungsfähigkeit vorzuziehen. Außerdem erhält man auf diese Weise, da das Anlassen bereits zur normalen Fertigung derartiger Bänder gehört, eine im allgemeinen höhere Elastizitätsgrenze als bei vergleichbaren, kaltgewalzten Bändern. Der Einfluß des Anlassens auf die Elastizitätsgrenze kaltgewalzten Stahles ist mit der Änderung des inneren Spannungszustandes des Werkstoffs zu erklären. Es ist bekannt, daß auch die Elastizitätsgrenze schroff gehärteten, also ebenfalls mit starken inneren Spannungen behafteten Stahles durch Anlassen erhöht wird.

Die Prüfung der Festigkeitseigenschaften der Versuchsbänder erstreckte sich auch auf die Biegewechselfestigkeit. Diese wurde auf der DVL-Planbiegemaschine für eine Grenzlastwechselzahl von $10 \cdot 10^6$ an Längsproben nur aus den 1 mm dicken Bändern ermittelt. Die Proben hatten in der Meßstrecke eine Breite von 20 mm und gebrochene Kanten. Die Biegewechselfestigkeit wurde aus Wöhlerkurven entnommen, die mit mindestens 10 Proben für jedes Band ermittelt wurden. Die starke Durchbiegung selbst der nur in Höhe der Dauerfestigkeit beanspruchten, dünnen Proben in der DVL-Planbiegemaschine bedingt einen Fehler der gemessenen Dauerfestigkeit, der —2 bis +6% erreichen kann[2]). Um im einzelnen nicht genau angebbare, in diesen Grenzen liegende Beträge können die in Zahlentafel 3 wiedergegebenen und in Bild 19 in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit aufgetragenen Biegewechselfestigkeiten abweichen.

Man entnimmt Bild 19, daß die höchsten Biegewechselfestigkeitswerte mit den Bändern aus Stahl A erhalten wurden, und daß bei diesen Bändern und denen aus Stahl B ein eindeutiger und gleichmäßiger Anstieg der Biegewechselfestigkeit mit der Zugfestigkeit bis zu hohen Zugfestigkeitswerten erfolgt. Aus den übrigen Versuchsergebnissen ist wenigstens die Tendenz der Biegewechselfestigkeit zu erkennen, mit der Zugfestigkeit anzusteigen. Die starke Streuung der Abhängigkeit der Biegewechselfestigkeit von der Zugfestigkeit der Stahlbänder ist wohl auf Unterschiede in der Oberflächengüte der Bänder zurückzuführen, die besonders bei hoher statischer Festigkeit von großem Einfluß ist. In Bild 19 sind noch Ergebnisse von Brick und Philips[2a]) für kaltgewalzte, 0,8 mm dicke Bleche aus 18% Cr-8% Ni-Stählen eingetragen. Diese Ergebnisse liegen im Streubereich der meisten eigenen Versuchsbänder, erreichen aber Stahl A und L nicht. Die Verhältniszahlen für $\sigma_{Wb} : \sigma_B$ in Zahlentafel 3 betragen zwischen 0,29 (E 12) und 0,51 (A 14).

Die Biegewechselfestigkeit punktgeschweißter Bänder wurde nur in einem Falle ermittelt. Sie betrug für das Band A 10 rd. ± 20 kg/mm².

III. Korrosionsverhalten der Stahlbänder.

Im Wechseltauchversuch mit Leitungswasser wurden nur die aus den unlegierten und niedriglegierten Stählen H, K, L und M hergestellten Bänder geprüft. Als Prüflinge dienten die gleichen Proben, die auch für die im vorigen Abschnitt behandelten Zerreißversuche verwendet wurden. Die Proben tauchten stündlich zweimal in Leitungswasser von Raumtemperatur ein und trockneten zwischendurch in Zimmerluft. Die Bestimmung des Korrosionseinflusses geschah durch Ermittlung der Zugfestigkeit (bezogen auf den Stabquerschnitt vor der Korrosionseinwirkung) und Bruchdehnung der Prüfstäbe nach verschiedenen Korrosionszeiten und durch Beurteilung der Art des Korrosionsangriffes. Der folgenden Besprechung der Versuchsergebnisse sei noch einmal (vgl. die Einleitung) vorangestellt, daß von den unlegierten und niedriglegierten Bändern im ungeschützten Zustand keine wesentliche Korrosionsbeständigkeit erwartet wurde. Es ist ferner noch hervorzuheben, daß die Bestimmung des Korrosionsangriffes durch Messung der Änderungen der Zugfestigkeit und Bruchdehnung beeinflußt wird von der Dicke der Prüfstäbe. Dünne Proben lassen einen Korrosionsangriff in der Änderung der Zugfestigkeit und Dehnung ausgeprägter bzw. früher in Erscheinung treten als dicke Proben.

[2]) Nach Ermittlungen von W. Siedenburg, DVL.
[2a]) R. M. Brick und A. Phillips, Trans. Amer. Soc. Met. 29 (1941) S. 435 bis 469; vgl. Stahl und Eisen 62 (1942), S. 1035/37.

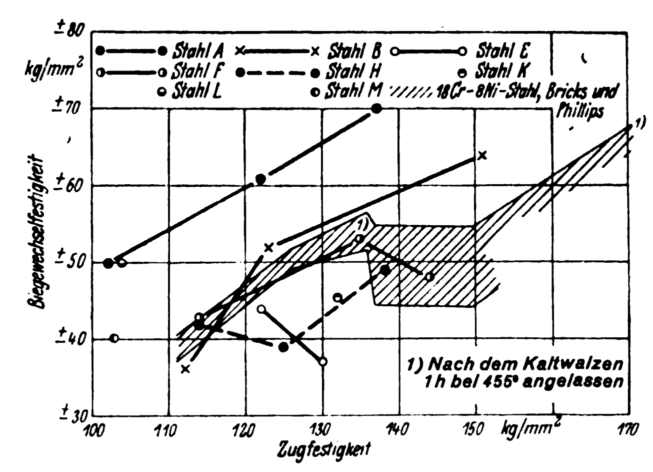


Bild 19. Abhängigkeit der Biegewechselfestigkeit der Stahlbänder und kaltgewalzter Bleche (Bricks und Phillips) von der Zugfestigkeit.

Die Bilder 20 bis 23 geben den Einfluß des Wechseltauchens in Leitungswasser auf die Bruchdehnung und Zugfestigkeit der Bänder aus den Stählen H, K, L und M für eine Versuchsdauer bis zu etwa 100 Tagen wieder. (Die Versuchspunkte sind hier und im folgenden Mittelwerte aus 2 bis 6 Einzelversuchen). Bei allen Bändern hat sich der Korrosionsangriff in einer gleichmäßigen Werkstoffabtragung ausgewirkt. Aus Bild 20, in dem die Versuchsergebnisse für die patentiert-kaltgewalzten Bänder aus dem unlegierten Stahl K wiedergegeben sind, ist ein Einfluß des entsprechend den Zugfestigkeiten verschiedenen Kalt-

Zahlentafel 3. Biegewechselfestigkeit der 1 mm dicken Stahlbänder.

Band	σ_B kg/mm²	σ_{wb} kg/mm²	$\frac{\sigma_{wb}}{\sigma_B}$
A 10	102	50	0,49
A 12	122	61	0,50
A 14	137	70	0,51
B 10	112	36	0,32
B 12	123	52	0,42
B 14	151	62	0,41
E 10	122	44	0,36
E 12	130	37	0,29
F 10	114	43	0,38
F 12	144	48	0,33
F 14	135	53	0,39
H 10	114	42	0,37
H 12	144	39	0,31
H 14	138	49	0,36
K 12	132	45	0,34
L 10[1])	104	50	0,48
M 10	103	40	0,39

[1]) Ursprünglich schwarze Oberfläche feingeschliffen.

Bild 20 (links). Einfluß des Wechseltauchens in Leitungswasser auf die Bruchdehnung und Zugfestigkeit der Bänder H 10, H 12, H 14, H 30, H 32 und H 34. Art des Korrosionsangriffs: Gleichmäßige Abtragung.

Bild 21 (rechts). Einfluß des Wechseltauchens in Leitungswasser auf die Bruchdehnung und Zugfestigkeit der Bänder K 12, K 32 und K 34. Art des Korrosionsangriffs: Gleichmäßige Abtragung.

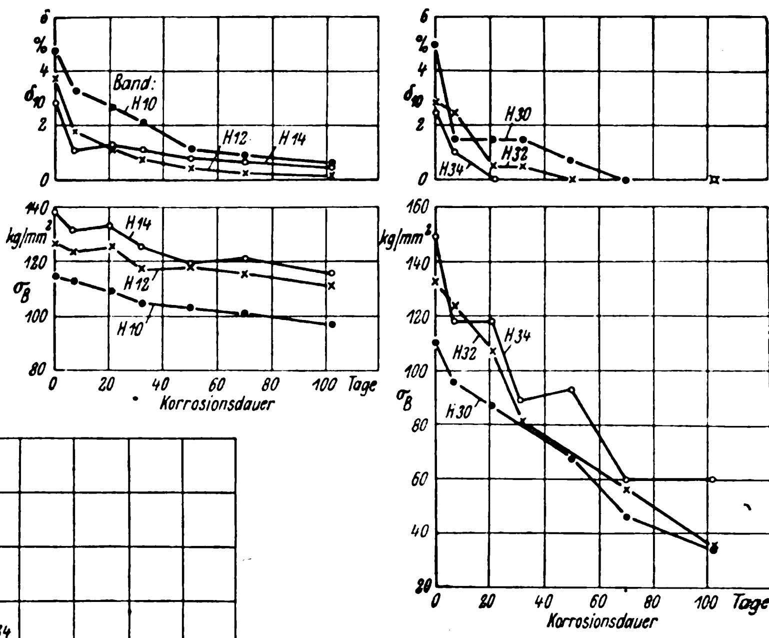


Bild 22. Einfluß des Wechseltauchens in Leitungswasser auf die Bruchdehnung und die Zugfestigkeit der Bänder L 10 und L 32. Art des Korrosionsangriffs: Gleichmäßige Abtragung.

walzgrades der Bänder auf ihr Korrosionsverhalten nicht zu entnehmen. Weiterhin unterscheiden sich die aus dem gleichen Stahl wie die Bänder H hergestellten, aber nicht durch Kaltwalzen sondern durch Ölschlußhärten (mit nachfolgendem Anlassen) verfestigten Bänder K in ihrem Verhalten im Wechseltauchversuch mit Leitungswasser gemäß Bild 21 nicht wesentlich von den Bändern H. Es zeigt sich also, daß das Korrosionsverhalten des unlegierten Stahles mit 0,58% C unter den eingehaltenen Versuchsbedingungen praktisch unabhängig von dem Grad der Kaltverformung und der Gefügeausbildung (Sorbit bei den Bändern H, Vergütungsgefüge bei den Bändern K) ist. — Die Bänder aus den niedriglegierten Stählen L und M haben nach Bild 22 und 23 eine deutlich höhere Beständigkeit beim Wechseltauchen in Leitungswasser als die Bänder H und K aus dem unlegierten Stahl. Es liegt nahe, diese etwas erhöhte Rostbeständigkeit der niedriglegierten Bänder ihrem Legierungsgehalt, besonders dem Chromgehalt, im Zusammenwirken mit dem natürlichen Kupfergehalt (0,1 bis 0,15%), zuzuschreiben.

Ein anschauliches Maß für die Stärke des Korrosionsangriffs der unlegierten und auch niedriglegierten Bänder beim Wechseltauchversuch in Leitungswasser liefert das Verhalten der 0,3 mm dicken Bänder, die nach einer Korrosionsdauer von 100 Tagen praktisch zerstört waren. Die Bruchdehnung ist dabei fast auf Null, die Zugfestigkeit auf 30 bis 80 kg/mm² gesunken.

Wenn schon der Wechseltauchversuch in Leitungswasser für die nichtaustenitischen Versuchswerkstoffe eine verhältnismäßig scharfe Prüfung darstellt, so gilt dies in viel höherem Maße von dem **Wechseltauchversuch in 3proz. Kochsalzlösung** und dem **DVL-Rührversuch** mit der gleichen, aber noch einen Zusatz von 0,1% Wasserstoffsuperoxyd enthaltenden Lösung. Beide Versuchsreihen dienten bei den nichtaustenitischen Bändern hauptsächlich der Klärung der Frage, ob die verschiedene Bandherstellung die Art des Korrosionsangriffs unter scharfen Bedingungen beeinflußt. Außerdem wurde der zeitliche Verlauf der Korrosion wieder mit Zerreißversuchen festgelegt. Die Korrosionsversuche wurden bei Raumtemperatur ausgeführt.

Die Bilder 24 bis 27 lassen die erwartungsgemäß sehr kleine Lebensdauer der Bänder aus den Stählen H, K, L und M im Wechseltauchversuch mit Kochsalzlösung und besonders im DVL-Rührgerät erkennen. Während das Wechseltauchen unabhängig von der Stahlart und Herstellungsweise der Versuchsbänder zu einer gleichmäßigen Werkstoffabtragung führte, trat beim DVL-Rührversuch



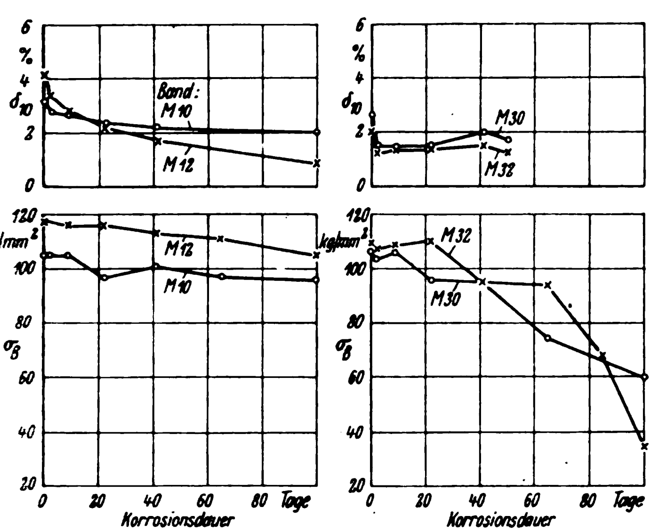


Bild 23. Einfluß des Wechseltauchens in Leitungswasser auf die Bruchdehnung und die Zugfestigkeit der Bänder M 10, M 12, M 30 und M 32. Art des Korrosionsangriffs: Gleichmäßige Abtragung.

außerdem vereinzelt Lochfraß auf, der sich merkwürdigerweise bevorzugt bei den dünnen Bändern zeigte. Die Korrosion der Bänder aus den unlegierten und niedriglegierten Stählen ist bei diesen Versuchen erwartungsgemäß so stark, daß die geringfügigen Unterschiede im Korrosionsverhalten der einzelnen Bänder ohne praktische Bedeutung sind. Im Gegensatz zum Wechseltauchversuch in Leitungswasser ist keine Überlegenheit der niedriglegierten Bänder über die unlegierten vorhanden. Die durch die verschiedene Herstellungsweise bedingten Unterschiede der Bänder treten wie beim Wechseltauchversuch in Leitungswasser so auch beim Wechseltauchen in Kochsalzlösung oder im Rührgerät nicht in eindeutigen Unterschieden der Art oder des Ausmaßes des Korrosionsangriffs in Erscheinung.

Die Ergebnisse des Wechseltauchversuches in Kochsalzlösung sind für die austenitischen Versuchsstahlbänder in Zahlentafel 4 zusammengestellt. Die Bänder aus den nickelhaltigen Stählen A, B und F zeigten nach 70 bis 100 Tagen Versuchsdauer noch keine nennenswerte Korrosion. Demgemäß sind auch die Zugfestigkeits- und Dehnungswerte durch das Wechseltauchen nicht beeinflußt worden. Dies gilt auch für die in einigen Fällen (s. Zahlentafel 4, Fußnoten) auf eine Dauer von 12 Monaten ausgedehnten Versuche. Ein Einfluß des Kaltverfestigungsgrades auf das Verhalten der Bänder A, B und F ist nicht erkennbar. Eine ziemlich ausgeprägte Korrosion mit gleichmäßigem Angriff der gesamten Oberfläche zeigte im Wechseltauchversuch mit Kochsalzlösung der nickelfreie Mangan-Chrom-Stickstoff-Stahl E im Gegensatz zu den nickelhaltigen Stählen A, B und F. Es muß offen bleiben, ob der fehlende Nickelgehalt oder die Anwesenheit des Stickstoffs oder ein anderer Legierungsfaktor für das Verhalten des Stahles E maßgebend ist. Alle Bänder aus diesem Stahl, besonders die dünnen, zeigten nach 100 Tagen Versuchsdauer einen zum Teil bedeutenden Abfall der Zugfestigkeit und Bruchdehnung, ohne daß ein klarer Zusammenhang zwischen der Festigkeit (Kaltwalzgrad) und dem Korrosionsverhalten erkennbar ist.

Zahlentafel 4. Einfluß des Wechseltauchens in Kochsalzlösung auf die Zugfestigkeit und Bruchdehnung der austenitischen Versuchs-Stahlbänder.

Band	Lieferzustand		Korrosionsdauer	Am Schluß des Korrosionsversuches	
	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	Tage	σ_B kg/mm²	δ_{10} %
A 10	100—102	27—29	70	100—101	24—26
A 12	126	15	70	132—145	5—11
A 14	137—138	3—5	70	144—147	3—5
A 30[1])	97	32	70	100—103	29—32
A 32[2])	118	18	70	122—124	17—18
A 34	142	6	70	144—148	9,0—9,5
B 10	112	12	70	117—118	9,0—9,5
B 12	129—130	15	100	128—130	17
B 14	152	9	70	151—152	12—13
B 30	112	21	70	108—112	28—30
B 32	137	12—18	100	136—138	18—19
B 34	138	16	70	136—139	16—23
E 10	126—127	11—12	100	118—127	2—13
E 12	135—137	12—16	100	120—121	1,6—1,8
E 14	151—153	6,5	100	128—145	0—2,2
E 30	135—136	14—16	100	40—80	0,5—1,0
E 32	144—146	6—8	100	138	3.5
E 34	174—176	3—5	100	70—174	1,5—5,0
F 10	118	30	70	112—116	26—30
F 12[3])	144	21	70	137—146	20—22
F 14	135	20	70	129—134	19—20
F 30	105—117	6—14	100	82—89	1,5—2,0
F 32	125—137	12—28	100	125—130	14—29
F 34	117—122	22—23	100	115—123	22—27

[1]) Nach 12 Monaten: σ_B = 92—96 kg/mm², δ_{10} = 21—35%

[2]) „ 12 „ σ_B = 112—116 „ , δ_{10} = 10—18%

[3]) „ 12 „ σ_B = 144 „ , δ_{10} = 20 %

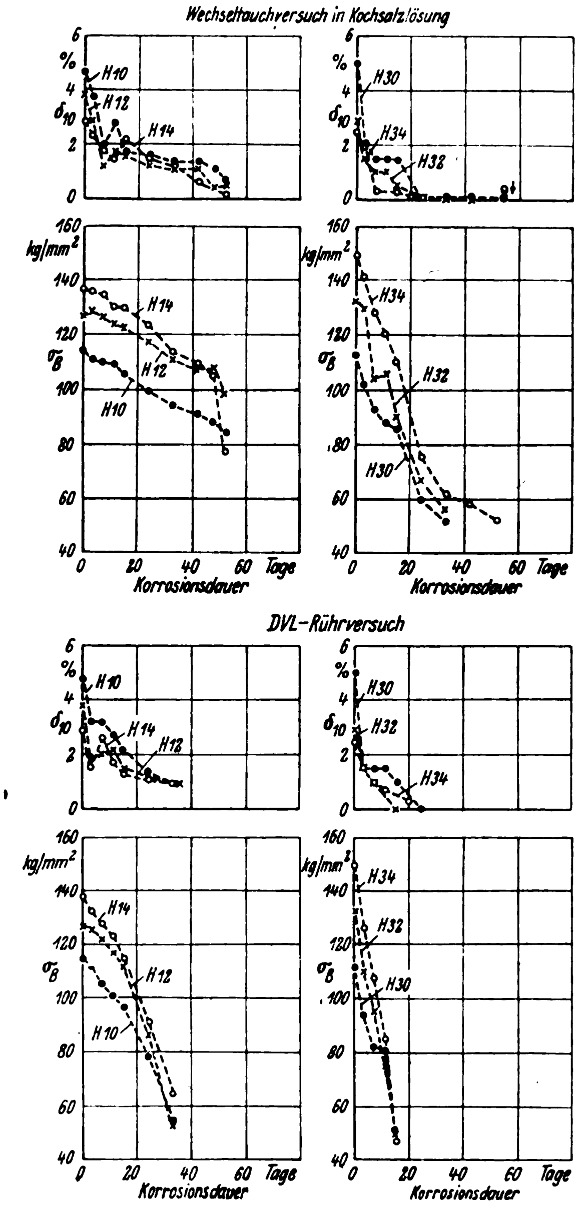


Bild 24. Einfluß des Wechseltauchens in Kochsalzlösung und des DVL-Rührversuchs auf die Bruchdehnung und Zugfestigkeit der Bänder H 10, H 12, H 14, H 30, H 32 und H 34. Art des Korrosionsangriffs: Beim Wechseltauchen gleichmäßige Abtragung, beim Rührversuch besonders bei den dünnen Bändern (H 30-H 34) Lochfraß.

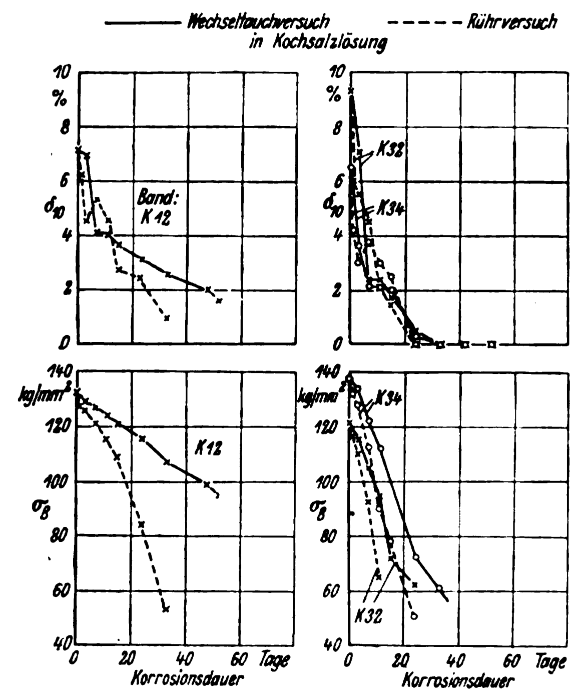


Bild 25. Einfluß des Wechseltauchens in Kochsalzlösung und des DVL-Rührversuches auf die Bruchdehnung und Zugfestigkeit der Bänder K 12, K 32 und K 34. Art des Korrosionsangriffs: Gleichmäßige Abtragung, bei Band K 34 im Rührversuch außerdem Lochfraß.

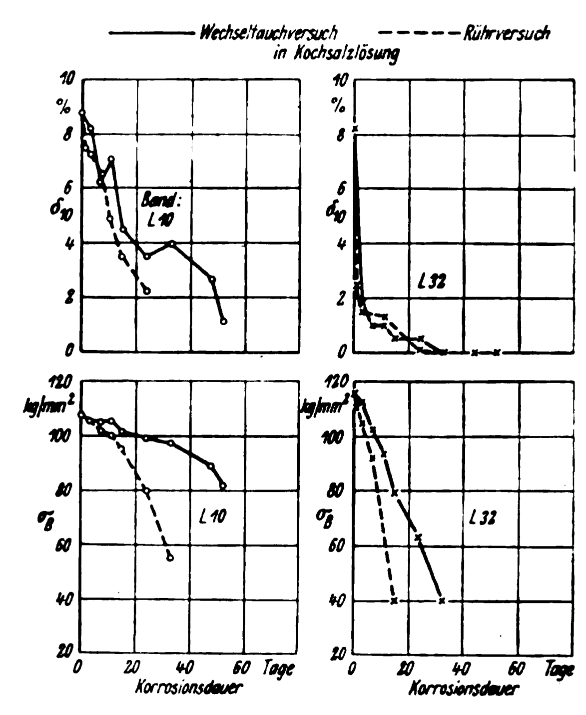


Bild 26. Einfluß des Wechseltauchens in Kochsalzlösung und des DVL-Rührversuches auf die Bruchdehnung und Zugfestigkeit der Bänder L 10 und L 32. Art des Korrosionsangriffs: Gleichmäßige Abtragung, bei Band L 32 im Rührversuch außerdem Lochfraß.

Im DVL-Rührversuch (3proz. Kochsalzlösung mit 0,1% H_2O_2), dessen Ergebnisse Zahlentafel 5 enthält, erwiesen sich unter den austenitischen Bändern die aus dem Chrom-Nickel-Stahl A als die widerstandsfähigsten. Bei den Bändern A 10, A 30, A 32 und A 34 war nach 95 Tagen Korrosionsdauer nur eine Verfärbung der Oberfläche und keine Beeinträchtigung der Zugfestigkeit und Dehnung festzustellen. Die Bänder A 12 und A 14 zeigten Lochfraß, der sich vor allem in der Abnahme der Bruchdehnung äußerte. — Sämtliche Bänder aus den nickelarmen bzw. nickelfreien Stählen B, E und F waren nach 80- bis 95-tägiger Korrosionsdauer durch Lochfraß geschädigt, was in der Abnahme der Bruchdehnung und Zugfestigkeit im allgemeinen deutlich zum Ausdruck kommt. Die allgemeine Korrosion war bei den Bändern A, B und F sehr gering, ausgeprägt dagegen bei den Bändern aus dem nickelfreien Mangan-Chrom-Stickstoff-Stahl E. Dessen Verhalten im Wechseltauchversuch mit Kochsalzlösung wird demnach durch den Rührversuch bestätigt. — Ein Zusammenhang zwischen dem Korrosionsangriff und dem Kaltwalzgrad der austenitischen Bänder ergibt sich auch beim DVL-Rührversuch nicht.

Sowohl beim Wechseltauchversuch mit Kochsalzlösung wie auch besonders beim DVL-Rührversuch war ein ausgeprägterer Korrosionsangriff an den Befestigungsstellen der Prüfstäbe zu beobachten. Hieraus ergibt sich der Hinweis, daß für Bauteile aus den Bandstählen solche Konstruktionen ungünstig sind, bei denen sich korrodierende Mittel örtlich ansammeln können. Dichtheit von punktgeschweißten oder genieteten Verbindungen wäre also eine im Hinblick auf die Korrosionsverhütung zu stellende, an sich auch bereits bekannte Forderung.

Für die Prüfung des Spannungskorrosionsverhaltens der Stahlbänder wurden die in Bild 28 dargestellten Schlaufenproben benutzt. Die durch plastische Verformung vorgebogenen Schlaufen werden durch die Einspannung im Wechseltauchgerät zusätzlich elastisch verspannt. Als Korrosionsmittel diente bei den Wechseltauchversuchen mit Schlaufenproben 3proz. Kochsalzlösung, in einigen Fällen Leitungswasser. Die Schlaufen tauchten stündlich zweimal in das Korrosionsmittel ein und trockneten zwischendurch an Zimmerluft. Die Versuche fanden bei Raumtemperatur statt.

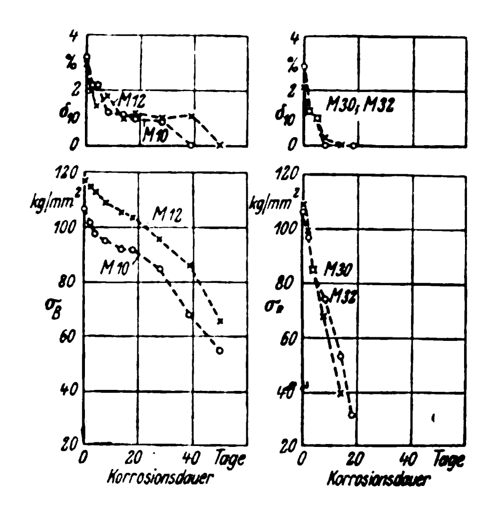


Bild 27. Einfluß des DVL-Rührversuches auf die Bruchdehnung und Zugfestigkeit der Bänder M 10, M 12, M 30 und M 32 (Unterlagen über die Art des Korrosionsangriffs fehlen in diesem Falle).

Zahlentafel 6 enthält die Ergebnisse der Spannungskorrosionsversuche. Hiernach erwiesen sich von den austenitischen Stahlbändern nur die aus dem Chrom-Nickel-Stahl A unter den Prüfbedingungen als sicher gegen Spannungskorrosion (Kochsalzlösung). Je ein Band aus dem Mangan-Chrom-Nickel-Stahl B (Kochsalzlösung) und dem Chrom-Mangan-Nickel-Molybdän-Stahl F (Leitungswasser) war spannungskorrosionsempfindlich. Die in Kochsalzlösung geprüften Bänder aus Stahl F waren nicht anfällig. Das schlechteste Verhalten zeigte wieder der nickelfreie Mangan-Chrom-Stickstoff-Stahl E, von dem drei Bänder versagten (Kochsalzlösung). — Eine Abhängigkeit der Spannungskorrosionsempfindlichkeit der austenitischen Versuchsbänder von ihrem Kaltverfestigungsgrad ist den Versuchsergebnissen nicht zu entnehmen.

Die unlegierten Bänder H und K sowie die niedriglegierten Bänder M waren in Kochsalzlösung bei allen Festigkeiten frei von Spannungskorrosion. Von den Bändern aus dem niedriglegierten Stahl L versagten die mit 0,3 mm Dicke bei der Prüfung in Leitungswasser.

Zahlentafel 5. Einfluß des DVL-Rührversuches auf die Zugfestigkeit und Bruchdehnung der austenitischen Versuchsstahlbänder.

Band	Lieferzustand		Korrosionsdauer	Am Schluß des Korrosionsversuches		Art des Korrosionsangriffs
	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	Tage	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	
A 10	100—102	27—29	95	100—101	26	gelbe und blaue Verfärbung
A 12	126	15	95	119—134	0,7—9	vereinzelt Lochfraß
A 14	137—138	3—5	95	138—153	1,6—3,3	schwacher Lochfraß
A 30	97	32	95	96—100	28—32	äußerst schwacher Angriff
A 32	118	18	95	119—121	17—18	schwache Verfärbung
A 34	142	6	95	146—147	3—4	schwache Verfärbung
B 10	112	12	95	79—107	0,2—0,9	vereinzelt Lochfraß, starker Angriff von der Schnittkante her
B 12	129—130	15	80	102—130	3—17	» » »
B 14	152	9	95	140—153	1,0—13	» » »
B 30	112	21	95	35—71	0	ausgeprägter Lochfraß
B 32	137	12—18	80	79—138	0—18	vereinzelt Lochfraß
B 34	138	16	95	94—140	2,3—18	Lochfraß
E 10	126—127	11—12	80	122—127	11—13	sehr schwacher Lochfraß
E 12	135—137	12—16	80	97—115	0,9—1,6	Lochfraß
E 14	151—153	6,5	80	76—129	0—9,6	Lochfraß
E 30	135—136	14—16	80	37—37	0—2,0	Lochfraß
E 32	144—146	6—8	80	62—145	0—5,0	vereinzelt Lochfraß
E 34	174—176	3—5	80	24—151	0—3,0	Lochfraß
F 10	118	30	95	79—114	1,1—28	vereinzelt Lochfraß
F 12	144	21	95	114—142	2,7—16	» »
F 14	135	20	95	120—133	2,7—9	Lochfraß
F 30	105—117	6—14	80	27—39	0	starker Lochfraß
F 32	125—137	17—28	80	81—89	—	Lochfraß
F 34	117—122	22—23	80	41	0	sehr starker Lochfraß

Zahlentafel 6. Ergebnisse der Spannungskorrosionsversuche mit dem Wechseltauchgerät. (Die Proben F 30 bis F 34 und M 10 bis M 32 wurden in Leitungswasser, alle übrigen Proben in 3 proz. Kochsalzlösung geprüft.)

Band	Versuchsdauer in Tagen	Beurteilung
A 10	70	keine Risse, Schlaufenspannung unverändert
A 12	70	» » » »
A 14	70	» » » »
A 30	70	» » Spannung etwas nachgelassen
A 32	70	» » » » »
A 34	70	» » Spannung unverändert
B 10	70	keine Risse, Spannung unverändert
B 12	100	» » » »
B 14	3 bis 25	eine Schlaufe nach 8, zwei nach 11, drei nach 25 Tagen gebrochen
B 30	70	keine Risse, Spannung unverändert
B 32	100	» » » »
B 34	70	» » » »
E 10	100	keine Risse, Spannung unverändert
E 12	19 bis 22	alle (6) Schlaufen gebrochen
E 14	22 bis 35	alle (6) Schlaufen gebrochen
E 30	100	drei Schlaufen angerissen, drei mit verminderter Spannung
E 32	100	keine Risse, Spannung unverändert
E 34	100	» » » »
F 10	70	keine Risse, Spannung unverändert
F 12	70	» » » »
F 14	70	» » » »
F 30	30 bis 100	fünf Schlaufen nach 30—36 Tagen gebrochen, eine nach 100 Tagen unverändert
F 32	100	keine Risse, Spannung unverändert
F 34	100	» » » »
H 10 bis H 34	70	keine Risse, keine oder nur kleine Abnahme der Spannung
K 12	70	keine Risse, Spannung unverändert
K 32	70	» » » »
K 34	70	keine Risse, nach 52 Tagen kleine Abnahme der Spannung
L 10	70	keine Risse, Spannung unverändert
L 32	70	alle (6) Schlaufen angerissen
M 10	100	keine Risse, Spannung unverändert
M 12	100	» » » »
M 40	100	» » » »
M 32	100	keine Risse, Spannung leicht abgesunken

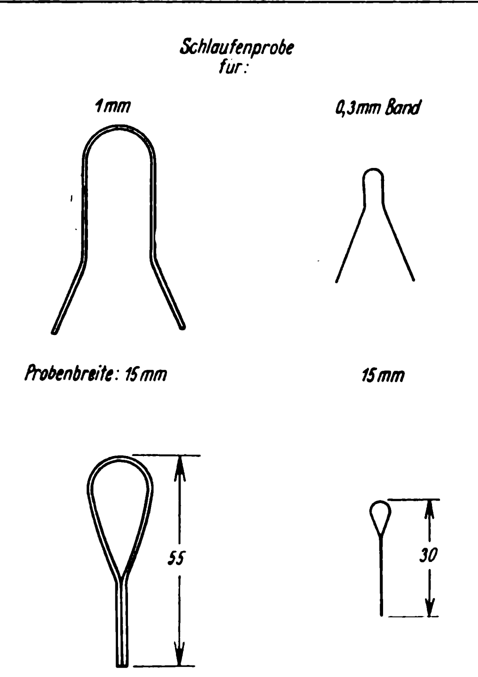


Bild 28. Schlaufenproben für die Spannungskorrosionsversuche nach der Formgebung (oben) und im eingespannten Zustand (unten).

IV. Verhalten der Stahlbänder bei Bewitterungsversuchen.

Zur Erfassung eines möglicherweise vorhandenen Einflusses der Herstellung auf das Witterungsverhalten der Stahlbänder wurden Bewitterungsversuche in Stadtluft (Berlin-Adlershof), Industrieluft I (I. G. Farben in Bitterfeld), Industrieluft II (Fried. Krupp A.-G. in Essen) und Seeluft (Norderney) ausgeführt[3]). Die Versuchsproben (je drei aus jedem Versuchsband) wurden so in Holzrahmen eingespannt, daß die der Witterung ausgesetzte Probenoberfläche $2 \cdot (10 \times 8{,}5)$ cm² betrug. Die Rahmen wurden auf den einzelnen Wetterprüfständen mit einer Neigung von 45° gegen die Horizontale aufgestellt. Die Oberseite der Proben war dabei der Westrichtung zugekehrt. Die Proben wurden Anfang Februar 1941 den Witterungseinflüssen ausgesetzt. Das Auftreten von Durchrostungserscheinungen bei den 0,3 mm dicken Bändern in Industrieluft war der Anlaß zur Beendigung der Bewitterung Anfang Juni 1942. Die Proben waren insgesamt 16 Monate (484 Tage) der Witterung ausgesetzt. — Soweit die Proben stärker verrostet waren, so daß ein Gewichtsverlust ermittelt werden konnte, erfolgte die Entrostung durch 5 bis 10 min langes Kochen in wäßriger schwach ammoniakalischer Ammoniumzitratlösung[4]).

Die Auswertung der Bewitterungsversuche mit den austenitischen Bändern enthält Zahlentafel 7. Die Angaben hierin beziehen sich auf die Unterseite (= dem Erdboden zugekehrte Seite) der Proben, die dem Witterungsangriff stärker ausgesetzt ist. Die Bänder aus dem Chrom-Nickel-Stahl A blieben in Stadtluft völlig blank, die aus dem Mangan-Chrom-Nickel-Stahl B zeigten nur hauchdünne Rostflecken. Der Mangan-Chrom-Stickstoff-Stahl E und der Chrom-Mangan-Nickel-Molybdän-Stahl F zeigten ebenfalls keinen oder nur einen unwesentlichen Rostangriff in Stadtluft.

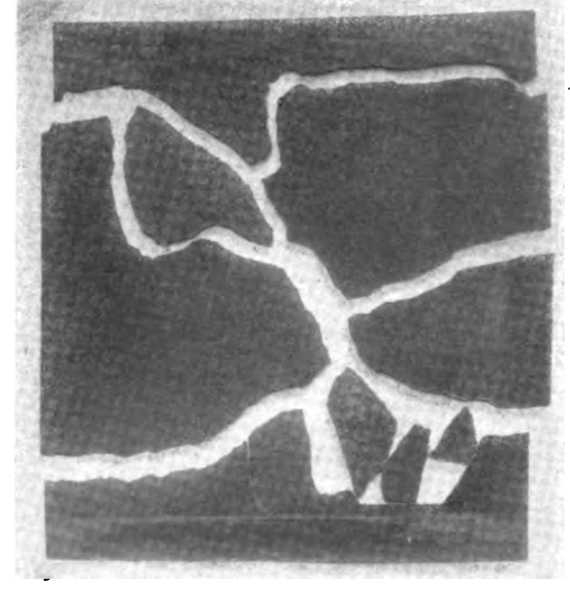
In der Industrieluft I und II wurden alle austenitischen Bänder angegriffen. Bei den Bändern A und B ist der allgemeine Angriff für technische Zwecke bedeutungslos. Der Stahl B zeigt allerdings schon deutlich das Einsetzen von Lochfraß. Eine merkliche Rostgeschwindigkeit hat bei Stahl E und bei den dünnen Bändern aus Stahl F zu einer fast zusammenhängenden, örtlich noch durchscheinenden Rostschicht geführt, während die 1 mm dicken Bänder aus Stahl F fast keinen Einfluß der Bewitterung erkennen ließen.

In Seeluft zeigten die Bänder aus Stahl A und B sowie die 1 mm dicken Bänder aus Stahl F ein ähnliches Verhalten wie in Stadtluft. Es war nur ein hauchdünner Rostanflug, bei Stahl A auch dieser nur örtlich vorhanden. Die Bänder aus Stahl E und die dünnen Bänder aus Stahl F rosten in Seeluft bedeutend stärker als in Stadtluft, aber nicht so stark wie in Industrieluft.

Der Stahl A ist als völlig rostbeständig in Stadt-, See- und auch Industrieluft zu bezeichnen. Für Stahl B gilt diese Feststellung nur mit einer gewissen Einschränkung bezüglich Industrieluft. Bei Stahl E ist diese Einschränkung auch auf die Seeluft auszudehnen. Die dicken Bänder aus Stahl F sind in Stadt-, See- und Industrieluft völlig beständig, die dünnen Bänder dagegen nur in Stadtluft fast beständig, in Industrie- und Seeluft werden sie merklich angegriffen. Eine Abhängigkeit des bei sämtlichen austenitischen Versuchsbändern auch in Industrieluft im ungünstig-

[3]) Für die Aufstellung und Beobachtung der Proben auf den Bewitterungsprüfständen danke ich auch an dieser Stelle der Versuchsanstalt der I. G. Farben, Bitterfeld, der Fried. Krupp A.G., Essen, und der Seefliegerhorstkommandantur Norderney.

[4]) Zu 50 proz., wäßriger Zitronensäurelösung wird Ammoniakwasser bis zur schwach alkalischen Reaktion zugegeben. Diese wird beim Kochen durch weiteren Zusatz von Ammoniakwasser aufrecht erhalten.



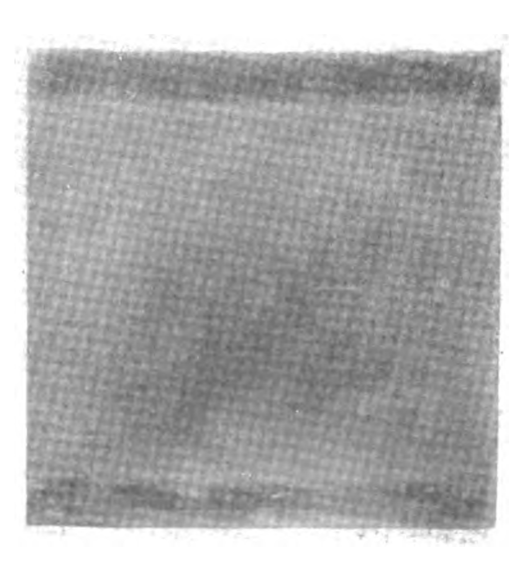


Bild 29. Band F 30 (von Hand zerbrochen) und F 10 nach der Bewitterung in Industrieluft I. V = 0,65.

sten Falle noch schwachen Rostangriffs vom Kaltwalzgrad war nicht festzustellen.

Bemerkenswert ist die Beobachtung, daß die dünnen Bänder aus Stahl F eine bedeutend kleinere Witterungsbeständigkeit hatten als die 1 mm dicken Bänder aus dem gleichen Stahl. Hinzu kommt, daß die dünnen im Gegensatz zu den dickeren Bändern nach den Bewitterungsversuchen eine große Sprödigkeit zeigten, die bei dem Band F 32 weniger ausgeprägt war als bei den Bändern F 30 und F 34. Diese beiden Bänder ließen sich nach dem 16monatigen Verweilen besonders in Industrieluft I — aber auch in Industrieluft II — leicht zwischen den Fingern zerbröckeln. Bild 29 zeigt neben einer so zerteilten Bewitterungsprobe aus dem Band F 30 eine zäh gebliebene Probe aus dem dickeren Band F 10. Das Bild beleuchtet auch die unterschiedliche Witterungsbeständigkeit des dünnen und dikkeren Bandes. Es sei noch daran erinnert, daß sich das Band F 30 beim Wechseltauchen in Leitungswasser (!) als sehr spannungskorrosionsempfindlich erwies, während die Bänder F 32 und F 34 in Leitungswasser, die Bänder F 10, F 12 und F 14 in Kochsalzlösung frei von Spannungskorrosion waren. In den stark angreifenden Mitteln, nämlich im Wechseltauchversuch mit Kochsalzlösung und im DVL-Rührversuch zeigten alle Bänder aus Stahl F das auf Grund der Stahlzusammensetzung erwartete Verhalten. Das Korrosionsverhalten der Bänder aus Stahl F in schwach angreifenden Mitteln ist, ebenso wie der Gefügezustand (vgl. Bild 4 bis 9), uneinheitlich.

Die Sprödigkeit der Bänder F 30 und F 34, in kleinerem Maße auch F 32, nach der Bewitterung in Industrieluft ist nach den Gefügebildern 30 und 31 auf interkristalline Korrosion zurückzuführen. Auf den Korngrenzen haben sich Korrosionsprodukte in einer solchen Menge gebildet, daß die Korngrenzen bereits im ungeätzten Schliffbild gut erkennbar sind, Bild 30. Demgemäß sind auch die Bruchflächen der interkristallin zerfallenen Bänder matt und

Zahlentafel 7. Ergebnisse der Bewitterungsversuche mit den austenitischen Stahlbändern. (Angaben beziehen sich auf die stärker gefährdete Unterseite der Versuchsproben.)

Bezeichnung	Aussehen der Versuchsproben nach der Bewitterung in			
	Stadtluft (Adlershof)	Industrieluft I (Bitterfeld)	Industrieluft II (Essen)	Seeluft (Norderney)
A 10	kein Angriff, Proben blank	schwacher Angriff, vorwiegend örtlich (Rostnarben)	hauchartiger Rostanflug, schwache Rostnarben	Probenoberfl. matt, vereinzelt Hauch von hellen Rostflecken
A 12	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
A 14	desgl.	schwacher Angriff, vorwiegend örtlich (stärkere Rostnarben)	desgl.	desgl.
A 30	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
A 32	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
A 34	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
B 10	kein Angriff, vereinzelt leichter Hauch von Rostflecken	schwacher Angriff, vorwiegend örtlich, (stärkere Rostnarben)	gleichmäßiger Anflug von dunklem Rost, Metall noch durchscheinend	leichter Hauch von hellem Rost, einzelne schwache Rostnarben
B 12	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
B 14	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
B 30	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
B 32	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
B 34	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
E 10	kein Angriff, leichter Hauch von Rostflecken	dunkelbraune, fast zusammenhängende Rostschicht	gleichmäßiger Anflug von dunklem Rost, Metall noch durchscheinend	gleichm. Anflug von rotbraunem Rost, Metall noch durchscheinend, stärkere Rostnarben
E 12	schwacher Angriff, örtlich Rostnarben	desgl.	desgl.	desgl.
E 14	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
E 30	kein merklicher Angriff, einige Rostflecken	desgl.	desgl.	desgl.
E 32	kein Angriff, dichter Hauch von Rostflecken	desgl.	desgl.	desgl.
E 34	desgl.	desgl.	desgl.	starke Rostnarben
F 10	kein Angriff, Proben noch nahezu blank	kein Angriff, leichter Hauch von Rostflecken	hauchartiger Anflug von Rost	hauchartiger Anflug von Rost, meist in Flecken
F 12	wie F 10, wenige Rostflecken	desgl.	desgl. einige Rostnarben	desgl.
F 14	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
F 30	Proben rotgelb angelaufen	gleichmäßig rotbraune Rostschicht, Metall noch durchscheinend[1])	gleichmäßig rotbraune Rostschicht, Metall noch durchscheinend[1])	gleichmäßig rotbraune Rostschicht, Metall noch durchscheinend
F 32	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
F 34	desgl.	desgl.[1])	desgl.[1])	desgl.

[1]) Die Proben lassen sich zwischen den Fingern leicht zerbröckeln.



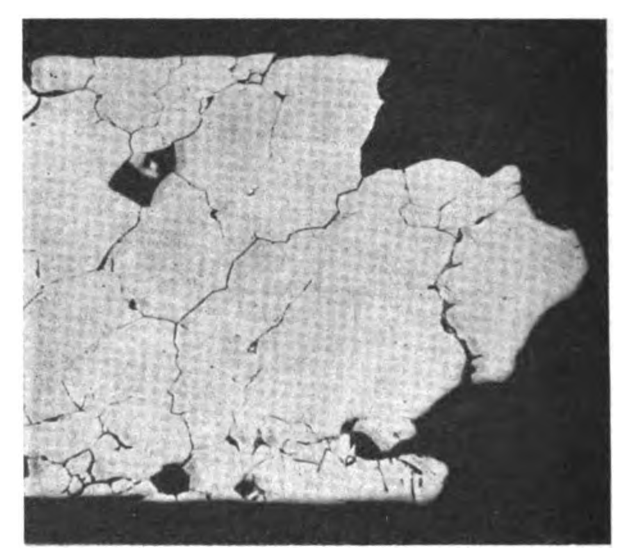
haben ein nichtmetallisches Aussehen. Im Lieferzustand haben die am stärksten zur interkristallinen Korrosion an der Atmosphäre neigenden Bänder F 30 und F 34 ein grobkörniges Gefüge mit ausgeprägten Ausscheidungen auf den Korngrenzen (Bild 7 und 9). Das weniger empfindliche Band hat stärker zusammengeballte, z. T. auch innerhalb des feinen Kornes liegende Ausscheidungen. Die nicht interkristallin zerfallenen, verhältnismäßig feinkörnigen Bänder aus Stahl F haben entweder keine Ausscheidungen im Gefüge (F 12, Bild 5), oder die Ausscheidungen sind zeilenförmig und liegen innerhalb der Kristallite (F 10 und 14, Bild 4 und 6). Es besteht also bei den Bändern ein Zusammenhang zwischen der unterschiedlichen, mit Abweichungen in der Herstellung (Glühen) zusammenhängenden Gefügeausbildung und der Neigung zur interkristallinen Korrosion, der mit der Erfahrung übereinstimmt. Über die Natur der Ausscheidungen (Karbide bzw. α-Mischkristall bzw. γ-Mischkristall + FeCr) wurde im Abschnitt »Versuchsbänder« schon eingegangen. In den an der Atmosphäre spannungskorrosionsempfindlichen Bändern F 30, 32 und 34 dürften die Korngrenzenausscheidungen entweder aus der σ-Phase (FeCr) oder aus Karbiden bestehen. Das Gefügebild 8 spricht für die Annahme der σ-Phase als ausgeschiedenen Bestandteil.

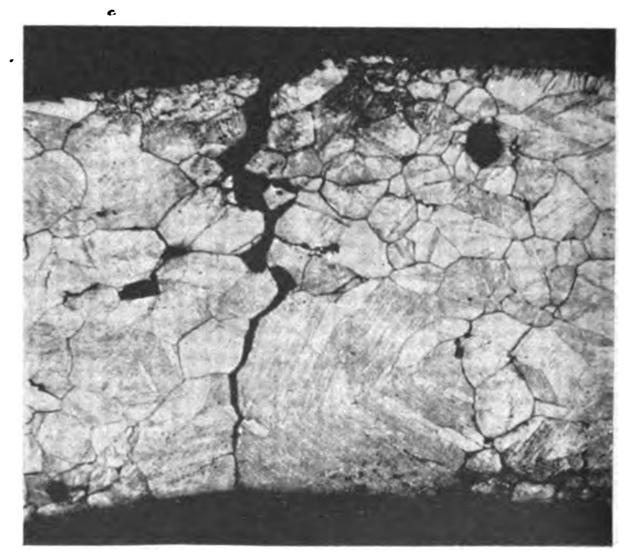
Die Bewitterungsversuche mit den unlegierten und niedriglegierten Bändern aus den Stählen H, K, L und M wurden noch auf zwei weitere vergütete Bänder, P 10 und P 14, aus Mangan-Chrom-Vanadin-Stahl ausgedehnt. Der Besprechung der in Zahlentafel 8 wiedergegebenen Ergebnisse der Bewitterungsversuche mit den nichtaustenitischen Versuchsstahlbändern sei ein Hinweis auf den Einfluß kleiner Kupfergehalte auf die Witterungsbeständigkeit des Stahles[5]) vorangestellt: Nach K. Daeves und K. Trapp[6]) tritt nach Großzahluntersuchungen bei unlegiertem Baustahl mit 0,2% Cu in Industrieluft eine Rostgeschwindigkeit von rd. 600 g/m²/Jahr, in Landluft von 150 g/m²/Jahr ein. In Stadtluft ergeben sich Zahlen zwischen diesen Werten. Der Kupfergehalt von 0,2% setzt den Rostangriff gegenüber einem Kupfergehalt von 0,02% auf die Hälfte herunter.

Die untersuchten Stahlbänder haben natürliche Kupfergehalte zwischen 0,10 und vorwiegend 0,15%, deren Wirkung auf die Witterungsbeständigkeit der eines Kupfergehaltes von 0,2% schon recht nahe kommen kann[5]). Dieser Erwartung entsprechen die in g/m²/Jahr angegebenen Gewichtsverluste der Stahlbänder in Zahlentafel 8. Die nach der Bewitterung in Stadtluft ermittelten Gewichtsverluste der Versuchsstahlbänder liegen zwischen 279 und 397 g/m²/Jahr. Etwas größer sind mit 281 bis 464 g/m²/Jahr die für Seeluft erhaltenen Zahlen. Die nächst größeren Rostgeschwindigkeiten traten mit 375 bis 700 g/m²/Jahr in Industrieluft II (Essen), die größten schließlich mit 413 bis 1040 g/m²/Jahr in Industrieluft I (Bitterfeld) ein. Die Rostung nimmt also in der Reihenfolge Stadtluft, Seeluft, Industrieluft zu, wobei bemerkenswert ist, daß die Aggressivität von Industrieluft äußerst verschieden sein kann.

Die für die einzelnen Atmosphären angegebenen Gewichtsverlustbereiche sind deshalb so groß, weil die Witterungsbeständigkeit von der Stahlart der Versuchsbänder abhängt. Der Einfluß der Stahlart hat sich als klein in den schwach angreifenden Atmosphären erwiesen. So haben die unlegierten Stahlbänder H und K in Stadtluft Gewichtsverluste von 290 bis 397 g/m²/Jahr, die niedriglegierten Bänder L, M und P solche von 279 bis 333 g/m²/Jahr erfahren. Die entsprechenden Zahlen für Seeluft sind 351 bis 464 bzw. 281 bis 355 g/m²/Jahr. Das bessere Verhalten der legierten Bänder ist in der stärker angreifenden Seeluft also ausgeprägter als in Stadtluft und tritt noch viel klarer in Industrieluft hervor. In Industrieluft II betrug der Rostungsverlauf der unlegierten Bänder 570 bis 700 g/m²/Jahr, der der niedriglegierten nur 375 bis 495 g/m²/Jahr. Die entsprechenden Zahlen für Industrieluft I sind über 900 bis 1040 und 413 bis 515 g/m²/Jahr. In Industrieluft I ist also die Rostgeschwindigkeit der unlegierten Bänder mehr als doppelt so groß wie die der niedriglegierten.

[5]) Vgl. H. Cornelius, Kupfer im technischen Eisen, Berlin 1940.
[6]) Stahl und Eisen, Bd. 58 (1938), S. 245/48; vgl. auch K. F. Mewes und K. Daeves, Stahl und Eisen, Bd. 61 (1941), S. 826/834.


Bild 30. Bruchstelle in Band F 30 nach der Bewitterung in Industrieluft I. V = 100.


Bild 31. Wie Bild 30, aber geätzt mit V 2 A-Beize. V = 100.

Zahlentafel 8. Ergebnisse der Bewitterungsversuche mit den unlegierten und niedriglegierten Stahlbändern.

Bezeichnung der Stahlbänder	Gewichtsverluste in g/m²/ Jahr in Stadtluft (Adlershof)	Industrieluft I (Bitterfeld)	Industrieluft II (Essen)	Seeluft (Norderney)
H 10	319	1040	570	351
H 12	342	990	630	353
H 14	381	1020	700	384
H 30	338	> 900[1])	> 600[2])	410
H 32	382	> 900[1])	> 650[2])	455
H 34	397	> 900[1])	> 650[2])	464
K 12	378	900	628	409
K 32	313	> 900[1])	650[2])	415
K 34	290	> 900[1])	600[2])	363
L 10	330	515	455	281
L 32	311	467	495	303
M 10	330	495	465	327
M 12	279	500	492	316
M 30	300	500	462	328
M 32	324	463	375	355
P 10	333	462	470	340
P 14	287	413	398	296

[1]) Proben fast durchgerostet.
[2]) Proben in größeren Bereichen durchgerostet.

Da die niedriglegierten Bänder sich auch im Wechseltauchversuch den unlegierten Bändern etwas überlegen zeigten, dürfte dieses Prüfverfahren geeignet sein, den zeitraubenden Bewitterungsversuch wenigstens für eine vorklärende Beurteilung der Witterungsbeständigkeit nicht und mäßig legierter Stähle zu ersetzen.

Im Anschluß an die Besprechung der Ergebnisse aus dem Wechseltauschversuch in Leitungswasser wurde die höhere Beständigkeit der niedriglegierten Bänder gegenüber den unlegierten auf das Zusammenwirken der Legierungselemente, besonders des Chroms, mit dem natürlichen Kupfergehalt des Stahles zurückgeführt. Die gleiche Deutung ist auch für die unterschiedliche Witterungsbeständigkeit der unlegierten und niedriglegierten Stahlbänder als zutreffend anzusehen[5]). Eine günstige Wirkung des Molybdäns auf das Witterungsverhalten kupferhaltiger Stähle ist von F. Eisenkolb[7]), ein gleichgerichteter, aber stärkerer Einfluß des Chroms von F. N. Speller[8]) und von B. D. Saklatwalla und A. W. Demmler[9]) nachgewiesen worden, während Mangangehalte über 0,5% nach G. N. Samorujew und J. N. Samorujewa[10]) schwach schädlich wirken sollen. Über den Einfluß erhöhter Siliziumgehalte und eines Vanadingehaltes scheinen keine Angaben vorzuliegen.

Über die Abhängigkeit des Naturrostverhaltens der Versuchsbänder von ihrer Herstellungsweise ist aus Zahlentafel 8 folgendes zu entnehmen: Die Gewichtsverluste der patentiert-kaltgewalzten Bänder mit 0,3 und 1,0 mm Dicke aus Stahl H nehmen mit steigender Zugfestigkeit, d. h. mit steigender Kaltverfestigung, in Stadtluft, Industrieluft II und Seeluft zu. In Industrieluft I, also unter dem stärksten Rostangriff, tritt der Kaltwalzgrad in dem Rostverhalten nicht in Erscheinung. Ohne Einfluß auf das Witterungsverhalten sind die verschiedenen Vergütungszustände der Bänder aus Stahl K, die die gleiche Zusammensetzung wie die Bänder H haben. Erstere, die nicht kaltverfestigt sind, haben durchweg kleinere Rostverluste als die kaltgewalzten Bänder H. Bei den ebenfalls kaltgewalzten Bändern aus dem niedriglegierten Stahl M ist kein klarer Zusammenhang zwischen dem allerdings nur wenig verschiedenen Kaltwalzgrad und der Größe der Gewichtsverluste erkennbar. Die Bänder aus dem vergüteten Stahl L, die trotz wenig unterschiedlicher Festigkeit stark verschiedene Kaltwalzgrade aufwiesen, entsprechen einander hinsichtlich ihrer Witterungsbeständigkeit weitgehend. Letzteres gilt auch für die verschieden vergüteten Bänder aus Stahl P. Über den Einfluß der Herstellungsweise der Bänder auf ihre Witterungsbeständigkeit ist also als sicher nur anzugeben, daß sie mit steigendem Kaltverfestigungsgrad bei unlegiertem Stahl mit rd. 0,6% C abnimmt, wenn ein vorwiegend sorbitisches Patentierungsgefüge vorliegt.

V. Zusammenfassung.

Untersuchungen über die statischen und dynamischen Festigkeitseigenschaften sowie das Korrosionsverhalten und die Witterungsbeständigkeit von kaltgewalzten oder vergüteten, 0,3 und 1,0 mm dicken, unlegierten, niedriglegierten und hochlegierten (austenitischen) Stahlbändern mit 96 bis 170 kg/mm² Zugfestigkeit haben zu folgenden Schlüssen geführt: Bei gleicher, durch Kaltwalzen erzielter Zugfestigkeit haben die austenitischen Bänder eine höhere Formänderungsfähigkeit (Bruchdehnung) als auf verschiedene Weise hergestellte, unlegierte oder niedriglegierte Stahlbänder. Bei letzteren ergibt eine Vergütung höhere Dehnungswerte als das von sorbitischem Patentierungsgefüge oder von Ferrit mit körnigem Zementit ausgehende Kaltwalzen. Die niedrige Elastizitätsgrenze kaltgewalzter Stahlbänder läßt sich durch Anlassen bei 200 bis 300° in einem mit dem Kaltwalzgrad steigenden Maße ohne Beeinträchtigung von Streckgrenze, Zugfestigkeit und Bruchdehnung erhöhen. — Die Biegewechselfestigkeit der Stahlbänder erreicht auch bei hoher Zugfestigkeit deren halben Wert, bei dem kaltgewalzten, austenitischen Chrom-Nickelstahl A zum Beispiel ± 69,5 kg/mm² bei einer Zugfestigkeit von 137 kg/mm². Die Biegewechselfestigkeit kann bei geringerer Oberflächengüte der Bänder bis auf 0,3 × Zugfestigkeit absinken. Punktschweißverbindungen in dem Band mit rd. 100 kg/mm² Zugfestigkeit aus Stahl A hatten eine Biegewechselfestigkeit von ± 20 kg/mm².

Beim Wechseltauchversuch in Leitungswasser hatten die unlegierten Stahlbänder eine deutlich kleinere Korrosionsbeständigkeit als die niedriglegierten Bänder, was dem Zusammenwirken der Legierungszusätze, besonders des Chroms, mit dem natürlichen Kupfergehalt der Stähle zugeschrieben wird. Weder beim Wechseltauchen in Leitungswasser und 3proz. Kochsalzlösung, noch beim DVL-Rührversuch in 3proz. Kochsalzlösung mit 0,1% Wasserstoffsuperoxyd war ein Einfluß der Herstellungsweise der unlegierten und niedriglegierten Stahlbänder auf ihr Korrosionsverhalten zu beobachten.

Für die Bänder aus den austenitischen Stählen konnte beim Wechseltauchversuch in Kochsalzlösung und beim DVL-Rührversuch kein Einfluß des Kaltwalzgrades auf das Korrosionsverhalten festgestellt werden. Die Bänder aus den nickelhaltigen, austenitischen Stählen A, B und F zeigten beim Wechseltauchen in 3proz. Kochsalzlösung keine nennenswerte Korrosion, wohl dagegen der nickelfreie Chrom-Mangan-Stickstoff-Stahl E. Im Rührversuch war der Chrom-Nickel-Stahl A den übrigen austenitischen Stählen überlegen, die weit stärker zum Angriff durch Lochfraß neigten. Die allgemeine Korrosion der austenitischen Bänder war im Rührversuch, mit Ausnahme der Bänder aus dem nickelfreien Stahl E, sehr gering.

Von den unlegierten und niedriglegierten Stahlbändern zeigten sich nur einige aus Stahl L als anfällig gegen Spannungskorrosion (Leitungswasser). Unter den austenitischen Bändern waren dagegen einige aus Stahl B, F und besonders E spannungskorrosionsempfindlich (Kochsalzlösung, bei Stahl F Leitungswasser), während alle Bänder aus dem Chrom-Nickel-Stahl A (Kochsalzlösung) unempfindlich waren. Ein Zusammenhang zwischen der Herstellungsweise der Bänder und ihrem Spannungskorrosionsverhalten war nicht zu erkennen.

Bei Bewitterungsversuchen in Stadtluft, Seeluft und zweierlei Industrieluft (Größe der Gewichtsverluste bei den nicht austenitischen Bändern in dieser Reihenfolge zunehmend) zeigten sich die niedriglegierten den unlegierten Bändern überlegen. Die schon früher nachgewiesene Ursache hierfür ist das Zusammenwirken besonders des Legierungszusatzes Chrom mit dem natürlichen Kupfergehalt der niedriglegierten Bänder. Ein Einfluß der Herstellungsweise ergab sich bei diesen nicht. Dagegen zeigten die unlegierten Bänder eine klare Abnahme ihrer Witterungsbeständigkeit mit zunehmender Kaltverfestigung. — Größere Unterschiede in der Witterungsbeständigkeit zeigt auch der Wechseltauchversuch mit Leitungswasser an, so daß dieser Kurzversuch den Naturrostversuch in manchen Fällen zu ersetzen vermag.

Die austenitischen Versuchsbänder waren mit Ausnahme einiger Bänder aus dem Chrom-Mangan-Nickel-Molybdän-Stahl F in Stadtluft praktisch vollkommen beständig. In Seeluft wurde der Mangan-Chrom-Stickstoff-Stahl E leicht angegriffen, während in Industrieluft außer diesem Stahl auch der Mangan-Chrom-Nickel-Stahl B nicht mehr ganz beständig war. Dem Angriff selbst in Industrieluft waren die Bänder aus dem Chrom-Nickel-Stahl A und — bei zweckmäßiger Warmbehandlung — die aus dem Chrom-Mangan-Nickel-Molybdän-Stahl F gewachsen. Ein Einfluß des Kaltwalzgrades auf die Witterungsbeständigkeit der austenitischen Bänder trat nicht in Erscheinung. Dagegen waren einige, bei der Herstellung unzweckmäßig geglühte Bänder aus Stahl F nach der Bewitterung in äußerst starkem Maße interkristallin korrodiert.

An der Durchführung der Versuche waren Herr Ing. W. Trossen, Herr Ing. W. Schmidt, Fräulein H. Sabath und Frau L. Döhler beteiligt. Für ihre Mitarbeit sei ihnen bestens gedankt.

[7]) Korrosion und Metallschutz, Bd. 10 (1934), S. 161.
[8]) Trans. Amer. Inst. min. metallurg. Engrs. (1933/34), Techn. Publ. Nr. 553.
[9]) Trans. Amer. Soc. Steel Treat., Bd. 15, I (1929), S. 36.
[10]) Metallurg, Bd. 10 (1935), Nr. 4, S. 3 und Nr. 5, S. 13, nach Chem. Zbl. 107 (1936) I, S. 1692.

Über das Oberflächendrücken gekerbter Probestäbe aus dem Cr Mn V-Stahl VCV 100*).

(Einfluß der Drückbedingungen, der Lastspielfrequenz, der Lastspielzahl und einer zügigen Vorbeanspruchung.)

Von H. Bürnheim VDI, Bremen.

Mitteilung aus der Werkstoff-Vers.-Abt. der Focke-Wulf-Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Die sehr zahlreichen Veröffentlichungen über das Oberflächendrücken nehmen überwiegend auf die Belange des Maschinenbaues Bezug und befassen sich meist mit der absoluten Dauerhaltbarkeit. In einigen Zweigen der Technik kommen aber darüber hinaus besondere Beanspruchungsfolgen vor, die mit der Dauerhaltbarkeit nur noch wenig gemein haben. Es ist bisher nicht geklärt, ob hierfür die Vorteile des Drückens ebenso groß sind wie für die absolute Dauerhaltbarkeit. Im vorliegenden Aufsatz soll untersucht werden, wie sich die Drückbedingungen, die Lastspielfrequenz, die Lastspielzahl und hohe zügige Überlastungen auf den Erfolg des Oberflächendrückens auswirken und ob bei von den bisherigen Untersuchungen abweichenden Größenwerten dieser Einflüsse Gesichtspunkte zu Tage treten, die gegen die Anwendung des Drückens sprechen.

Gliederung.

I. Einleitung.

In den letzten zehn Jahren sind im Schrifttum zahlreiche Untersuchungen, die sich mit der Steigerung der Dauerhaltbarkeit gekerbter Bauteile durch das Oberflächendrücken, auch Kaltverformen oder Kaltrollen genannt, befassen, veröffentlicht worden[1]). Man hat z. B. bedeutende Erhöhungen der Dauerhaltbarkeit erreicht durch Drücken von Bohrungen mittels besonders profilierter Drückstempel, Walzwerken oder Dornwerkzeugen [7, 23, 24, 25, 26, 27, 28][2]), von Hohlkehlen, Wellenabsätzen [7, 11, 12], Einspannstellen, Nabensitzen [7, 8, 9], Drehstabfedern [10], Drähten [18], Umlaufkerbstellen [7], Schweißnähten durch Rollen mit Profilrollen [29, 30], Gewinden durch Nachrollen der vorgeschliffenen Gänge mittels Gewinderollen bzw. Walzen [13, 14, 15, 16, 17], von Keilnuten mit besonderen Preßlufthammerwerkzeugen [19, 20, 21, 22] und zahlreicher sonstiger Bauteile durch Anblasen mit Stahlkies [8, 36, 37, 38]. Die Erfolge waren meistens ganz beachtlich, und man muß sich wundern, daß das Verfahren nicht schon in viel größerem Umfange in der Praxis eingeführt worden ist.

Einige tatsächliche Schwierigkeiten scheinen darin zu bestehen, daß man die Drückbedingungen weder rechnerisch erfassen noch aus dem zwar sehr umfangreichen, aber für die vielen möglichen Fälle noch ungenügenden Versuchsmaterial für jede vorkommende Kerbenform und Werkstoffart ermitteln kann. Man ist vielmehr in den meisten Fällen auf den kostspieligen Dauerversuch angewiesen, wenn man feststellen will, ob die angewendeten Bedingungen überhaupt gewirkt haben und ob möglichst das Optimum der Erhöhung der Dauerfestigkeit erreicht worden ist. Denn es ist bekannt, daß bei zu hohen Drückkräften wieder eine Verschlechterung der Dauerhaltbarkeit eintreten kann [7, 11, 27]. Außerdem besteht eine weitere Unsicherheit darin, daß man dem gedrückten Bauteil nicht unbedingt ansehen kann, ob er gedrückt wurde oder nicht, so daß es den Betriebskontrollstellen oft unmöglich ist, zu entscheiden, ob der betreffende Teil »gut« oder »Ausschuß« ist. Über ein Hilfsmittel zur Kontrolle des Oberflächendrückens berichtet O. Föppl [39]. Es hat sich aber schon in vielen Fällen gezeigt, daß nur durch Anwendung des Oberflächendrückens dauerhaltbare Konstruktionen zu erhalten waren und daß bei zwingender Notwendigkeit der Anwendung des Drückens auch die erwähnten Schwierigkeiten überwunden werden konnten.

Fast sämtliche bisherigen Veröffentlichungen über das Oberflächendrücken beziehen sich auf die Steigerung der Dauerhaltbarkeit, während die zeitlich begrenzte Haltbarkeit, die Zeitfestigkeit, nicht betrachtet worden ist. Da nun aber der moderne Leichtbau zeitfeste anstatt der dauerfesten Konstruktionen verlangt, müßte darüber Klarheit geschaffen werden, ob das Oberflächendrücken sich auch im Zeitfestigkeitsgebiet bewährt und bis zu welcher Lastspielzahl es sich lohnt, das immerhin nicht ganz billige Verfahren anzuwenden. Ferner müßte etwas über den Größeneinfluß der Lastspielfrequenz bekannt sein, denn es gibt Betriebsbedingungen, bei denen sehr niedrige Frequenzen vorkommen; das könnte sich wegen der geringen Verformungsgeschwindigkeit möglicherweise nachteilig auswirken. Mit extrem niedriger Lastspielfrequenz, etwa in der Größe von 1 pro Sekunde, wirken z. B. die Böenkräfte auf die Tragwerke der Flugzeuge ein. Die bisherigen Untersuchungen sind meistens auf hochtourigen Prüfmaschinen mit Drehzahlen zwischen 1000 und 3000 pro Minute durchgeführt worden. Auch der Losenhausen-Pulsator mit 333 Lasthüben pro Minute kann in diesem Sinne noch nicht als niederfrequente Maschine bezeichnet werden.

Bei vielen technischen Bauwerken bleibt die Beanspruchungshöhe nicht während der ganzen Lebensdauer konstant, sondern es überlagern sich mehr oder weniger hohe Belastungsspitzen von verschiedener Häufigkeit. Den allgemeinsten Fall dieser Belastungsart haben wir wohl bei der Beanspruchung des Tragwerkes eines Flugzeuges durch Böen und willkürliche Steuerbewegungen. Diese treten in völliger Regellosigkeit in den verschiedensten Stärken auf und bewirken auf das Tragwerk einen Beanspruchungsablauf, der sich aus einer unregelmäßigen Folge von Spannungsspitzen der verschiedensten Höhen und Häufigkeiten

*) A 221, E 11.
[1]) s. Schrifttumsübersicht am Schluß der Arbeit.
[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die Schrifttumsübersicht am Schluß der Arbeit.

zusammensetzt[3]). Dabei treten entsprechend der Eigenart der Böenverteilung die hohen Lasten ziemlich selten, die niedrigen dagegen sehr häufig auf. Es interessiert daher den Flugzeugbauer die Frage, ob nicht die Wirkung des Oberflächendrückens, das für die Dauerfestigkeit zweifellos und für die Zeitfestigkeit wahrscheinlich nützlich ist, bei dem für das Flugzeug geltenden Beanspruchungsablauf durch die hohen Überlastungen ganz oder teilweise aufgehoben werden kann. Wenn das der Fall wäre, hätte die Anwendung in allen Belastungsfällen, in denen hohe Überlastungen vorkommen, keinen Sinn.

II. Versuchsprogramm.

Um über die angeschnittenen Fragen eine gewisse Klarheit zu erhalten, wurden einige Versuchsreihen mit einem im Flugzeugbau häufig verwendeten Stahl aufgezogen. Dabei wurden u. a. folgende Punkte berücksichtigt, die die Wirkung des Oberflächendrückens auf die Zeit- und Dauerhaltbarkeit beeinflussen können:

1. Einfluß der Drückbedingungen,
2. Einfluß der Lastspielfrequenz beim Versuch,
3. Einfluß der Lastspielzahl (Zeitfestigkeitsgebiet),
4. Einfluß einer einmaligen hohen zügigen Vorbelastung.

III. Versuchsdurchführung.

1. Werkstoff.

Die Versuche sind mit gekerbten Probestäben aus dem Cr-Mn-V-Stahl VCV 100 mit Wechselbiegebeanspruchungen durchgeführt worden. Dabei wurden teils Blechproben, die aus einer 3 mm starken Tafel dieses Normstahls herausgearbeitet waren, teils Rundproben, die aus Stangen von 15 mm Durchmesser stammten, verwendet. Die Bleche lagen in geglühtem und die Stangen in zähhart vergütetem Zustand vor. In der Zahlentafel 1 sind die Analysen und Festigkeitswerte der verwendeten Halbzeuge angegeben.

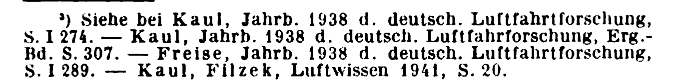
2. Probenform.

Die Wechselbiegeversuche mit den Blechen wurden auf der Schenckschen Flachbiege- und Torsionsmaschine für 3 mkg Höchstleistung mit normalen Proben von 20 mm Breite in Probenmitte durchgeführt (Bild 1a). Als Kerbform wurden Bohrungen von 3 mm Durchmesser benutzt. Die Probenbreite der gebohrten Proben war 23 mm in der Mitte (Bild 1b). Die Proben sind nach der Fertigstellung auf einer Bandschleifmaschine mit Schmirgelpapier Nr. 0 bearbeitet worden, so daß die Walz- und Glühhäute vollständig entfernt waren. Die Kanten der Stäbe und der Bohrungen sind leicht entgratet.

Die Versuche mit den Rundproben wurden auf der Schenckschen Umlaufbiegemaschine »Duplex« mit gekerbten Proben nach Bild 2 ausgeführt, wobei zwei verschiedene Kerbradien zur Anwendung kamen, nämlich 0,4 und 0,5 mm; der Kerbwinkel war in beiden Fällen 95°, die Kerbtiefe 2,5 mm. Die Proben sind in ihrer ganzen Länge geschlichtet, die Kerben mit dem Profilstahl eingestochen und nicht weiter spanabhebend behandelt worden.

3. Ausführung des Oberflächendrückens.

Bei den Flachstäben wurden zum Oberflächendrücken der Bohrungen zweierlei Werkzeuge verwendet: einmal der in Bild 3 dargestellte 90°-Kegelstempel und zum andern


[3]) Siehe bei Kaul, Jahrb. 1938 d. deutsch. Luftfahrtforschung, S. I 274. — Kaul, Jahrb. 1938 d. deutsch. Luftfahrforschung, Erg.-Bd. S. 307. — Freise, Jahrb. 1938 d. deutsch. Luftfahrtforschung, S. I 289. — Kaul, Filzek, Luftwissen 1941, S. 20.

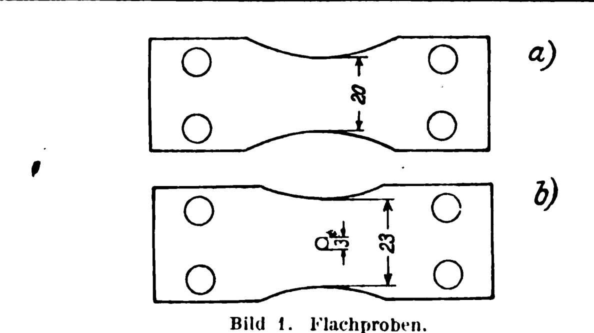


Bild 1. Flachproben.

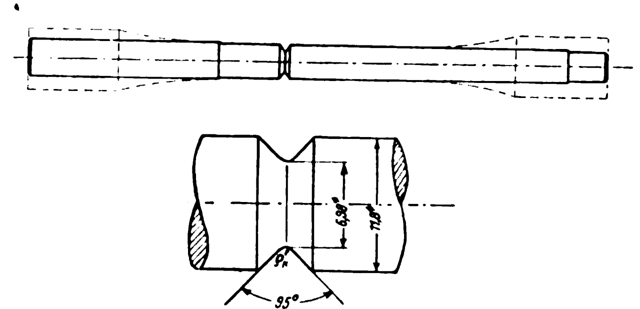


Bild 2. Rundprobe. S_k = 0,5 bzw. 0,4 mm.

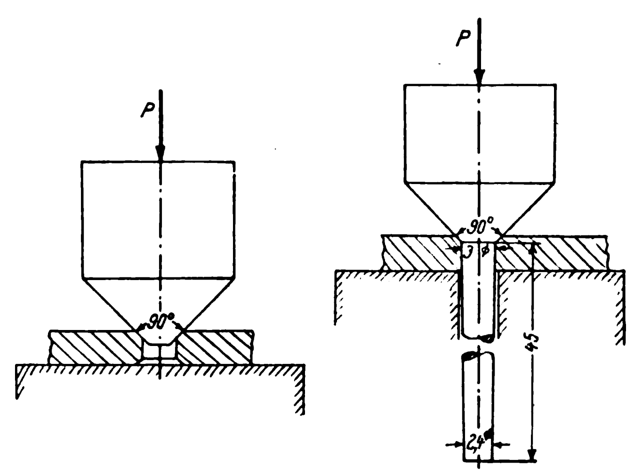


Bild 3. 90°-Kegelstempel. Bild 4. Kegeldorn.

der in Bild 4 veranschaulichte Kegeldorn. Beide Werkzeuge sind aus einem Cr-Mn-V-Stahl hergestellt und auf etwa 170 kg/mm² hart vergütet worden. Nitrierte Oberflächen bewährten sich nicht, da sie bei den hohen Drückkräften platzten. Nach dem Vergüten sind die Werkzeuge geschliffen und poliert worden. Das Drücken der Lochstäbe wurde unter Verwendung einer geeigneten Matrize auf einer normalen Zerreißmaschine der Bauart Mohr & Federhaff ausgeführt. Die Kerbstäbe mit den Umlaufkerben wurden im Wöhler-Institut der Technischen Hochschule Braunschweig auf Grund der dort gemachten Erfahrungen gedrückt[4]). Es wurde die bereits in mehreren Veröffentlichungen beschriebene Drückvorrichtung benutzt [15, 17], bei der zwei Profilrollen unter Federkraft gegen den langsam rotierenden Stab gedrückt werden. Die Drückkraft wird aus der Federverformung bestimmt. Die Probestäbe rotieren

[4]) Siehe die Arbeiten dieses Instituts in der Schrifttumsübersicht.

Zahlentafel 1.

Halbzeug	Zustand	C %	Cr %	Mn %	V %	Mo %	$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	ψ %
Blech	geglüht	0,26	0,85	1,1	0,13	—	62	75	12	—
Rundstange	zähhart vergütet	0,25	0,81	1,17	0,13	0,07	103	108	9,3	60

unter dem Druck der Rollen zehnmal. Die Drückrollen bestanden aus einem sehr harten Werkzeugstahl und hatten einen Krümmungsradius von 0,4 mm und einen Winkel von 90°, also etwas kleiner als beim Probestab. Sie sind nach dem Härten ebenfalls geschliffen und poliert worden.

4. Sonstiges.

Die Versuche wurden üblicherweise bis $2 \cdot 10^6$ Lastspiele durchgeführt. Von den Rundproben stand nur eine beschränkte Anzahl zur Verfügung, so daß in einigen Fällen nur wenige Punkte der Wöhler-Kurven aufgenommen werden konnten; auch mußte mehrfach in Stufen belastet werden, so daß einige Werte infolge Trainierwirkung zu hoch liegen. Hierauf wird bei der Besprechung der einzelnen Ergebnisse besonders hingewiesen. In den Wöhler-Kurven sind diejenigen Lastspielzahlen als Bruch eingetragen, bei denen die beiden Probenhälften ganz getrennt waren. Die Spannungen sind jeweils auf die geschwächten Querschnitte bezogen.

IV. Versuchsergebnisse.

1. Einfluß der Drückbedingungen.

Diese Versuche sind sowohl mit Blechproben nach Bild 1 als auch mit Umlaufproben nach Bild 2 ausgeführt worden. Bei den Blechproben mit Bohrung wurde zunächst die Drückkraft, mit der der Kegelstempel auf den Lochrand gedrückt wurde, variiert, und zwar wurde mit 500, 1000 und 1500 kg gedrückt. Die Ergebnisse zeigt Bild 5. Die Wechselbiegefestigkeit des nichtgedrückten Stabes von $\pm$ 24 kg/mm² stieg bei 500 kg Drückkraft auf $\pm$ 30 kg/mm² und bei 1000 kg auf $\pm$ 32 kg/mm². Bei 1500 kg war kein weiteres Ansteigen zu verzeichnen, so daß eine Steigerung der Drückkraft über 1000 kg bei den vorliegenden Bedingungen keinen Zweck mehr hat. Einige Werte waren bei der großen Drückkraft schon wieder niedriger als bei 1000 kg. Man kann daher für die vorliegenden Verhältnisse diese Last als günstigsten Wert ansehen.

Wurde statt mit dem Kegelstempel mit dem Kegeldorn gedrückt, so wuchs, wenn die Bohrung auf 2,4 mm Durchmesser vorgebohrt war und die Drückkraft wieder 1000 kg betrug, die Wechselbiegefestigkeit auf $\pm$ 34,5 kg/mm². Die größtmögliche Steigerung betrug also unter den vorliegenden Verhältnissen etwa 44%.

Entsprechende Versuche konnten bei den Rundstäben nur stichprobenweise gemacht werden, da nicht genügend Material zur Verfügung stand. Die Kräfte, mit denen die Rollen angepreßt wurden, waren hier 40, 60 und 80 kg. Die Versuchspunkte wiesen darauf hin, daß bei 80 kg die höchste Steigerung der Dauerhaltbarkeit noch nicht erreicht war, und daß eine weitere Erhöhung der Drückkraft noch eine Zunahme der Zeit- und Dauerfestigkeit bringen wird.

In Bild 6 sind die bei 80 kg Rollendruck für die beiden Kerbschärfen 0,4 und 0,5 mm Radius erhaltenen Versuchswerte eingetragen. Zum Vergleich sind die Werte der nichtgedrückten Proben dazu gezeichnet. Ihre Dauerhaltbarkeit beträgt $\pm$ 26 kg/mm². Durch das Drücken mit 80 kg stieg sie bei den Proben mit 0,4 mm Radius auf $\pm$ 38 kg/mm² und bei 0,5 mm Radius sogar auf $\pm$ 49 kg/mm², die Steigerung betrug also im ersten Falle 46 und im zweiten Falle 88%. Diese beiden Zahlen besagen, daß die größere Steigerung erzielt wird, wenn der Rollenradius etwas kleiner ist als der vorgeschnittene Kerbradius. Es liegen zwar auch bei dem kleineren Kerbradius einige höhere Werte vor, die jedoch, wie auch einige bei 0,5 mm Kerbradius wesentlich über der Kurve liegende Punkte, durch Trainierwirkung zu hoch ausgefallen sind. Die Versuche bestätigen also auch die schon im Schrifttum erhobene Forderung [14], daß Winkel und Radius des Drückwerkzeuges etwas kleiner sein sollen als die entsprechenden Maße der Kerbe.

Die Durchmesserverminderungen waren bei 80 kg Drückkraft etwa 0,09 mm, d. i. 1,3%, bei 60 kg Drückkraft 0,045 mm, entsprechend 0,65% und bei 40 kg 0,025 mm entsprechend 0,35% des Kerbgrunddurchmessers.

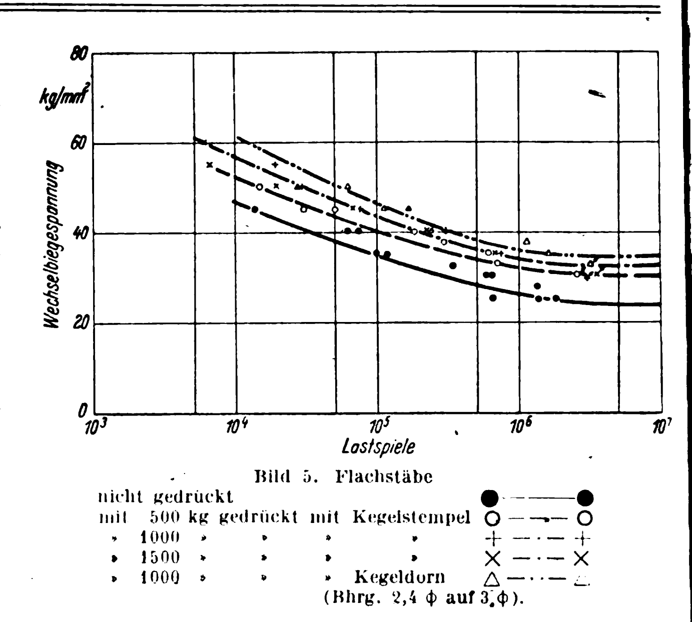


Bild 5. Flachstäbe
nicht gedrückt ●——●
mit 500 kg gedrückt mit Kegelstempel ○ — · — ○
» 1000 » » » » + — · — +
» 1500 » » » » × — · — ×
» 1000 » » » Kegeldorn △ — · · — △
(Bhrg. 2,4 ϕ auf 3 ϕ).

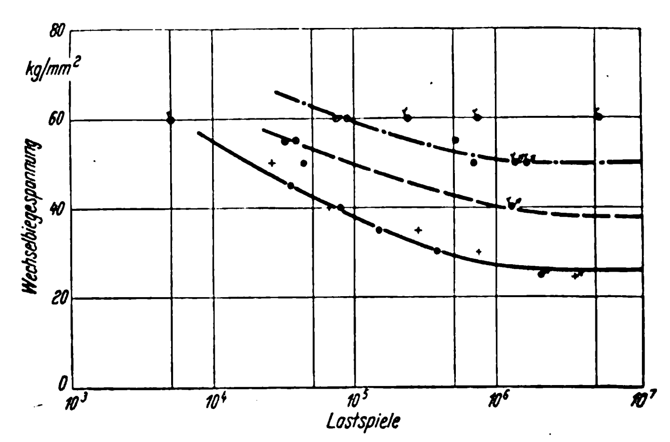


Bild 6. Rundproben; P = 80 kg; ϱ_{Rolle} = 0,4 mm.
Kerbradius 0,5 mm; Winkel 95° — nicht gedrückt ●——●; 10mal gedrückt ⊙ — · — ⊙
Kerbradius 0,4 mm; Winkel 95° — nicht gedrückt +——+; 10mal gedrückt ⊕ — — — ⊕

Ein Vergleich der größten Erhöhungen der Wechselbiegefestigkeit bei den Lochproben aus dem geglühten und den Rundproben aus dem zähhart vergüteten Werkstoff zeigt wieder, daß bei schärferen Kerbformen (höherer Formziffer) und höherer Werkstoffestigkeit die Wirkung des Oberflächendrückens größer ist.

2. Einfluß der Lastspielfrequenz.

Diese Versuche wurden mit Flachproben nach Bild 1 auf der Flachbiege- und Torsionsmaschine, die zu diesem Zweck mit einem Zusatzgetriebe für niedrige Drehzahlen ausgerüstet worden war, durchgeführt. Es wurden folgende Lastspielfrequenzen untersucht: 3000, 1500, 300, 50 Lastspiele pro Minute. Die verwendeten Proben sind mit dem 90°-Kegelstempel bei 1000 kg gedrückt worden. Die Ergebnisse sind in Bild 7 dargestellt. Danach bestehen zwischen den beiden hohen Frequenzen 3000 und 1500 Lastspielen pro Minute keinerlei Unterschiede. Die Punkte dieser beiden Kurven liegen dicht nebeneinander. Die Kurve, die bei 300 Lastspielen je Minute erhalten wurde, läuft im Dauerfestigkeitsgebiet etwas niedriger, während diejenige bei 50 Lastspielen je Minute in dem ganzen geprüften Lastspielbereich tiefer liegt. Die zugehörigen Wechselbiegefestigkeiten sind:

3000 Lastspiele pro Minute $\sigma_{bW} = \pm 32$ kg/mm²
1500 Lastspiele pro Minute $\sigma_{bW} = \pm 32$ kg/mm²
300 Lastspiele pro Minute $\sigma_{bW} = \pm 30$ kg/mm²
50 Lastspiele pro Minute $\sigma_{bW} = \pm 28{,}5$ kg/mm²

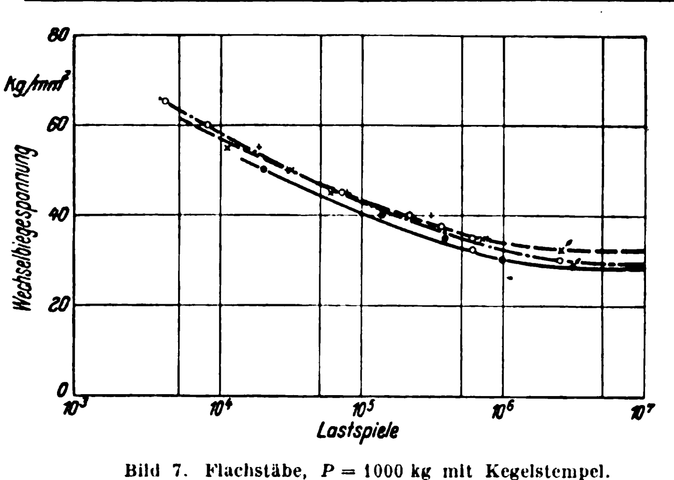


Bild 7. Flachstäbe, $P = 1000$ kg mit Kegelstempel.
Frequenz 3000 Lw/min × — — — ×
» 1500 » + — — — +
» 300 » ○ — · — ○
» 50 » ● ——— ●

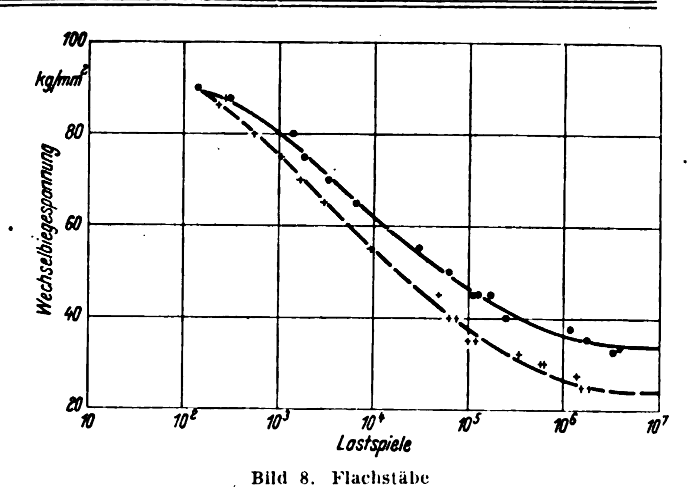


Bild 8. Flachstäbe
nicht gedrückt ● — — — ●
mit Kegeldorn gedrückt + — — — +

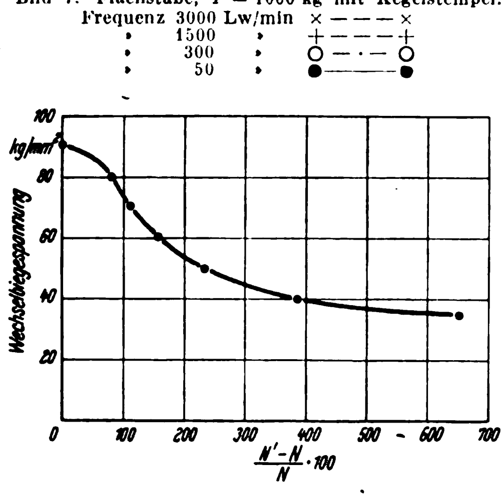


Bild 9
gedrückter Stab: N'; σ'_{wb}
ungedrückter Stab: N; σ_{wb}.

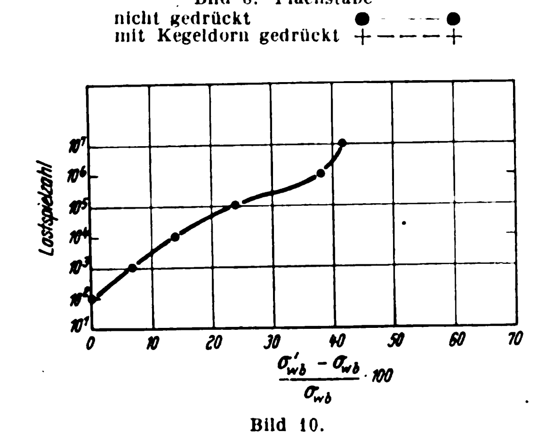


Bild 10.

Die Versuche zeigen, daß bei niedriger Lastspielfrequenz eine Herabsetzung der Dauerfestigkeit vorkommen kann. Im Zeitfestigkeitsgebiet ist der Unterschied wesentlich geringer. Sämtliche Punkte liegen hier in einem schmalen Streufeld, worin sich allerdings diejenigen von 50 Lastspielen pro Minute an der unteren Grenzkurve konzentrieren.

3. Einfluß der Lastspielzahl (Zeitfestigkeit).

Um herauszufinden, von welchen Lastspielzahlen an überhaupt ein Einfluß des Oberflächendrückens auf die Lebensdauer vorhanden ist, wurden mit Proben nach Bild 1 b, die mit dem Kegeldorn gedrückt und solchen, die nicht gedrückt sind, zwei Versuchsreihen auf der Flachbiege- und Torsionsmaschine ausgeführt. Dabei wurde im Bereich niedriger Lastspielzahlen wieder das bereits erwähnte Zusatzgetriebe benutzt. Die in Bild 8 angegebenen Ergebnisse zeigen, daß unterhalb etwa 200 Lastspielen eine Wirkung des Drückens nicht mehr bemerkbar ist. Oberhalb dieser Grenzlastspielzahl nimmt die Wirkung allmählich zu und wird im Bereich der Dauerfestigkeit am größten. In den folgenden Bildern 9 und 10 sind die Erhöhungen der Lebensdauer bei bestimmten Spannungen und die Erhöhung der Bruchspannungen bei bestimmten Lastspielzahlen (Zeitfestigkeiten) angegeben. Man sieht daraus, daß die Zunahme der Lebensdauer, die durch das Drücken bewirkt worden ist, mit abnehmender Wechselbeanspruchung ganz bedeutend anwächst, und daß der Unterschied zwischen der ertragbaren Spannung der gedrückten und nichtgedrückten Proben mit zunehmender Lebensdauer (Lastspielzahl) zwar ebenfalls wächst, jedoch in viel geringerem Maße; d. h. man kann im Zeitfestigkeitsgebiet nicht mehr mit den Wirkungszahlen für das Oberflächendrücken rechnen, die bei der Dauerfestigkeit gelten. Es ist nun zu entscheiden, bis zu welchen Spannungen im Zeitfestigkeitsgebiet oder bis zu welcher Lebensdauer es vom wirtschaftlichen Standpunkt aus Sinn hat, das Verfahren anzuwenden. Im vorliegenden Beispiel könnte man die Anwendung des Drückens, von der Seite der Lebensdauer aus betrachtet, unterhalb Spannungen von ± 70 kg/mm² (Erhöhung der Lebensdauer um 110% und mehr) und vom Standpunkt der ertragbaren Spannung aus gesehen, oberhalb 10^4 Lastspielen (Erhöhung der Spannung um 13,6% und mehr) als gerechtfertigt ansehen. Darunter ist der Nutzeffekt wohl zu gering.

4. Einfluß einer einmaligen hohen zügigen Vorbeanspruchung.

Über den Einfluß einer einmaligen hohen Vorbeanspruchung auf die Zeit- und Dauerfestigkeit ist bisher im Schrifttum nur wenig mitgeteilt worden. Thum und Erker[5]) zeigten an geschweißten Stahlproben, daß bei geringer Kerbwirkung der Proben Vorbeanspruchungen in der Gegend der Bruchfestigkeit, d. h. bis zur Erschöpfung des Dehnungsvermögens in solchen Beanspruchungsbereichen eine Herabsetzung der ertragbaren Spannungen verursachen, in denen die Probe noch nennenswerte plastische Verformungen erleidet. Bei stärkeren Kerbwirkungen wurden Zeit- und Dauerhaltbarkeit, selbst wenn durch die Vorbelastung Anrisse entstanden waren, vermutlich durch ein entstandenes Druckeigenspannungssystem, sogar erhöht. O. Föppl und R. Holzer [18] berichten über Versuche an oberflächengedrückten Drähten, die zu Spiralfedern gewickelt worden sind. Um festzustellen, ob durch das Biegen eine Beeinträchtigung der Drückwirkung eintritt, wurden die Federn wieder gestreckt, wobei sicher ganz allgemein hohe und örtlich besonders hohe Beanspruchungen entstanden sind. Die gestreckten Drähte wurden danach im Dauerversuch geprüft. Es zeigte sich, daß zwar die Erhöhung der Dauerfestigkeit nicht mehr so hoch war wie vor dem Wickeln, aber immer noch ganz beachtlich.

Die nachfolgend beschriebenen Versuche wurden mit Proben nach Bild 2 mit 0,5 mm Kerbradius durchgeführt.

[5]) Thum, Erker, Z. VDI 1942, H. 11/12.

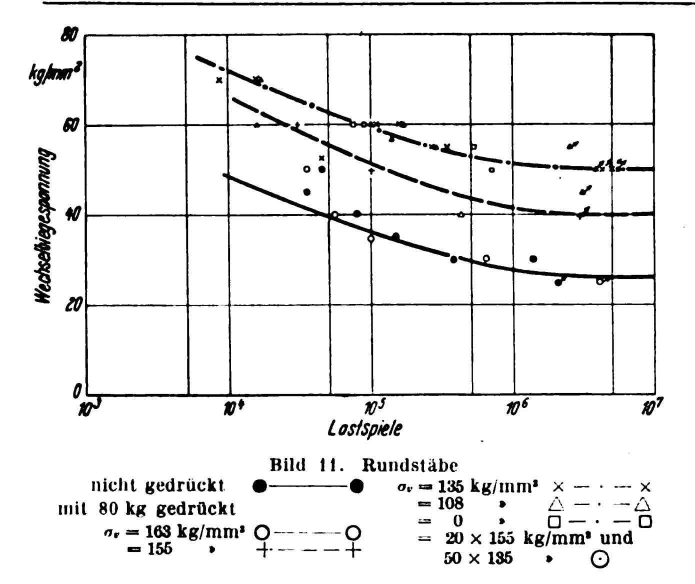


Bild 11. Rundstäbe

nicht gedrückt ●———●
mit 80 kg gedrückt
σ_v = 163 kg/mm² ○— — —○
= 155 » +— — — +
σ_v = 135 kg/mm² × — · — ×
= 108 » △ — · — △
= 0 » □ — · — □
= 20 × 155 kg/mm² und
50 × 135 » ⊙

Die Drückkraft war wieder 80 kg. Die Zerreißfestigkeit der gekerbten und gedrückten Stäbe wurde zu 172 kg/mm² festgestellt, so daß die Verfestigung durch die Kerbe σ_B^{Kerb}/σ_B bei einer Werkstoffestigkeit von 108 kg/mm² 1,59 beträgt. Die verfügbaren Proben wurden, wie in Zahlentafel 2 angegeben, mit vier verschiedenen Zugspannungen auf der Zerreißmaschine zügig vorbelastet.

Die vier ersten Proben wurden demnach mit einer Spannung dicht unter der Bruchlast der Kerbstäbe und die letzten sieben Stäbe mit der Werkstoffestigkeit vorgereckt. Die beiden anderen Stufen sind beliebige Zwischenwerte. In Spalte 3 sind die bleibenden Dehnungen, die im Kerbgrund auftreten, angegeben. Die hierzu verwendeten Proben hatten zunächst dicke Einspannköpfe für die Zerreißmaschine. Diese wurden dann nach dem Recken abgedreht, so daß die Form nach Bild 2 entstand. Die Ergebnisse dieser Reihen sind in Bild 11 zusammengestellt. Darin ist die unterste Linie die bereits aus Bild 6 bekannte Kurve der nichtgedrückten Proben, während die oberste für die gedrückten nicht vorgereckten Stäbe gilt. Die mit 108 kg/mm² vorbeanspruchten Proben geben Versuchspunkte, die mit der Kurve der nichtgereckten Stäbe zusammenfallen. Das gleiche gilt für die zweite Stufe mit 135 kg/mm². Drei Versuchspunkte dieser beiden Reihen fallen aus dem Rahmen und ergeben niedrigere Werte. Es stellte sich heraus, daß diese Abweichungen in einem Fall durch einen Schlackeneinschluß und in den beiden anderen Fällen durch einen Fehler bei der Vorbereitung der Proben entstanden sind. Die 3 Punkte können fortgelassen werden. Die beiden Vorbelastungen von 135 und 108 kg/mm² haben also noch keine Verminderung der Drückwirkung zur Folge. Betrachten wir nun die mit 155 kg/mm² gereckten Stäbe, so finden wir, daß die zugehörigen Punkte wesentlich niedriger liegen. Man kann eine Kurve hindurchlegen, die eine Dauerfestigkeit von $\pm$ 40 kg/mm² ergibt, also 20% niedriger ist als die der nichtgereckten Stäbe. Noch stärker ist die Beeinträchtigung der Dauerhaltbarkeit bei der Reckspannung in Höhe von 95% der Kerbzerreißfestigkeit. Hier liegen die Versuchspunkte auf der Wöhler-Kurve der nichtgedrückten Proben, d. h. durch das Recken dicht unter der Kerbzerreißfestigkeit ist die Wirkung des Oberflächendrückens vollständig aufgehoben. Die Versuche zeigen demnach, daß einmalige zügige Vorbelastungen bis zu 25% über der Werkstoffestigkeit noch keine Beeinträchtigung der Drückwirkung bei gekerbten Proben zur Folge haben; erst bei höheren Beanspruchungen tritt eine Verminderung der Drückwirkung ein. Die Grenze, von der ab das geschieht, ist wahrscheinlich die Streckgrenze des Kerbzerreißstabes. Wenn der Werkstoff im Kerbgrund anfängt zu fließen, wird das durch das Drücken verursachte Eigenspannungssystem abgebaut und die vorher zugedrückten feinsten Poren und Fehlstellen der Oberfläche wieder geöffnet.

Zahlentafel 2.

Vorbeanspruchung σ_v	Probenzahl	bleibende Längung λ bleib.	$\frac{\sigma_v}{\sigma_B^{Kerb}}$	$\frac{\sigma_v}{\sigma_B^{Werkst.}}$
kg/mm²	—	mm	—	—
163	4	0,12	0,95	1,5
155	3	0,06	0,90	1,43
135	7	0,018	0,78	1,25
108	7	0,008	0,63	1,00

Es wurde noch ein einzelner recht aufschlußreicher Versuch durchgeführt, bei dem ein gedrückter Probestab zwanzigmal mit 155 kg/mm² und danach fünfzigmal mit 135 kg/mm² belastet wurde. Der erhaltene Versuchspunkt liegt nicht auf der zu 155 kg/mm² gehörigen Kurve, sondern dicht über der Kurve der nichtgedrückten Stäbe. Der Versuch zeigt, daß Vorbeanspruchungen, die bei einmaliger Aufbringung nur eine geringe Beeinträchtigung der Drückwirkung verursachen, bei oftmaliger Wiederholung den Erfolg des Drückens völlig beseitigen können. Das ist so zu erklären, daß sich die kleineren Verformungen der niedrigen Beanspruchungen summieren und so als Gesamtverformung die Größe erreichen können, die notwendig ist, um die Drückwirkung ganz zum Verschwinden zu bringen.

Die gefundenen Zahlenwerte gelten natürlich nur für die hier vorliegenden Verhältnisse und können nicht ohne weiteres auf andere Kerbformen, Werkstoffe und Festigkeiten übertragen werden. Die Versuche zeigen aber, daß oberflächengedrückte Bauteile erhebliche Überlastungen vertragen können, ohne daß die Drückwirkung verloren geht. Da in den Konstruktionen üblicherweise das Überschreiten der Werkstoffstreckgrenze nicht zulässig ist, brauchen bezüglich der Anwendung des Oberflächendrückens in dieser Beziehung keinerlei Bedenken zu bestehen. Die hier gefundenen Versuchsergebnisse stimmen sinngemäß mit dem von O. Föppl und R. Holzer Mitgeteilten überein.

V. Zusammenfassung.

Es wurde über einige neue Versuchsergebnisse über das Oberflächendrücken von gekerbten Stäben aus dem Cr-Mn-V-Stahl VCV 100 berichtet. Bei gebohrten Flachbiegestäben, deren Lochränder mit einem 90°-Kegelstempel gedrückt sind, zeigt sich, daß eine Erhöhung der Drückkraft über einen gewissen Punkt keinen Zweck mehr hat. Durch Anwendung eines Kegeldorns, der durch das mit Untermaß vorgebohrte Loch getrieben wird, war eine weitere geringe Erhöhung zu erreichen. Versuche mit spitzkerbigen Umlaufstäben ergaben, daß Kerbwinkel und Kerbradius etwas größer sein sollen als die entsprechenden Abmessungen der Drückrollen. Mit zunehmendem Rollendruck stieg die Dauerfestigkeit an; der optimale Wert war bei den angewendeten Kräften noch nicht erreicht. Die größte Erhöhung der Wechselbiegefestigkeit betrug 88% beim hart vergüteten Stahl. Die Lastspielfrequenz hatte nur geringen Einfluß auf die Lage der Wöhler-Kurve. Bei sehr langsam laufender Maschine war ein geringfügiges Absinken der Dauerfestigkeit zu bemerken. Mit abnehmender Lastspielzahl wird die Drückwirkung immer geringer und hört im untersuchten Falle bei 200 Lastspielen vollständig auf. Die einmalige Vorbeanspruchung mit zügigen Kräften bis z. B. 78% der Kerbzerreißfestigkeit wirkt sich nicht nachteilig aus. Wurde die Vorbelastung dagegen größer, so trat allmählich eine Minderung der Wirkung des Oberflächendrückens ein. Bei hohen Belastungen, dicht unter der Kerbzerreißfestigkeit, war die Wirkung des Drückens vollständig verschwunden, und die Versuchspunkte lagen auf der Wöhler-Kurve der nichtgedrückten Stäbe. Das gleiche können niedrigere nur wenig unter der Kerbstreckgrenze liegende Spannungen, wenn sie oftmals auftreten, bewirken. Maßgebend für den Beginn der Beeinträchtigung der Drückwirkung ist offenbar die Streckgrenze des Kerbzugstabes. Die gefundenen Ergebnisse gelten zunächst nur für die untersuchten Be-



dingungen. Sie müssen für andere Kerbformen, Werkstoffe, Festigkeitsstufen usw. erweitert werden.

Für die Durchführung der Versuche danke ich meinem Mitarbeiter, Herrn Ing. H. Pick, bestens.

Schrifttum.

[1] O. Föppl, Verschiedenheit zwischen Zerreißfestigkeit und Wechselfestigkeit mit Beziehung auf das Drücken. Werkstattstechnik (1940), H. 1.
[2] o. Verf., Amerikanische Untersuchungen über das Oberflächendrücken. Werkzeugmaschine (1937), H. 3.
[3] O. Föppl, Das Oberflächendrücken. Metallwirtschaft XIX, H. 9.
[4] Buchmann, Dauerfestigkeitseigenschaften von Elektronlegierungen. Jahrb. d. Dt. Luftfahrtforschung (1938), S. I, 527.
[5] Behrens, Das Oberflächendrücken zur Erhöhung der Verdrehwechselfestigkeit. Metallwirtschaft (1931), H. 22.
[6] Thum, Bandow, Dauerhaltbarkeit geschmiedeter Stahlkurbelwellen und Mittel zu ihrer Steigerung. ATZ (1937), H. 2.
[7] Thum, Bautz, Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Formelementen durch Kaltverformung. Mitt. MPA-Darmst. Heft 8.
[8] v. Göler, Jung-König, Erhöhung der Wechselfestigkeit von Leichtmetallen durch Drücken. Jahrb. d. D. Luftfahrtforschung (1939), S. I, 671.
[9] Matthaes, Dauerbrüche an einer Elektronluftschraube. Jahrb. d. DVL (1931).
[10] Lippacher, Verdrehwechselfestigkeit von Drehstabfedern. Werkstattstechnik (1940), H. 22.
[11] Thum, Bruder, Dauerbruchgefahr an Hohlkehlen von Wellen und Achsen. Deutsche Kraftfahrtforschung Heft 11.
[12] Thum, Bruder, Flanschwellendauerbrüche und ihre Ursachen. Deutsche Kraftfahrtforschung Heft 41.
[13] Isemer, Steigerung der Schwingungsfestigkeit von Gewinden. Metallwirtschaft X, H. 37; Mitt. Wöhler-Institut H. 8.
[14] O. Föppl, Das Drücken des Kerbgrundes von gerollten, geschnittenen und geschliffenen Schrauben. Werkzeugmaschine (1938), H. 21.
[15] Wedemeyer, Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Schrauben durch Drücken. Mitt. Wöhler-Inst. Heft 33.
[16] Wiegand, Dauerhaltbarkeit von Schraubenverbindungen. Wiss. Veröff. v. Bauer u. Schaurte, Neuß.
[17] Bertram, Dauerhaltbarkeit von Gewinden ... Mitt. Wöhler-Inst. Heft 37.
[18] O. Föppl, Holzer, Das Oberflächendrücken von Drähten zur Steigerung ihrer Dauerhaltbarkeit. Werkstattstechnik (1942), H. 2/3.
[19] Meyer, Drehwechselfestigkeit genuteter Stäbe. Mitt. Wöhler-Inst. Heft 18.
[20] Wicker, Biegewechselfestigkeit genuteter Stäbe ... Mitt. Wöhler-Inst. Heft 19.
[21] Koch, Wechselbiegefestigkeit von Keilverbindungen. Mitt. Wöhler-Inst. Heft 20.
[22] Berg, Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Keilverbindungen. Mitt. Wöhler-Inst. Heft 26.
[23] Appelt, Steigerung der Dauerhaltbarkeit von Autokurbelwellen durch Oberflächendrücken des Bohrungsrandes. ATZ (1937), H. 19.
[24] Bollenrath, Cornelius, Einfluß des Oberflächendrückens auf Verdrehzeitfestigkeit von quergebohrten Leichtmetallwellen. Z. f. Metallkunde (1940), H. 7.
[25] W. Müller, Einfluß von Bohrungen und Nietverbindungen auf die Ermüdungsfestigkeit. Aluminio (1939), H. 2.
[26] Thum, Weiß, Steigerung der Verdrehdauerhaltbarkeit quergebohrter Wellen durch Kaltverformung. ATZ (1938), H. 24.
[27] Thum, Bruder, Gestaltung und Dauerhaltbarkeit von geschlossenen Stabknöpfen. Deutsche Kraftfahrtforschung H. 20.
[28] Bürnheim, Die Dauerhaltbarkeit von Stabköpfen aus einer hochfesten Al-Cu-Mg-Legierung. Aluminium (1941), H. 4.
[29] Kautz, Über die Dauerfestigkeit von Stumpf- und Kehlnahtverbindungen. El-Schweißung (1939), H. 4.
[30] Thum, Erker, Dauerfestigkeit von Kehl- und Stumpfnahtverbindungen. Z. VDI (1938), H. 38.
[31] Jünger, Steigerung der Seewasserkorrosionswechselfestigkeit von Stahl. Mitt. Forsch.-Anst. d. Gutehoffn.-Hütte-Konz. (1937), H. 1.
[32] Hottenrott, Die Korrosionsschwingungsfestigkeit von Stählen ... Mitt. Wöhler-Inst. Heft 10.
[33] O. Föppl, Behrens, Dusold, Die Erniedrigung der Schwingungsfestigkeit durch Korrosion und ihre Erhöhung durch das Oberflächendrücken. Z. f. Metallkunde (1933), H. 11.
[34] Thum, Ochs, Die Bekämpfung der Korrosionsermüdung durch Druckvorspannungen. Z. VDI (1932), H. 38.
[35] Holzer, Die zweckmäßigste Art der Durchführung des Oberflächendrückens. Werkzeugmaschine (1941), H. 16.
[36] O. Föppl, Das Kugelstrahlen. Metallwirtschaft (1941), Heft 9 u. 10.
[37] Wiegand, Oberfläche und Dauerfestigkeit. Hab.-Schrift (1940).
[38] Wiegand, Einfluß der Oberflächenbehandlung auf die Festigkeitseigenschaften von Leichtmetallen. Metallwirtschaft (1941), H. 7.
[39] O. Föppl, Oberflächendrücken von Verdrehstabfedern ... Werkzeugmaschine (1941), H. 2.

Ergebnisse von Leitwerkstheorien bei verschwindender Profildicke (Ebenes Problem)*).

Von A. Kupper †.

Bericht des Instituts für Flugmechanik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Die vorliegende Arbeit ist die überarbeitete Fassung[1]) eines unveröffentlichten älteren DVL-Berichtes von Dr. A. Kupper, der im Jahre 1937 bei einem Versuchsflug tödlich verunglückte. Die darin verwendete Darstellung der Ergebnisse hat unterdessen vielfache Anwendung gefunden, so daß eine nachträgliche Veröffentlichung zweckmäßig erscheint.

Es wird über die Theorie des einfachen Klappenflügels mit der Dicke Null für Spaltbreite $\rightarrow \infty$ und Spalt Null berichtet, wobei als unabhängig Variable c_a und η, also nicht wie üblich α und η gewählt werden. Damit sind die charakteristischen Leitwerksgrößen bis auf $\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}$ für das ebene und räumliche Problem identisch, so daß die für das ebene Problem durchgeführten Untersuchungen keinerlei Einschränkung bedeuten. In den Endergebnissen werden die charakteristischen Größen des Anstellwinkels α, des Längsmomentes c_m, des Rudermomentes c_r, des losen Ruders und die Größe sowie Lage der resultierenden Luftkraft am Ruder dargestellt.

Gliederung.

I. Auswertung und Darstellung der theoretischen Ergebnisse.

a) Allgemeines.

Zur physikalischen Deutung und sinngemäßen Interpolation von Messungen über ebene Probleme, welche Leitwerke, Landeklappen und dergleichen betreffen, zieht man zweckmäßig die entsprechenden Theorien heran. Für solche Zwecke sind im vorliegenden Bericht die Ergebnisse der Theorien von Glauert und Kirste (geknickte Platte mit Dicke und Spalt Null) sowie für den technisch nicht wichtigen, zur Vororientierung bezüglich Spalteinfluß jedoch brauchbaren Grenzfall Spaltbreite gegen unendlich (zwei ebene Platten ohne gegenseitige Induktion) zusammengestellt.

b) Die Auswertung.

Die Auswertung der Theorien ebener Probleme geschieht nach folgenden Gesichtspunkten:

Die Theorien werden in bezug auf die Winkel α und η linear gemacht, soweit sie dies nicht schon dem Ansatz nach sind. Mit anderen Worten: Wir beschränken uns auf kleine Winkel. Damit vereinfacht sich die Darstellung und Anwendung der Ergebnisse ganz außerordentlich. Überdies kann man auf kleine Winkel beschränkte Ergebnisse ohne weiteres untereinander vergleichen, seien sie nun mit konformer Abbildung gewonnen und nachträglich linear gemacht[2]) oder unmittelbar aus linearen Ansätzen[3]) erhalten.

Praktisch berechtigt ist diese Beschränkung auf kleine Winkel aus folgenden Gründen:

Erstens liegt es in der Natur ebener Tragflügelprobleme der vorliegenden Art, daß der lineare Ansatz bis zu recht großen Winkeln (20° bis vielleicht 30°) fast dasselbe leistet wie die allgemeingültige Lösung.

Zweitens gelingt es experimentell doch nur in ähnlich kleinen Winkelbereichen, die Voraussetzungen ein und desselben Strömungsgesetzes aufrechtzuerhalten. Wenigstens ist dies in den technisch häufigsten Fällen so. Nur in Ausnahmefällen, z. B. bei Grenzschichtabsaugung, kann das Anliegen der Strömung bis zu außerordentlich großen Winkeln erzwungen werden. Zur Auswertung solch spezieller Versuche müßte daher auf die allgemeingültigen Lösungen zurückgegriffen werden.

Im übrigen werden die zahlenmäßigen Aussagen der Theorien unverfälscht wiedergegeben. Zum Beispiel ist für die in Abschnitt II und III behandelten Fälle $\frac{\partial \alpha_\infty}{\partial c_a} = 1/2\,\pi$ ($= 9{,}1^0$). Dieser unter den dort gemachten Voraussetzungen theoretisch gewonnene Zahlenwert geht sinngemäß in andere Beziehungen zwischen Winkeln und Luftkräften bzw. Momenten ein, z. B. in $\left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta}\right]$, und wird dort ebenso unverfälscht beibehalten.

c) Die Darstellung.

Die Darstellung theoretischer Ergebnisse ebener Leitwerksprobleme geschieht hier nach folgenden Gesichtspunkten:

1. Alle Beiwerte von Luftkräften, z. B.

c_a des ganzen Leitwerks,
c_{a_R} des ganzen Ruders, das innerhalb seines Flächeninhalts allenfalls ein Hilfsruder enthält,

werden auf den Flächeninhalt

$b \cdot l_L$ des ganzen Leitwerks bzw.
$b \cdot l_R$ des ganzen Ruders (einschl. Hilfsruder)

bezogen. So wurde dies wohl immer gehandhabt, soweit überhaupt Luftkräfte auf Leitwerksteile behandelt worden sind. Den so definierten Auftriebsbeiwerten kommt ein unmittelbar anschaulicher Sinn zu als mittlere, durch den Staudruck dividierte Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseiten des Leitwerks oder des Ruders.

Die Momentenbeiwerte

c_m des ganzen Leitwerks,
c_r des ganzen Ruders (das ein Hilfsruder enthalten kann),

*) P 13 15, P 31 2.
[1]) Die Neubearbeitung wurde von E. Kuhle durchgeführt.
[2]) Indem man den sinus eines jeden Winkels durch diesen selbst ersetzt usw.
[3]) z. B. wirbelbelegte Flächen.

beziehen wir dagegen auf ein und dieselbe Größe $b \cdot l_L^2$, was früher wohl nur bei c_m üblich war, während man c_r auf $b \cdot l_R^2$ bezog.

Denn es wäre lästig und könnte bei eiliger Anwendung unserer Unterlagen irre führen, wenn bei Leitwerken von gleichem Umriß, beim gleichen Staudruck, ein und demselben Rudermoment in mkg nicht derselbe Beiwert c_r entspräche, nur weil die Aufteilung des Leitwerksgrundrisses in Flosse und Ruder verschieden sein mag.

Mit dieser Festsetzung vermeiden wir unnützes Auftreten von $\frac{l_R}{l_L}$ und höheren Potenzen dieser Verhältniszahl bei flugmechanischen Anwendungen.

2. Die Momenten-Bezugsachsen.

Als Momenten-Bezugsachsen wählen wir für c_m stets die Vorderkante des ganzen Leitwerks, dagegen für c_r die Drehachse des Ruders. Diese fällt bei nicht rückverlegter Drehachse und Dicke Null mit der Vorderkante des Ruders zusammen.

3. Wahl der unabhängigen Variablen.

Ginge es einzig und allein darum, theoretische Ergebnisse darzustellen, so läge am nächsten, die zwei Winkel α und η als unabhängige Variable aufzufassen und die Größen

$$c_a, \quad c_m,$$
$$c_{a_R}, \quad c_r,$$

eines Leitwerks als Funktionen dieser Variablen darzustellen.

Unser System soll nun aber ohne weiteres auch zur Darstellung experimenteller Ergebnisse geeignet sein; zu diesem Zwecke muß gefordert werden, daß die als unabhängige Veränderliche aufgefaßten Größen tatsächlich unabhängig voneinander meßbar sind! Dieser Forderung genügt η ohne weiteres, α dagegen nicht!

Stößt doch der Versuch, ebene Strömung experimentell zu verwirklichen, auf derartige Schwierigkeiten, daß man fast immer vorzieht, entsprechende räumliche Probleme zu untersuchen.

An grundsätzlichen Schwierigkeiten sei genannt: Fälschung der beabsichtigten Strömung seitens der Luftreibung an den seitlichen Kanalwänden, ganz besonders in der Frage nach örtlicher Ablösung der Strömung!

An meßtechnischen Schwierigkeiten: Abdichtung des Modells gegen die seitlichen Kanalwände und zugleich leichte Beweglichkeit des Modells für die Wägung von Kräften und Momenten! — Oder aber Verzicht auf die Vorzüge der Wägung gegenüber der schwerfälligen Druckverteilungsmessung.

Daß dabei eine rechnerische Korrektur (endliche Höhe des Strahls!) nötig ist, bedeutet kaum einen Mangel; denn Spiegelung der praktisch ausreichend ebenen, reibungslos gedachten Strömung an oberer und seitlicher Kanalwand dürfte alles wesentliche erfassen, da die Grenzschicht dieser Wände nicht mit der des Modells in Berührung kommt.

Zur vergleichenden Sichtung von Meßergebnissen reduziert man diese dann rechnerisch auf das ebene Problem, so gut dies nach dem jeweiligen Stande der Erkenntnisse möglich ist. Bekanntlich benutzt man hierzu in erster Linie Prandtls Theorie der tragenden Linie (»induzierter Anstellwinkel«) sowie eine Ergänzung dieser Theorie für endliche Querschnittsabmessungen des Luftstrahls (»Strahlkorrektur«); dagegen ist heute noch Gegenstand der Forschung, darüber hinaus zu erfassen, daß auch die Länge des Luftstrahls endlich ist, daß sich der Strahl unter den Luftkräften der Modelle krümmt und dergleichen mehr [1].

Bei flugtechnischen Anwendungen (räumliche Probleme!) macht man nun ein gut Teil des größten dieser rechnerischen Schritte (induzierter Anstellwinkel) wieder rückgängig. Also ist die technische Anwendung solcher Meßergebnisse auf praktische Leitwerksfragen noch besser gesichert als die Reduktion der Modellmessungen auf das entsprechende ebene Problem! Folglich ist vom Standpunkt des Ingenieurs aus gegen die Bevorzugung von räumlichen Strömungsmodellen für Leitwerke gar nichts einzuwenden, obwohl »α des ebenen Problems« direkter Messung nicht zugänglich ist. Deshalb wird man die Darstellung der theoretischen Ergebnisse von ebenen Leitwerksproblemen diesem Sachverhalt anpassen.

Wir vertauschen deshalb α mit c_a, stellen also α, c_m, c_r und c_{a_R} abhängig von c_a und η dar. Damit ändert sich bezüglich ebener Theorien gar nichts von Belang. Für das Arbeiten mit räumlichen Problemen und insbesondere mit experimentellen Unterlagen aber erzielen wir folgenden Vorteil:

Alle nach dem heutigen Stand der Erkenntnisse von der »tragenden Linie« beschriebenen Einflüsse

des Seitenverhältnisses,
der Tiefenverteilung,
der Verwindung

sowie der Strahlabmessungen relativ zur Modellspannweite gehen nur noch in die Beziehung

$$\alpha\,(c_a)_\eta = \text{konst.}$$

ein, während schon

$$\alpha\,(\eta)_{c_a} = \text{konst.}$$

sowie all die anderen Beziehungen

$$c_m\,(c_a, \eta)$$
$$c_r\,(c_a, \eta)$$
$$c_{a_R}\,(c_a, \eta)$$

von diesen Einflüssen gänzlich unberührt bleiben.

Bloß die Strahlkrümmung (Einfluß der endlichen Strahlabmessungen relativ zur Modelltiefe) belastet auch in dieser Darstellungsart alle genannten Beziehungen.

4. Wahl der Vorzeichen für Winkel, Momente und Kräfte.

Die Wahl der Vorzeichen entspricht DIN L 100. Damit erhält man für das ebene Problem (x_a-z_a-Ebene) Bild 1 des strömungsfesten, rechtwinkligen Bezugssystems. Der positive Drehsinn der Winkel α und η und der Momente ist von z_a nach x_a (Rechtssystem!), also in der Figur im Uhrzeigersinn. Die Kräfte c_a und c_{a_R} und die Anblasegeschwindigkeit werden entgegen der positiven z_a- bzw. x_a-Achse positiv gezählt.

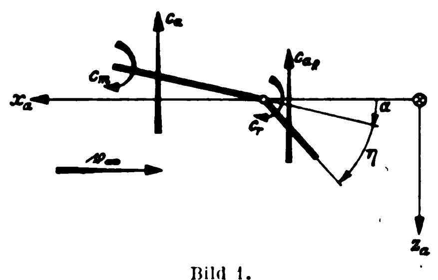


Bild 1.

II. Ergebnisse der Theorie für sehr großen Spalt bei verschwindender Profildicke (nach Kupper).

a) Vorbemerkungen.

Für eine Vororientierung über Fragestellungen ebener Leitwerksprobleme liegt nahe, zunächst einmal die wechselseitige Beeinflussung der Strömung um Flosse und Ruder ganz außer acht zu lassen, also die Luftkräfte auf beide Teile von genau der Art vorauszusetzen, wie sie bei je einem alleinstehenden Flügelschnitt auftreten. Für diesen Zweck reicht völlig aus, symmetrische Profile für Flosse und Ruder zu betrachten. Um nun Zahlenwerte zu erhalten, die ohne weiteres mit den in III. »Fehlender Spalt« mitgeteilten vergleichbar sind, beschränken wir uns auch hier auf verschwindende Dicke. Flosse und Ruder seien also durch eine ebene unendlich dünne Platte repräsentiert.

Das dem Gesagten entsprechende Gedankenmodell ist veranschaulicht in Bild 2 links ($s \to \infty$) im Vergleich zu dem rechts skizzierten Fall ohne Spalt ($s = 0$). Mit Rücksicht auf Vergleichbarkeit der Ergebnisse sind alle Tiefenerstreckungen (Leitwerktiefe l_L, Rudertiefe l_R, Flossentiefe $l_L - l_R$) im linken und rechten Bild gleich vorausgesetzt.

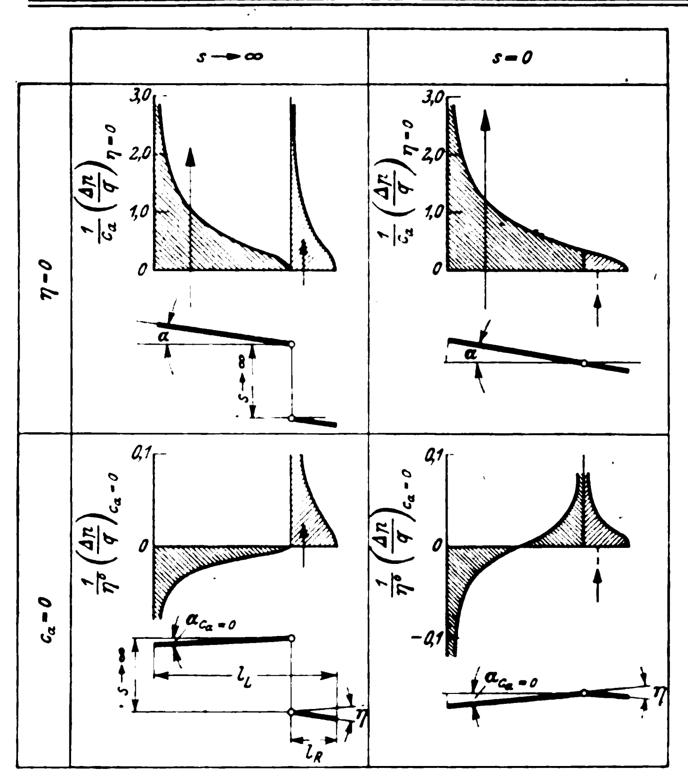


Bild 2. Druckverteilungen an der ebenen Platte mit Knick für die Spaltbreiten $s = 0$ und $s \to \infty$.

Unsere Voraussetzung völligen Fehlens wechselseitiger Induktion verlangt, daß wir im links skizzierten Gedankenmodell in Bild 2 Flosse und Ruder (in beliebiger Richtung) unbegrenzt weit auseinandergerückt denken; wegen der eben genannten Bindung bezüglich der Tiefenerstreckungen bleibt hierfür nur die zur Anströmrichtung Senkrechte verfügbar. Hierbei ist gleichgültig, ob man sich das Ruder über oder unter der Flosse denkt, was natürlich bei endlichem Abstand nicht mehr zuträfe.

b) Die Beziehungen für α, c_m und c_r.

Aus einer senkrecht zur Anblasrichtung unbegrenzten Platte mit der Tiefe l betrachten wir ein Stück vom Flächeninhalt $b \cdot l$. Ist A der Auftrieb dieses Flächenstückes und q der Staudruck der ungestörten Strömung, so ist der entsprechende Auftriebsbeiwert definiert als $c_a = \frac{A}{q \cdot b \cdot l}$.

Die Nullauftriebsrichtung einer ebenen Platte ist identisch mit der ihrer Tiefenerstreckung. Ist der Winkel zwischen dieser Richtung und der der Anblasgeschwindigkeit genügend klein, so ist ihm bekanntlich c_a proportional. Und zwar hat der Proportionalitätsfaktor den Zahlenwert 2π für reibungslose Strömung und glatten Abfluß an der Hinterkante (Winkel im Bogenmaß).

Die Auftriebskraft greift unabhängig vom Betrag des Anstellwinkels im Endpunkt des vorderen Viertels der Plattentiefe an. Ein von diesem Auftrieb unabhängiges Moment tritt nicht auf wegen Symmetrie des Strömungsbildes einer ebenen Platte bei $c_a = 0$. Schließlich fehlt ein Widerstand, da Reibungslosigkeit vorausgesetzt wurde.

Geht man zur Betrachtung zweier Platten, entsprechend der Bemerkungen in II a) über, so ist zu beachten, daß die Tiefe der vorderen Platte unseres Gedankenmodells $l_L - l_R$ und ihr Anblaswinkel α, die Tiefe der hinteren l_R und deren Anblaswinkel $\alpha + \eta$ ist.

Dann ist die Summe der Auftriebskräfte gleich der Gesamtkraft auf das »Leitwerk«

$$q \cdot b_L \cdot 2\pi\,[\alpha\,(l_L - l_R) + (\alpha + \eta) \cdot l_R] = q\, b_L \cdot l_L \cdot c_a \qquad (1\text{a})$$

Nach α aufgelöst folgt daraus

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot c_a - \frac{l_R}{l_L} \cdot \eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

als lineare Funktion von c_a des Leitwerks und von η.

Ganz entsprechend erhalten wir für das Gesamtmoment des Leitwerks um dessen Vorderkante unter Weglassung des Faktors $q \cdot b_L$:

$$-2\pi\left[\frac{l_L - l_R}{4} \cdot \alpha\,(l_L - l_R) + \left(l_L - \frac{3}{4}\,l_R\right)(\alpha + \eta)\,l_R\right] = c_m \cdot l_L^2 \quad \ldots \quad (2\text{a})$$

Und für das Rudermoment:

$$-2\pi\,\frac{l_R}{4}\,(\alpha + \eta)\,l_R = c_r \cdot l_L^2 \quad \ldots \ldots \quad (3\text{a})$$

Das Minuszeichen rührt in beiden Fällen daher, daß bei unserer Zählung zwar positive Winkel positive Kräfte ergeben, diese aber um die Vorderkante negative Momente erzeugen; vgl. die Vorzeichenfestsetzungen in I c) 4.

Beide Gleichungen enthalten noch α, während wir uns entschlossen haben, c_a als unabhängige Veränderliche zugrunde zu legen. Wir ersetzen daher α in (2a) und (3a) gemäß (1) durch c_a und erhalten so:

$$c_m = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{l_R}{l_L} - \left(\frac{l_R}{l_L}\right)^2\right] \cdot c_a - \frac{\pi}{2}\,\frac{l_R}{l_L}\left(1 - \frac{l_R}{l_L}\right)\left(3 - 2\,\frac{l_R}{l_L}\right) \cdot \eta \quad \ldots \quad (2)$$

$$c_r = -\frac{1}{4}\left(\frac{l_R}{l_L}\right)^2 \cdot c_a - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{l_R}{l_L}\right)\left(\frac{l_R}{l_L}\right)^2 \cdot \eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die resultierende Luftkraft des Ruders ist für unser Einführungsbeispiel ($s \to \infty$) gegeben durch den zweiten Summanden der linken Seite von Gl. (1a); daraus folgt vermittels Division durch $q \cdot b_L \cdot l_R$ der unserer Definition entsprechende Beiwert c_{a_R} als Funktion von c_a und η, sobald wir α gemäß (1) durch c_a und η ausdrücken:

$$c_{a_R} = c_a + 2\pi\left(1 - \frac{l_R}{l_L}\right) \cdot \eta \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Im hier behandelten Einführungsbeispiel $s \to \infty$ ist weiter wegen Fehlens jeder wechselseitigen Beeinflussung von Flosse und Ruder die Druckverteilung über der Rudertiefe immer dieselbe, bis auf einen allen Stellen der Rudertiefe gemeinsamen Faktor, der allein die Abhängigkeit von c_a und η repräsentiert. Daher liegt der resultierende Auftrieb c_{a_R} des Ruders im Grenzfall $s \to \infty$ von c_a und η unabhängig an derselben Stelle der Rudertiefe wie bei einer ebenen Platte, nämlich in $\frac{l_R}{4}$ (Bild 7).

c) Die charakteristischen Leitwerksgrößen.

Das Ergebnis von II b) war α, c_m, c_r und c_{a_R} als lineare Funktionen von c_a und η allein, die wir nun in der folgenden Form schreiben wollen:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right] \cdot \eta \\
c_m &= \left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_m}{\partial \eta}\right] \cdot \eta \\
c_r &= \left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta}\right] \cdot \eta \\
c_{a_R} &= \left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial \eta}\right] \cdot \eta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Vergleichen wir die einzelnen Faktoren von c_a und η in diesem Ansatz (5) mit den entsprechenden der Gl. (1), (2), (3) und (4), so erhalten wir mit der Abkürzung $\frac{l_R}{l_L} = \tau$:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right] &= \frac{1}{2\pi} & \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right] &= -\tau \\
\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \tau(1-\tau)\right) & \left[\frac{\partial c_m}{\partial \eta}\right] &= -\frac{\pi}{2}\,\tau\,(1-\tau)\,(3-2\tau) \\
\left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right] &= -\frac{\tau^2}{4} & \left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta}\right] &= -\frac{\pi}{2}\,\tau^2\,(1-\tau) \\
\left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial c_a}\right] &= 1 & \left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial \eta}\right] &= 2\pi\,(1-\tau)
\end{aligned} \qquad (6)$$

Wegen der Beschränkung auf kleine Winkel α und η sind die acht Koeffizienten der vier Ansätze (5) von c_a und η unabhängig. Obwohl es sich dann bei jedem bestimmten Leitwerk um konstante Koeffizienten handelt, schreiben wir diese als partielle Ableitungen der betrachteten Funktionen α, c_m, c_r und c_{a_R} nach den »unabhängigen« Variablen c_a und η[4]). Wir schließen diese Symbole in solchen Fällen in eckige Klammern ein, um deren Zahlencharakter ausdrücklich zu kennzeichnen.

Für die zunächst überflüssig anmutende Bezeichnungsart sprechen eine Reihe von praktischen Gründen:

Eine Indexschreibweise bedeutet letzten Endes nichts anderes, ist nur nicht so universell.

Mit irgend entbehrlichen Indizes empfiehlt sich dringend, von vornherein sparsam umzugehen, da bei praktischen Anwendungen noch mehr hinzukommen.

Will man gelegentlich zu Ansätzen für größere Winkel aufsteigen, so fallen bei unserer Schreibweise bloß die eckigen Klammern weg, um den Funktionscharakter der Koeffizienten durchaus genügend zu kennzeichnen.

Schließlich hat man Ergebnisse ebener Probleme zusammenzufügen zu Aussagen über »räumliche« Leitwerke; hierzu dient als Instrument die Theorie der tragenden Linie. Diese aber bringt (zum Beispiel im Fall einer Querruderklappe!) einen ähnlichen Umfang analoger Begriffe mit! Über die daraus insgesamt resultierende Menge von verwandten Symbolen gewinnt man einen Überblick wohl am ehesten durch konsequente Benutzung von Begriffen und Symbolen der Analysis.

Die in (6) formelmäßig beschriebene Abhängigkeit der 8 bisher definierten Koeffizienten unseres Beispieles $s \to \infty$ von $\tau = \frac{l_R}{l_L}$ ist in Bild 3, 4, 5 und 6 dargestellt.

d) Weitere Definitionen und Begriffe.

Der effektive Ruderwinkel.

Zum Studium ebener Probleme in Theorie und Experiment sind die bisher definierten Begriffe gut geeignet. Für deren technische Anwendungen aber liegt noch folgender Mangel vor:

Zwar sind die als Ableitungen nach c_a definierten Koeffizienten auch flugmechanisch aufschlußreich, indem durch sie die jeweils betrachteten Größen α, c_m, c_r und c_{a_R} in unmittelbare Beziehung zu der meistens interessierenden Größe c_a gebracht werden. Für die als Ableitungen nach η definierten Koeffizienten trifft jedoch entsprechendes nicht zu. Denn der geometrische Winkel η zwischen Flosse und Ruder interessiert in der Mechanik des Flugzeugs nur selten unmittelbar. Insbesondere ist ein Vergleich verschiedener Leitwerke (ebenes Problem) bei gleichem η und gleichem c_a unzulänglich; denn hierbei werden im allgemeinen alle von η abhängigen Größen α, c_m, c_r oder c_{a_R} verschiedener Leitwerke verschieden ausfallen. Es sind, mit anderen Worten, gleiche geometrische Winkel η verschiedener Leitwerke bezüglich keiner einzigen unmittelbar interessierenden Größe α, c_m, c_r und c_{a_R} gleichwertig!

Es liegt nahe, diesem Übelstand folgendermaßen abzuhelfen: Man verzerrt den η-Maßstab durch einen im allgemeinen für jedes Leitwerk verschiedenen konstanten Faktor so, daß eine uns besonders häufig interessierende η-abhängige Größe für alle Leitwerke gleich ausfällt.

Wir entschließen uns, den Anströmwinkel α in diesem Sinne auszuzeichnen und definieren als effektiven Ruderwinkel

$$\eta_e = -\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right] \cdot \eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

oder

$$\frac{d\eta_e}{d\eta} = -\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7\,a)$$

[4]) Wo in anderem Zusammenhang nicht mehr selbstverständlich sein sollte, welche Variable bei Bildung einer partiellen Ableitung konstant zu halten ist, wird diese als Index angeschrieben, z. B. $\left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right]_\eta$ beziehungsweise $\left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta}\right]_{c_a}$.

wobei wir nach wie vor unter η den geometrischen Knickwinkel verstehen wollen.

Damit vereinfacht sich die erste Zeile des Ansatzes (5) zu

$$\alpha\,(c_a, \eta_e) = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right] \cdot c_a - \eta_e \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

daraus ergibt sich für gänzlich beliebige Leitwerksschnitte als Folge unserer Definition von η_e:

$$\left[\frac{\partial \alpha}{d\eta_e}\right] = -1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8\,a)$$

Der für einen bestimmten Leitwerksschnitt konstante Faktor, der gemäß (7) den effektiven Ruderwinkel η_e mit dem geometrischen verknüpft, ist stets positiv, da $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right]$ immer negativ ist.

η_e kann anschaulich gedeutet werden als der dem Ruderwinkel η bezüglich der Nullauftriebsrichtung $\alpha_{c_a=0}$ gleichwertige Beitrag zum Anstellwinkel, um den man sich den ganzen Flügel- oder Leitwerksschnitt samt Klappe oder Ruder gedreht zu denken hat. Diese Vorstellung wird zur Ermittlung der Anstellwinkelverteilung verwendet, wenn man mit Benutzung der Prandtlschen Theorie der tragenden Linie Aussagen über Flügel mit Klappen und Querruder gewinnen will.

Die als Ableitungen nach η_e gemäß dem Schema:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta_e}\right] \cdot \eta_e \\
c_m &= \left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_m}{\partial \eta_e}\right] \cdot \eta_e \\
c_r &= \left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta_e}\right] \cdot \eta_e \\
c_{a_R} &= \left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial \eta_e}\right] \cdot \eta_e
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

(mit $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta_e}\right] = -1$) definierten Koeffizienten sind in Bild 3, 4, 5 und 6 gestrichelt eingezeichnet.

Selbsteinstellung und stabilisierende Wirkung des losen Ruders.

Verschwindet das Gesamtmoment des Ruders, so folgt aus

$$c_r\,(c_a, \eta) = \left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta}\right] \cdot \eta = 0$$

die Änderung der Ruderstellung mit c_a:

$$\left[\frac{d\eta}{dc_a}\right]_{c_r=0} = -\frac{\left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right]}{\left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta}\right]} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

In Bild 8 zeigt die dünn ausgezogene Kurve für $s \to \infty$ die Abhängigkeit der Ruderselbsteinstellung von l_R/l_L.

Dieser c_a proportionalen Ruderverstellung $\left[\frac{d\eta}{dc_a}\right]_{c_r=0}$ entspricht eine ebensolche Änderung des effektiven Ruderwinkels

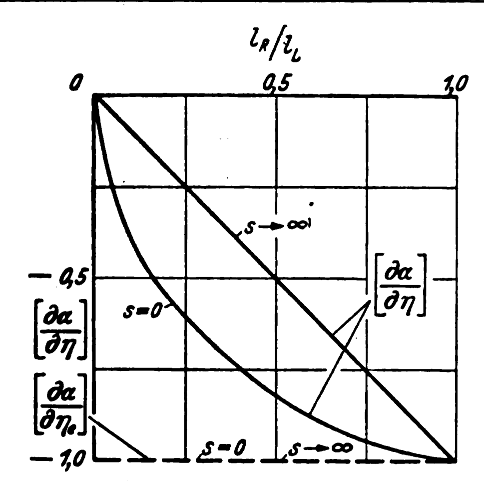
$$\left[\frac{d\eta_e}{dc_a}\right]_{c_r=0} = \left[\frac{d\eta_e}{d\eta}\right] \cdot \left[\frac{d\eta}{dc_a}\right]_{c_r=0} = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right] \frac{\left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right]}{\left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta}\right]} \quad (11)$$

die man als stabilisierende Wirkung des losen Ruders bezeichnen kann.

Denn $\left[\frac{d\eta_e}{dc_a}\right]_{c_r=0}$ ist gleich der Differenz der Neigungen der Winkelkurven, die ein bestimmter Leitwerksschnitt bei festem und bei losem Ruder aufweist:

$$\left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right]_\eta - \left[\frac{d\alpha}{dc_a}\right]_{c_r=0} = \left[\frac{d\eta_e}{dc_a}\right]_{c_r=0} \quad \ldots \quad (12)$$

Ist $\left[\frac{d\eta_e}{dc_a}\right]_{c_r=0}$ eine positive oder aber negative Zahl, so



$$\left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right]_{b \to \infty} = \frac{1}{2\pi} \equiv 9{,}1°$$

Bild 3. Anstellwinkel $\alpha\left(c_a, \eta, \frac{l_R}{l_L}\right) = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right] \cdot \eta$.

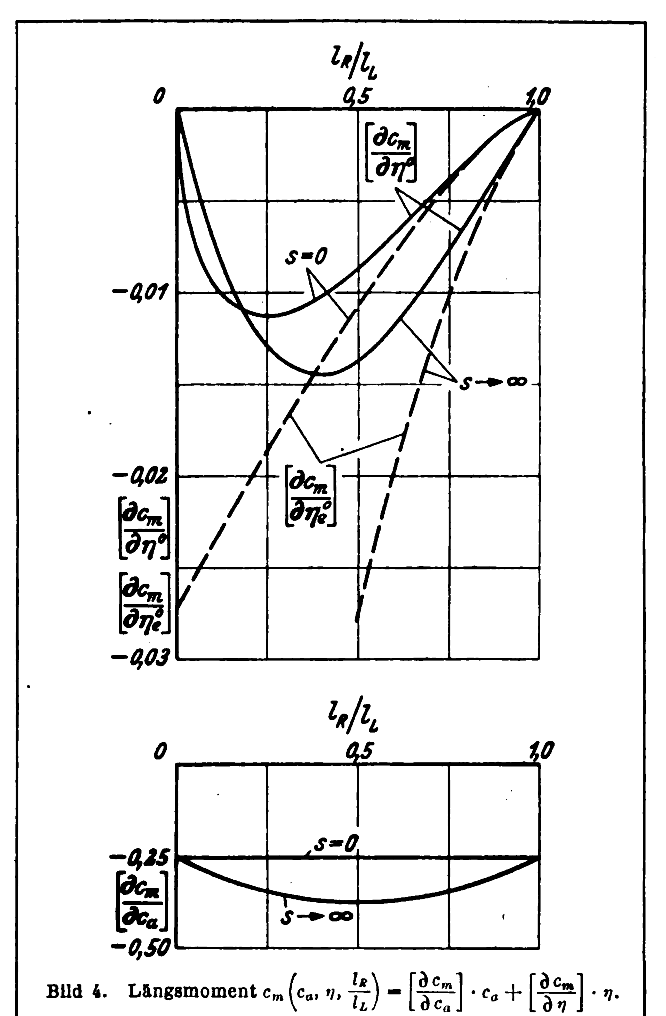


Bild 4. Längsmoment $c_m\left(c_a, \eta, \frac{l_R}{l_L}\right) = \left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_m}{\partial \eta}\right] \cdot \eta$.

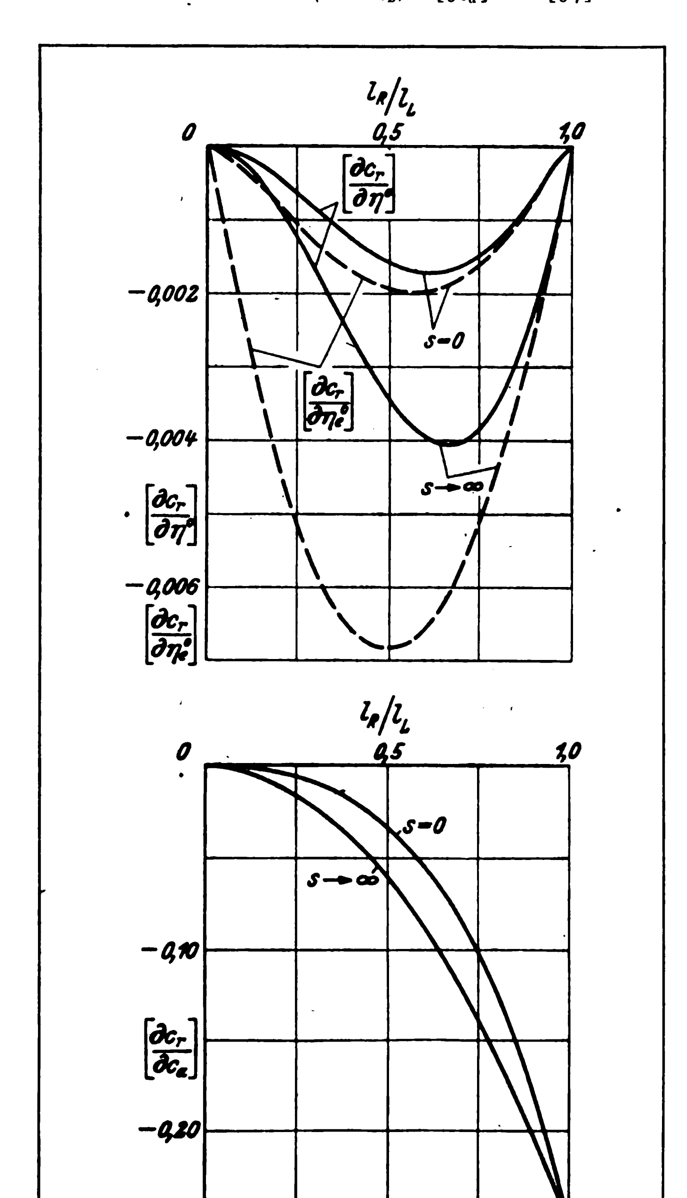


Bild 5. Rudermoment $c_r\left(c_a, \eta, \frac{l_R}{l_L}\right) = \left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_r^0}{\partial \eta}\right] \cdot \eta$.

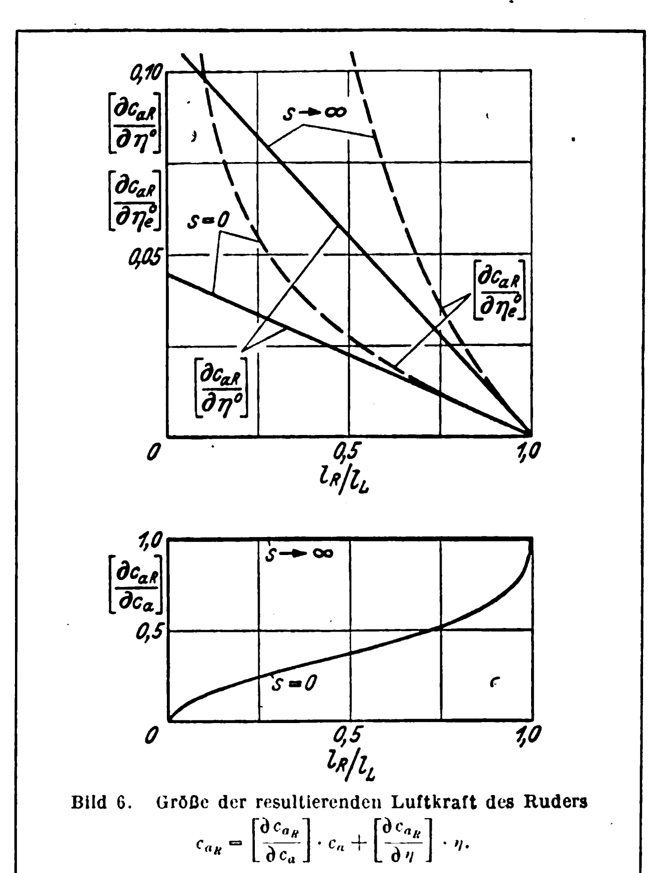


Bild 6. Größe der resultierenden Luftkraft des Ruders
$c_{a_R} = \left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial c_a}\right] \cdot c_a + \left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial \eta}\right] \cdot \eta$.

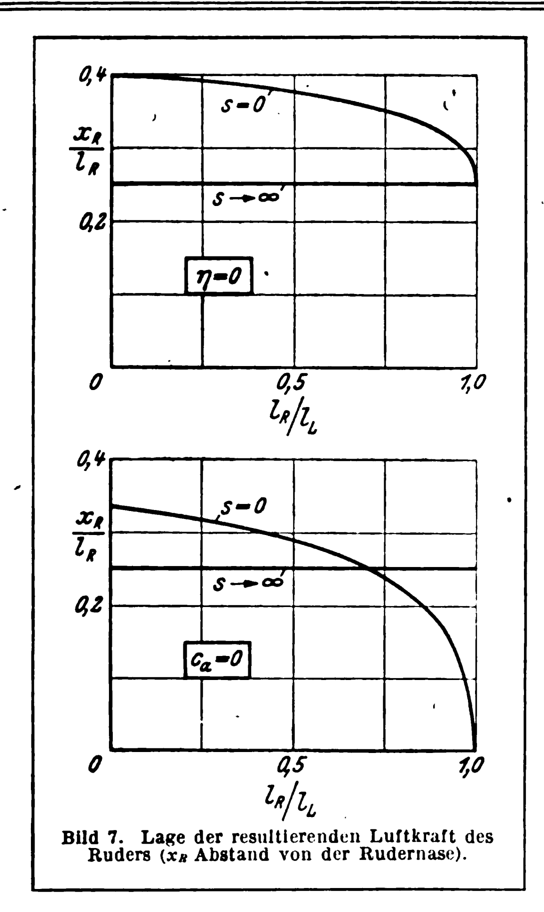


Bild 7. Lage der resultierenden Luftkraft des Ruders (x_R Abstand von der Rudernase).

fällt $\left[\frac{d\alpha}{dc_a}\right]_{c_r=0}$ kleiner oder aber größer aus als $\left[\frac{\partial\alpha}{\partial c_a}\right]_\eta$. Im zweiten Fall, zu dem vor allem der hier behandelte einfache Klappenflügel gehört, liegt dann eine negativ stabilisierende, kurz eine destabilisierende Wirkung des losen Ruders vor.

Daß (12) richtig ist, erkennt man aus (8): Bildet man die Ableitung von α (c_a, η) nach c_a einmal für η = const und ein zweites Mal für c_r (c_a, η) = 0, so erhält man im ersten Fall den Zahlenwert $\left[\frac{\partial\alpha}{\partial c_a}\right]_\eta$, im zweiten aber den Wert $\left[\frac{\partial\alpha}{\partial c_a}\right]_\eta - \left[\frac{d\eta_e}{dc_a}\right]_{c_r=0}$ für die Neigung der Winkelkurven α (c_a, η)$_{\eta\,=\,\text{const}}$ bzw. der einzigen Winkelkurve α (c_a, η)$_{c_r=0}$. Also ist die obengenannte Differenz tatsächlich gleich $\left[\frac{d\eta_e}{dc_a}\right]_{c_r=0}$.

III. Ergebnisse der Theorie für fehlenden Spalt bei verschwindender Profildicke (nach Glauert und Kirste).

a) Vorbemerkungen.

Denkt man sich den in Bild 2, links, mit s bezeichneten Spalt nun nicht mehr unbegrenzt groß, sondern von der Größenordnung der Leitwerkstiefe l_L (»Doppeldecker«) oder gar klein gegenüber l_L (»Doppelflügel«), so wird die wechselseitige Beeinflussung der Druckverteilung von Flosse und Ruder durchaus wesentlich, ja sogar entscheidend für die Zahlenwerte der in Abschnitt II definierten Koeffizienten [5], [6], [7] und [8].

Zunächst interessiert der schon 1927 von H. Glauert [2] erledigte Grenzfall verschwindenden Spaltes, der in Bild 2 rechts skizziert ist. L. Kirste hat 1932 die Arbeit von Glauert bezüglich der Lage der resultierenden Luftkraft des Ruders ergänzt [3], so daß ohne weiteres alle in Abschnitt II definierten Koeffizienten aus den Arbeiten der genannten Verfasser berechnet werden konnten.

Die Abhängigkeit dieser Koeffizienten von l_R/l_L ist ebenfalls in Bild 3 bis 8 dargestellt. Die betreffenden Kurven

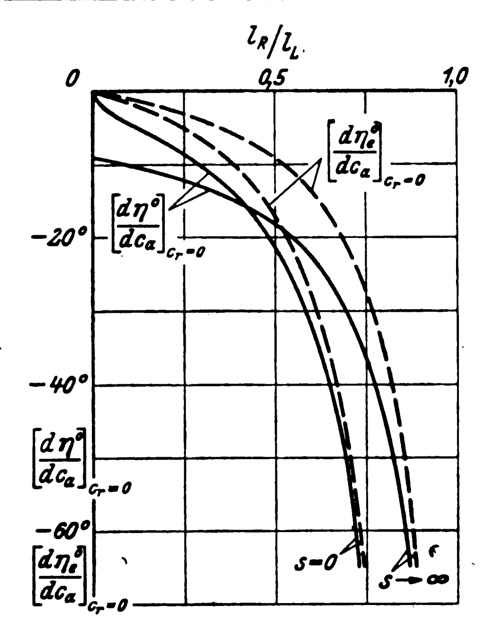


Bild 8. Selbsteinstellung ——— und stabilisierende Wirkung ------ des losen Ruders.

sind durch die Beschriftung $s = 0$ gekennzeichnet. (Ein Teil dieser numerischen Ergebnisse ist aus Glauerts Rep. & Mem. 1095 altbekannt.)

Vom Standpunkt der mathematischen Physik aus ist ein Vergleich der Auftragungen von Bild 3 bis 8 bezüglich Spalteinfluß durchaus sinnvoll. Handelt es sich doch um gleichwertige Lösungen ein und derselben Aufgabe für zwei wohl definierte Grenzfälle.

Technisch-physikalisch aber nützt diese Gegenüberstellung nur wenig, solange keine Zwischenwerte für endliche und insbesondere für kleine Spalte herangezogen werden. Man darf sich deshalb nicht verführen lassen, aus dem Einfluß unbegrenzt großen Spaltes voreilige Schlüsse auf den eines einigermaßen kleinen Spaltes ziehen zu wollen. Dasselbe gilt in bezug auf die Auswirkungen einer Rückverlegung der Ruderdrehachse; wäre doch im zweiten Grenzfall »fehlender Spalt« nur ein einziger η-Wert vorhanden, der diesem Grenzfall noch angehört!

Der Zweck dieser Gegenüberstellung ist vielmehr, die vorliegende Einführung in die nötigsten Definitionen sowie in die Darstellungsart der Ergebnisse mit wenigstens zwei charakteristischen Beispielen zu belegen, die durch ihre Einfachheit besonders gut zugänglich sind.

b) Die Beziehungen für die Druckverteilung.

Nach Grammel [4] ist die Druckdifferenz Δp zwischen Ober- und Unterseite im Abstand x von der Vorderkante der Platte, welche die Tiefe l_L habe, im Verhältnis zum Staudruck q gleich

$$\frac{\Delta p}{q} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{l_L}{x} - 1}\cdot c_a \quad \ldots\ldots\ (13)$$

Linearisiert man das für endliche Anstellwinkel gültige Ergebnis von Grammel (konforme Abbildung), so geht es in den von Glauert für $\eta = 0$ aus linearem Ansatz (Wirbelfläche) gewonnenen Ausdruck (13) über.

Mit Benutzung der φ und φ_R definierenden Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{l_L} &= \frac{1}{2}(1-\cos\varphi) \\ 1-\frac{l_R}{l_L} &= \frac{1}{2}(1-\cos\varphi_R) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (14)$$

ergibt sich die Beziehung für die Druckverteilung der geknickten Platte ohne Auftrieb für η im Gradmaß in der folgenden Form:

$$\frac{\Delta p}{q} = \frac{4}{\pi}\,\frac{\pi}{180}\left(-\sin\varphi_R\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} + 2\sum\frac{\sin n\varphi_R}{n}\sin n\varphi\right)\cdot\eta \quad (15)$$

oder

$$\frac{\Delta p}{q} = \frac{4}{\pi}\,\frac{\pi}{180}\left(-\sin\varphi_R\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos(\varphi+\varphi_R)}{1-\cos(\varphi-\varphi_R)}\right)\cdot\eta.$$

c) Die charakteristischen Leitwerksgrößen.

Diese lassen sich analog Schema (5), jetzt für $s = 0$, wenn η im Gradmaß gezählt wird, unter Beachtung von (14) aus (13) und (15) berechnen. Die Beziehungen lauten:

$$\left[\frac{\partial\alpha}{\partial c_a}\right] = \frac{180}{\pi}\,\frac{1}{2\pi} \quad (16\text{a})$$

$$\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\right] = -\frac{1}{\pi}(\pi-\varphi_R+\sin\varphi_R) \quad (16\text{b})$$

$$\left[\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right] = -\frac{1}{4} \quad (16\text{c})$$

$$\left[\frac{\partial c_m}{\partial\eta}\right] = -\frac{\pi}{180}\,\frac{1}{2}\sin\varphi_R(1-\cos\varphi_R) \quad (16\text{d})$$

$$\left[\frac{\partial c_r}{\partial c_a}\right] = -\frac{\sin\varphi_R}{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\cos\varphi_R\right) + \frac{\pi-\varphi_R}{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\cos\varphi_R\right) \quad (16\text{e})$$

$$\left[\frac{\partial c_r}{\partial\eta}\right] = -\frac{\pi}{180}\,\frac{\sin\varphi_R}{2\pi}(1-\cos\varphi_R)(\pi-\varphi_R-\sin\varphi_R) \quad (16\text{f})$$

$$\left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial c_a}\right] = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi-\varphi_R-\sin\varphi_R}{1+\cos\varphi_R} \quad (16\text{g})$$

$$\left[\frac{\partial c_{a_R}}{\partial\eta}\right] = \frac{\pi}{180}\,\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin^2\varphi_R}{1+\cos\varphi_R} \quad (16\text{h})$$

Die Lage der resultierenden Luftkraft des Ruders für $s = 0$ (vgl. Bild 7 sowie Bild 2 rechts) erhält man durch die folgenden Beziehungen:

$$\left(\frac{x_R}{l_R}\right)_{\eta=0} = 1-\frac{1{,}5}{1+\cos\varphi_R} + \frac{0{,}5\cdot\sin\varphi_R}{\pi-\varphi_R-\sin\varphi_R} \quad (17\text{a})$$

$$\left(\frac{x_R}{l_R}\right)_{c_a=0} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos\varphi_R}{1+\cos\varphi_R}\cdot\frac{\pi-\varphi_R-\sin\varphi_R}{\sin\varphi_R} \quad (17\text{b})$$

IV. Schrifttumsverzeichnis.

[1] Weinig, F., Der Strahleinfluß bei Windkanälen. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), Heft 7, S. 210.

[2] Glauert, H., Theoretical relationships for an aerofoil with hinged flap. ARC, Reports and Memoranda Nr. 1095, 1927.

[3] Kirste, L., Etudes sur les gouvernails compensés. Aéro-Club de France, Travaux du Cercle d'Etudes Aérotechniques. Fasc. VII. Paris 1932.

[4] Grammel, R., Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Sammlung Vieweg, Heft 39/40, S. 62, 1917.

[5] Söhngen, H., Auftrieb und Moment der geknickten Platte mit Spalt. Luftf.-Forschg. 17 (1940), Lfg. 1.

[6] Flügge-Lotz und Ginzel, Die ebene Strömung um ein geknicktes Profil mit Spalt. Jahrbuch 1939 der deutschen Luftfahrtforschung und Ing.-Archiv Bd. 11 (1940), S. 268.

[7] Jäckel, K., Beitrag zur Berechnung der Auftriebsverteilung in Tiefenrichtung bei Doppelflügel. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), Lfg. 12.

[8] Kleinwächter, J., Beitrag zur ebenen Leitwerkstheorie. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), Lfg. 3.

Spannungen, Formänderungen und Schwingungen einer kegelförmigen Flügelschale*).

Von A. Pflüger.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Zur Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes eines biegungsfesten, geraden Stabes, der einen dünnwandigen Hohlquerschnitt mit längs der Stabachse veränderlichen Abmessungen besitzt, sind die Formeln der technischen Balkenbiegungslehre, die darauf aufbauen, daß der Stab an jeder gerade betrachteten Stelle durch einen Zylinder angenähert wird, im allgemeinen nicht mehr ausreichend genau. Es wird vielmehr für die meisten Zwecke erforderlich, den Stab durch eine Kegelschale zu ersetzen. In der vorliegenden Arbeit soll am Beispiel einer Flügelschale gezeigt werden, wann im Flugzeugbau die kegelförmige Gestalt eines Stabes mit Hohlquerschnitt berücksichtigt werden muß, und unter welchen Umständen sie vernachlässigt werden kann.

Gliederung.

1. Aufgabenstellung.

Bei Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes von Flugzeugflügeln, -rümpfen und -leitwerken, die in Schalenbauweise ausgeführt sind, ist es in der Regel ausreichend, diese Bauteile als biegungsfeste, gerade Stäbe aufzufassen und dementsprechend zu berechnen. Dabei sind jedoch einige besondere Überlegungen erforderlich, die dadurch bedingt sind, daß es sich um Stäbe mit dünnwandigem Hohlquerschnitt handelt. U. a. ist es notwendig, der Veränderlichkeit der Querschnittsabmessungen längs der Stabachse besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Während es bei Vollquerschnitten üblich ist, den wirklichen Stab an jeder gerade betrachteten Stelle durch einen zylindrischen Stab gleichen Querschnitts anzunähern und mit den Ansätzen der technischen Balkenbiegungslehre zu berechnen, ist dieses Verfahren bei Hohlquerschnitten nicht mehr ausreichend genau. Es ist vielmehr erforderlich, in der Näherung einen Schritt weiterzugehen und den Stab durch eine Kegelschale zu ersetzen. Die sich hieraus allgemein für die Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes eines Stabes ergebenden Folgerungen sind an anderer Stelle bereits ausführlich erläutert worden[1]). Die nachstehenden Ausführungen sollen sich speziell auf den Flugzeugbau beziehen und insbesondere am Beispiel einer Flügelschale zeigen, wann hier die Abweichungen von der zylindrischen Form berücksichtigt werden müssen. Die für den Flügel gewonnenen Erkenntnisse reichen aus, um auch bei einer Rumpf- oder Flossenschale den Einfluß einer kegelförmigen Gestalt überblicken zu können.

2. Allgemeines, Bezeichnungen.

Den folgenden Untersuchungen sei der in Bild 1 dargestellte einseitig eingespannte Flügel zugrunde gelegt. Die Einspannstelle ist am Rumpf oder an einer Motorgondel zu denken. Der tragende Teil des Flügels, dessen Querschnitt z. B., wie in Bild 1 angedeutet, ein zweiholmiger Kastenquerschnitt sein kann, möge eine Kegelschale sein bzw. durch eine solche angenähert ersetzt werden. Die Stabachse sei eine durch die Kegelspitze hindurchgehende Gerade, die als Verbindungslinie der Schwerpunkte des tragenden Teiles aller zur Stabachse senkrechten Querschnitte definiert sei und in Bild 1 als Schwerachse der tragenden Schale bezeichnet ist. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß der Wandstärkenverlauf der Schale so beschaffen ist bzw. durch einen anderen Verlauf so angenähert wird, daß alle Querschnitte einander ähnlich sind und infolgedessen die Schwerpunkte tatsächlich auf einer Geraden liegen. Unter dieser Voraussetzung ist dann die Verbindungslinie der Drillruhepunkte der einzelnen Querschnitte, die Drillachse, ebenfalls eine Gerade, die durch die Spitze des Kegels hindurchgeht. In Bild 1 schließlich ist noch angenommen, daß der einschließlich der nichttragenden Teile berechnete Schwerpunkt jedes Flügelschnittes erstens auf einer bestimmten durch die Kegelspitze gehenden Geraden liegt und zweitens zusammen mit dem Drillruhepunkt auf einer Querschnittshauptachse liegt. Hinsichtlich der beiden letztgenannten Voraussetzungen würde jedoch auch irgendeine andere Annahme ohne weiteres möglich sein und für die Rechnung keine wesentliche Erschwerung bedeuten.

Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt (s. Bild 1):

x, y, z	m	Koordinaten eines Punktes der Drillachse nach der Verformung, gemessen in einem rechtwinkligen System, dessen Nullpunkt in der Kegelspitze liegt. Die y-Achse möge mit der Stabachse der unverformten Schale zusammenfallen, während die x- und z-Achse den Hauptachsen der Querschnitte der unverformten Schale parallel sein sollen,
ψ		Winkel, um den sich ein Querschnitt bei der Verformung dreht,
a	m	Länge der Kegelschale,
a_0	m	y-Koordinate des Endquerschnittes der Schale,
a_1	m	y-Koordinate des Einspannquerschnittes,

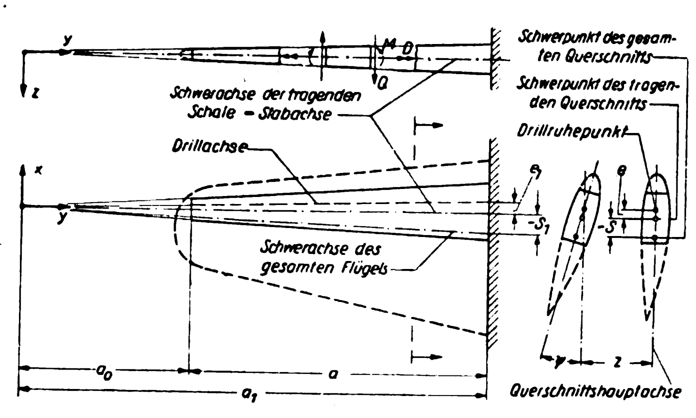
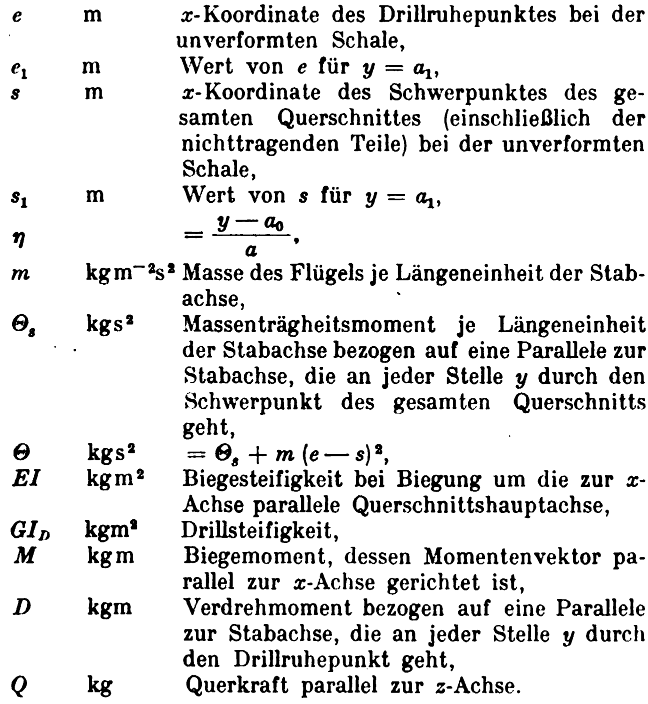


Bild 1. Skizze des untersuchten Flügels.

*) A 22 42.

[1]) A. Pflüger, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1942), S. 99. Von den Ergebnissen dieser Arbeit soll im folgenden ohne erneute Ableitung Gebrauch gemacht werden.



e	m	x-Koordinate des Drillruhepunktes bei der unverformten Schale,
e_1	m	Wert von e für $y = a_1$,
s	m	x-Koordinate des Schwerpunktes des gesamten Querschnittes (einschließlich der nichttragenden Teile) bei der unverformten Schale,
s_1	m	Wert von s für $y = a_1$,
η		$= \frac{y - a_0}{a}$,
m	$\mathrm{kg\,m^{-2}s^2}$	Masse des Flügels je Längeneinheit der Stabachse,
Θ_s	$\mathrm{kg\,s^2}$	Massenträgheitsmoment je Längeneinheit der Stabachse bezogen auf eine Parallele zur Stabachse, die an jeder Stelle y durch den Schwerpunkt des gesamten Querschnitts geht,
Θ	$\mathrm{kg\,s^2}$	$= \Theta_s + m\,(e - s)^2$,
EI	$\mathrm{kg\,m^2}$	Biegesteifigkeit bei Biegung um die zur x-Achse parallele Querschnittshauptachse,
GI_D	$\mathrm{kg\,m^2}$	Drillsteifigkeit,
M	kgm	Biegemoment, dessen Momentenvektor parallel zur x-Achse gerichtet ist,
D	kgm	Verdrehmoment bezogen auf eine Parallele zur Stabachse, die an jeder Stelle y durch den Drillruhepunkt geht,
Q	kg	Querkraft parallel zur z-Achse.

Die als positiv gewählte Richtung von M, D und Q geht aus Bild 1 hervor, wo ein Element der Flügelschale mit den angreifenden Kräften und Momenten dargestellt ist. Eine Beanspruchung und Verformung des Flügels in der x-y-Ebene soll im folgenden außer Betracht bleiben.

3. Spannungszustand.

Für die Ermittlung des Spannungszustandes des Flügels sind folgende Ergebnisse der bereits zitierten Arbeit des Verfassers von Wichtigkeit, die hier ohne Ableitung angeführt seien:

Die in der Schalenfläche auftretenden Normalspannungen können mit hinreichender Genauigkeit in der üblichen Art und Weise aus dem Quotienten des Biegemomentes M und des entsprechenden Widerstandsmomentes berechnet werden.

Bei Ermittlung der Schubspannungen können zwar ebenfalls mit guter Näherung dieselben Formeln wie bei einem zylindrischen Stab verwendet werden; es ist jedoch statt der Querkraft Q der Wert $Q - \frac{M}{y}$ und statt des Drehmomentes D der Wert $D - \frac{e}{y} M$ einzusetzen. Die Koordinate e des Drillruhepunktes kann dabei nach den bekannten Methoden wie bei einer Zylinderschale ermittelt werden.

Um die praktische Bedeutung dieser Rechenvorschriften für die bei einem Flügel vorliegenden Verhältnisse übersehen zu können, ist zunächst in Bild 2 für eine rechteckige und für eine dreieckige Belastungsfläche der Quotient $\frac{Q - \frac{M}{y}}{Q}$, also das Verhältnis der bei der Schubspannungsrechnung einzusetzenden abgeminderten Querkraft zur wirklichen Querkraft in Abhängigkeit von η aufgetragen. Die kegelförmige Gestalt der Flügelschale ist dabei durch den Parameter $\frac{a_0}{a}$ gekennzeichnet. Die in Bild 2 dargestellten Kurven mit $\frac{a_0}{a} = 0{,}3$ und $\frac{a_0}{a} = 1{,}0$ dürften den praktisch wichtigsten Bereich einschließen. Man erkennt, daß die Abminderung der Querkraft und die damit verbundene Beeinflussung der Höhe der Schubspannung wesentlich ist und nicht vernachlässigt werden kann[2]).

[2]) Vgl. hierzu auch H. Ebner, Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 96.

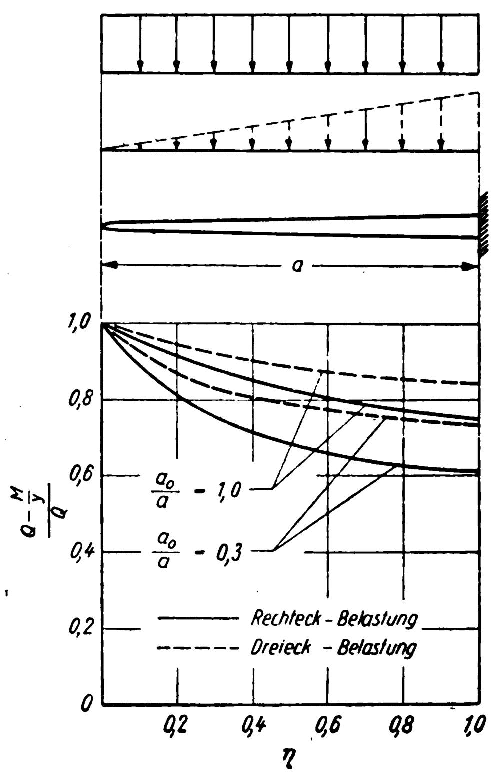


Bild 2. Verhältnis der abgeminderten zur wirklichen Querkraft in Abhängigkeit von η.

Zur Abschätzung der Bedeutung des vom Drehmoment abzuziehenden Betrages $\frac{e}{y} M$ genügt folgende Überlegung. Das Verhältnis $\frac{e}{y}$ dürfte sich bei praktischen Ausführungen etwa zwischen den Grenzen $\pm 0{,}02$ bewegen. Würde das Biegemoment stets dieselbe Größenordnung wie das Drehmoment haben, so könnte $\frac{e}{y} M$ gegenüber D ohne weiteres vernachlässigt werden. Die Verhältnisse liegen aber bei den meisten für die Flügelbeanspruchung wichtigen Lastfällen so, daß die Größenordnung des Biegemomentes um rund eine Zehnerpotenz größer ist als die des Drehmomentes. Es ergibt sich also, daß auch bei den durch Torsion hervorgerufenen Schubspannungen der Einfluß einer kegelförmigen Gestalt der Schale wesentlich werden kann.

4. Verformungszustand.

Gelegentlich kann eine genaue Berechnung der Biege- und Verdrehlinie eines Flügels wünschenswert sein. Dieses ist z. B. dann der Fall, wenn aus Verformungsmessungen, die bei einem statischen Bruchversuch gemacht werden, auf die für Schwingungsrechnungen wichtigen Steifigkeiten des Flügels geschlossen werden soll.

Die Differentialgleichung der Verdrehlinie hat die Form

$$\psi' = \frac{1}{G I_D}\left(D - \frac{e}{y} M\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1\,b)$$

wenn durch Striche Ableitungen nach y gekennzeichnet werden. Gegenüber der für eine zylindrische Schale gültigen Beziehung ist wieder nur die Abminderung des Drehmomentes zu beachten; die Verdrehsteifigkeit GI_D kann mit guter Näherung, wie üblich, berechnet werden. Aus (1 b) erkennt man, daß der Flügel eine Verdrehung erfährt, wenn er nur durch ein reines Biegemoment beansprucht wird. Daraus folgt, daß auch eine Krümmung z'' entstehen muß, wenn nur ein Drehmoment angreift. Für die Differentialgleichung der Biegelinie ergibt sich daraus folgendes. Es sei

$$\psi = \psi_D + \psi_M, \qquad z = z_D + z_M.$$

ψ_D und z_D seien die Verformungen für einen Beanspruchungszustand mit $D \neq 0$, $M = 0$, während ψ_M und z_M die Verformungen bei einem Zustand $M \neq 0$, $D = 0$ sein sollen.

Nach (1 b) ist

$$\psi'_D = \frac{D}{G I_D}, \qquad \psi'_M = -\frac{e}{y}\frac{M}{G I_D}.$$

Für z_M gilt die bekannte Formel

$$z''_M = -\frac{M}{E I},$$

wobei auch die Biegesteifigkeit EI wie bei einer gewöhnlichen zylindrischen Schale berechnet werden kann. Die Arbeit, die ein Zustand $D \neq 0$, $M = 0$ auf den Verschiebungswegen eines Zustandes $M \neq 0$, $D = 0$ leistet, hat je Längeneinheit der Stabachse die Größe $D\,\psi'_M$. Diese Arbeit muß nach dem Bettischen Satz gleich der Arbeit $-M z''_D$ sein, die der Zustand $M \neq 0$, $D = 0$ auf den Verschiebungswegen des Zustandes $D \neq 0$, $M = 0$ leistet. Man erhält also

$$z''_D = -\frac{D}{M}\,\psi'_M = \frac{e}{y}\frac{D}{G I_D}.$$

Die Differentialgleichung der Biegelinie lautet dann

$$z'' = -\frac{M}{E I} + \frac{e}{y}\frac{D}{G I_D} \quad \ldots\ldots \quad (1\,\text{a})$$

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\overline{EI} = \frac{E I}{1 - \dfrac{e^2}{y^2}\dfrac{E I}{G I_D}}, \qquad \overline{GI}_D = \frac{G I_D}{1 - \dfrac{e^2}{y^2}\dfrac{E I}{G I_D}}$$

kann man nach einiger Umformung (1 a) und (1 b) auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} M &= -\overline{EI}\left(z'' - \frac{e}{y}\psi'\right) \\ D &= \overline{GI}_D\,\psi' - \overline{EI}\,\frac{e}{y}\,z'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2\,\text{a, b})$$

schreiben. Wegen der Kleinheit der Größe $\frac{e}{y}$ ist der Nenner in den Ausdrücken für $\overline{EI}$ und $\overline{GI}_D$ nur wenig von Eins verschieden, so daß bei praktischen Rechnungen in der Regel $\overline{EI} \approx EI$ und $\overline{GI}_D \approx GI_D$ gesetzt werden kann.

Die Bedeutung der Gl. (1) bzw. (2) für die Verdreh- und Biegelinie eines Flügels läßt sich leicht übersehen. Da nach (1 b) der Verdrehwinkel ψ' dem um den Betrag $\frac{e}{y}M$ abgeminderten Torsionsmoment proportional ist, gilt für die Verdrehlinie das gleiche, was in Abschnitt 3 für die Torsionsschubspannungen gesagt wurde: Es ist im allgemeinen notwendig, die kegelförmige Gestalt der Schale zu berücksichtigen, weil M meist erheblich größer als D ist. Aus demselben Grunde ergibt sich jedoch nach (1 a) für die Biegelinie, daß das Glied $\frac{e}{y}\frac{D}{G I_D}$ in der Regel gestrichen werden kann und nur in den Ausnahmefällen beibehalten werden muß, wo D groß gegenüber M ist.

5. Schwingungen.

Die Gl. (1) und (2) zeigen, daß die Differentialgleichungen der Biege- und Verdrehlinie miteinander gekoppelt sind. Da bei Flattervorgängen die Kopplung bekanntlich von großem Einfluß ist, liegt die Vermutung nahe, daß bei der Untersuchung derartiger Schwingungserscheinungen die Berücksichtigung der kegelförmigen Gestalt der Schale wesentlich ist. Zur Nachprüfung dieser Vermutung sollen im folgenden die zur Berechnung der freien Schwingungen des Flügels notwendigen Beziehungen aufgestellt und für ein Beispiel zahlenmäßig ausgewertet werden.

Bei freien ungedämpften Schwingungen gilt für das Biege- und das Torsionsmoment, wenn Punkte Ableitung nach der Zeit t bedeuten

$$\left.\begin{aligned} M'' &= m\,[z + (e - s)\,\psi]^{\cdot\cdot}, \\ D' &= \{\Theta_s\,\psi + m\,(e - s)\,[z + (e - s)\,\psi]\}^{\cdot\cdot}, \\ &= [\Theta\,\psi + m\,(e - s)\,z]^{\cdot\cdot}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2) ein, so bekommt man die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(\overline{EI}\,z'')'' + m\,\ddot z - \left(\overline{EI}\,\frac{e}{y}\,\psi'\right)'' + m\,(e - s)\,\ddot\psi = 0, \\ &(\overline{GI}_D\,\psi')' - \Theta\,\ddot\psi - \left(\overline{EI}\,\frac{e}{y}\,z''\right)' - m\,(e - s)\,\ddot z = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4\,\text{a, b})$$

Für praktische Rechnungen ist es zur Aufstellung von Näherungslösungen nach dem Ritzschen bzw. Galerkinschen Verfahren wichtig, das zu den Gl. (4) gehörige Variationsproblem zu kennen. Dieses ergibt sich folgendermaßen. Die potentielle Energie der verformten Flügelschale, die mit P bezeichnet sei, ist

$$P = \frac{1}{2}\int_0^a (-M\,z'' + D\,\psi')\,dy.$$

Unter Benutzung von (2) erhält man daraus

$$P = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\overline{EI}\,z''^2 + \overline{GI}_D\,\psi'^2 - 2\,\overline{EI}\,\frac{e}{y}\,z''\,\psi'\right) dy.$$

Für die kinetische Energie, die mit T bezeichnet sei, gilt

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a \left\{m\,[z + (e - s)\,\psi]^{\cdot\,2} + \frac{1}{2}\,\Theta_s\,\dot\psi^2\right\} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a [m\,\dot z^2 + 2\,m\,(e - s)\,\dot z\,\dot\psi + \Theta\,\dot\psi^2]\,dy.$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip ist nun

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} (P - T)\,dt = 0,$$

wobei t_0 und t_1 die Grenzen des (geeignet zu wählenden) Zeitintervalles sind, über das die Integration erstreckt wird.

Man erhält dann

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^a \Big[\overline{EI}\,z''^2 + \overline{GI}_D\,\psi'^2 - 2\,\overline{EI}\,\frac{e}{y}\,z''\,\psi' - m\,\dot z^2 - 2\,m\,(e - s)\,\dot z\,\dot\psi - \Theta\,\dot\psi^2\Big]\,dy\,dt = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

Bildet man die Eulerschen Gleichungen dieses Variationsproblems, so ergeben sich wieder die Differentialgleichungen (4).

Zur Abschätzung des Einflusses der kegelförmigen Gestalt der Schale sei folgendes Zahlenbeispiel betrachtet:

$$a = 10\,\text{m}, \quad a_0 = 5\,\text{m}, \quad a_1 = 15\,\text{m}, \quad e_1 - s_1 = 0{,}60\,\text{m}.$$

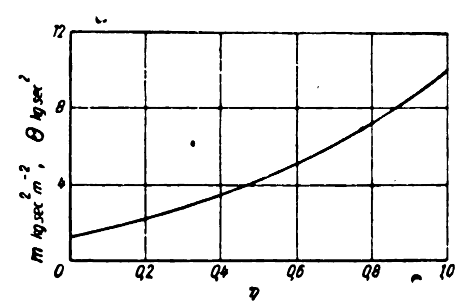


Bild 3. Masse und Trägheitsmoment in Abhängigkeit von η.

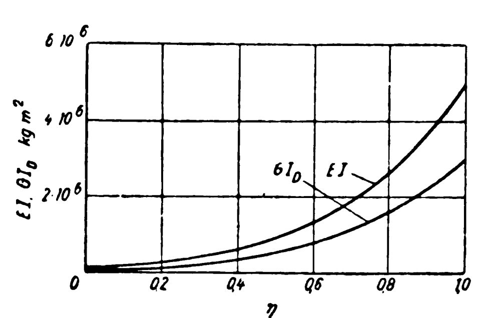


Bild 4. Biege- und Verdrehsteifigkeit in Abhängigkeit von η.

m und Θ nach Bild 3, EI und GI_D nach Bild 4. Der Abstand e_1 bzw. die dimensionslose Größe $\frac{e_1}{a_1}$ soll veränderlich sein. Die Untersuchung möge sich auf die Ermittlung der niedrigsten Eigenfrequenzen des Flügels beschränken. Es sei der Ansatz

$$z = A\,\bar{z}\sin\nu t, \qquad \psi = B\,\bar{\psi}\sin\nu t$$

benutzt. Dabei sind A und B Konstanten; $\bar{z}$ und $\bar{\psi}$ nur von y abhängige Funktionen, die so normiert seien, daß sie für $y = a_1$, $\eta = 1$ den Wert 1 annehmen; ν ist die Kreisfrequenz der Schwingung. Man erhält dann aus (5), wenn man die Integration über die Zeit ausführt (etwa mit $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{\nu}$)

$$\delta\int_0^a\Big\{A^2(\overline{EI}\,\bar{z}''^2 - \nu^2 m\,\bar{z}^2) + B^2(\overline{GI}_D\,\bar{\psi}'^2 - \nu^2\,\Theta^2\,\bar{\psi}^2) - 2AB\Big[\overline{EI}\frac{e}{y}\bar{z}''\bar{\psi}' + \nu^2 m\,(e-s)\,\bar{z}\,\bar{\psi}\Big]\Big\}\,dy = 0.$$

Führt man auch die Integration über y aus und benutzt die abkürzenden Bezeichnungen

$$I_A = \int_0^a \overline{EI}\,\bar{z}''^2\,dy, \qquad J_A = \int_0^a m\,\bar{z}^2\,dy,$$

$$I_B = \int_0^a \overline{GI}_D\,\bar{\psi}'^2\,dy, \qquad J_B = \int_0^a \Theta\,\bar{\psi}^2\,dy,$$

$$I_{AB} = \int_0^a \overline{EI}\,\frac{e}{y}\,\bar{z}''\bar{\psi}'\,dy, \qquad J_{AB} = \int_0^a m\,(e-s)\,\bar{z}\,\bar{\psi}\,dy,$$

$$= \frac{e_1}{a_1}\int_0^a \overline{EI}\,\bar{z}''\bar{\psi}'\,dy, \qquad = \frac{e_1-s_1}{a_1}\int_0^a m\,y\,\bar{z}\,\bar{\psi}\,dy,$$

so bekommt man

$$\delta[A^2(I_A - \nu^2 J_A) + B^2(I_B - \nu^2 J_B) - 2AB\,(I_{AB} + \nu^2 J_{AB})] = 0.$$

Für die Konstanten A und B ergeben sich daraus die Gleichungen

$$A\,(I_A - \nu^2 J_A) - B\,(I_{AB} + \nu^2 J_{AB}) = 0,$$
$$A\,(I_{AB} + \nu^2 J_{AB}) - B\,(I_B - \nu^2 J_B) = 0,$$

aus denen zur Bestimmung der beiden Koppelfrequenzen die Beziehung

$$\nu^4\,(J_A J_B - J_{AB}^2) - \nu^2\,(I_A J_B + J_A I_B + 2\,I_{AB} J_{AB}) + I_A I_B - I_{AB}^2 = 0 \quad . \; . \; . \quad (6)$$

folgt.

Bei Berechnung der Integrale I und J genügt es für den hier verfolgten Zweck vollkommen, wenn für $\bar{z}$ und $\bar{\psi}$ dem Ritzschen Verfahren entsprechend Funktionen eingesetzt werden, die mit den wirklichen nur angenähert übereinstimmen. Die Kopplung zwischen Verdreh- und Biegeschwingung ist für die praktisch bei einem Flügel vorliegenden Verhältnisse, denen das gewählte Beispiel entspricht, nicht groß. Es ist daher am zweckmäßigsten, für $\bar{z}$ und $\bar{\psi}$ die Funktionen einzusetzen, die sich bei Vernachlässigung der Kopplungsglieder in (4) aus den Gleichungen

$$(\overline{EI}\,\bar{z}'')'' - \nu_B^{*2}\,m\,\bar{z} = 0,$$
$$(\overline{GI}_D\,\bar{\psi}')' + \nu_D^{*2}\,m\,\bar{\psi} = 0$$

ergeben, wobei ν_B^* und ν_D^* die Kreisfrequenzen für die »reine« Biege- und Verdrehschwingung sein sollen. Die beiden Differentialgleichungen können numerisch durch Iteration leicht gelöst werden. Das Ergebnis ist in Bild 5 aufgetragen. (Für die Frequenzen ergibt sich dabei $\nu_B^*\frac{60}{2\pi} = 848\ \text{min}^{-1}$, $\nu_D^*\frac{60}{2\pi} = 360\ \text{min}^{-1}$.) Mit den Funktionen von Bild 5 erhält man dann nach (6) die Frequenzgleichung

$$\nu^4 - \nu^2\Big(102{,}35 - \frac{e_1}{a_1}\,1{,}03\Big)\,10^2 + \Big(123{,}17 - \frac{e_1^2}{a_1^2}\,0{,}27\Big)\,10^5 = 0,$$

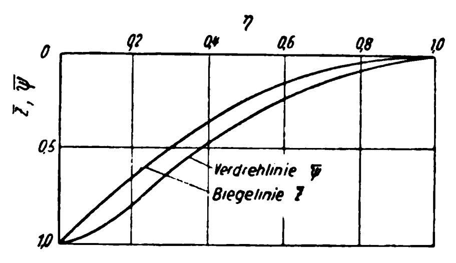


Bild 5. Biege- und Verdrehlinie bei verschwindender Kopplung.

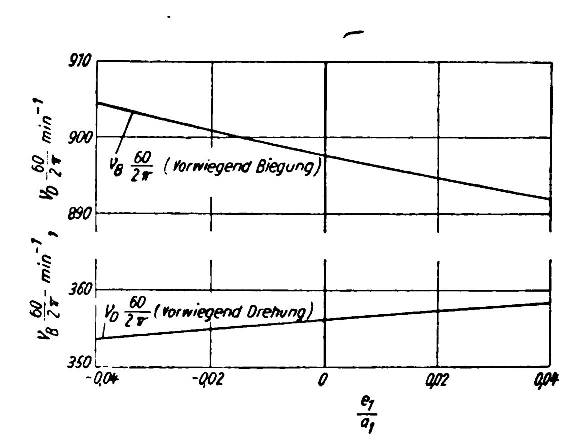


Bild 6. Schwingungszahlen in Abhängigkeit von $\frac{e_1}{a_1}$.

deren reelle Wurzeln wieder mit ν_B und ν_D bezeichnet seien, wobei ν_B zu der Schwingung mit vorwiegend Biegung und ν_D zu der Schwingung mit vorwiegend Drehung gehört. Bild 6 zeigt ν_B und ν_D in Abhängigkeit von $\frac{e_1}{a_1}$. Wie bereits erwähnt, bewegt sich $\frac{e_1}{a_1}$ bei praktischen Ausführungen etwa zwischen den Grenzen $\pm 0{,}02$. Man erkennt aus Bild 6, daß selbst dann, wenn $\frac{e_1}{a_1}$ die außergewöhnlich hohen Werte $\pm 0{,}04$ annimmt, die Veränderung der Schwingungszahlen gegenüber $\frac{e_1}{a_1} = 0$ noch nicht einmal 1% beträgt. Es ergibt sich also die Folgerung, daß für Schwingungsrechnungen die kegelförmige Gestalt des Flügels unbedenklich vernachlässigt werden kann.

6. Zusammenfassung.

Nach den obigen Ausführungen ergeben sich für die Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes einer kegelförmigen Flügelschale folgende Erkenntnisse, die sinngemäß auch auf Rumpf- und Flossenschalen übertragen werden können.

1. Bei Spannungsrechnungen muß bei Ermittlung des Schubflusses berücksichtigt werden, daß statt der Querkraft Q und statt des Drehmomentes D die Größen $Q - \frac{M}{y}$ bzw. $D - \frac{e}{y}M$ einzusetzen sind.

2. Bei Verformungsrechnungen ist in der Differentialgleichung der Verdrehlinie ebenfalls statt D das um den Betrag $\frac{e}{y}M$ abgeminderte Drehmoment einzusetzen. Für die Differentialgleichung der Biegelinie kann jedoch im allgemeinen die übliche für zylindrische Stäbe gültige Form benutzt werden, wenn nicht ausnahmsweise das Drehmoment gegenüber dem Biegemoment groß ist.

3. Bei Schwingungsrechnungen ist der Einfluß der kegelförmigen Gestalt der betreffenden Schale unwesentlich.



Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 20 | LFG. 2 SEITE 33 BIS 56 | MÜNCHEN, 27. 2. 1943

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Die Schriftenreihe erscheint in Monatslieferungen. Sie kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Halbjahresbezugspreis RM. 12.— einschließlich 24 Pf. Zeitungsgebühr und 4 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: Preise auf Anfrage! Halbjährlich durch die Post (in solchen Ländern, in denen Postbezug zugelassen) oder durch den Buchhandel bei bandweiser Berechnung. — Einzellieferung RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr. Nach dem Ausland nur gegen Voreinsendung des Betrages.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangenen Bandes erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Einzellieferungen werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Schriftenreihe direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Bandes Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 | 27. Februar 1943 | Lfg. 2

Möglichkeiten zur Herabsetzung des elektrischen Oberflächenwiderstandes von Aluminium und Aluminiumlegierungen.

Von C. Wagner und V. Stein.

Bericht der Technischen Hochschule Darmstadt, Eduard-Zintl-Institut für anorganische und physikalische Chemie.

Die Möglichkeiten, den Oberflächenwiderstand von Aluminium durch verschiedene, hauptsächlich chemische Oberflächenbehandlungen (Aufbringen von Metallen mit brauchbaren Kontakteigenschaften) herabzusetzen, wurden untersucht. Für die Anwendung geeignete, chemische Verfahren konnten nicht gefunden werden. Auf beschränkt brauchbare andere Verfahren wird hingewiesen (plattieren, galvanisieren und auflöten).

Gliederung.

A. Problemstellung.

Auf Grund mündlicher Besprechungen vom September 1939 hatte die Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt die Aufgabe gestellt, Versuche zur Verbesserung der Oberflächeneigenschaften von Aluminium und Aluminiumlegierungen auszuführen. Es ist bekannt, daß Aluminium sich an der Luft sehr rasch mit einer dünnen Oxydhaut bedeckt, die den elektrischen Strom schlecht leitet, so daß beim Verklemmen von elektrischen Leitungsdrähten aus Aluminium Schwierigkeiten durch die Größe des Übergangswiderstandes auftreten. Im besonderen ist somit zu untersuchen, inwieweit die Kontaktgabe zwischen Aluminiumdrähten durch physikalisch-chemische Maßnahmen zu verbessern ist, um die bereits vorhandenen konstruktiven Maßnahmen in der mechanischen Ausführung der Klemmen zu unterstützen[1].

B. Allgemeine Möglichkeiten zur Verminderung des Oberflächenwiderstandes von Aluminium und Überblick über die einzelnen Versuche.

Eine Verminderung des Oberflächenwiderstandes kann entweder durch Gegenwart verhältnismäßig edler Metalle auf der Oberfläche oder u. U. auch durch die Gegenwart von besser leitenden Oxydphasen erzielt werden. Eine Veränderung des Oberflächenwiderstandes durch Legierungszusatz zum Aluminium über den gesamten Querschnitt erscheint wenig aussichtsreich, da alle Zusätze, die in größerer Menge gemacht werden, die elektrische Leitfähigkeit im Leiterquerschnitt sehr ungünstig beeinflussen. Hieraus ergibt sich, daß nur eine geeignete Oberflächenbehandlung in Frage kommt.

Somit sind alle diejenigen Verfahren zur Herstellung metallischer Überzüge in Betracht zu ziehen, wie sie bereits bisher in der Technik zum Zwecke des Korrosionsschutzes benutzt werden[2]. Für letztgenannten Zweck müssen die Überzüge allerdings möglichst weitgehend porenfrei sein. Für die Zwecke des besseren Oberflächenkontaktes genügt es jedoch durchaus, wenn der eigentliche Kontakt nur auf einem Teil der Berührungsfläche zwischen Aluminiumdraht und Klemme erreicht wird. Hierdurch sind die Forderungen für Metallüberzüge zur Verminderung des elektrischen Oberflächenwiderstandes wesentlich weniger streng als für Zwecke des Korrosionsschutzes. Die gegebene Form — Drähte von 1 mm Dmr. — bedeutet allerdings verfahrenstechnisch eine Erschwerung im Vergleich zu der Herstellung eines Schutzüberzuges gegen Korrosion auf kompakten Stücken oder Blech. Im Einzelfall ist noch zu prüfen, inwieweit die Gegenwart von Fremdmetall durch die Möglichkeit zur Bildung von Lokalelementen korrosionsfördernd wirkt.

Insgesamt kommen folgende Verfahren in Betracht:

1. Herstellung von Aluminiumdrähten aus Blöcken mit aufplattiertem Fremdmetall, z. B. Kupfer: dieser Weg ist bereits bei der Herstellung von »Cupal« beschritten worden und hat den Nachteil eines verhältnismäßig großen Kupferaufwandes (20 Volumprozent)[3].

2. Elektrolytisches Überziehen von Aluminiumdrähten mit geeigneten Fremdmetallen; gegen dieses Verfahren spricht die Tatsache, daß das elektrolytische Überziehen von Aluminium ganz allgemein gewisse Schwierigkeiten macht, die besonders bei einzelnen Drähten dünner Litzen besonders hoch sein würden.

3. Überziehen von Aluminiumdrähten mit Fremdmetall durch Eintauchen in geeignete wäßrige Fremdmetall-Lösungen (Verfahren nach Jirotka und nach Boulanger) Tastversuche führten zu unbefriedigenden Ergebnissen (vgl. Abschnitt D).

4. Aufbringen von Überzügen aus Fremdmetall durch Erhitzen mit Fremdmetallpulver analog dem Sheradisieren von Eisen durch Erhitzen mit Zinkstaub. Versuche dieser Art erscheinen bei Aluminium wegen der stets vorhandenen natürlichen Oxydhaut wenig aussichtsvoll.

5. Aufbringen von Überzügen aus Fremdmetall durch Eintauchen in flüssige Metalle oder Legierungen analog der Feuerverzinkung von Eisen. Die Auswahl der überhaupt in Frage kommenden Metalle ist gering, da naturgemäß der Erstarrungspunkt der Tauchbäder unterhalb des Aluminium-Schmelzpunktes gelegen sein muß. Versuche mit dem »Metallisierungslot L 111«, wie es von der Firma Siemens & Halske zur Vorbereitung von Aluminiumkabeln zum Verlöten benutzt wird, ergaben gute Ergebnisse (vgl. Ab-

[1]) Vgl. hierzu H. Viehmann, Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. III, 24.

[2]) Vgl. hierzu die allgemeine Übersicht bei W. Machu, Metallische Überzüge. Leipzig 1941.

[3]) Vgl. hierzu H. Viehmann, Fußnote 1.

schnitt E). Nachteilig ist jedoch die Verwendung von besonders knappen Sparmetallen wie Zinn und Kadmium.

6. Einwirkung von Fremdmetalldämpfen. Bei Temperaturen unterhalb des Aluminium-Schmelzpunktes (660° C) haben nur Zink und Kadmium genügend hohe Dampfdrucke. Besonders die Kadmierung auf galvanischem Wege oder durch Aufbringen von flüssigem Kadmium hat sich in anderer Hinsicht als vorteilhaft erwiesen[4]). Gelegentlich durchgeführte Versuche mit 20stündiger Einwirkung von Kadmiumdampf (Sättigungstemperatur 500° C) auf Aluminium bei 600° C mit Wasserstoff als Trägergas führten zu keiner wirklich brauchbaren Verbesserung gegenüber unbehandelten Aluminiumstäben. Dieser negative Befund steht im Einklang mit den Angaben über das Zustandsdiagramm Al/Cd. Sowohl im flüssigen als auch im festen Zustand ist die Mischbarkeit nur sehr gering[5]). Unter diesen Umständen ist nicht mit einer wesentlichen Aufnahme von Kadmium aus ungesättigtem Dampf zu rechnen.

7. Umsetzungen mit edleren Metallverbindungen in Form von Salzschmelzen. Eine Salzbadbehandlung von Metallen wird im allgemeinen im Sinne einer Wärmebehandlung durchgeführt. In Einzelfällen finden auch chemische Umsetzungen zwischen Salzschmelze und Metall statt, so z. B. bei der Aufkohlung von Eisen in Salzbädern mit Alkalizyanid. Nach Abschluß unserer Versuche wurde uns ferner die Arbeit von G. Becker, L. Daeves und K. Steinberg[6]) über das Eindiffundieren von Chrom in Stahl gemäß folgender Reaktion bekannt:

$CrCl_2$ (Salzschmelze) + Fe (Metall)
= $FeCl_2$ (Salzschmelze) + Cr (Metall)

Versuche in diesem Sinne wurden von uns an Aluminium nicht durchgeführt, da nach den bisher bekannten Angaben das analoge Verfahren mit Salzdämpfen aussichtsreich erschien.

8. Umsetzung mit edleren Metallverbindungen in Form von Salzdämpfen, z. B. im Sinne der Gleichung:

2 Al (fest) + 3 Cu_2Cl_2 (Gas) = 6 Cu (fest) + 2 $AlCl_3$ (Gas).

Dieser Weg entspricht dem Verfahren zur Chromierung von Eisen nach G. Becker, E. Hertel und C. Kaster[7]) gemäß der Gleichung Fe (Metall) + $CrCl_2$ (Gas) = $FeCl_2$ (Gas) + Cr (Metall). Insgesamt erschien ein Vorgehen in dieser Richtung besonders aussichtsreich und deshalb wurden Versuche dieser Art in überwiegender Zahl durchgeführt.

Weiterhin ist eine Verminderung des Oberflächenwiderstandes grundsätzlich auch durch oxydische Deckschichten mit genügend hoher spezifischer elektrischer Leitfähigkeit möglich. In diesem Sinne wurden Deckschichten aus Zinkoxyd bzw. Zinkaluminat sowie aus Eisenoxyd hergestellt (vgl. Abschnitt H).

C. Die Messung des Oberflächenwiderstandes.

Zur Messung des Oberflächenwiderstandes wurde die von H. Viehmann (s. vorher Bild 2) angegebene Einklemm-Vorrichtung benutzt. Im allgemeinen wurden Rundstäbe von 5 mm Dmr. untersucht. Die Stäbe wurden vor der Messung mit Vaseline leicht gefettet. Die Auflageflächen hatten je 10 mm Länge. Der Abstand der Kontaktstellen betrug 52 mm. Die Klemmstellen wurden mit je 200 kg belastet. Zur Untersuchung des Einflusses von Lastspielen konnten die an Hebeln anhängenden Gewichte angehoben werden, so daß sich die Belastung der Klemmstellen zwischenzeitlich auf etwa 10 kg vermindern ließ. Die elektrische Schaltung zeigt Bild 1.

Die Strombelastung betrug durchweg 1 A. Der Spannungsabfall zwischen den beiden Klemmstellen wurde mit Hilfe eines Spiegelgalvanometers mit entsprechendem Vorwiderstand gemessen. Zur Eichung der Spiegelgalvanometerausschläge diente der in Bild 1 rechts gezeichnete Hilfskreis,

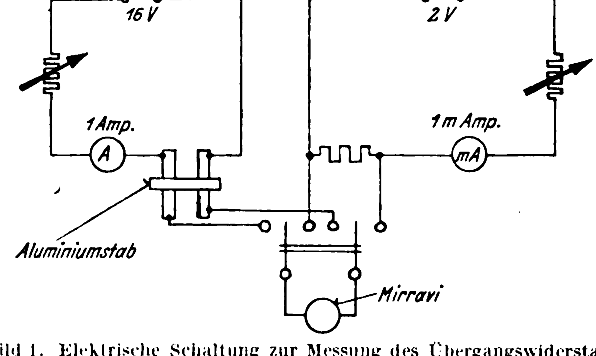


Bild 1. Elektrische Schaltung zur Messung des Übergangswiderstandes von Aluminium.

aus dem eine Spannung von 1 mV bzw. 0,1 mV vorgegeben werden konnte. Bei 1 A Stromstärke ist der Spannungsabfall in Millivolt unmittelbar gleich dem Widerstand in Milliohm; dieser ist gleich der Summe aus den Übergangswiderständen an zwei Klemmstellen und dem Aluminiumwiderstand von 0,075 Milliohm für eine Stablänge von 52 mm bei 5 mm Dmr. Hieraus kann der Übergangswiderstand für eine Klemmstelle berechnet werden. Um einen Anschluß an die Messungen von H. Viehmann (siehe vorher) zu bekommen, wurden die Widerstandswerte in Milliohm auf äquivalente Leitungslängen umgerechnet (1 Milliohm entsprechend 686 mm Leitungslänge bei 5 mm Dmr. In Tab. 1 sind einige Meßergebnisse für Aluminiumstäbe ohne Vorbehandlung, und zum Vergleich auch für einen Kupferstab mitgeteilt, der durch Erhitzen in Methylalkoholdampf frisch reduziert worden war. Auch der Kupferübergangswiderstand wurde auf die äquivalente Länge Aluminiumstab umgerechnet.

Zahlentafel 1. Übergangswiderstände von Aluminiumstäben ohne Vorbehandlung und von Kupfer.

Zahl der Lastwechsel	Übergangswiderstand in mm Leitungslänge Al			
	Al I	Al II	Al III	Cu
0	19	20	19	4
1	20	23	22	4
2	22	25	28	4
3	24	27	35	4
4	27	30	36	4
5	31	32	44	4
6	33	35	48	4
7	34	38	49	4
8	38	40	52	4
9	41	43	58	4
10	43	45	59	4

D. Die Herstellung von Metallüberzügen auf Aluminium durch Umsetzung mit Schwermetallsalzen in wäßriger Lösung (Zementationsverfahren nach Boulanger und nach Jirotka).

Im Sinne eines Korrosionsschutzes und zum Zwecke der Metallfärbung sind eine große Reihe von Tauchbehandlungsverfahren für Aluminium mit wäßrigen Lösungen angegeben worden[8]). Teilweise beruhen diese Verfahren auf der Herstellung oxydischer Deckschichten (z. B. MBV-Verfahren mit chromhaltiger Lösung). Bei gewissen Verfahren sollen jedoch auch metallische Überzüge erhalten werden, die allerdings sehr dünn und wahrscheinlich auch porös sind, was aber nach den allgemeinen Überlegungen in Abschnitt B für den hier verfolgten Zweck kein grundsätzliches Hindernis ist. Der besondere Vorteil eines Tauchverfahrens würde in der außerordentlich leichten Durchführbarkeit liegen. Die allgemeine Grundlage ist durch die Stellung des Aluminiums am unteren Ende der elektrolytischen Spannungsreihe der Metalle gegeben. Beim Eintauchen von Aluminium in eine Schwermetallsalzlösung geht das unedlere Aluminium in Lösung und das edlere Schwermetall wird auf der Aluminiumoberfläche abgeschieden.

[4]) J. Dornauf, Korrosion und Metallschutz Bd. 4 (1928), S. 97.
[5]) Vgl. M. Hansen, Der Aufbau der Zweistofflegierungen. S. 90. Berlin 1936.
[6]) G. Becker, K. Daeves und K. Steinberg, Stahl und Eisen Bd. 61 (1941), S. 289.
[7]) G. Becker, E. Hertel und C. Kaster, Z. phys. Chem. Bd. A 177 (1936), S. 213.
[8]) Vgl. Aluminium-Taschenbuch 8. Aufl., S. 219ff. Berlin 1938.



Diesbezügliche Tastversuche wurden mit folgenden Bädern ausgeführt:

1. Kadmierung nach C. L. J. Boulanger[9]):
   a) Badzusammensetzung: 4 g $CdCO_3$ + 14 g $NaCN$ + 1000 g H_2O (70° C; Tauchzeit: 5 bis 15 Minuten). Gleichmäßig grauer Überzug, der gut haftet. Übergangswiderstand 200 mm Leitungslänge Al und darüber.
   b) 2,7 g $CdCO_3$ + 3,2 g $CoCO_3$ + 14 g $NaCN$ + 1000 g H_2O (50—100° C; Tauchzeit 5 bis 15 Minuten). Ungleichmäßige Schichtbildung ohne genügende Haftbarkeit; Übergangswiderstand nicht gemessen.
2. Chromierung nach Jirotka[10]):

Badzusammensetzung: 10 g $Cr_2(SO_4)_3$ + 10 g K_2CO_3 + 10 g $NaHCO_3$ + 4 g $KHCO_3$ + 8 ccm Glyzerin + 1000 ccm H_2O. Ein Aluminiumstab von 5 mm Dmr. wurde in die siedend heiße Lösung 30 Minuten lang eingetaucht. Die entstandene Deckschicht war schwach opalisierend. Der Übergangswiderstand entsprach rd. 1000 mm Leitungslänge. Wahrscheinlich ist die im Patent befindliche Angabe betr. Bildung einer metallischen Deckschicht unrichtig. Vielmehr dürfte sich eine zum mindesten überwiegend oxydische Deckschicht bilden.

E. Die Herstellung von Fremdmetallüberzügen durch Einwirkung von tiefschmelzenden flüssigen Legierungen.

Die Herstellung dünner Überzüge von Zinn und von Zink auf Eisen kann bekanntlich durch kurzzeitiges Eintauchen des Eisens in geschmolzenes Zinn bzw. Zink erfolgen (Feuerverzinnung bzw. Feuerverzinkung). Die Übertragung dieses Verfahrens auf Aluminium ist nicht ohne weiteres möglich, da die natürliche Oxydhaut auf dem Aluminium eine tiefergehende Wechselwirkung mit dem Tauchbad verhindert. Hierauf beruhen zugleich die Schwierigkeiten bei der Aluminiumverlötung. Auf diesem Gebiet sind in den letzten Jahren erhebliche Fortschritte bekanntgeworden[11]). Die miteinander zu verbindenden Kabelstücke werden mechanisch möglichst gut gesäubert und mit der Lötlampe erhitzt. Alsdann wird Lot in Form eines feinteiligen Pulvers mit einer Metalldrahtbürste aufgebracht. Durch kräftige mechanische Bearbeitung wird die zunächst vorhandene natürliche Oxydhaut des Aluminiums zum mindesten teilweise zerstört und hierdurch ein unmittelbarer Kontakt zwischen Aluminium und Lot hergestellt. Wenn jedes der beiden miteinander zu verbindenden Kabelenden mit Lot überzogen ist, erfolgt die Verbindung wie bei der sonst üblichen Weichlötung ohne Schwierigkeit.

Hierauf aufbauend wurde folgender Versuch ausgeführt. Ein Aluminiumstab von 5 mm Dmr. wurde mechanisch gesäubert, in der Bunsenflamme erhitzt und dann »Metallisierungslot L 111« mit einer Messingdrahtbürste aufgetragen. Dieses Lot wird von der Firma Siemens & Halske für Aluminium-Lötverbindungen in großem Umfange verwendet und hat die Zusammensetzung: 35% Sn + 35% Cd + 28% Zn + 25 % Pb. Die nach Abschnitt C gemessenen Übergangswiderstände sind in Tafel 2 zusammengestellt und liegen außerordentlich günstig.

Für die Praxis interessieren in erster Linie Klemmverbindungen für Aluminiumlitzen, die z. B. aus 19 Einzeldrähten mit je 1 mm Dmr. bestehen. Die Herstellung von derartigen Überzügen auf den Einzeldrähten in fortlaufender Fertigung ist ein noch ungelöstes verfahrenstechnisches Problem. Analog den Arbeitsweisen bei der Feuerverzinkung[12]) kann man daran denken, Aluminiumdrähte durch ein Sn-Cd-Zn-Pb-Bad zu ziehen und in diesem Bad mit einer Schar von Schneiden aus Sinterkorund ($=Al_2O_3$) die Oxydhaut zu zerstören.

[9]) C. L. J. Boulanger, Revue de Métallurgie Bd. 31 (1934), S. 440.

[10]) Vgl. Aluminium-Taschenbuch 8. Aufl., S. 188 und 311. Berlin 1938.

[11]) Vgl. Aluminium-Taschenbuch 8. Aufl., S. 188 und 311. Berlin 1938.

[12]) W. Machu (s. vorher); H. Bablik, Das Feuerverzinken. Wien 1941.

Zahlentafel 2. Übergangswiderstände von Aluminiumstäben mit Überzügen aus »Metallisierungslot L 111« nach verschieden langen Lagerdauern.

Zahl der Lastwechsel	Übergangswiderstand in mm Leitungslänge								
	Stab I nach			Stab II nach			Stab III nach		
	1 Tag	3 Tagen	8 Tagen	1 Tag	3 Tagen	8 Tagen	1 Tag	3 Tagen	8 Tagen
0	7	8	8	7	9	9	8	9	9
1	7	8	8	7	8	9	8	9	9
2	7	8	8	7	8	10	8	10	9
3	7	8	8	8	9	10	8	10	10
4	8	8	8	7	9	10	8	10	10
5	8	8	8	8	9	10	8	10	10
6	8	8	8	8	9	10	8	10	10
7	7	8	9	8	9	11	8	10	10
8	7	8	8	8	9	11	8	10	10
9	8	8	9	8	9	11	8	10	10
10	8	8	9	8	9	11	8	10	10

Der Durchführung dieses Verfahrens steht entgegen, daß die Hauptbestandteile des »Metallisierungslotes L 111« gerade die besonders knappen Sparmetalle Zinn und Kadmium sind. Diese beiden Bestandteile scheinen jedoch auch für den gewünschten niedrigen Oberflächenwiderstand ausschlaggebend, da die Beständigkeit von Zinn und von Kadmium an trockner und feuchter Luft bekannt ist, während gerade das rohstoffmäßig gut greifbare Zink sehr viel weniger gute Eigenschaften besitzt. Eine Klärung der hier vorhandenen Möglichkeiten kann nur durch weitere Versuche erbracht werden.

F. Die Reaktionen zwischen Aluminium und gasförmigen Schwermetallhalogeniden sowie verwandte Vorgänge.

a) Allgemeines:

Die Herstellung von Metallüberzügen durch eine Austauschreaktion mit Metallhalogeniden bei höherer Temperatur ist in den letzten Jahren mehrfach untersucht worden. In Abschnitt B ist bereits auf die Verchromung von Eisen nach einer Arbeit von G. Becker, E. Hertel und C. Kaster (siehe vorher) hingewiesen worden.

$$\text{Fe (Metall)} + \text{Cr}Cl_2 \text{ (Gas)} = \text{Cr (Metall)} + \text{Fe}Cl_2 \text{ (Gas)}.$$

Eine Zusammenstellung über weitere Reaktionen gleicher Art hat W. Machu[13]) gegeben. Als besonderer Vorteil dieser Verfahren wird vermerkt, daß die anzuwendenden Metallhalogeniddämpfe verhältnismäßig leicht diffundieren und somit auch Gegenstände von ungleichförmiger Gestalt einer erfolgreichen Oberflächenbehandlung unterworfen werden können. Durch die erforderliche hohe Reaktionstemperatur ist eine große Haftfestigkeit des Überzuges und bei geeigneten Bedingungen auch eine sehr gleichmäßige Überzugsstärke zu erwarten.

Die Auswahl an umsetzungsfähigen Schwermetallhalogeniden ist dadurch beschränkt, daß beim Schmelzpunkt des Aluminiums (660° C) die Dampfdrucke der Schwermetallhalogenide vielfach nur sehr gering sind. Die tatsächliche Versuchstemperatur darf aber auch nicht einmal den Schmelzpunkt des reinen Aluminiums erreichen, sondern muß noch unterhalb der niedrigsten eutektischen Temperatur des entsprechenden binären Systems Aluminium/Schwermetall liegen. Auch eine Entstehung von flüssigen Legierungsphasen in geringen Mengen muß vermieden werden, da in diesem Falle die Diffusionswiderstände nur gering sein würden und infolgedessen das Metallhalogenid zu rasch mit dem Aluminium reagieren würde (Entstehung ungleichmäßiger Schichten infolge von örtlicher Verarmung des Metallhalogenids in der Gasphase). Derartige Erscheinungen wurden sogar teilweise auch im Gebiet der festen Legierungsphasen beobachtet, so z. B. bei der Einwirkung von Kupfer (I)-chlorid (vgl. F, d). Aus diesem Grunde müssen verschiedene Schwermetallhalogenide ausscheiden, obwohl die chemischen Voraussetzungen an sich günstiger erscheinen;

[13]) W. Machu, Korrosion und Metallschutz Bd. 15 (1939), S. 387.

in diesem Zusammenhang sind zu nennen: System Al/Zn (eutektische Temperatur 380° C), System Al/Sn (eutektische Temperatur 232° C).

b) Versuchsanordnung:

In einem elektrischen Röhrenofen von 50 cm Länge mit unabhängig belastbaren Teil-Heizwicklungen von je 25 cm Länge wurde ein Supremaxrohr von 20 mm lichter Weite eingelegt. Der erste Teilofen enthielt das zu verdampfende Metallhalogenid, der zweite Teilofen (mit höherer Temperatur) die Aluminiumprobe. Das Metallhalogenid, das in dem ersten Teilofen verdampfte, wurde durch einen geeigneten Trägergasstrom (Wasserstoff oder Stickstoff) über die Aluminiumprobe geleitet. Zur Entfernung von Sauerstoff wurde das Trägergas zuvor über glühendes Kupfer geführt und über Kalziumchlorid getrocknet. Bei einem Teil der Versuche wurde das Trägergas vor Eintritt in den Metallhalogenid-Verdampfungsofen mit NH_4Cl bei 185° C gesättigt; NH_4Cl dissoziiert in HCl und NH_3. Die Gegenwart von HCl erschien versuchsweise wünschenswert, um die Aluminiumoxydhaut zu beseitigen. Bei einem anderen Teil der Versuche wurde der Trägergasstrom in einer Waschflasche mit leichtflüchtigen, flüssigen Metallhalogeniden wie $TiCl_4$ und CrO_2Cl_2 bei Zimmertemperatur beladen und alsdann über das Aluminium geleitet.

c) Die Umsetzung: $3\,Cu_2Cl_2$ (Gas) + 2 Al (fest) = Al_2Cl_6 (Gas) + 6 Cu (fest).

Bei den ersten Versuchen für die Umsetzung zwischen Aluminium und Kupfer(I)-chlorid wurde bereits durch das Aussehen der Versuchsproben festgestellt, daß der größere Teil des Kupfers an dem einen Ende der Aluminiumprobe niedergeschlagen wurde, das dem ankommenden Kupfer(I)-chlorid-Dampf zugewandt war, während das andere Ende wesentlich schwächer gefärbt wurde. Bei der nachfolgend beschriebenen Untersuchung wurden daher in das Schiffchen im Ofen 3 zwei getrennte Aluminiumbleche hintereinander eingelegt, deren Kupfergehalt nach der Umsetzung gesondert bestimmt wurde. Die Analyse erfolgte kolorimetrisch.

Eine Auswahl der Versuchsergebnisse ist in Zahlentafel 3 enthalten. Da lediglich Tastversuche beabsichtigt wurden, sind an die Genauigkeit der einzelnen Zahlenwerte keine besonderen Anforderungen zu stellen. Das wesentliche Ergebnis dieser Versuche besteht darin, daß die Umsetzung zwischen Aluminium und Kupfer(I)-chlorid-Dampf verhältnismäßig rasch erfolgt, so daß der Transport des Chlorids in der Gasphase zu einem wesentlichen Teil zeitbestimmend wird. Dort wo der Gasstrom die ersten Teile der Aluminiumfläche trifft, erfolgt ein ziemlich großer Umsatz, während der Umsatz an weiter entfernten Stellen infolge einer Verarmung des Kupfer(I)-chlorids in der Gasphase wesentlich geringer ausfällt.

Es ist weiterhin zu bemerken, daß die Verkupferung keineswegs gleichmäßig ausfällt, sondern daß bereits mit bloßem Auge Ungleichmäßigkeiten der Oberfläche zu erkennen sind. Insgesamt erscheint eine Umsetzung zwischen Aluminium und Kupfer(I)-chlorid wenig geeignet, die Oberflächeneigenschaften wesentlich zu verbessern.

Zahlentafel 3. Einwirkung von Kupfer(I)-chlorid-Dampf auf Aluminium. Versuchsanordnung: Stickstoff als Trägergas wurde mit NH_4Cl bei 185° C und mit Cu_2Cl_2 bei 400° C gesättigt und über 2 hintereinander liegende Aluminiumbleche I und II (0,0009 · 3 · 4 cm) bei 500° C geleitet. Strömungsgeschwindigkeit 5000 cm^3/h.

Versuchsdauer (h)	mg Cu in Al-Blech I	II
1	10	
2	23	
4	35	
8	72	4
16	113	4

d) Die Umsetzungen zwischen Chromhalogeniden und Aluminium.

In entsprechender Weise wurde die Einwirkung von $CrCl_3$-Dampf auf Aluminium untersucht. Rein äußerlich ergab sich, daß die eingesetzten Aluminiumproben kaum verändert wurden, vor allem aber auf der ganzen Länge gleichmäßiges Aussehen zeigten. Die Zahlenwerte in Zahlentafel 4 zeigen die Größenordnung der vom Aluminium aufgenommenen Chrommengen. Im Gegensatz zu den Versuchen mit Kupfer(I)-chlorid sind die Chrommengen in hintereinander liegenden Aluminiumblechen von gleicher Größenordnung, so daß eine wesentliche Verarmung an $CrCl_3$ im Gasraum nicht anzunehmen ist. Auffallend ist jedoch, daß gerade bei größeren Versuchsdauern geringere Chrommengen als bei kürzeren Zeiten gefunden werden. Möglicherweise macht sich hier eine Veränderung des Chrom(III)-chlorids durch Sauerstoff bemerkbar, der als Verunreinigung noch im Stickstoffträgergas vorhanden ist.

Zahlentafel 4. Einwirkung von Chrom(III)-chloriddampf auf Aluminium. Versuchsanordnung: Stickstoff als Trägergas wurde mit NH_4Cl bei 185° C und mit $CrCl_3$ bei 400° C gesättigt und über 2 hintereinander liegende Aluminiumbleche I und II (0,0009 · 3 · 4 cm) bei 500° C geleitet. Strömungsgeschwindigkeit: 5000 cm^3/h.

Versuchsdauer (h)	mg Cr im Al-Blech I	II
1	0,16	0,12
2	0,31	0,28
4	0,16	0,19
8	0,21	0,14
16	0,17	0,08

Um Sauerstoff praktisch auszuschließen, wurde die Mehrzahl der weiteren Versuche mit Wasserstoff als Trägergas ausgeführt. Wasserstoff ist allerdings nicht indifferent, sondern es findet die Gleichgewichtsreaktion $CrCl_3 + {}^1/_2\,H_2$ $CrCl_2$ + HCl statt (vgl. hierzu Abschnitt G).

Zahlentafel 5. Übergangswiderstände an Aluminiumstäben nach 20stündiger Behandlung mit Chromhalogeniddampf. Trägergas H_2 bzw. N_2. Sättigungstemperatur des Chromhalogenids 500° C; Temperatur des Aluminiums 600° C.

Zahl der Belastungswechsel	Übergangswiderstände in mm Leitungslänge Al					
	CrF_3/H_2 1	CrF_3/H_2 2	$CrCl_3/H_2$ 1	$CrCl_3/N_2$ 2	$CrBr_3/H_2$ 1	$CrBr_3/H_2$ 2
0	21	34	6	5	10	11
1	25	38	8	9	12	12
2	29	44	11	9	15	14
3	32	53	12	10	18	16
4	35	60	17	8	20	19
5	34	66	18	12	20	21
6	34	68	21	16	23	21
7	36	68	23	20	24	20
8	35	71	20	19	25	17
9	36	74	21	20	26	20
10	37	80	24	20	26	21

Die Ergebnisse der Widerstandsmessungen an Aluminiumstäben nach einer 20stündigen Behandlung in $CrCl_3$-Dampf sowohl mit Stickstoff wie mit Wasserstoffgas als Trägergas sind in Zahlentafel 5 zusammengestellt. Gleichzeitig sind dort auch die Ergebnisse der Versuche mit Chrom(III)-fluorid und mit Chrom(III)-bromid mitgeteilt. Durch Vergleich mit den Angaben in Zahlentafel 1 ist ersichtlich, daß die Behandlung mit $CrCl_3$- und mit $CrBr_3$-Dampf ungefähr eine Verminderung des Übergangswiderstandes auf die Hälfte bringt. Die Werte für die Versuche mit CrF_3 liegen jedoch ungünstiger als die Werte der unvorbehandelten Stäbe in Zahlentafel 1.

Weitere Meßwerte zeigt Zahlentafel 6. Nach einer Lagerung von vier Monaten waren die Übergangswiderstände eines Al-Stabes mit Vorbehandlung in $CrCl_3$-Dampf von

der gleichen Größenordnung wie für einen Al-Stab ohne Vorbehandlung (vgl. Zahlentafel 1).

Zahlentafel 6. Übergangswiderstände an Aluminiumstäben nach 20 stündiger Behandlung mit $CrCl_3$-Dampf. (Trägergas H_2; Sättigungstemperatur für $CrCl_3$: 500° C; Al-Temperatur 600° C.)

Zahl der Belastungswechsel	Übergangswiderstand in mm Leitungslänge	
	sofort nach der Chromierung	4 Monate nach der Chromierung
0	5	13
1	10	21
2	16	24
3	18	29
4	24	29
5	25	36
6	30	39
7	17	42
8	23	42
9	29	44

Entsprechend dem Auftrage der DVL wurden auch einige Versuche mit Stäben aus der Elektronlegierung AZM (93% Mg + 6% Al + 1% Zn) durchgeführt. Entsprechend dem niedrigeren Schmelzpunkt dieser Legierung gegenüber reinem Aluminium mußten diese Versuche bei geringerer Temperatur durchgeführt werden. Vgl. Zahlentafel 7. Die Übergangswiderstände mit und ohne Vorbehandlung sind hier von gleicher Größenordnung. Die Schwankungen — z. B. je der zufälligen Einspannlage (vgl. Stab IV unter a und b) — sind erheblich.

Zahlentafel 7. Übergangswiderstände an Stäben aus Elektron AZM (93% Mg + 6% Al + 1% Zn) nach 20 stündiger Behandlung mit $CrCl_3$-Dampf. (Trägergas N_2; Sättigungstemperatur für $CrCl_3$: 460° C; Legierungstemperatur: 500° C.)

Zahl der Belastungswechsel	Übergangswiderstand in mm Leitungslänge				
	Stab I nicht vorbehandelt	Stab II vorbehandelt	Stab III vorbehandelt	Stab IV vorbehandelt a	Stab IV vorbehandelt b (Einspannlage gegenüber a um 90° gedreht)
0	12	16	16	9	14
1	20	22	16	13	25
2	26	24	19	15	29
3	30	26	21	17	32
4	31	28	23	18	36
5	33	29	23	20	38
6	34	32	25	19	40
7	35	33	26	19	42
8	35	34	27	20	43
9	36	36	27	20	44
10	36	36	27	21	45

Aus diesen Tastversuchen wurde der Schluß gezogen, daß eine Verchromung von Reinaluminium aus der Gasphase gewisse Möglichkeiten zur Verminderung des Oberflächenwiderstandes bietet. Wesentlich ist jedoch, daß es gelingt, die Konzentration an Chromhalogenid-Dampf in der Gasphase genügend hoch zu halten, um hinreichende Schichtdicken in praktisch brauchbaren Zeiten zu bekommen. Zu diesem Zweck wurden die in Abschnitt G beschriebenen Gleichgewichtsuntersuchungen durchgeführt.

An Stelle der Chrom (III)-Halogenide kann auch das bereits bei Zimmertemperatur flüchtige Chromylchlorid CrO_2Cl_2 herangezogen werden.

Als Trägergas wurde Stickstoff benutzt. Sättigungstemperatur für CrO_2Cl_2 : 20° C. In verschiedenen Versuchsansätzen betrug die Temperatur des Aluminiumofens 350, 400 und 600° C. Bei 600° C wurde ein sehr rascher Zerfall des Chromylchloriddampfes bereits vor Erreichen der Aluminiumprobe gefunden. Bei tieferen Temperaturen (350 und 400° C) ist dieser Zerfall weniger stark. Jedoch wurde eine starke Verkrustung der Aluminiumoberfläche mit einer abreibbaren grauschwarzen Deckschicht beobachtet. Die Übergangswiderstände der so vorbehandelten Aluminiumstäbe waren wesentlich höher als die von nicht behandelten Stäben. Die große Flüchtigkeit des Chromylchlorids kann somit für eine Chromierung nicht ausgenutzt werden.

G. Verdampfungs- und Reaktions-Gleichgewichte der Chromhalogenide[14]).

a) Allgemeine Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen.

Im System Chrom-Wasserstoff-Chlor kommen neben der Gasphase folgende Bodenkörper in Betracht:

a) Metallisches Chrom (fest bis oberhalb 1500° C).
b) Chrom (II)-chlorid (fest). Schmelzpunkt von uns zu etwa 790° C bestimmt.
c) Chrom (III)-chlorid (fest). Schmelzpunkt nach unseren Beobachtungen höher als 850°.
d) Salzschmelze Chrom (II)-chlorid + Chrom (III)-chlorid.

Das Zwei-Bodenkörper-Gleichgewicht:

$$2\,HCl\,(Gas) + Cr\,(fest) = H_2\,(Gas) + CrCl_2\,(flüssig) \quad (I\,Cr)$$

mit der Massenwirkungsgleichung:

$$\left(\frac{p_{HCl}}{\sqrt{p_{H_2}}}\right)^2 \text{ über } Cr\,(fest) + CrCl_2\,(flüssig) = K_p^{I}\,(Cr) \quad (1)$$

ist bereits von K. Jellinek und R. Koop[15]) für die Temperaturen 1017, 1135 und 1192° C bestimmt worden. Durch Extrapolation auf niedere Temperaturen wurden die Zahlenwerte der Zahlentafel 8 erhalten.

Zahlentafel 8. Extrapolierte Werte der Massenwirkungskonstanten für das Gleichgewicht: 2 HCl (Gas) + Cr (fest) = H_2 (Gas) + $CrCl_2$ (flüssig) und HCl-Gleichgewichtsgehalte in HCl-H_2-Gemischen von 1 at Gesamtdruck.

Temperatur °C	$K_p^{I} = \frac{p^2_{HCl}}{p_{H_2}}$ (at) über Cr (fest) + $CrCl_2$ (flüssig)	% HCl über Cr (fest) + $CrCl_2$ (flüssig)
800	$9{,}7 \cdot 10^{-4}$	3,1
900	$3{,}4 \cdot 10^{-3}$	5,7
1000	$9{,}6 \cdot 10^{-3}$	9,3

Ein weiteres Zwei-Bodenkörper-Gleichgewicht:

$$HCl\,(Gas) + CrCl_2\,(fest) = \frac{1}{2}\,H_2\,(Gas) + CrCl_3\,(fest) \quad (II\,Cr)$$

ist von K. Jellinek und R. Koop (siehe vorher) sowie von F. Hein und J. Wintner-Hölder[16]) im Temperaturgebiet von 416 bis 510° C untersucht worden. Bei 510° C liegt die Gleichgewichts-Zusammensetzung der Gasatmosphäre bei 12% H_2 + 88% HCl für 1 at Gesamtdruck. Für höhere Temperaturen verschiebt sich das Gleichgewicht rasch zu höheren HCl-Gehalten.

Bei beliebig vorgegebenem Verhältnis an H_2 und HCl ist jeweils nur ein Bodenkörper neben der Gasphase beständig.

a) Bei kleinen HCl-Gehalten, z. B. unter 7% HCl bei 1 at Gesamtdruck und 900° C ist metallisches Chrom als Bodenkörper beständig.

b) Bei größeren HCl-Gehalten, z. B. über 7% HCl bei 1 at Gesamtdruck ist die Salzschmelze mit wechselnden Gehalten an Chrom (II)-chlorid + Chrom (III)-chlorid beständig. Aus den Angaben über das Gleichgewicht (II Cr) läßt sich jedoch ableiten, daß im Temperaturgebiet von 800 bis 1000° C ein wesentlicher Gehalt an Chrom (III)-chlorid in der Salzschmelze erst bei HCl-Gehalten von mehr als 90% zu erwarten ist. Da bei unseren Versuchen der HCl-Gehalt stets unter 50% lag, kann somit hier die Salzschmelze aus Chrom (II)-chlorid + Chrom (III)-chlorid näherungs-

[14]) Die Verfasser berichten hierüber ausführlicher und mit Folgerungen für die Chromierung von Eisen in einer Arbeit, die demnächst in der Zeitschrift für physikalische Chemie. Abteilung A. erscheint.

[15]) K. Jellinek und R. Koop, Z. phys. Chem. Bd. A 145 (1929), S. 309.

[16]) F. Hein und J. Winter-Hölder, Z. anorg. Chem. Bd. 201 (1931), S. 314.

weise einfach als $CrCl_2$-Schmelze bezeichnet werden. Infolgedessen ist in diesem Gebiet der Partialdruck an $CrCl_2$ unabhängig von dem HCl-Gehalt der Gasphase einfach gleich dem Sättigungsdruck π_{CrCl_2} über $CrCl_2$ (fl).

Über metallischem Chrom als Bodenkörper in HCl-H_2-Gas sind ohne besondere Voraussetzung die Gleichgewichte sowohl mit Chrom(II)-chlorid als auch mit Chrom(III)-chlorid im Gasraum in Rechnung zu setzen; letzteres kann in monomerer Form ($CrCl_3$) und in dimerer Form (Cr_2Cl_6) auftreten.

$$2\,HCl\,(Gas) + Cr\,(fest) = H_2\,(Gas) + CrCl_2\,(Gas) \quad (III\,Cr)$$

$$3\,HCl\,(Gas) + Cr\,(fest) = \frac{3}{2}\,H_2\,(Gas) + CrCl_3\,(Gas) \quad (IV\,Cr)$$

$$6\,HCl\,(Gas) + 2\,Cr\,(fest) = 3\,H_2\,(Gas) + Cr_2Cl_6\,(Gas) \quad (V\,Cr)$$

Hierfür lauten die Massenwirkungsbedingungen:

$$\left(\frac{p_{HCl}}{\sqrt{p_{H_2}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_{CrCl_2}} = K_p^{III}\,(Cr) \quad \ldots \ldots (2)$$

$$\left(\frac{p_{HCl}}{\sqrt{p_{H_2}}}\right)^3 \cdot \frac{1}{p_{CrCl_3}} = K_p^{IV}\,(Cr) \quad \ldots \ldots (3)$$

$$\left(\frac{p_{HCl}}{\sqrt{p_{H_2}}}\right)^6 \cdot \frac{1}{p_{Cr_2Cl_6}} = K_p^{V}\,(Cr) \quad \ldots \ldots (4)$$

Als Gesamtflüchtigkeit f des Chroms soll das Verhältnis der g-Atome Cr im Gasraum zur Molzahlsumme an $H_2 + HCl$ definiert werden.

$$f = \frac{n_{CrCl_2} + n_{CrCl_3} + 2\,n_{Cr_2Cl_6}}{n_{H_2} + n_{HCl}} \quad \ldots \ldots (5)$$

Diese Größe wird bei Mitführungsversuchen als unmittelbares Meßergebnis erhalten. An Stelle des Molzahlquotienten kann auch der entsprechende Partialdruckquotient eingeführt werden und ferner kann im Nenner näherungsweise der Gesamtdruck P für $p_{H_2} + p_{HCl}$ gesetzt werden, sofern die Partialdrucke der einzelnen Chromverbindungen klein gegen den Gesamtdruck sind.

$$f \simeq \frac{p_{CrCl_2} + p_{CrCl_3} + 2\,p_{Cr_2Cl_6}}{P} \quad \ldots \ldots (6)$$

Aus den Messungen in Abschnitt e ergibt sich, daß die Flüchtigkeit f über Cr (fest) im wesentlichen proportional dem Quadrat des Quotienten $(p_{HCl}/\sqrt{p_{H_2}})$ ist. Somit ist das Gleichgewicht (I Cr) mit $CrCl_2$ (Gas) überwiegend bestimmend.

Bei höheren HCl-Gehalten muß über der $CrCl_2$-Schmelze ein Anstieg der Gesamtflüchtigkeit nach Gleichung (5) stattfinden, indem nicht nur Verflüchtigung von $CrCl_2$ auftritt, sondern außerdem der Gehalt der Gasphase an $CrCl_3$ bzw. Cr_2Cl_6 zu berücksichtigen ist.

$$HCl\,(Gas) + CrCl_2\,(flüssig) = \frac{1}{2}\,H_2\,(Gas) + CrCl_3\,(Gas)\,(VI\,Cr)$$

$$2\,HCl\,(Gas) + 2\,CrCl_2\,(flüssig) = H_2\,(Gas) + Cr_2Cl_6\,(Gas)\,(VII\,Cr)$$

$$\left(\frac{p_{HCl}}{\sqrt{p_{H_2}}}\right) \cdot \frac{1}{p_{CrCl_3}} = K_p^{VI}\,(Cr) \quad \ldots \ldots (7)$$

$$\left(\frac{p_{HCl}}{\sqrt{p_{H_2}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_{Cr_2Cl_6}} = K_p^{VII}\,(Cr) \quad \ldots \ldots (8)$$

Vorstehende Gleichgewichte müssen bereits merklich in Erscheinung treten, auch wenn die Salzschmelze noch überwiegend aus $CrCl_2$ besteht, da die Flüchtigkeit an $CrCl_3 + Cr_2Cl_6$ über Chrom(III)-chlorid wesentlich größer als an $CrCl_2$ über Chrom(II)-chlorid als Bodenkörper ist. Aus den Messungen in Abschnitt d ergeben sich z. B. für 930° C die Flüchtigkeitswerte 0,23 für Chrom(III)-chlorid und 0,0056 für Chrom(II)-chlorid (d. h. Verhältnis 42:1). Dennoch haben sich die Gleichgewichte (VI) und (VII) bei unseren Messungen praktisch nicht ausgewirkt. Durch weitere Rechnungen wurde gezeigt, daß dieses Ergebnis im Einklang mit den vorliegenden Flüchtigkeitsmessungen über Chrom(III)-chlorid als Bodenkörper sowie über das Gleichgewicht (II Cr) steht. Von der Wiedergabe dieser Rechnungen soll hier abgesehen werden, da die hierfür wichtige Frage nach der Lage des Gleichgewichts 2 $CrCl_3$ (Gas) ⇌

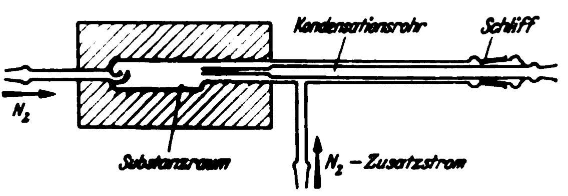


Bild 2. Verdampfungsgefäß I.

Cr_2Cl_6 noch offen ist und mangels sonstiger Unterlagen nur Näherungsaussagen unter Annahme der idealen Mischungsgesetze für die $CrCl_2$-$CrCl_3$-Schmelze möglich sind.

Zwischen den Massenwirkungskonstanten K_p^{I} (Cr) und K_p^{III} (Cr) läßt sich folgende Beziehung angeben. Wenn man den speziellen Fall von Gleichgewicht (III Cr) bei gleichzeitiger Gegenwart von Chrom(II)-chlorid als Bodenkörper betrachtet, dann ist gemäß Vorstehendem $p_{CrCl_2} = \pi_{CrCl_2}$ und gleichzeitig ist das Verhältnis $(p_{HCl}/\sqrt{p_{H_2}})^2 = K_p^{I}$ (Cr) nach Gleichung (1). Einsetzen in Gleichung (2) ergibt:

$$\frac{K_p^{I}\,(Cr)}{\pi_{CrCl_2}} = K_p^{III}\,(Cr) \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

b) Beschreibung der Einrichtungen für die Mitführungsversuche.

Wie bereits erwähnt, ist die durch das Trägergas mitgeführte Cr-Menge durch quantitative Bestimmung des Kondensates am Ofenausgang zu ermitteln. Hierzu ist das Kondensat-Auffangrohr erst nach dem Anheizen des Ofens und nach Einstellung eines stationären Betriebszustandes einzusetzen und nach gegebener Versuchszeit mit einem neuen Kondensat-Auffangrohr zur Gewinnung weiterer Versuchswerte zu vertauschen. Auf die technischen Schwierigkeiten beim Wechsel der Kondensat-Auffangrohre haben W. Fischer und R. Gewehr[17]) besonders hingewiesen und eine sehr vorteilhaft erscheinende Apparatur angegeben, die jedoch von uns nicht benutzt wurde, da bei dieser Apparatur während des Überführungsversuches noch ein Zusatzgasstrom benötigt wird, so daß das Trägergas noch vor Eintritt in den Versuchsofen zur Messung gebracht werden muß. Bei unseren Versuchen erschien es wünschenswert, das hindurchtretende Gas hinter dem Ofen unverändert aufzufangen. Damit wurde eine Neukonstruktion notwendig.

Der in Bild 2 nach unten gezeichnete Rohransatz dient zum Durchleiten eines kräftigen N_2-Zusatzstromes beim Wechsel der Kondensat-Auffangrohre, um das Eindringen von Luft zu verhindern. Während des eigentlichen Überführungsversuches strömt hier kein Gas.

Infolgedessen findet eine Diffusion von Chromhalogenid zwischen dem innen befindlichen Kondensat-Auffangrohr und dem Außenrohr nach dem kälteren Ofenende statt. Dieser Anteil der gesamten Verdampfungsbelastung ist unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit. Es wurde jedoch durch besondere Rechnung geprüft, daß im Stickstoff als Trägergas bei einem Wechsel der Strömungsgeschwindigkeit zwischen 90 und 540 cm³/h eine Än-

[17]) W. Fischer und R. Gewehr, Z. anorg. Chem. 209 (1932), S. 17.

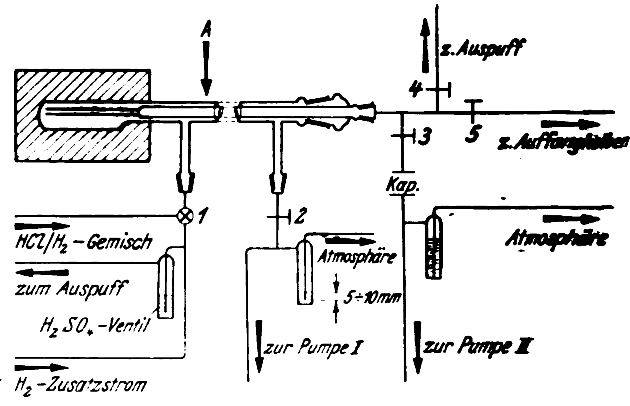


Bild 3. Verdampfungsgefäß II mit Hilfseinrichtungen.

derung der Gesamtbelastung von etwa 1:4 erreicht wurde. Probeversuche mit Verdampfung von Zink ergaben Werte, die mit den Sättigungsdruckangaben aus dem Schrifttum gut übereinstimmten.

In Wasserstoff als Trägergas ist der Einfluß der Diffusion größer. Hier wurde Verdampfungsgefäß II nach Bild 3 benutzt (nicht maßstäblich gezeichnet).

Anheizen: $HCl-H_2$-Gemisch strömt durch Hahn 1 in Stellung ⎦ durch das Versuchsgefäß. Hahn 3 und 5 sind geschlossen; Hahn 4 offen. Durch Saugen mit Pumpe I über Hahn 2 wird die Luft aus dem Teil rechts entfernt und daraufhin Hahn 2 geschlossen. Der Ofen wird angeheizt.

Wechsel des Kondensationsrohres und Beginn des ersten Versuches.

Hahn 4 wird geschlossen. Hahn 1 wird in Stellung —┤ gebracht. Durch Pumpe I über Hahn 2 wird abgesaugt. Das Kondensationsrohr wird herausgenommen, ein neues Kondensationsrohr an die Hähne 3, 4, und 5 angeschlossen, Hahn 3 geöffnet und Pumpe II angestellt. Das Kondensationsrohr wird zunächst bis »A« eingeführt und die Luft abgesaugt. Hierbei ist die Sauggeschwindigkeit durch die Waschflasche als Unterdruckregler und durch eine Drosselkapillare auf einen Bruchteil der $HCl-H_2$-Zufuhr begrenzt, so daß keine Luft in die Apparatur angesaugt werden kann. Nach 3 Minuten wird Hahn 3 geschlossen, Pumpe II abgestellt. Nach 5 Minuten wird Hahn 2 geschlossen, Hahn 1 in Stellung ⎦ gebracht und Hahn 5 geöffnet (Versuchsbeginn).

Ende des ersten Versuches, Wechsel des Kondensationsrohres und Beginn des zweiten Versuches. Hahn 5 wird geschlossen. Alle sonstigen Maßnahmen wie vorher.

Zugleich zeigt Bild 4 die Anlage zur Herstellung des $HCl-H_2$-Gemisches.

Versuchsgefäß I bzw. II befand sich in einem elektrischen Ofen mit Sicromalblock zur Erzielung einer möglichst guten örtlichen Temperaturkonstanz. Die Temperaturmessung erfolgte mit Pt-PtRh-Thermoelement in Kompensationsschaltung. Bei den Messungen an $CrCl_3$ und $CrBr_3$ wurden die Spannungsschwankungen des elektrischen Netzes durch zwei Sätze von Eisenwasserstofflampen in Kaskadenschaltung abgepuffert. Bei den Flüchtigkeitsmessungen in $HCl-H_2$-Gemischen wurde eine Ofensteuerung mit Thermoelement in Kompensationsschaltung, Spiegelgalvanometer, Photozelle, Verstärkeranlage und Relais benutzt[18]).

c) Analysenmethoden.

Die Menge des überführten Chromhalogenids wurde nach Umwandlung in die Cr(VI)-Stufe jodometrisch bestimmt. Chrom (II)-chlorid und Chrom (III)-bromid konnten ohne weiteres in Lösung gebracht werden. Gewisse Schwierigkeiten bereitete die außerordentlich geringe Lösungsgeschwindigkeit des Chrom (III)-chlorids. In diesem Falle wurde das Sublimat mit heißer Natronlauge aus dem Glasrohr herausgespült. Die Wirkung der heißen Lauge ist eine zweifache. Sie zersetzt in der Hitze das Chrom (III)-chlorid und bewirkt ferner durch Auflösung der Oberflächenschicht des Quarzes eine Ablösung der Kristalle des Sublimates von der Rohrwandung. Die Substanz wurde auf diese Weise in einen größeren Tiegel gespült und dann vorsichtig zur Trockene eingedampft, durch Soda-Salpeter-Schmelze aufgeschlossen und in Wasser gelöst. Eindampfen und Abrauchen mit konz. Schwefelsäure entfernte das Nitrat aus dem Aufschluß. Nach erneuter Zugabe von Lauge wurde in bekannter Weise mit Wasserstoffsuperoxyd oxydiert, der Überschuß verkocht und schließlich Kaliumjodid und Schwefelsäure hinzugegeben und mit Thiosulfatlösung titriert.

[18]) Über eine ähnliche Anlage vgl. u. a. B. Lange und E. Voos, Z. techn. Physik Bd. 15 (1934), S. 323.

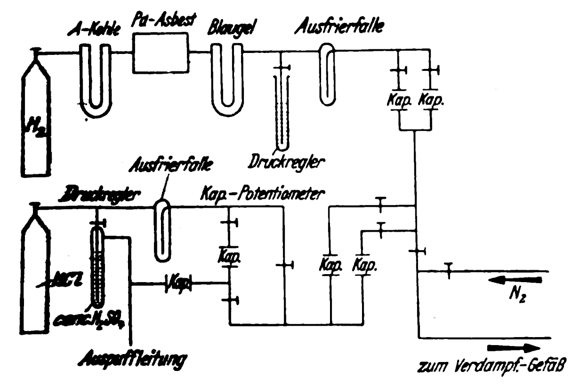


Bild 4. Gasreinigung und Mischung von $H_2 + HCl$ mittel Überdruckregler und Drosselkapillaren.

d) Die Flüchtigkeit von Chrom (II)-chlorid, und Chrom (III)-bromid in Stickstoff als Trägergas.

Für die Flüchtigkeitsmessungen über $CrCl_2$ in Stickstoff wurde Elektrolytchrom, das uns Herr Professor Grube dankenswerterweise zur Verfügung stellte, im $HCl-H_2$-Strom in $CrCl_2$ umgewandelt. Für die entsprechenden Messungen mit $CrCl_3$ wurde ein von der Firma E. Merk bezogenes Präparat (Chromchlorid sublimiert) verwandt. Chrom (III)-bromid wurde durch Überleiten von Stickstoff und Brom über metallisches Chrom nach einer Vorschrift von A. Moissan[19]) hergestellt.

Die Versuchsergebnisse für die Flüchtigkeitsmessungen mit Stickstoff als Trägergas sind in Zahlentafel 9 zusammengestellt. Die Strömungsgeschwindigkeit lag zwischen 90 und 540 cm³. Eine wesentliche Abhängigkeit der Flüchtigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit würde nicht erhalten, so daß die Ergebnisse als Gleichgewichtswerte angesprochen werden können. Bei der Mittelwertbildung wurden jedoch Versuchswerte mit geringerer Strömungsgeschwindigkeit mit größerem Gewicht bewertet.

Hierbei wird als Flüchtigkeit wie in Abschnitt a das Verhältnis der Chrommenge in g-Atom zur N_2-Molzahl definiert. Die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse wurden auf 1 at umgerechnet. Die f-Werte sind also unmittelbar gleich den Sättigungsdruckwerten (in at), sofern die Verdampfung monomer erfolgt (also nach Abschnitt e für $CrCl_2$). Für Chrom (III)-chlorid und Chrom (III)-bromid ist die Frage nach der Molekelgröße des Dampfes noch offen; im Falle der Verdampfung als Doppelmolekeln (Cr_2Cl_6 bzw. Cr_2Br_6) waren die Sättigungsdrucke (in at) nur halb so groß wie die Flüchtigkeitswerte der Zahlentafel 9.

Zahlentafel 9. Flüchtigkeitsmessungen über Chrom (II)-chlorid, Chrom (III)-chlorid und Chrom (III)-bromid in Stickstoff.

Bodenkörper	Temperatur °C	Zahl der Einzelmessungen	Flüchtigkeit f (für $p = 1$ at)
$CrCl_2$	879	3	0,00336
»	930	3	0,00563
$CrCl_3$	700	1	0,00147
»	706	3	0,00169
»	714	3	0,00213
»	738	2	0,00406
»	748,5	2	0,00474
»	800	4	0,0169
$CrBr_3$	665	2	0,00053
»	700	6	0,00171
»	719	1	0,00284
»	745	5	0,00598
»	775	2	0,0140
»	778	3	0,0153
»	799	3	0,0273

Die Meßwerte für Chrom (III)-chlorid liegen ganz wesentlich tiefer als die von K. Jellinek und R. Koop[20]) mitgeteilten Werte; dort wurde bei 700° C $f = 0{,}0094$ und bei 800° C $f = 0{,}031$ gefunden. Eine Deutung für diese abweichenden Ergebnisse fehlt.

[19]) A. Moissan, Ann. chim. phys. Bd. 25 (1882), S. 401.
[20]) K. Jellinek und R. Koop, Z. phys. Chem. Bd. A 145 (1930), S. 309.

Bei der graphischen Darstellung von $\log f$ gegen $1/T$ liegen die Versuchspunkte im wesentlichen auf Geraden. Hieraus ergeben sich die Interpolationsformeln:

$$\log f \,(\text{über } CrCl_3) = -\frac{11100}{T} + 8{,}58 \quad . \; . \; . \quad (10)$$

$$\log f \,(\text{über } CrBr_3) = -\frac{12900}{T} + 10{,}47 \quad . \; . \; . \quad (11)$$

e) Flüchtigkeitsmessungen über Chrom und über Chrom(II)-chlorid als Bodenkörper in HCl-H_2-Gemischen.

Flüchtigkeitsmessungen in HCl-H_2-Gemischen über Chrom wurden mit Hilfe von Versuchsgefäß II (vgl. Abschnitt b) bei 879 und 930° C durchgeführt. Von Messungen bei höheren Temperaturen wurde mit Rücksicht auf die Beständigkeit der Quarzgefäße abgesehen. Die Ergebnisse sind in Bild 5 in doppelt-logarithmischem Maßstab dargestellt. Die Streuungen sind verhältnismäßig groß. Ein systematischer Einfluß der Strömungsgeschwindigkeit ist nicht gefunden worden.

Bei geringen HCl-Gehalten (also nach Abschnitt a im Bereich von metallischem Chrom) sind die für die Gasphase gefundenen Cr-Gehalte relativ gering. Infolgedessen kann für das Verhältnis $HCl:H_2$ einfach der vor dem Versuchsofen eingestellte Wert zugrunde gelegt werden. In diesem Gebiet liegen die einzelnen Versuchspunkte in Bild 5 im wesentlichen auf Geraden mit dem Steigungsmaß +2, also entsprechend dem Gleichgewicht (III Cr): 2 HCl (Gas) + Cr (Metall) $\rightleftharpoons$ H_2 (Gas) + $CrCl_2$ (Gas) mit der zugehörigen Massenwirkungsgleichung (2). Als Zahlenwerte der Massenwirkungskonstante wurden erhalten:

$$K_p^{III}\,(\text{Cr}: 879^0\,\text{C}) = 2{,}5; \quad K_p^{III}\,(\text{Cr}: 930^0\,\text{C}) = 2{,}0 \qquad (12)$$

Hierdurch ist für die Gasphase die Molekelgröße $CrCl_2$ sichergestellt, da für die Molekelgröße Cr_2Cl_4 die Flüchtigkeit proportional zu $(p_{HCl}/\sqrt{p_{H_2}})^4$ wachsen sollte und somit die Meßpunkte auf einer Geraden mit dem Steigungsmaß +4 liegen müßten, was offensichtlich nicht zutrifft.

Bei höheren HCl-Gehalten, also nach Abschnitt a im Gebiet von Chrom(II)-chlorid als Bodenkörper, ist die Flüchtigkeit der Chromverbindungen nach Bild 5 im wesentlichen unabhängig von der Gaszusammensetzung und die Flüchtigkeit ist im wesentlichen ebenso groß wie über Chrom(II)-chlorid in Stickstoff. Zur Erlangung möglichst definierter Versuchswerte in diesem Gebiet wurde der Bodenkörperinhalt des Versuchsgefäßes längere Zeit mit einem Gasgemisch mit hohem HCl-Gehalt behandelt, um auf dem Chrom möglichst viel $CrCl_2$ zu erzeugen. Aus den Knickpunkten der Flüchtigkeitskurven in Bild 5 berechnen sich als Zahlenwerte für die Massenwirkungskonstanten K_p^I nach (1) für das Zwei-Bodenkörper-Gleichgewicht (II'): 2 HCl (Gas) + Cr (fest) = H_2 (Gas) + $CrCl_2$ (flüssig)

$$\left.\begin{aligned} K_p^I\,(\text{Cr}: 879^0\,\text{C}) &= 0{,}6 \cdot 10^{-2}\,(\text{at}); \\ K_p^I\,(\text{Cr}: 930^0\,\text{C}) &= 1{,}2 \cdot 10^{-2}\,(\text{at}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Werte liegen höher als die Werte der Zahlentafel 8, die aus Messungen von K. Jellinek und R. Koop[21]) bei höheren Temperaturen extrapoliert wurden.

f) Schlußfolgerungen für die Durchführung einer Verchromung von Aluminium.

Auf Grund der vorstehend beschriebenen Versuche und weitergehender theoretischer Überlegungen wird im System Chrom/Chlor das Flüchtigkeitsmaximum über Chrom(III)-chlorid als Bodenkörper erreicht. Als Gasatmosphäre ist entweder reiner Stickstoff oder ein HCl-H_2-Gemisch mit relativ hohem Gehalt an HCl zu verwenden, so daß Reduktion zu schwererflüchtigem Chrom(II)-chlorid nicht eintreten kann (z. B. über 88% HCl bei 510° C nach K. Jellinek und R. Koop[22]). Die Flüchtigkeit über Chrom(III)-chlorid als

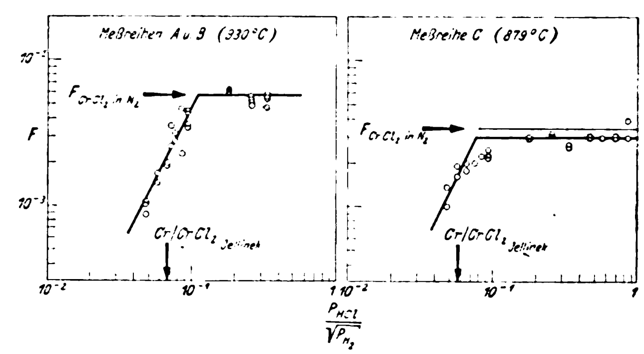


Bild 5. Flüchtigkeit von Chromverbindungen in HCl-H_2-Gemischen über Chrom als Ausgangssubstanz.

Bodenkörper ist jedoch wesentlich kleiner als bisher auf Grund der Messungen von K. Jellinek und A. Rudat angenommen. Für eine Chromierung von Aluminium mit einem Schmelzpunkt von 650° C muß eine Arbeitstemperatur von 600° C als obere technisch mögliche Grenze angesehen werden. Für diese Temperatur berechnet man nach der Interpolationsformel (10) in Abschnitt G, d) einen Druck von $p_{Cr_2Cl_6} = 0{,}9 \cdot 10^{-4}$ at. Der Druck über Chrom(III)-bromid für 600° C ergibt sich nach der Formel (11) in Abschnitt G, d) zu $p_{Cr_2Br_6} = 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ at also von gleicher Größenordnung.

Bei derart niedrigen Drucken bzw. Cr-Gehalten der Gasphase ist aber an eine technisch durchführbare Chromierung nicht zu denken. Um 1 Quadratmeter Aluminium mit einer Chromauflage von 0,1 mg Chrom/cm² (d. h. gleiche Größenordnung wie Zahlentafel 4, etwa einer Schichtdicke von 10^{-5} cm entsprechend) zu versehen, ist der gesamte Chromgehalt von 8 Kubikmeter Gas, das über Chrom(III)-chlorid gesättigt wurde, erforderlich. In Praxis wäre aber ein noch wesentlich höherer Gaswechsel vorzusehen (also z. B. das 10fache = 80 Kubikmeter), um lokale Verarmungserscheinungen auszuschließen und um einen einigermaßen gleichmäßigen Ausfall der Verchromung zu gewährleisten. Der Durchsatz derartig großer Gasmengen mit entsprechender Gasreinigung und Vorwärmung erscheint aber wirtschaftlich und technisch nicht tragbar. Gleiches gilt für die Verwendung von Chrom(III)-bromid.

Aus neueren Veröffentlichungen der Metalldiffusionsgesellschaft m. b. H. in Düsseldorf[22]) über die Inkromierung von Eisen ergibt sich, daß das Überleiten eines Trägerstroms mit hohen Gehalten an Chromhalogeniden entsprechend der wesentlich höheren Versuchstemperatur zwar technisch möglich ist, aber in vielen Fällen mit Vorteil durch folgende zwei Verfahren ersetzt wird:

1. Umpacken der zu veredelnden Eisenstücke mit keramischen Massen, die Chromchlorid und Ferrochrom enthalten und Glühen in indifferenter ruhender Gasatmosphäre. Das verdampfende Chrom(II)-chlorid gelangt durch Diffusion an die Eisenoberfläche und setzt sich dort zu Eisen(II)-chlorid-Dampf und Chrom um, das in das Eisen eindiffundiert. Das gasförmige Eisen(II)-chlorid diffundiert zur Ferrochrom-Legierung und reagiert dort zu Eisen und gasförmigem Chrom(II)-chlorid.

2. Umsetzung von Eisen mit flüssigen Salzbädern, die Chrom(II)-chlorid enthalten.

Grundsätzlich wären die vorgenannten Verfahren auch für die Oberflächenbehandlung von Aluminium möglich. Hierbei würden jedoch wesentliche Vorteile des Gasbehandlungsverfahrens gegenüber anderen Oberflächenbehandlungen verlorengehen. Bei der sehr großen spezifischen Oberfläche von dünnen Drähten würden unverhältnismäßig große Mengen an Chromierungsmitteln zum Einsatz gebracht werden müssen. Wenn auch der eigentliche Chromverbrauch gering sein würde, so wäre doch bei jedem Wechsel der Charge mit Verlusten zu rechnen, die ein Vielfaches der Chrommengen auf der Aluminiumoberfläche betragen würden. Dementsprechend wurden Versuche dieser Art mit Aluminium nicht ausgeführt.

[21]) Siehe Fußnote 20.
[22]) G. Becker, K. Daeves und K. Steinberg, Stahl und Eisen Bd. 61 (1941), S. 289.

H. Versuche zur Erzeugung oxydischer Deckschichten.

a) Allgemeines.

In Abschnitt B wurde bereits darauf hingewiesen, daß es an sich auch möglich erscheint, auf dem Aluminium oxydische Deckschichten von mäßig guter Leitfähigkeit zu erzeugen. Z. B. ist bekannt, daß Zinkoxyd nach geeigneter Vorbehandlung eine spezifische Leitfähigkeit von ungefähr 1 $Ohm^{-1} cm^{-1}$ besitzt. Bei einer Berührungsfläche von 0,1 cm^2 und einer Schichtdicke von 10^{-6} cm würde sich ein Übergangswiderstand von 10^{-5} Ohm entsprechend 7 mm Leitungslänge für einen Al-Stab von 5 mm Dmr. ergeben.

b) Die Erzeugung von Zinkoxydschichten auf Aluminium.

Es wurde versucht, eine Zinkoxydschicht auf Aluminium nach folgender Reaktionsfolge herzustellen:

$$3\,ZnCl_2\,(Gas) + 2\,Al\,(fest) = 3\,Zn\,(auf\ Al) + Al_2Cl_6\,(Gas)$$
$$3\,Zn\,(auf\ Al) + 3\,CO_2\,(Gas) = 3\,ZnO\,(auf\ Al) + 3\,CO\,(Gas).$$

Zinkoxyd neben Aluminium ist zwar thermodynamisch nicht stabil, sondern höchstens metastabil zu erhalten. Trotz dieser Bedenken wurden folgende Versuche durchgeführt. In der gleichen Versuchsanordnung wie Abschnitt F, b wurde CO_2 als Trägerstrom mit flüssigem Zinkchlorid bei 470 bis 500° C gesättigt und über Aluminium bei 490 bis 620° C geleitet. Die danach erhaltenen Übergangswiderstände sind in Zahlentafel 10 enthalten. Bei einer Aluminiumtemperatur von 490 und 620° C wurden wesentlich höhere Übergangswiderstände gemessen.

Bei 620° C wurde bereits eine starke Aufrauhung und Dunkelfärbung der Aluminiumprobe beobachtet. Auch unter den in Zahlentafel 10 genannten Bedingungen ist eine Verbesserung gegenüber Aluminium nicht festzustellen. Es ist jedoch bemerkenswert, daß nach einer Vorbehandlung bei 510° C ungefähr die gleichen Werte wie für Aluminium ohne Vorbehandlung gefunden wurden.

Zahlentafel 10. Übergangswiderstände an Aluminiumstäben nach 20 stündiger Behandlung in $CO_2 + ZnCl_2$-Dampf. Sättigungstemperatur für $ZnCl_2$: 470—500° C.

Zahl der Belastungswechsel	Übergangswiderstände in mm Leitungslänge Al			
	Stab I (Aluminiumtemperatur 510° C)		Stab II (Aluminiumtemperatur 558° C)	
	sofort gemessen	nach 14 Mon.	sofort gemessen	nach 14 Mon.
0	10	16	26	49
1	14	18	25	73
2	17	24	31	83
3	20	31	38	84
4	22	36	44	90
5	20	39	48	97
6	22	41	54	88
7	26	44	43	85
8	28	49	52	89
9	29	54	59	109
10	30	57	67	117

c) Die Erzeugung von Eisenoxydschichten auf Aluminium.

In analoger Weise wurde versucht, Eisenoxydschichten auf Aluminium etwa nach folgender Reaktionsfolge herzustellen:

$$Fe_2Cl_6\,(Gas) + 2\,Al\,(fest) = 2\,Fe\,(auf\ Al) + Al_2Cl_6\,(Gas)$$
$$2\,Fe\,(auf\ Al) + \frac{8}{3}\,CO_2\,(Gas) = \frac{2}{3}\,Fe_3O_4\,(auf\ Al) + \frac{8}{3}\,CO\,(Gas).$$

U. a. sei hier kurz über folgenden Versuch berichtet. Kohlendioxyd als Trägergas wird bei 213° C über $FeCl_3$ gesättigt und über eine Aluminiumprobe bei 539° C geleitet. Versuchsdauer 16 Stunden. Der Aluminiumstab zeigte eine mattgraue, großporige Oberfläche mit einzelnen dunklen Abscheidungen. Die Übergangswiderstände schwankten bei Belastungswechsel und bei Änderung der Einspannung verhältnismäßig stark und in der Größenordnung von 10 bis 60 mm Leitungslänge. Bei einer Aluminiumtemperatur von 640° C war die Oberflächenveränderung wesentlich stärker. Der Übergangswiderstand überstieg den Meßbereich der Schaltung.

d) Versuche über die Einwirkung von Titan(IV)-chlorid und Zirkon(IV)-chlorid auf Aluminium.

Bei der Einwirkung von Titan(IV)-chlorid (20° C Sättigungstemperatur) und Zirkon(IV)-chlorid (Sättigungstemperatur 250° C) mit Wasserstoff sowie mit Kohlendioxyd als Trägergas ergaben bei Temperaturen zwischen 300 und 500° starken Angriff der Aluminiumproben und Abscheidungen lockerer, dunkler undefinierbarer Produkte. Die Übergangswiderstände lagen wesentlich zu hoch.

J. Zusammenfassung.

1. Es wird ein allgemeiner Überblick über die verschiedenartigen Möglichkeiten zur Herabsetzung des Oberflächenwiderstandes von Aluminium durch Oberflächenbehandlungsverfahren gegeben (B).

2. Es wird über Versuche zur Herstellung von Metallüberzügen auf Aluminium durch Umsetzung mit Schwermetallsalzen nach Angaben von Boulanger und Jirotka berichtet. Die Versuchsergebnisse sind durchaus negativ (Abschnitt D).

3. Es wird über die Versuche zur Herstellung von Fremdmetallüberzügen auf Aluminium mittels »Metallisierungslot« L 111 der Firma Siemens und Halske A.-G. (35% Zn + 35% Cd + 28% Zn + 2% Pb) berichtet. Der Übergangswiderstand wird in sehr befriedigender Weise vermindert (Abschnitt C, Zahlentafel 2). Der praktischen Durchführbarkeit dieser Art von Oberflächenbehandlung steht entgegen, daß Hauptbestandteile des benutzten Metallisierungslotes gerade die besonders knappen Sparmetalle Zinn und Kadmium sind.

4. Es wird über Versuche zur Verkupferung von Aluminium durch Umsetzung mit gasförmigem Kupfer(I)-chlorid berichtet. Die erhaltenen Kupferüberzüge sind sehr ungleichmäßig. Diese Umsetzung kommt für praktische Zwecke nicht in Betracht (Abschnitt F).

5. Es wird über Versuche zur Chromierung von Aluminium durch Umsetzung mit gasförmigen Chromverbindungen berichtet. Die Chromierung verläuft wesentlich gleichmäßiger als die Verkupferung. Die Übergangswiderstände sind etwas geringer als für Aluminium ohne Vorbehandlung (Abschnitt F). Eine praktische Chromierung von Aluminium ist jedoch nicht durchführbar, da bei Temperaturen unterhalb des Aluminiumschmelzpunktes die Flüchtigkeit der an sich geeigneten Chromhalogenide zu gering ist. Es wurden die Dampfdrucke der Bodenkörper (Chrom(II)-chlorid, Chrom(III)-chlorid und Chrom(III)-bromid bestimmt (Abschnitt G). Es wurde ferner das Gleichgewicht: $Cr\,(fest) + 2\,HCl\,(Gas) = CrCl_2\,(Gas) + H_2\,(Gas)$ gemessen, da dieses Gleichgewicht für die Chromierung von Eisen wichtig ist (Abschnitt G). — Weitere Versuche zur Chromierung von Aluminium mit Hilfe von leicht flüchtigem Chromylchlorid CrO_2Cl_2 fielen wegen vorzeitiger Zersetzung dieser Verbindung negativ aus.

6. Es wurden Versuche zur Herstellung von besser leitenden oxydischen Deckschichten ausgeführt (Umsetzung von Zinkchlorid, von Eisen(III)-chlorid, von Titan(VI)-chlorid und von Zirkon(IV)-chlorid mit Aluminium in Gegenwart von Kohlendioxyd). Die Versuche fielen gleichfalls negativ aus (Abschnitt H).

Zur Auswertung der Vermessung eines zeitlich veränderlichen Vorgangs beim Einsatz verschiedenartiger Meßgeräte*).

Von H. Knobloch, Berlin.

Es wird ein Auswerteverfahren nach der Methode der kleinsten Quadratsumme beschrieben für den Fall, daß zur Vermessung eines zeitlich veränderlichen Vorgangs mehrere verschiedenartige, außer der eigentlichen Meßgröße auch ihre zeitlichen Ableitungen registrierenden Meßgeräte eingesetzt werden. — Abschließend wird auf die Vorteile und die leichte Anwendbarkeit der Ausgleichsrechnung beim Glätten und Differenzieren von Funktionen, welche durch Meßpunkte gegeben sind, hingewiesen.

Gliederung.

A. Aufgabenstellung.

Eine Genauigkeitssteigerung bei der Vermessung eines zeitlich veränderlichen und nicht wieder reproduzierbaren Vorgangs, der ja in der Flugzeug- und Luftfahrtgeräte-Erprobung eine häufig zu beobachtende Erscheinung ist, läßt sich durch mehrfache Wiederholung der Messungen, wie es bei zeitlich konstanten Meßgrößen üblich ist, nicht erreichen. Bis zu einem gewissen Grade liefert hier die Erhöhung der Anzahl der Meßpunkte in Verbindung mit einem ausgleichenden Auswerteverfahren genauere Ergebnisse.

Wie bereits in einer früheren Arbeit [1] angedeutet, läßt sich bei einer derartigen Aufgabe eine weitere Genauigkeitssteigerung dadurch erzielen, daß man mehr Meßgeräte einsetzt, als an sich für die Vermessung des Vorgangs erforderlich wären. Im folgenden wird ein auf der Methode der kleinsten Quadratsumme beruhendes Auswerteverfahren angegeben für die i. a. voll ausreichende Annahme, daß außer der Meßgröße selbst auch ihre erste und zweite Ableitung nach der Zeit durch besondere Geräte gemessen werden, wobei sämtliche Meßgeräte voneinander unabhängig arbeiten und nur zeitlich gekoppelt sein sollen.

Zur leichteren Veranschaulichung und zur besseren Übersicht wird als an erster Stelle stehende Meßgröße z. B. der horizontale Flugweg $s(t)$ eines Flugzeugs gewählt, für das durch eingebaute Eigengeschwindigkeits- und Beschleunigungsschreiber außerdem noch die Geschwindigkeit $v(t) = ds/dt$ und die Beschleunigung $b(t) = d^2s/dt^2$ gemessen werden sollen.

B. Ansatz für den Ausgleich der Meßwerte.

Es liegen vor — eventuell durch Abgreifen von Schrieben — für die Zeitpunkte t_i bzw. t_k bzw. t_l die Meßwerte

$s_i = s(t_i)$ = Wege,
$v_k = v(t_k)$ = Geschwindigkeiten,
$b_l = b(t_l)$ = Beschleunigungen.

Der Ausgleich soll erfolgen durch die Ausgleichsfunktion (1) für den Weg s

$$x(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t) \sim s(t) \qquad (1)$$

wobei die $\varphi_\nu(t)$ geeignet vorgewählte, also bekannte Funktionen darstellen, die Koeffizienten a_ν jedoch noch frei verfügbar sind. Bei nicht periodischen Vorgängen setzt man in der Praxis meist $\varphi_\nu(t) = t^\nu$, Formel (1) also als Potenzreihe an:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \quad \ldots \quad (1^*)$$

Die Ausgleichsforderung, welche zur Festlegung der zunächst noch unbestimmten Faktoren a_ν führen soll, verlangt nun, daß die durch den Ansatz (1) definierten Werte $x(t_i)$ bzw. $\frac{dx}{dt}(t_k)$ bzw. $\frac{d^2x}{dt^2}(t_l)$ den Meßwerten s_i bzw. v_k bzw. b_l möglichst nahe liegen, ohne daß die Ausgleichsfunktion $x(t)$ den glatten, durch (1) vorgegebenen Kurvencharakter verliert. Die Methode der kleinsten Quadratsumme fordert hierzu insbesondere, daß die a_ν so gewählt werden sollen, daß die Summe der Quadrate aller Abweichungen

$$x(t_i) - s_i \text{ bzw. } \frac{dx}{dt}(t_k) - v_k \text{ bzw. } \frac{d^2x}{dt^2}(t_l) - b_l$$

ein Minimum bildet:

$$p \cdot \sum_i [x(t_i) - s_i]^2 + q \cdot \sum_k \left[\frac{dx}{dt}(t_k) - v_k\right]^2 + r \cdot \sum_l \left[\frac{d^2x}{dt^2}(t_l) - b_l\right]^2 = \text{Minimum} \quad \ldots \quad (2)$$

Die drei Faktoren p, q, r enthalten dabei außer den Umrechnungsfaktoren für die verschiedenen Dimensionen der Meßgrößen noch die Gewichte, mit denen die Meßreihen der verschiedenen Meßgeräte zu belegen sind; sie müssen als gegeben vorausgesetzt werden.

Variabel sind in (2) die Koeffizienten a_ν des Ansatzes (1); es müssen also sämtliche partiellen Ableitungen der linken Seite von (2) nach diesen Koeffizienten a_ν verschwinden. Die Ableitung nach a_ν liefert wegen

$$\partial x / \partial a_\nu = \varphi_\nu(t)$$
$$\partial \frac{dx}{dt} \Big/ \partial a_\nu = \frac{d}{dt}\varphi_\nu(t)$$
$$\partial \frac{d^2x}{dt^2} \Big/ \partial a_\nu = \frac{d^2}{dt^2}\varphi_\nu(t)$$

die $n+1$ Gleichungen

$$p \cdot \sum_i [x(t_i) - s_i] \cdot \varphi_\nu(t_i) + q \cdot \sum_k \left[\frac{dx}{dt}(t_k) - v_k\right] \cdot \frac{d}{dt}\varphi_\nu(t_k) + r \cdot \sum_l \left[\frac{d^2x}{dt^2}(t_l) - b_l\right] \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi_\nu(t_l) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$\nu = 0, 1, 2, \ldots n,$

aus denen sich die $n+1$ Koeffizienten a_ν errechnen lassen. Für den Ansatz (1*) nimmt das Gleichungssystem (3) die Form an

$$p \cdot \sum_i x(t_i) \cdot t_i^\nu + \nu q \cdot \sum_k \frac{dx}{dt}(t_k)\, t_k^{\nu-1} + \nu(\nu-1) r \cdot \sum_l \frac{d^2x}{dt^2}(t_l)\, t_l^{\nu-2} = p \cdot \sum_i s_i t_i^\nu + \nu q \cdot \sum_k v_k t^{\nu-1} + \nu(\nu-1) r \cdot \sum_l b_l t_l^{\nu-2} \quad \ldots \quad (3^*)$$

*) C 9, P 31 9.

C. Umformungen für die praktische Anwendung.

In der Praxis wird es meist möglich sein, für die Meßwerte gleiche Zeitabstände $\Delta t = t_{i+1} - t_i =$ konst. zu wählen und außerdem die Ergebnisse der einzelnen Meßgeräte den gleichen Zeitwerten zuzuordnen, d. h. $t_i \equiv t_k \equiv t_l$ zu setzen. Den m Zeitwerten t_i einer ungeraden Anzahl von Meßwerten für jedes Gerät läßt sich dann über die Transformation

$$\tau_i = -\frac{m-1}{2} + \frac{t_i - t_1}{t_m - t_1} \cdot (m-1) = -\frac{m-1}{2} + \frac{t_i - t_1}{\Delta t} \quad \ldots \quad (4)$$

die Zahlenreihe

$$-\frac{m-1}{2}, \ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots + \frac{m-1}{2}$$

eines an die Stelle von t tretenden (dimensionslosen) Parameters τ zuordnen. Es sind daher die Meßgrößen s, v, b auch als Funktionen von τ aufzufassen. Für die Ableitungen ist nach (4):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t, & \left(\Delta t = \frac{t_m - t_1}{m-1} = \text{Zeitstufe}\right. \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} &= \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \Delta t^2, & \left.\text{für den Schritt } \Delta \tau = 1\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

so daß bei der formalen Einführung von τ an Stelle von t in die unter Abschnitt B abgeleiteten Formeln die gemessenen Geschwindigkeiten v sämtlich mit Δt, die Meßwerte für die Beschleunigung b sämtlich mit Δt^2 zu multiplizieren sind.

Für die τ_i gilt nun die Besonderheit, daß die Summen $S_z = \sum_i^m \tau_i^z$ für ungerades z verschwinden. Für gerades z sind diese Summen Funktionen von z und m (s. Zahlentafel 1). Nach diesen Überlegungen erhält man also für den Ansatz

$$x(\tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \ldots + a_n \tau^n \quad \ldots \quad (6)$$

an Stelle von (3*) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & p \cdot [a_0 S_\nu + a_1 S_{\nu+1} + a_2 S_{\nu+2} + \ldots] \\ & \quad + \nu q \cdot [a_1 S_{\nu-1} + 2 \cdot a_2 S_\nu + 3 \cdot a_3 S_{\nu+1} + \ldots] \\ & \quad + \nu(\nu-1) r \cdot [2 \cdot 1 \cdot a_2 S_{\nu-2} + 3 \cdot 2 \cdot a_3 S_{\nu-1} + 4 \cdot 3 \cdot a_4 S_\nu + \ldots] \\ & \quad = p \cdot \sum_i s_i \tau_i^\nu + \nu q \Delta t \cdot \sum_i v_i \tau_i^{\nu-1} + \nu(\nu-1) r \Delta t^2 \\ & \quad \times \sum_i b_i \tau_i^{\nu-2} \quad \ldots \quad (7) \end{aligned}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Wegen $S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = 0$ zerfällt (7) in zwei Teilsysteme, von denen das eine nur die a_r mit geraden, das andere nur die mit ungeraden Indizes enthält, wodurch die Auflösung der Gleichungssysteme natürlich sehr erleichtert wird.

D. Eine Spezialisierung.

Für die praktisch vorkommenden Aufgaben vereinfacht sich das System (7), aus dem ja die Koeffizienten a_ν zu errechnen sind, ganz wesentlich. Wird z. B. für ein horizontal fliegendes Flugzeug mit einer Langbasisanlage der Weg s, mit einem eingebauten Beschleunigungsschreiber die zugehörige Beschleunigung b gemessen [2], so kann man $p = 1$, $q = 0$, $r \neq 0$ und beispielsweise $n = 3$ setzen. Aus (7) gewinnt man dann ohne jede Schwierigkeit

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= \frac{S_4 \cdot \sum s_i \tau_i - S_2 \cdot [\sum s_i \tau_i^3 + 6 \cdot r \Delta t^2 \sum b_i \tau_i]}{S_4 S_4 - S_2 \cdot [S_6 + 36 \cdot r S_2]} \\ a_2 &= \frac{S_2 \cdot \sum s_i - S_0 \cdot [\sum s_i \tau_i^2 + 2 \cdot r \Delta t^2 \cdot \sum b_i]}{S_2 S_2 - S_0 \cdot [S_4 + 4 \cdot r S_0]} \\ a_1 &= \frac{\sum s_i \tau_i - a_3 S_4}{S_2} \\ a_0 &= \frac{\sum s_i - a_2 S_2}{S_0} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

mit der Abkürzung $S_z = \sum_i^m \tau_i^z$ (s. Zahlentafel 1). Zum Beispiel für die Flugzeuggeschwindigkeit an der Stelle $\tau = 0$ liefert also der Ausgleich nach (5) und (6) den Wert

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a_1}{\Delta t} \quad \ldots \quad (9)$$

wobei a_1 für $n = 3$ durch (8) bestimmt ist.

E. Eine Erweiterung.

Die Ausgleichsforderung (2) und die Gleichungssysteme (3) bzw. (3*) lassen sich ohne weiteres auf den Fall erweitern, daß mehr als jeweils eine Meßeinrichtung für den Weg, für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung benutzt werden. Wichtiger jedoch ist z. B. für den unter Abschnitt D behandelten Sonderfall eine Erweiterung in dem Sinne, daß beim Beschleunigungsmesser — etwa durch die starken Beanspruchungen bei Start und Landung oder durch Unachtsamkeit der Bedienung — die Nullinie des Schriebes verloren gegangen ist.

In diesem Falle müßte man die Ablesewerte b_i^* um die zunächst unbekannte Nullpunktsverschiebung b_0 korrigieren, um zu den bisher benutzten Beschleunigungswerten b_i, welche systematische Fehler nicht mehr enthalten sollen, zu gelangen:

$$b_i = b_i^* - b_0 \quad \ldots \quad (10)$$

Führt man diese Beziehung (10) in (7) ein, so erhält man $n + 1$ Gleichungen für die $n + 2$ Unbekannten a_0, a_1, ... a_n, b_0. Die noch fehlende Bestimmungsgleichung folgt aus dem Ansatz (2), dessen linke Seite ja außer nach den a_ν jetzt zusätzlich auch noch nach b_0 abgeleitet werden muß:

$$\sum_l \left[\frac{d^2 x}{dt^2}(t_l) - b_l\right] \cdot 1 = 0.$$

Daraus ergibt sich mit den für Abschnitt D getroffenen Voraussetzungen und unter Beachtung von (5):

$$2 \cdot a_2 S_0 = \Delta t^2 \cdot \sum_i b_i = \Delta t^2 \cdot \left[\sum_i b_i^* - b_0 S_0\right].$$

Diese Gleichung liefert zusammen mit den für $p = 1$, $q = 0$ und $n = 3$ aus (7) und (10) sich ergebenden vier Gleichungen das Lösungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= \frac{S_4 \cdot \sum s_i \tau_i - S_2 \cdot [\sum s_i \tau_i^3 + 6 \cdot r \Delta t^2 \cdot \sum b_i^* \tau_i]}{S_4 S_4 - S_2 \cdot [S_6 + 36 \cdot r S_2]} \\ a_2 &= \frac{S_2 \sum s_i - S_0 \cdot \sum s_i \tau_i^2}{S_2 S_2 - S_0 S_4} \\ a_1 &= \frac{\sum s_i \tau_i - a_3 S_4}{S_2} \\ a_0 &= \frac{\sum s_i - a_2 S_2}{S_0} \\ b_0 &= \frac{\sum b_i^*}{S_0} - \frac{2 \cdot a_2}{\Delta t^2} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Zahlentafel 1. Zahlenwerte der Summen $S_z = \sum_i^m \tau_i^z$.

$(S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = 0)$

Anzahl m der Meßpunkte	S_0	S_2	S_4	S_6
5	5	10	34	130
7	7	28	196	1 588
9	9	60	708	9 780
11	11	110	1 958	41 030
13	13	182	4 550	134 342
15	15	280	9 352	369 640
17	17	408	17 544	893 928
19	19	570	30 666	1 956 810
21	21	770	50 666	3 956 810
23	23	1 012	79 948	7 499 932
25	25	1 300	121 420	13 471 900
27	27	1 638	178 542	23 125 518

Ein Vergleich der Lösungssysteme (8) und (11) zeigt, daß beim Ausgleich mit $n = 3$ zur Errechnung der Fluggeschwindigkeit an der Stelle $\tau = 0$ nach Formel (9) die Nullinie des Beschleunigungsschriebes nicht bekannt zu sein braucht, denn wegen $\Sigma b_0 \tau_i = 0$ ist ja $\Sigma b_i^* \tau_i = \Sigma b_i \tau_i$. Für den Ort des Flugzeugs bei $\tau = 0$ jedoch ergeben sich unterschiedliche Werte je nachdem, ob die Nullinie des Beschleunigungsschriebes bekannt ist oder nicht. Bei verloren gegangener Nullinie — d. h. bei Ausfall dieser Bestimmungsgröße — ist die Auswertegenauigkeit selbstverständlich geringer als bei Vollgültigkeit aller Meßwerte.

Eine Erweiterung dieses Verfahrens auf den Ausfall auch des richtigen Anstiegs der abgeleiteten Größen mit der Zeit ist an Hand des hier behandelten Beispiels leicht durchführbar, dürfte praktisch jedoch kaum von Wert sein.

F. Hinweis auf die numerische Differentiation von Funktionen.

Um dem Praktiker den Wert und die leichte Anwendbarkeit der Methoden der Ausgleichsrechnung vor Augen zu führen, soll noch auf die Verwendbarkeit der Formeln (8) auch zum Glätten und Differenzieren von graphisch oder tabellarisch gegebenen Funktionen $s = s(t)$ hingewiesen werden. Nach dem Vorschlag von Sauer und Pösch [3] werden hierzu die durch Kurven gegebenen Funktionen zunächst durch Ablesen der Kurvenwerte für in gleichen Stufen Δt fortschreitende t-Werte tabelliert.

Zum Glätten oder zum Differenzieren der dann vorliegenden Zahlentafel $s = s(t)$ mit $\Delta t =$ konst. ist es in mathematischen Büros üblich, sich aus Papier eine τ-Leiter (Faktorenschema) zu fertigen, welche sich über der Spalte der t-Werte verschieben läßt, so daß die Zuordnung z. B. der Parameterreihe $\tau_i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ nach jedem Rechengang eine Zeile weitergeschoben und dadurch der Parameterwert $\tau = 0$ nacheinander allen (bis auf $m - 1$) t-Werten zugeteilt werden kann.

Den ausgeglichenen Funktionswert s an der Stelle $\tau = 0$ liefert dann der Koeffizient a_0 in (6). Ferner ist nach (9) bzw. (6) und (5) für $\tau = 0$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a_1}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{2 \cdot a_2}{\Delta t^2}.$$

Für m Punkte τ_i findet man aus (8) mit $r = 0$ für den Ausgleich n-ten Grades ($n \leq 3$) beispielsweise folgende, für das Arbeiten mit Rechenmaschinen gut brauchbare Formeln:

Glätten mit $m = 7$ und $n = 2$ und 3

$$s = \frac{1}{21} \cdot [-2 \cdot s_1 + 3 \cdot s_2 + 6 \cdot s_3 + 7 \cdot s_4 + 6 \cdot s_5 + 3 \cdot s_6 - 2 \cdot s_7]; \quad \ldots (12)$$

1. Ableitung mit $m = 7$ und $n = 1$ und 2

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{28 \cdot \Delta t} \cdot [-3 \cdot s_1 - 2 \cdot s_2 - 1 \cdot s_3 + 1 \cdot s_5 + 2 \cdot s_6 + 3 \cdot s_7]; \quad \ldots (13)$$

2. Ableitung mit $m = 11$ und $n = 2$ und 3

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{429 \cdot \Delta t^2} \cdot [15 \cdot s_1 + 6 \cdot s_2 - 1 \cdot s_3 - 6 \cdot s_4 - 9 \cdot s_5 - 10 \cdot s_6 - 9 \cdot s_7 - 6 \cdot s_8 - 1 s_9 + 6 \cdot s_{10} + 15 \cdot s_{11}] \quad \ldots (14)$$

Bild 1 zeigt ein Multiplikationsschema zum Glätten einer Funktion $s(t)$ nach Formel (12), Bild 2 und 3 sind entsprechende Rechenhilfen zum Differenzieren der Funktion $s(t)$ nach Formel (13) bzw. (14). Diese Rechenhilfen werden beim Gebrauch so auf die Zahlentafel gelegt, daß die Zahlen-

Zahlentafel 2. Anwendungsbeispiel für die Rechenhilfen Bild 1 bis 3: $s = \cos t$.

1	2	3	4	5	6	7	8
Vorgegebene Funktion		Spalte 2 mit (12) geglätt.	Wahrer Wert	Spalte 2 mit (13) differenz.	Wahrer Wert	Spalte 2 mit (14) differ.	Spalte 5 mit (13) differ.
t	s	s	s	$\frac{ds}{dt}$	$\frac{ds}{dt}$	$\frac{d^2s}{dt^2}$	$\frac{d^2s}{dt^2}$
0,00	1,00						
0,05	1,00						
0,10	1,00						
0,15	0,99	0,990	0,989	— 0,143	— 0,149		
0,20	0,98	0,982	0,980	— 0,200	— 0,199		
0,25	0,97	0,970	0,969	— 0,257	— 0,247	— 0,99	
0,30	0,96	0,957	0,955	— 0,300	— 0,296	— 0,98	— 1,02
0,35	0,94	0,940	0,939	— 0,343	— 0,343	— 0,99	— 0,95
0,40	0,92	0,922	0,921	— 0,400	— 0,389	— 0,90	— 0,92
0,45	0,90	0,900	0,900	— 0,457	— 0,435	— 0,93	— 0,90
0,50	0,88	0,876	0,878	— 0,479	— 0,479	— 0,85	— 0,85
0,55	0,85	0,852	0,853	— 0,529	— 0,523	— 0,71	— 0,76
0,60	0,82	0,824	0,825	— 0,571	— 0,565	— 0,75	— 0,72
0,65	0,80	0,793	0,796	— 0,600	— 0,605	— 0,76	— 0,76
0,70	0,76	0,764	0,765	— 0,629	— 0,644	— 0,75	— 0,72
0,75	0,73	0,732	0,732	— 0,671	— 0,682	— 0,71	— 0,72
0,80	0,70	0,696	0,697	— 0,721	— 0,717	— 0,71	— 0,74
0,85	0,66	0,660	0,660	— 0,743	— 0,751	— 0,74	— 0,70
0,90	0,62	0,621	0,622	— 0,779	— 0,783	— 0,58	— 0,63
0,95	0,58	0,581	0,582	— 0,821	— 0,813	— 0,66	— 0,55
1,00	0,54	0,540	0,540	— 0,836	— 0,841	— 0,47	— 0,51
1,05	0,50	0,498	0,498	— 0,864	— 0,867	— 0,37	— 0,45
1,10	0,45	0,453	0,454	— 0,879	— 0,891	— 0,42	— 0,39
1,15	0,41	0,408	0,408	— 0,900	— 0,913	— 0,44	— 0,41
1,20	0,36	0,363	0,362	— 0,921	— 0,932	— 0,42	— 0,39
1,25	0,32	0,318	0,315	— 0,936	— 0,949	— 0,37	
1,30	0,27	0,270	0,267	— 0,964	— 0,964	Wahrer Wert	
1,35	0,22	0,221	0,219	— 0,979	— 0,976	$\frac{d^2 s}{dt^2} = -s$	
1,40	0,17					(Spalte 2)	
1,45	0,12						
1,50	0,07						

Faktoren	
$\frac{1}{21} \cdot$	— 2
	+ 3
	+ 6
	+ 7
	+ 6
	+ 3
	— 2
Glätten ($n = 2$ und 3)	

Bild 1. Rechenhilfe zum Glätten einer Funktion.

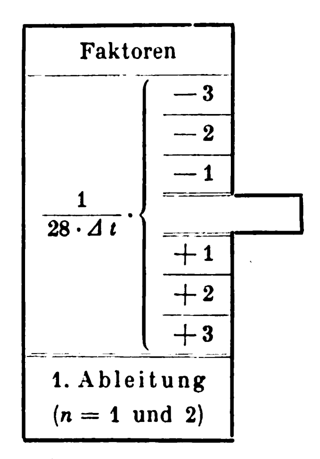


Bild 2. Rechenhilfe für die erste Ableitung einer Funktion.

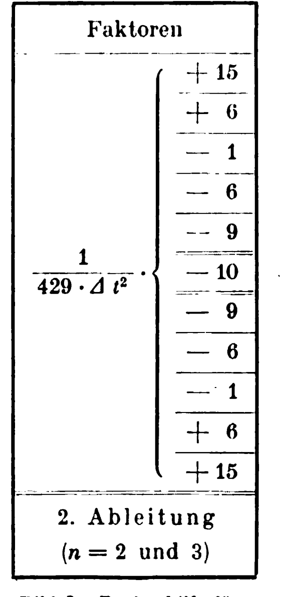


Bild 3. Rechenhilfe für die zweite Ableitung einer Funktion.

werte s_i der Zahlentafel rechts neben der Reihe der Faktoren erscheinen. Die mit Hilfe einer Rechenmaschine errechneten Ergebnisse gehören jeweils zu dem an mittlerer Stelle stehenden Wert s_i. Der bei der Rechenhilfe Bild 2 herausstehende Lappen soll den nicht benötigten Wert s_4 in der Spalte der s_i-Werte abdecken.

Als Anwendungsbeispiel zeigt Zahlentafel 2 für die von Sauer und Pösch [3] gewählte Zahlenreihe Ergebnisse, welche mit den in Bild 1 bis 3 angegebenen Rechenhilfen gewonnen wurden.

G. Schrifttum.

[1] H. Knobloch, Funktionsgewichte in der Ausgleichsrechnung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 315 bis 316.

[2] H. Knobloch, Grundzüge der Ballistik des Bombenwurfs. In Beiträge zur Ballistik und technischen Physik, herausgegeben von H. Schardin. Leipzig 1938.

[3] R. Sauer und H. Pösch, Rechnerische Differentiation von Kurven. Z. VDI Bd. 85 (1941), S. 195 bis 197.

Zur Berechnung von Drehschwingungs-Systemen mit federndem Umlaufgetriebe*).

Von W. Benz, Köln-Deutz.

Drehschwingungs-Systeme mit drehfederndem Umlaufgetriebe können auf einfache Systeme mit gewöhnlichem Getriebe und zusätzlicher frequenzabhängiger Elastizität zurückgeführt werden.

Gliederung.

I. Einleitung.

Um die Durchrechnung von Drehschwingungssystemen mit vielen Massen einfach zu gestalten, sucht man nach Möglichkeit das gegebene System auf eine Massenkette zurückzuführen. Zwischenliegende Getriebe werden bei der Reduktion weggelassen und ihre Wirkung dadurch berücksichtigt, daß die Massen und Drehsteifigkeiten auf der einen Seite des Getriebes mit dem Quadrat des Untersetzungsverhältnisses multipliziert werden. Wie nachstehend gezeigt wird, können auch Systeme mit drehfederndem Planetenradgetriebe in ähnlicher Weise reduziert und die gewonnenen Systeme nach bekanntem Probierverfahren durchgerechnet werden.

Für einfache Systeme mit nur einer Masse vor und nach dem Getriebe hat bereits Meyer[1]) die Frequenzgleichungen angeschrieben und auch Hinweise für das Probierverfahren gegeben.

Daß sich derartige Systeme in drehschwingungstechnisch gleichwertige Massenketten überführen lassen, ist anscheinend nicht erkannt worden; die Reduktion soll daher kurz gezeigt werden.

II. Reduktion des drehfedernden Planetenradgetriebes.

In Bild 1a ist das zu betrachtende System schematisch dargestellt. Zwischen den Massenketten links und rechts liegt das drehfedernde Umlaufgetriebe. Im Bild bedeuten:

- Θ Massenträgheitsmomente, im einzelnen,
- Θ_a das Massenträgheitsmoment der Außenteile,
- Θ_t das Massenträgheitsmoment des Planetenradträgers,
- Θ_s das Massenträgheitsmoment des Sonnenrades,
- Θ_p das Massenträgheitsmoment des Planetenrades um seine Drehachse,
- m_p die Masse des sich auf dem Planetenträger drehenden Planetenrades,
- Θ_n' die verschiedenen Drehmassen rechts des Getriebes,
- C_s die Drehsteifigkeit der mit dem Sonnenrad verbundenen Welle,
- C_n' die verschiedenen Drehsteifigkeiten der Wellen rechts vom Getriebe,
- R_a, R_i, R_p die Wälzkreisradien des Außen-, Sonnen- bzw. Planetenrades,
- α die Frequenz der Schwingungen.

Das Planetenrad kann man zunächst durch die 3 Einzelmassen

$$\frac{\Theta_p}{2\,R_p^2}\,,\quad m_p - \frac{\Theta_p}{R_p^2}\quad \text{und}\quad \frac{\Theta_p}{2\,R_p^2}$$

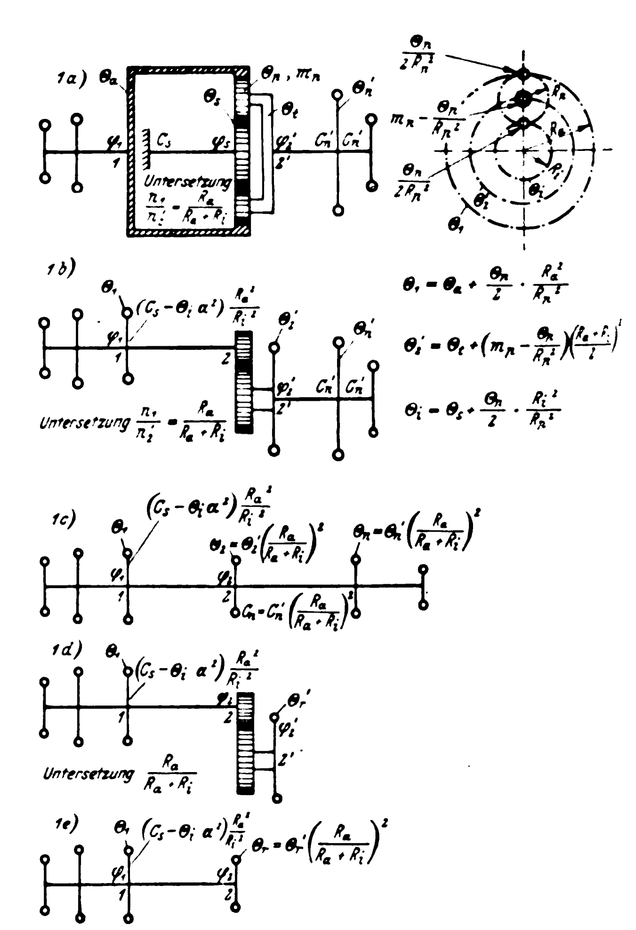


Bild 1. Die Bilder a bis c zeigen die fortschreitende Reduktion eines Systems mit drehfederndem Planetenradgetriebe in eine einfache Massenkette; in d und e sind die Drehmassen rechts des Getriebes für die Beweisführung zu einer reduzierten Masse zusammengefaßt.

ersetzen. Der Ersatz ist dynamisch richtig, wenn, wie es auch der Fall ist, die Summe der Ersatzmassen gleich m_p ist, ihr Schwerpunkt mit dem des Planetenrades, also mit der Drehachse, zusammenfällt und wenn ihr Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse gleich dem Trägheitsmoment des Planetenrades Θ_p ist. Diese Teilmassen können nun sinngemäß zu dem Außenring, dem Planetenradträger und dem Sonnenrad geschlagen werden, so daß man die auch im Bild eingetragenen Drehmassen

$$\Theta_1 = \Theta_a + \frac{\Theta_p}{2}\cdot\frac{R_a^2}{R_p^2}\,,$$

$$\Theta_2' = \Theta_t + \left(m_p - \frac{\Theta_p}{R_p^2}\right)\left(\frac{R_a+R_i}{2}\right)^2 \quad\text{und}\quad \Theta_i = \Theta_s + \frac{\Theta_p}{2}\cdot\frac{R_i^2}{R_p^2}$$

erhält. Das System 1a kann nun, wie nachher zu beweisen ist, durch das System 1b ersetzt werden. Das Getriebe ist dabei durch die Massen Θ_1 und Θ_2' vertreten, die durch

*) A 25 42.

eine Welle mit der frequenzabhängigen Drehsteifigkeit $(C_s - \Theta_i \alpha^2) \cdot \frac{R_a^2}{R_i^2}$ verbunden sind. Außerdem liegt zwischen den beiden Massen noch ein Untersetzungsgetriebe vom Untersetzungsverhältnis des Planetenradgetriebes $\frac{R_a}{R_a + R_i}$. Die Drehmasse Θ_i erscheint im übrigen nur in der wirksamen Verdrehsteifigkeit der Welle zwischen den beiden Massen.

Das Getriebe kann nunmehr fortgelassen und das System 1b in die gleichwertige Massenkette 1c übergeführt werden, in dem die rechts vom Umlaufgetriebe kommende Drehmasse Θ_2' und die verschiedenen Drehmassen Θ_n', desgleichen die Drehsteifigkeiten C_n' mit dem Quadrat des Untersetzungsverhältnisses multipliziert werden. Das gefundene System kann nun nach bekanntem Probierverfahren auf einfache Weise durchgerechnet werden.

Das von Meyer[1]) behandelte System läßt sich bei der Durchführung vorstehender Reduktion auf ein Dreimassensystem zurückführen. Berücksichtigt man in der für das Dreimassensystem bekannten Frequenzgleichung die frequenzabhängige Elastizität zwischen den Massen Θ_1 und Θ_2, so ergibt sich die von Meyer angeschriebene Gleichung (6).

III. Beweis für die Richtigkeit der Reduktion.

Die Massen rechts des Getriebes können stets zu einer frequenzabhängigen Masse Θ_r', die in *2'* angreift, zusammengefaßt werden, so daß man statt des Systems 1b das nach Bild 1d hat, das sich letzten Endes auf das System 1e zurückführen läßt.

Der Ersatz ist dann richtig, wenn bei einem beliebigen Ausschlag φ_2' die in *2'* angesetzte Ersatzmasse Θ_r' bei beiden Systemen 1a und 1d mit dem gleichen Moment M_1 auf Punkt *1* einwirkt. Dabei muß außerdem noch Gleichgewicht an den Systemen herrschen und die sich ergebenden Ausschläge φ_1 müssen die gleichen sein.

Schwingt Θ_r mit dem Ausschlag φ_2' und der Frequenz α, so ist das wirkende Moment $\varphi_2' \Theta_r' \alpha^2$. Auf *1* wirkt dann, wie leicht zu übersehen ist, bei allen Systemen 1a, 1d oder 1e das Moment

$$M_1 = \varphi_2' \Theta_r' \alpha^2 \frac{R_a}{R_a + R_i} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Ist φ_s der Ausschlag am Sonnenrad, so wirkt das Sonnenrad wegen des Gleichgewichts am Planetenrad mit dem Moment

$$M_1 = \varphi_s (C_s - \Theta_i \alpha^2) \frac{R_a}{R_i} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

auf *1* ein. Aus der Gleichheit von (1) und (2) folgt

$$\varphi_s = \varphi_2' \frac{\Theta_r' \alpha^2}{C_s - \Theta_i \alpha^2} \cdot \frac{R_i}{R_a + R_i} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Eine geometrische Beziehung verlangt für die Winkelausschläge am Planetenradgetriebe

$$\varphi_1 = \varphi_2' \frac{R_a + R_i}{R_a} - \varphi_s \frac{R_i}{R_a} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\varphi_1 = \varphi_2' \left(\frac{R_a + R_i}{R_a} - \frac{\Theta_r' \alpha^2}{C_s - \Theta_i \alpha^2} \cdot \frac{R_i^2}{R_a (R_a + R_i)} \right) \quad \ldots \quad (5)$$

Diese Gleichung gilt für das System 1a. Für System 1d oder 1e erhält man entsprechend

$$M_2 = M_1 = \varphi_2' \Theta_r' \alpha^2 \frac{R_a}{R_a + R_i} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Dieses Moment bewirkt an der Welle *12* die Verdrehung

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2' \frac{\Theta_r' \alpha^2 \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i}}{(C_s - \Theta_i \alpha^2) \cdot \frac{R_a^2}{R_i^2}} ; \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

da

$$\varphi_2 = \varphi_2' \frac{R_a + R_i}{R_a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

ist, folgt aus (7) und (8) für das Ersatzsystem die schon für das gegebene System angeschriebene Beziehung (5).

Beim Ersatzsystem und dem gegebenen System führen also gleiche Momente in *2'* zur gleichen Rückwirkung auf den Punkt *1*. Die zu φ_2' gehörigen Winkelausschläge φ_1 sind die gleichen und die Gleichgewichtsbedingungen sind ebenfalls erfüllt. Der Ersatz ist also drehschwingungstechnisch zulässig.

IV. Zusammenfassung.

Ein drehfederndes Planetenradgetriebe kann drehschwingungstechnisch durch 2 Massen ersetzt werden, die durch eine frequenzabhängige Elastizität und ein gewöhnliches Untersetzungsgetriebe vom Untersetzungsverhältnis des Planetenradgetriebes miteinander verbunden sind. Schließen zu beiden Seiten des Planetenradgetriebes Massenketten an, dann kann ein solches System auf eine einfache Massenkette zurückgeführt werden, deren Durchrechnung ohne Schwierigkeit nach bekannten Probierverfahren erfolgen kann; es muß nur die frequenzabhängige Elastizität beachtet werden.

Die Berücksichtigung des Trägheitsmomentes der Planetenräder geschieht dadurch, daß diese dynamisch richtig durch 3 punktförmige Einzelmassen ersetzt werden, die entsprechend zu den Außenteilen, dem Planetenradträger und Sonnenrad geschlagen werden.

Ergibt sich für das reduzierte System ein Zwei- oder Dreimassensystem, so kann man ohne Schwierigkeit die linearen bzw. quadratischen Frequenzgleichungen, die schon an anderer Stelle[1]) veröffentlicht sind, anschreiben.

[1]) J. Meyer, Zur Berechnung von Drehschwingungssystemen mit federndem Umlaufgetriebe. Luftfahrtforschung Bd. 19 (1942), S. 199.

Zur Theorie des tragenden Flügels.

Von I. Nikuradse und E. Mohr, Breslau.

Im folgenden teilen wir sechs lose aneinandergereihte Bemerkungen mit, von denen wir hoffen, daß sie zur weiteren Arbeit an diesem Gegenstand anregen.

Gliederung.

I. Ein allgemeiner Satz über Potentialströmungen.

Hier halten wir uns i. a. an räumliche Potentialströmungen und gehen auf den entsprechenden Sachverhalt in der Ebene nur kurz und gelegentlich ein, wiewohl später der Satz nur für ebene Strömungen herangezogen wird. Das Potential φ fassen wir auf als Stoßdruck auf die als Membran gedachte Begrenzung, der in die Richtung der vom Flüssigkeitsbereich nach außen weisenden Normalen $\mathfrak{n}$ wirkt.

Handelt es sich zunächst um eine Strömung innerhalb einer geschlossenen Fläche, Bild 1, so muß der gesamte Stoßdruck gleich der mitgeteilten Bewegungsgröße sein, d. h. es gelten die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \int \varphi\, \mathfrak{n}\, d\sigma = \int \operatorname{grad} \varphi\, d\tau \\ \mathfrak{L} &= \int \mathfrak{r} \times \varphi\, \mathfrak{n}\, d\sigma = \int \mathfrak{r} \times \operatorname{grad} \varphi\, d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wo die Dichte gleich 1 gesetzt ist; $d\tau$ ist das Volumen-, $d\sigma$ das Flächenelement. $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{L}$ stellen zusammen den Impuls, besser die Impulsschraube dar; wo es nötig ist, unterscheiden wir die beiden Bestandteile $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{L}$ als Längs- bzw. Drehimpuls. Weiter muß die geleistete Stoßarbeit gleich der mitgeteilten kinetischen Energie sein, was zu der Formel führt

$$\frac{1}{2} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{2} \int \operatorname{grad}^2 \varphi\, d\tau = T \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Ist außer φ noch die Strömung φ' gegeben, so ist nach Kelvin weiter die Stoßarbeit von φ bei der Strömung φ' gleich der von φ' bei der Strömung φ, was die Beziehung

$$\frac{1}{2} \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{2} \int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

ergibt.

Ganz analog gehen wir im Falle einer Strömung außerhalb einer oder mehrerer Flächen vor, Bild 2. Als Stoßdruck ist φ notwendig eindeutig und klingt im Unendlichen mindestens wie ein Dipol, d. h. mindestens wie $\frac{1}{r^2}$ ab. Dann gelten wieder die vorhin abgeleiteten Formeln mit einer Einschränkung: Die in (1) rechts stehenden Volumenintegrale haben i. a. keinen Sinn mehr! Doch stellen die links davon stehenden Flächenintegrale, wie man seit Kelvin weiß, gerade den richtigen Ersatz dar in dem Sinne, daß ihre zeitliche Änderung — wie die der gewöhnlichen Bewegungsgröße — die einwirkenden Kräfte liefert. In diesem Sinne sprechen wir die beiden Flächenintegrale in (1) als den Kelvin-Impuls oder kurz oft einfach als den Impuls an. Speziell kann der Flüssigkeitsraum das Äußere einer ungeschlossenen Fläche sein, die dann aber gemäß Bild 3 doppelt zu durchlaufen ist, wodurch sie wieder zu einer geschlossenen wird.

Ist wie in Bild 4 auch das Innere von strömender Flüssigkeit erfüllt, so haben wir bei der Bildung des Kelvin-Impulses natürlich auch die innere Berandung zu berücksichtigen, so daß bei der Integration die begrenzende Fläche doppelt zu durchlaufen ist.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem angekündigten Satze zu, in welchem man mühelos die sinnvolle Ausdehnung eines bekannten Satzes der Tragflügeltheorie erkennt. Dazu betrachten wir für eine gegebene Begrenzung alle Potentialströmungen, die denselben Kelvin-Impuls besitzen, und fragen nach jener, welche durch die kleinste Energie ausgezeichnet ist. Ist φ dieselbe, so muß mit $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{d}$ als vektoriellen Lagrangeschen Multiplikatoren bekanntlich sein

$$\delta \left\{ T - \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{J} - \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{L} \right\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4a)$$

oder

$$\delta T - \mathfrak{w} \cdot \delta \mathfrak{J} - \mathfrak{d} \cdot \delta \mathfrak{L} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4b)$$

Wir berechnen der Reihe nach die rechts stehenden Variationen und lassen hierbei, wie auch mitunter später, in den Integralen das Element $d\sigma$ weg:

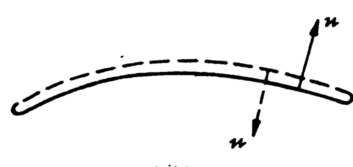


Bild 3.

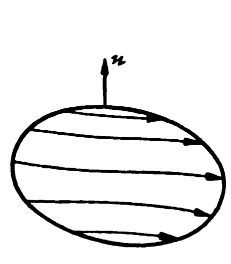


Bild 1.

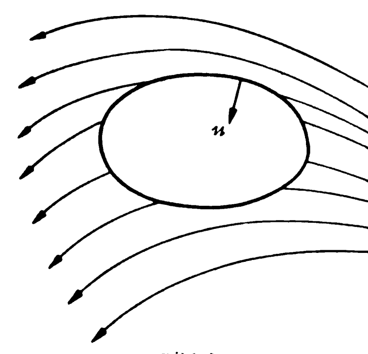


Bild 2.

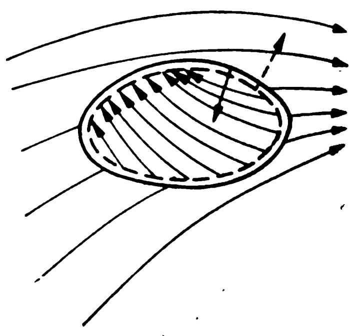


Bild 4.

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ T' &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\varphi + \delta\varphi)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n}\right)}_{\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi \frac{\partial \delta\varphi}{\partial n} + \delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \delta\varphi \frac{\partial \delta\varphi}{\partial n}} \\ T' &= T + \underbrace{\frac{1}{2}\int \varphi \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n} + \frac{1}{2}\int \delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{=\delta T} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \delta\varphi \frac{\partial \delta\varphi}{\partial n}}_{=\delta^2 T} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

die beiden Integrale für δT sind aber nach (3) einander gleich, so daß wir haben

$$\delta T = \int \delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n};$$

weiter ist sofort

$$\delta \mathfrak{J} = \int \delta\varphi\, \mathfrak{n}, \quad \delta \mathfrak{L} = \int \mathfrak{r} \times \delta\varphi\, \mathfrak{n}.$$

Einsetzen in (4 b) ergibt

$$\int \delta\varphi \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial n} - (\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{n}) - \underbrace{\mathfrak{d}\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})}_{=(\mathfrak{d}\times\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{n}}\right\} = 0,$$

worin wir in der geschweiften Klammer den letzten Ausdruck durch den darunter geschriebenen ersetzen. Da $\delta\varphi$ beliebig ist, erhalten wir als notwendige Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\mathfrak{w} + (\mathfrak{d}\times\mathfrak{r}))\cdot\mathfrak{n} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

in Worten: die betreffende Potentialströmung wird in der impulsiven Erzeugungsweise dadurch erhalten, daß die Berandung starr gedacht und plötzlich bewegt wird, wobei $\mathfrak{w}$ die Translation, $\mathfrak{d}$ die Rotation bedeutet. Eine solche Strömung nennen wir ebenfalls kurz eine »starre« Potentialströmung, da sie in manchem ähnliche Eigenschaften besitzt, wie wir sie von einem starr bewegten Körper her kennen. So z. B. hinsichtlich des Aufbaues der kinetischen Energie aus den von der Translation und Rotation herrührenden Anteilen: Aus (6) ergibt sich nämlich für $2T$

$$\begin{aligned} 2T &= \int \varphi \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{=\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{n} + \underbrace{(\mathfrak{d}\times\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{n}}_{=\mathfrak{d}\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n})}} \\ &= \mathfrak{w}\cdot\int \varphi\,\mathfrak{n} + \mathfrak{d}\cdot\int \mathfrak{r}\times\varphi\,\mathfrak{n} \\ 2T &= \mathfrak{w}\cdot\mathfrak{J} + \mathfrak{d}\cdot\mathfrak{L} \quad \ldots \ldots \quad (7) \end{aligned}$$

Speziell folgt daraus, daß eine starre Strömung vom Impuls 0 ($\mathfrak{J} = 0$, $\mathfrak{L} = 0$) die Energie 0 hat, d. h. notwendig die Ruhe ist ($\varphi = 0$). Derselbe Ausdruck ergibt sich für einen starren Körper: denn aus seiner Geschwindigkeit

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{w} + (\mathfrak{d}\times\mathfrak{r})$$

folgt

$$\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{w}\cdot\mathfrak{c} + \underbrace{(\mathfrak{d}\times\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{c}}_{=\mathfrak{d}\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{c})}$$

und mithin für seine doppelte Energie (Dichte konstant = 1)

$$\begin{aligned} 2T &= \int \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \int \mathfrak{w}\cdot\mathfrak{c} + \int \mathfrak{d}\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{c}) \\ &= \mathfrak{w}\cdot\underbrace{\int \mathfrak{c}}_{=\mathfrak{J}} + \mathfrak{d}\cdot\underbrace{\int \mathfrak{r}\times\mathfrak{c}}_{=\mathfrak{L}} \end{aligned}$$

d. h. wieder

$$2T = \mathfrak{w}\cdot\mathfrak{J} + \mathfrak{d}\cdot\mathfrak{L}.$$

Zeigen wir nun, daß die starre Strömung auch wirklich die kleinste Energie hat. Dies folgt sofort daraus, daß die zweite Variation $\delta^2 T$ in (5) die kinetische Energie der Strömung $\delta\varphi$ und daher positiv ist. Und schließlich ist die starre Strömung eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei solche Strömungen φ und φ' mit den Bewegungen $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{d}$ bzw. $\mathfrak{w}'$, $\mathfrak{d}'$, so wäre $\varphi' - \varphi = \chi$ wieder starr und würde durch $\mathfrak{w}' - \mathfrak{w}$, $\mathfrak{d}' - \mathfrak{d}$ eingeleitet — alle Bewegungen haben wir uns als infinitesimale vorzustellen, so daß sie sich linear überlagern —, wobei der zugehörige Kelvin-Impuls 0 wäre; d. h. aber χ wäre die Ruhe. Alsdann kann aber die einleitende starre Bewegung »im allgemeinen« auch nur die Ruhe sein, d. h. es muß $\mathfrak{w}' = \mathfrak{w}$, $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}$ sein; genauer kann jene Bewegung nur von solcher Art sein, daß sie die Flüssigkeit in Ruhe läßt: Gestattet nämlich der Körper Bewegungen in sich, wie z. B. ein Stück einer Kugeloberfläche oder ähnliches, so wird durch eine solche die Flüssigkeit offenbar nicht bewegt, d. h. in diesem Falle muß $\mathfrak{w}' - \mathfrak{w}$, $\mathfrak{d}' - \mathfrak{d}$ gerade eine solche Eigenbewegung sein, m. a. W.: dann ist $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{d}$ natürlich nur bis auf eine derartige Eigenbewegung bestimmt. Wir gehen darauf noch etwas näher ein, indem wir uns allgemein die Aufgabe stellen, zu einem vorgegebenen Impuls $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{L}$ die zugehörige starre Bewegung $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{d}$ der Oberfläche zu bestimmen.

Dazu bauen wir entsprechend den sechs Freiheitsgraden eines Körpers die allgemeinste Bewegung wie folgt auf. Ist

$$\mathfrak{w} = (w_1, w_2, w_3) \qquad \mathfrak{d} = (d_1, d_2, d_3) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

so bilden wir in einem 6-dimensionalen Geschwindigkeitsraum einen neuen Vektor

$$\{w_1, w_2, w_3, \; d_1, d_2, d_3\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Bezeichnen wir dann die Koo in dieser Reihenfolge einheitlich mit λ_ν ($\nu = 1, \ldots, 6$) die zugehörigen Einheitsvektoren mit $\mathfrak{b}_\nu$ und den Vektor (9) selbst mit $\mathfrak{b}$ (Bewegung!), so ist

$$\mathfrak{b} = \sum_{\nu=1}^{6} \lambda_\nu\, \mathfrak{b}_\nu \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Gesamtheit aller $\mathfrak{b}$-Vektoren, d. h. infinitesimalen Bewegungen bilden gemäß (10) eine 6-parametrige Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Basiselementen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_6$. Ist $\mathfrak{b}_\nu$ die starre Potentialströmung φ_ν zugeordnet, so ist analog

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{6} \lambda_\nu\, \varphi_\nu \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Ganz ähnlich ordnen wir den beiden Vektoren

$$\mathfrak{J} = (J_1, J_2, J_3) \qquad \mathfrak{L} = (L_1, L_2, L_3) \quad \ldots \quad (12)$$

in einem 6-dimensionalen Impulsraum den Kelvin-Vektor

$$\mathfrak{k} = \{J_1, J_2, J_3, L_1, L_2, L_3\} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

zu, und es gilt dann, wenn $\mathfrak{k}_\nu$ zu φ_ν gehört

$$\mathfrak{k} = \sum_{\nu=1}^{6} \lambda_\nu\, \mathfrak{k}_\nu \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Bezüglich der Oberfläche sind nun die folgenden 4 Fälle möglich: Die Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Bewegungen der Oberfläche in sich ist 0-, 1-, 2- oder 3-parametrig, m. a. W.: 1. die Oberfläche ist beliebig, 2. das Stück einer Schraubenfläche (die wir uns dann aus unendlich dünnem Blech hergestellt denken) speziell also eine Rotations- bzw. Zylinderfläche (mit Ausnahme des Kreiszylinders), 3. das Stück eines Kreiszylinders und 4. das Stück einer Kugelfläche bzw. Ebene. Bestimmen wir nun die Dimension des linearen Vektorgebildes $\{\mathfrak{k}\}$ in den vier Fällen:

1. Fall ($\mathfrak{H}$ 0-parametrig): Hier ist $\{\mathfrak{k}\}$ 6-dimensional; denn sonst gäbe es ein $\mathfrak{b} \neq 0$, dem ein $\mathfrak{k} = 0$ zugeordnet wäre, d. h. es gäbe doch Eigenbewegungen in sich.

2. Fall ($\mathfrak{H}$ 1-parametrig): Bezeichnen wir ein Basiselement von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{b}'_6$, und ergänzen dieses zu einer Basis von $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{b}_1'\ \mathfrak{b}_2'\ \mathfrak{b}_3'\ \mathfrak{b}_4'\ \mathfrak{b}_5' \,|\, \mathfrak{b}_6' \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

und gehören zu dieser die Kelvin-Impulse

$$\mathfrak{k}_1'\ \mathfrak{k}_2'\ \mathfrak{k}_3'\ \mathfrak{k}_4'\ \mathfrak{k}_5' \,|\, \mathfrak{k}_6' \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

wo also $\mathfrak{k}'_6 = 0$ ist, so sieht man, daß $\{\mathfrak{k}\}$ höchstens 5-dimensional ist; wie im 1. Falle sieht man aber dann weiter, daß $\{\mathfrak{k}\}$ genau 5-dimensional ist: denn bestünde zwischen den ersten fünf Vektoren $\mathfrak{k}_\nu'$ eine lineare Abhängigkeit, so könnte man aus den ersten 5 Vektoren $\mathfrak{b}_\nu'$ ein $\mathfrak{b} \neq 0$ aufbauen, dem ein Impuls $\mathfrak{k} = 0$ zugeordnet wäre, d. h. die Oberfläche würde noch weitere Bewegungen in sich gestatten, m. a. W.: $\mathfrak{H}$ wäre mindestens 2-parametrig. Ebenso zeigt

man in den beiden nächsten Fällen, daß $\{\mathfrak{f}\}$ 4- bzw. 3-dimensional ist. Bilden $\mathfrak{b}'_5$, $\mathfrak{b}'_6$ bzw. $\mathfrak{b}'_4$, $\mathfrak{b}'_5$, $\mathfrak{b}'_6$ eine Basis von $\mathfrak{H}$, die wir wieder zu einer vollen Basis von $\mathfrak{G}$ erweitern, so haben wir die zu (15) und (16) analogen Reihen:

3. Fall:

$$\mathfrak{b}_1'\,\mathfrak{b}_2'\,\mathfrak{b}_3'\,\mathfrak{b}_4' \mid \mathfrak{b}_5'\,\mathfrak{b}_6'$$
$$\mathfrak{f}_1'\,\mathfrak{f}_2'\,\mathfrak{f}_3'\,\mathfrak{f}_4' \mid \mathfrak{f}_5' = 0 \quad \mathfrak{f}_6' = 0$$

4. Fall:

$$\mathfrak{b}_1'\,\mathfrak{b}_2'\,\mathfrak{b}_3' \mid \mathfrak{b}_4'\,\mathfrak{b}_5'\,\mathfrak{b}_6'$$
$$\mathfrak{f}_1'\,\mathfrak{f}_2'\,\mathfrak{f}_3' \mid \mathfrak{f}_4' = 0 \quad \mathfrak{f}_5' = 0 \quad \mathfrak{f}_6' = 0.$$

Nennen wir die Basis von $\mathfrak{H}$ auch im 1. Fall $\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_6$ die entsprechenden Impulse $\mathfrak{f}'_1, \ldots, \mathfrak{f}'_6$, so ist durch $\mathfrak{f}$ die Bewegung $\mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt gemäß den Beziehungen:

1. Fall $\quad \mathfrak{f} = \sum_{\nu=1}^{6} \lambda_\nu \mathfrak{f}_\nu' \qquad \mathfrak{b} = \sum_{\nu=1}^{6} \lambda_\nu \mathfrak{b}_\nu'$

2. Fall $\quad \mathfrak{f} = \sum_{\nu=1}^{5} \lambda_\nu \mathfrak{f}_\nu' \qquad \mathfrak{b} = \sum_{\nu=1}^{5} \lambda_\nu \mathfrak{b}_\nu'$

3. Fall $\quad \mathfrak{f} = \sum_{\nu=1}^{4} \lambda_\nu \mathfrak{f}_\nu' \qquad \mathfrak{b} = \sum_{\nu=1}^{4} \lambda_\nu \mathfrak{b}_\nu'$

4. Fall $\quad \mathfrak{f} = \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu \mathfrak{f}_\nu' \qquad \mathfrak{b} = \sum_{\nu=1}^{3} \lambda_\nu \mathfrak{b}_\nu'.$

Kehren wir zu den alten Vektoren $\mathfrak{f}_\nu$ zurück, so zerfällt jeder solche in einen Vektor $\mathfrak{J}_\nu$ und einen Vektor $\mathfrak{L}_\nu$, wo die $\mathfrak{J}_\nu$ in dem durch die drei ersten Achsen aufgespannten Raum R, die $\mathfrak{L}_\nu$ in dem von den drei letzten aufgespannten und zu R orthogonalen Raum S liegen. In dieser Auffassung schreiben wir ausführlicher

$$[\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_6] = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots \mathfrak{J}_6 \\ \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_6 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (17)$$

und wollen noch kurz in der Bezeichnungsweise der rechten Seite von (17) eine möglichst einfache Basis von $\{\mathfrak{f}\}$ angeben. Dazu fassen wir R, S ebenfalls als lineare Vektorgebilde auf und erinnern daran, daß allgemein im n-dimensionalen Raum der Durchschnitt zweier linearer Vektorgebilde von den Dimensionen r und s mindestens $(r + s - n)$ = -dimensional ist. Demgemäß hat der Durchschnitt von $\{\mathfrak{f}\}$ mit R und ebenso mit S in den vier Fällen die Mindestdimension: 1. $6 + 3 - 6 = 3$. 2. $5 + 3 - 6 = 2$, 3. $4 + 3 - 6 = 1$, 4. $3 + 3 - 6 = 0$. Das heißt aber: man kann auf mannigfache Weise — und da R und S aufeinander senkrecht stehen sogar in orthogonaler Weise — eine Basis von 6, 5, 4 bzw. 3 Vektoren $\mathfrak{f}_1^*, \mathfrak{f}_2^*, \ldots$ finden, derart, daß die rechte Seite von (17) in den vier Fällen das folgende Bild zeigt:

1. Fall $\quad \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1^* & \mathfrak{J}_2^* & \mathfrak{J}_3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{L}_4^* & \mathfrak{L}_5^* & \mathfrak{L}_6^* \end{bmatrix}$

2. Fall $\quad \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1^* & \mathfrak{J}_2^* & \mathfrak{J}_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{L}_3^* & \mathfrak{L}_4^* & \mathfrak{L}_5^* \end{bmatrix}$

3. Fall $\quad \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1^* & \mathfrak{J}_2^* & \mathfrak{J}_3^* & 0 \\ 0 & \mathfrak{L}_2^* & \mathfrak{L}_3^* & \mathfrak{L}_4^* \end{bmatrix}$

4. Fall $\quad \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1^* & \mathfrak{J}_2^* & \mathfrak{J}_3^* \\ \mathfrak{L}_1^* & \mathfrak{L}_2^* & \mathfrak{L}_3^* \end{bmatrix},$

wo also nur der letzte Fall keine besondere Vereinfachung zeigt.

Ein Spezialfall unserer Aufgabe ist der, daß wir nur den Längsimpuls $\mathfrak{J}$ vorschreiben: die kleinste Energie wird dann bereits durch eine Translation $\mathfrak{w}$ erzeugt. Um dann zu $\mathfrak{J}$ das zugehörige $\mathfrak{w}$ zu bestimmen, geht man wie oben vor, nur daß $\mathfrak{G}$ jetzt die 3-parametrige Gruppe von Translationen, $\mathfrak{H}$ die Untergruppe der Translationen der Oberfläche in sich ist. $\mathfrak{H}$ kann 0-, 1- oder 2-parametrig sein, was zu den Fällen führt: 1. die Oberfläche ist beliebig (jetzt gemeint im Sinne einer Translation), 2. sie ist ein Stück einer Zylinderfläche (jetzt einschließlich des Kreiszylinders), 3. sie ist das Stück einer Ebene. Das Vektorgebilde $\{\mathfrak{J}\}$ ist dann entsprechend 3-, 2- bzw. 1-dimensional.

Denken wir uns die berandende Fläche F in zwei Teile F_1 und F_2 zerlegt und lassen etwa F_2 als »freie« Membran wirken, so daß also dort der Stoßdruck $\varphi = 0$ ist, d. h. F_2 zum Impuls keinen Beitrag liefert, mithin also nur F_1 Impuls »trägt«. Indem wir dann nur solche Potentialströmungen zur Konkurrenz zulassen, können wir wieder nach jener Strömung fragen, welche bei gegebenem Impuls $\mathfrak{J}$ die kleinste Energie T besitzt. Die Überlegung verläuft offenbar genau wie früher und ergibt, daß jene Strömung wieder durch eine starre Bewegung von F_1 eingeleitet wird, welche durch $\mathfrak{J}$ bis auf eine Bewegung von F_1 in sich eindeutig bestimmt ist.

Denken wir uns nun weiter in der vorigen Aufgabe F_1 mit dem Impuls $\mathfrak{f}_1$ belastet, F_2 frei, und φ_1 als die zugehörige starre Strömung, und analog F_2 mit dem Impuls $\mathfrak{f}_2$ belastet, F_1 frei, und φ_2 als die zugehörige starre Strömung, so stellt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ eine i. a. weder an F_1 noch an F_2 starre Strömung außerhalb $F = F_1 + F_2$ dar, für welche F_1 den Impuls $\mathfrak{f}_1$, F_2 den Impuls $\mathfrak{f}_2$ ergibt. M. a. W.: Man kann für die zwei Flächenteile einzeln die Kelvin-Impulse vorschreiben und also auch wieder nach der Strömung fragen, welche bei dieser Vorschrift die kleinste Energie besitzt. Die Antwort lautet wie früher dahin, daß jeder Teil für sich, starr gedacht, geeignet bewegt werden muß. Und ähnliches gilt natürlich, wenn F in mehr als zwei Teile zerlegt wird. Sind also z. B. in einer Flüssigkeit zwei oder mehr Körper gegeben, von denen jeder einen vorgeschriebenen Kelvin-Impuls tragen soll, so ist die Strömung kleinster Energie jene, welche dadurch eingeleitet wird, daß jeder Körper für sich in geeigneter Weise plötzlich bewegt wird.

Schließlich noch folgende Variante, die sich als Spezialfall der eben behandelten Aufgabe herausstellen wird: Wir schreiben für F_1 den Impuls vor, machen aber hinsichtlich F_2 keinerlei Vorschrift; alsdann ergibt der Variationsansatz für die Strömung geringster Energie: F_1 soll in geeigneter Weise starr bewegt werden, F_2 soll sich wie starres Blech verhalten, d. h. dort $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sein, m. a. W.: F_2 soll ebenfalls geeignet starr bewegt werden, nämlich in Ruhe bleiben.

Nunmehr bringen wir eine Anwendung des Satzes, welche von der Tragflügeltheorie her wieder wohlbekannt ist. Dazu vereinbaren wir: Die Fläche, welche mit Impuls belastet ist oder Impuls trägt, heiße kurz »Tragwerk« und ferner sei mit Energie T stets die kleinste für den betreffenden Impuls, d. h. also die für eine passende starre Strömung gemeint.

Betrachten wir dann zuerst eine gemischte Strömung von der Art von Bild 4. Das Tragwerk sei mit dem Impuls $\mathfrak{f}$ belastet und die zugehörige starre Strömung sei φ. Fügen wir dann noch einen Tragwerksteil hinzu (in Bild 5 gestrichelt), so wird das neue Werk den Impuls $\mathfrak{f}$ i. a. unter kleinerem Energieaufwand tragen können, m. a. W.: die zugehörige Energie i. a. abnehmen: denn φ ist auch eine Konkurrenzströmung für das neue Tragwerk, da sich auch jetzt derselbe Impuls $\mathfrak{f}$ ergibt (die gestrichelte Fläche liefert keinen Impuls, da dort φ stetig ist und mithin bei der Integration um die beiden Seiten jedes Paar von einander gegenüberstehenden Flächenelementen 0 ergibt!); da jedoch dieses φ i. a. für das erweiterte Tragwerk keine starre Strömung darstellt, so ist die neue Optimumsenergie in der Tat kleiner. Umgekehrt wird durch Weglassen von Tragwerksteilen die Energie i. a. zunehmen (Bild 6, wobei das Weglassen sich auf die doppelt gedachte Membran bezieht).

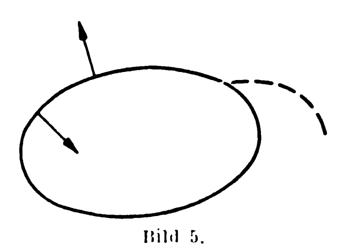
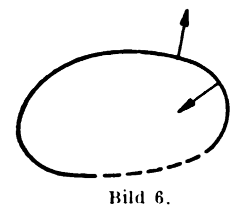
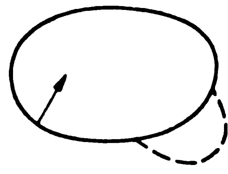


Bild 5.


Bild 6.


Bild 7.

Handelt es sich um eine äußere Strömung wie in Bild 2 oder 3, so gilt wieder, daß durch Hinzufügen von Tragwerksteilen, Bild 5, die Energie i. a. abnimmt; dabei kann durch die hinzugekommene Fläche auch ein Raum abgegrenzt werden, dessen Inneres dann als flüssig, d. h. als zum Strömungsbereich gehörig zu betrachten ist, Bild 7. Doch können wir jetzt aus der ursprünglichen (geschlossenen) Umrandung keinen Teil mehr wegnehmen: Fordern wir jedoch an Stelle davon, daß ein solcher Teil freie Membran wird, so gilt offenbar wieder, daß dadurch die Energie i. a. zunimmt.

Wir wollen dimensionslose Veränderliche einführen, die wir durch Anhängen eines oberen Striches kennzeichnen. Mit l und c als Bezugsstücken für die Längen bzw. Geschwindigkeiten haben wir dann $x = l\,x'$, ... $\mathfrak{w} = c\,\mathfrak{w}'$, $\varphi = c\,l\,\varphi'$ und speziell

$$\mathfrak{J} = c\;l^3\,\mathfrak{J}'$$
$$\mathfrak{L} = c\;l^4\,\mathfrak{L}'$$
$$T = c^2\,l^3\,T'.$$

Betrachten wir nun zwei Systeme, die sich kinematisch speziell also auch geometrisch ähnlich sind, und in denen wir einander entsprechende Größen durch die unteren Zeiger 1 und 2 voneinander unterscheiden. Diese stimmen dann in den gestrichenen Größen überein, so daß wir haben

$$\mathfrak{J}_1 = c_1\;l_1^3\,\mathfrak{J}' \quad \mathfrak{J}_2 = c_2\;l_2^3\,\mathfrak{J}'$$
$$\mathfrak{L}_1 = c_1\;l_1^4\,\mathfrak{L}' \quad \mathfrak{L}_2 = c_2\;l_2^4\,\mathfrak{L}'$$
$$T_1 = c_1^2\,l_1^3\,T' \quad T_2 = c_2^2\,l_2^3\,T'.$$

Verlangen wir nun, daß beide Systeme denselben Längsimpuls tragen, d. h. $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2$ ist, so ist $c_1\,l_1^3 = c_2\,l_2^3$ und es ergibt sich

$$T_2 : T_1 = c_2 : c_1 = l_1^3 : l_2^3$$

woraus folgt: für $l_2 \to \infty$ ist $T_2 \to 0$, und für $l_2 \to 0$ umgekehrt $T_2 \to \infty$, i. W.: hält man den Längsimpuls fest, so wird durch ähnliche Vergrößerung die Energie beliebig klein, durch Verkleinerung umgekehrt beliebig groß. Für die Drehimpulse gilt jedoch gerade das Umgekehrte, da $L_2 : L_1 = l_2 : l_1$ ist.

Betrachten wir speziell noch eine gemischte Strömung, welche überdies Rotationssymmetrie besitze. Es werde nur Längsimpuls durch Translation in Achsenrichtung erzeugt, wo dann der Impuls ebenfalls parallel der Achse ist. Da dann die starre Potentialströmung im Inneren eine starre Translation ist, so wird durch das Hinzufügen oder Weglassen von Tragwerksteilen im Inneren die Strömung und daher auch die Energie nicht geändert. Fügen wir also in Bild 8 (immer in rotationssymmetrischer Weise) die punktierte Tragfläche außen hinzu und anschließend die gestrichelte, so ist die Energie i. a. zweimal verringert worden. Ferner sind für das neue Werk die punktierte und die ursprüngliche (ausgezogene) Fläche als innere Teile überflüssig, m. a. W.: jedes das alte Tragwerk umfassende Werk hat eine kleinere Energie und umgekehrt jedes in ihm enthaltene eine größere. Denken wir uns das umfassende noch genügend ähnlich vergrößert, so erhalten wir nach dem früher Gesagten ein Werk von beliebig kleiner Energie und umgekehrt aus dem darin enthaltenen durch Verkleinerung ein Werk mit beliebig großer Energie. Betrachten wir speziell noch die beiden Tragwerke, welche von der außen bzw. innen berührenden Kugel K' und K'' gebildet werden, wo K', K'' gleichzeitig auch das Volumen bedeuten mögen und T', T'' die diesbezüglichen Energien seien. Da für eine Kugel, wie man sofort nachrechnet, die Energie bzw. der Impuls im Außenraum gerade halb so groß sind, wie die entsprechenden Größen im Innenraum, so hat man z. B.

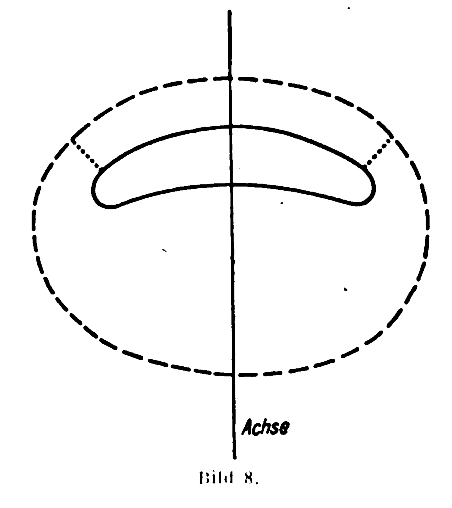


Bild 8.

$$T' = \frac{3}{4}\,K'\,\mathfrak{w}^2,\ \mathfrak{J}' = \mathfrak{J} = \frac{3}{2}\,K'\,\mathfrak{w},$$

d. h.

$$T' = \frac{\mathfrak{J}^2}{3\,K'} = \frac{J^2}{3\,K'}$$

und mithin die Abschätzung

$$T' \underset{(=)}{\leqq} T \underset{(=)}{\leqq} T'', \text{ d. h. } \frac{J^2}{3\,K'} \underset{(=)}{\leqq} T \underset{(=)}{\leqq} \frac{J^2}{3\,K''} \quad . \; . \; (18)$$

wo J der feste Impuls (jetzt skalar gemeint) ist, und $\underset{(=)}{\leqq}$ »i. a. kleiner« bedeutet.

Alle bisherigen Überlegungen lassen sich sinngemäß auf die Ebene übertragen. Betrachten wir z. B. die Strömung außerhalb zweier Körper und schreiben nur den Längsimpuls $\mathfrak{J}$ vor, so wird die Strömung kleinster Energie durch eine Translation $\mathfrak{w}$ impulsiv erzeugt. Überlagern wir also die Parallelströmung $(-\mathfrak{w})$, so erhalten wir eine Umströmung, deren konforme Abbildung auf die $\varphi + i\,\psi$-Ebene das Gebiet in die von zwei zur φ-Achse parallelen Strecken aufgeschlitzten $\varphi + i\,\psi$-Ebene überführt. Da hier von vornherein nur Potentialfunktionen zur Konkurrenz zugelassen sind, dürfte sich auf diese Weise ein funktionentheoretisch exakter Beweis für jene wichtige Abbildung besonders leicht ergeben. — Ist nur ein Körper gegeben, so erhält man die Abbildung auf einen Schlitzbereich, den man seinerseits leicht auf das Äußere des Kreises abbilden kann, d. h. den Riemannschen Abbildungssatz; da $2\,T$ der Inhalt des durch die Strömung vermittelten Bildgebietes ist, so liefert die zu (18) analoge Beziehung eine Abschätzung jenes Inhaltes, welche hier so lautet

$$\frac{J^2}{2\,K'} \underset{(=)}{\leqq} 2\,T \underset{(=)}{\leqq} \frac{J^2}{2\,K''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Übersetzen wir noch den Längsimpuls in die Sprache der komplexen Zahlen! Ist $\mathfrak{J} = (J_1, J_2)$, $\mathfrak{t}\,ds = (dx, dx)$, also $\mathfrak{n}\,ds = (-dy, dx)$, Bild 9, so gilt

$$J_1 = -\oint \varphi\,dy$$
$$J_2 = \oint \varphi\,dx$$

$$\overline{J} = J_1 - i\,J_2 = -\oint \varphi\,\underbrace{\{dy - i\,dx\}}_{i\,(-i\,dy + dx) \,=\, i\,\overline{dz} \,=\, i\,d\bar{z}} = -i\oint \varphi\,\overline{dz}$$

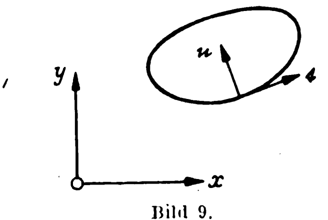


Bild 9.

wo also $\mathfrak{J}$ den komplexen Impuls bedeutet; umfahren wir, wie dies in der Funktionentheorie üblich ist, den Bereich so, daß sein Inneres zur Linken liegt, so erhalten wir endgültig

$$\overline{\mathfrak{J}} = i \oint \varphi \, \overline{dz} = i \oint \frac{2}{f + \bar{f}} \overline{dz} \quad (f = \varphi + i \psi) \qquad (20\,a)$$

oder

$$\overline{\mathfrak{J}} = \frac{i}{2} \oint f \, \overline{dz} + \frac{i}{2} \oint \bar{f} \, \overline{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \qquad (20\,b)$$

Hier ist das zweite Integral offenbar $= \pi \bar{a}_{-1}$, wo a_{-1} das Residuum von f im Unendlichen ist. Verläuft die Strömung innerhalb der Berandung, so gilt wieder (20 a) bzw. (20 b), nur daß die Integration jetzt in umgekehrter Richtung erfolgt; weiter fällt hier das zweite Integral in (20 b) nach dem Cauchyschen Integralsatz weg und ferner läßt sich der Impuls auch als Flächenintegral schreiben

$$\overline{\mathfrak{J}} = \frac{i}{2} \oint f \, \overline{dz} = \int f'(z) \, d\sigma \quad \ldots \ldots \qquad (21)$$

II. Bestimmung der Luftkräfte.

Wir denken uns den Flügel ruhend, die Anströmungsgeschwindigkeit sei $\mathfrak{U}$. Wir pflanzen im Mittelpunkt O der (scharfen) Hinterkante ein übliches x-, y-, z-System wie folgt auf: die z-Achse weise in Richtung von $\mathfrak{U}$, die x-Achse, in Richtung von $\mathfrak{U}$ gesehen, waagerecht nach links, die y-Achse senkrecht nach oben; x, y erfüllen die »Querebene«, z ist die Längsachse, die Einheitsvektoren seien $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$. Die unter dem Einfluß der Reibung vom Flügel her entstehenden Wirbel erfüllen dann bei mäßigen Anstellwinkeln ein »Wirbelband«, welches sich an die Hinterkante anschließt, jedoch nicht ganz bis zu den Flügelspitzen reicht, sondern von diesen einen kleinen und in erster Annäherung als relativ konstant zu betrachtenden Abstand aufweist. Machen wir weiter die übliche Annahme, daß diese Wirbel von der Hauptströmung in erster Annäherung einfach »mitgenommen« werden, so ist für jeden Anstellwinkel α die geometrische Form des Bandes durch die Hinterkante gegeben; man sagt dann, der Flügel sei schwach belastet, wofür erst später eine strenge Definition gegeben werden kann.

Nehmen wir dies alles an, so sind wir leicht in der Lage, auf Grund des Newtonschen Grundgesetzes der Bewegung, wonach die Änderung der Bewegungsgröße in der Zeiteinheit gleich den einwirkenden Kräften ist, die Luftkräfte auf den Flügel anzugeben. Vorher erweitern wir jedoch noch die Strömung zu einer solchen im ganzen Raum, indem wir das Innere des Flügels mit ruhender Flüssigkeit erfüllt und mit zum Strömungsbereich gehörig betrachten (Methode des Totwassers!). Betrachten wir dann eine bestimmte Stelle des Flügels, so springt beim Durchgang von innen nach außen die Geschwindigkeit von 0 auf $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ Strömungsgeschwindigkeit), was bedeutet, daß dort ein flächenhafter Wirbel von der Stärke (gemeint pro Flächeneinheit) $|\mathfrak{c}|$ und senkrecht zu $\mathfrak{c}$ im Sinne einer Rechtsschraube bei jenem Durchgang liegt, m. a. W.: die Flügeloberfläche stetig mit Wirbeln von der Dichte $\mathfrak{n} \times \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{n}$ Normale vom Flügelinneren nach außen) belegt ist. Anschaulich stellen wir uns die Wirbelbelegung als eine dünne räumliche Schicht vor, wie es auch das Wirbelband ist, und kehren erst später im Resultat unserer Überlegung zu der Abstraktion der rein flächenhaften Belegungen zurück. Und weiter stellen wir uns das ganze Wirbelsystem aus genügend dünnen Wirbelfäden aufgebaut vor, deren jeder die konstante Stärke $d\Gamma$ habe. Da wir jetzt eine Strömung im ganzen Raume haben, so gilt für diese nach einem bekannten Helmholtzschen Satz, daß ein Wirbelfaden im Endlichen nirgends aufhören noch beginnen kann; da aber ein Faden des Wirbelbandes parallel $\mathfrak{U}$ ist, sich also für sich nie schließen kann, so folgt daraus, daß derselbe, wenn man ihn bis zum Flügel verfolgt, dort eindeutig seine Fortsetzung in einem ein Stück weit über den Flügel laufenden Wirbel findet, der seinerseits sich eindeutig wieder in einen Wirbel des Bandes fortsetzt. Auf diese Weise erscheinen dann alle Bandwirbel durch passende »Schlußstücke«, die auf dem Flügel liegen, geschlossen. Daneben werden auf dem Flügel auch noch eine Anzahl geschlossener Wirbel sich befinden (besonders an der Vorderseite), welche aber, wie wir bald sehen werden, zu den Luftkräften keinen Beitrag liefern. Der äußere Teil der Kontrollfläche sei nun ein Zylinder (Kreiszylinder) mit z als Achse und 0 als Mittelpunkt; der Abstand der Deckflächen F_1 und F_2 von O sei d, R ihr Radius; der Mantel heiße M, $\mathfrak{c}$ sei die Geschwindigkeit, $\mathfrak{u}$ die vom Wirbelband allein herrührende Geschwindigkeit, so daß also $\mathfrak{c} = \mathfrak{U} + \mathfrak{u}$ ist. Nach Bernoulli haben wir dann für den Druck p (Dichte ist gleich 1)

$$p = \text{konst.} + \frac{\mathfrak{c}^2}{2} = \text{konst.} + \frac{\mathfrak{U}^2}{2} + \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{u} + \frac{\mathfrak{u}^2}{2} \qquad (22)$$

wo $\mathfrak{U}^2/_2$ als Konstante offenbar auch noch zu konst. geschlagen werden darf. Wir wenden Newtons Gesetz zunächst nur auf die Längskräfte bzw. -Bewegungsgröße an, lassen also die Momente weg.

Da die Strömung stationär ist, so muß der Flügel i. a. durch eine Kraft gehalten werden, die wir uns in die beiden Komponenten $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{W}'$ senkrecht und parallel zur Längsachse zerlegt denken. Dann ergibt Newtons Gesetz

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{W}' = \int p \, \mathfrak{n} \, d\sigma + \int \mathfrak{c} \, (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{n}) \, d\sigma \quad \ldots \qquad (23)$$

Mit $\mathfrak{c} = \mathfrak{U} + \mathfrak{u}$ ergibt sich für das zweite Integral

$$\int \mathfrak{c} \, (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{n}) = \int \mathfrak{U} \, (\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}) + \int \mathfrak{U} \, (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{n}) + \int \mathfrak{u} \, (\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}) + \int \mathfrak{u} \, (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{n}),$$

wo die beiden ersten Integrale rechts, da $\mathfrak{U}$ konstant ist, offenbar verschwinden, so daß also bleibt

$$\int \mathfrak{c} \, (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{n}) = \underline{\int \mathfrak{u} \, (\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n})} + \int \mathfrak{u} \, (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{n}) \quad \ldots \qquad (24)$$

Aus (22) ergibt sich weiter für das erste Integral in (23) rechts

$$\int p \, \mathfrak{n} = \underline{\int (\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{u}) \, \mathfrak{n}} - \int \frac{\mathfrak{u}^2}{2} \, \mathfrak{n} \quad \ldots \ldots \qquad (25)$$

In (24) und (25) fassen wir rechts die beiden ersten untereinanderstehenden Integrale unter Verwendung der Rechenregeln

$$(\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}) \, \mathfrak{u} - (\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{u}) \, \mathfrak{n} = \mathfrak{U} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{n}) = (\mathfrak{n} \times \mathfrak{u}) \times \mathfrak{U}$$

und des Integralsatzes

$$\int d\sigma \, (\mathfrak{n} \times \mathfrak{u}) = \int d\tau \, \mathrm{rot} \, \mathfrak{u} \quad \ldots \ldots \qquad (26)$$

zu einem Volumenintegral zusammen, welches offenbar nur über das Wirbelband erstreckt zu werden braucht, soweit dieses innerhalb der Kontrollfläche liegt. Wir formen es gleich weiter um. S sei das Schnittgebilde des Bandes mit F_2 ($z = d$), in Bild 10 in Draufsicht nach ($-z$) gezeichnet. Berechnen wir nun den Beitrag eines offenen Wirbelfadens: derselbe läuft in Bild 10 von einer Stelle 1 in Richtung ($-z$) zum Flügel, ein Stück über den Flügel, und sodann in Richtung ($+z$) auf dem Bande zurück nach 2. Da nun aber für einen Wirbelfaden $d\tau \, \mathrm{rot} \, \mathfrak{w} = d\Gamma \, d\mathfrak{s}$ ist, und $\int d\mathfrak{s}$ für jede geschlossene Kurve $= 0$ ist, so können wir das über den Faden erstreckte $\int d\mathfrak{s}$, z. B. ersetzen durch das Integral längs irgendeiner in F_2 verlaufenden und 1 mit 2 verbindenden Kurve. Wir wollen als solche gerade die wählen, welche in den Schnitt S fällt. Dann haben wir als Beitrag des Fadens

$$d\Gamma \int_S d\mathfrak{s}.$$

Für einen geschlossenen Faden aber ergibt sich offenbar 0. Somit als Beitrag aller Fäden

$$\int d\Gamma \int_S d\mathfrak{s}.$$

Sammeln wir hier für ein festes $d\mathfrak{s}$, so haben wir offenbar alle die längs S verlaufenden Fäden zu berücksichtigen, die $d\mathfrak{s}$ überdecken, Bild 11: ihre (algebraische) Anzahl, noch



Bild 10.

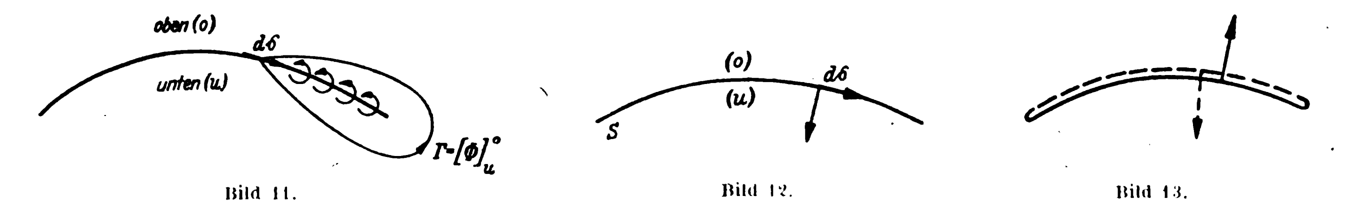


Bild 11. Bild 12. Bild 13.

multipliziert mit $d\Gamma$, ist aber, wie Bild 11 andeutet, offenbar gerade die Zirkulation längs irgendeiner S umschlingenden Kurve, die $d\mathfrak{s}$ von unten nach oben verbindet, d. h. also der Potentialsprung $\Gamma = [\Phi]_u^o$ (Γ Zirkulation!), wenn Φ das Potential unserer räumlichen Strömung ist. Somit erhalten wir für das räumliche Integral in (26) rechts

$$\int d\tau \operatorname{rot} \mathfrak{u} = \int_S [\Phi]_u^o \, d\mathfrak{s} \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

Indem wir (27) einsetzen und in den beiden anderen Integralen in (24) und (25) rechts die von F_1 und F_2 herrührenden Teile abspalten, erhalten wir

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{W}' = \int_S [\Phi]_u^o \, d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} + \int_{F_2} \mathfrak{u}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n}) + \int_{F_1} \mathfrak{u}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n}) + \int_M \mathfrak{u}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n})$$
$$- \int_{F_2} \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{n} - \int_{F_1} \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{n} - \int_M \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{n} \quad (28)$$

In dieser Aussage denken wir uns den Limes $R \to \infty$ vollzogen: da auf dem Mantel $\mathfrak{u}$ mindestens wie $\frac{1}{R^2}$ abklingt (wie man sofort einsieht), so verschwinden die beiden Integrale über den Mantel M und wir erhalten

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{W}' = \int_S [\Phi]_u^o \, d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} + \underline{\int_{F_2} \mathfrak{u}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n})} + \int_{F_1} \mathfrak{u}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n})$$
$$- \int_{F_2} \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{n} - \int_{F_1} \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{n}, \quad (29)$$

wo also F_1 und F_2 jetzt zwei im Abstand d vom Ursprung liegende und zu z senkrecht stehende Ebenen sind (F_1 für $z = -d$, F_2 für $z = +d$). Alsdann denken wir uns noch den Limes $d \to \infty$ vollzogen: dann fallen auch die Integrale über F_1 weg. Weiter erscheint die Strömung $\{\mathfrak{u}\}$ in der Ebene F_2 schließlich als nur von dem nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckenden Wirbelband herrührend, und F_2 irgendeine zu diesem Bande senkrecht stehende Ebene E, innerhalb der $\{\mathfrak{u}\}$ verläuft; $\{\mathfrak{u}\}$ ist die von den auf S liegenden und E senkrecht durchstoßenden »Stabwirbel« hervorgerufene Potentialströmung $\mathfrak{u} = \operatorname{grad} \varphi$; und weiter ist offenbar $[\Phi]_u = [\varphi]_u^o$. Da ferner das in (29) unterstrichene Integral über F_2 jedenfalls endlich bleibt, anderseits für $d \to \infty$ aber $\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n} \to 0$ strebt, so fällt auch dieses Integral weg. Es bleibt somit

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{W}' = \int_S [\varphi]_u^o \, d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} - \int_E \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\,\mathfrak{n}\, d\sigma \quad \ldots (30)$$

Hier ist das erste Integral ein Vektor senkrecht zur z-Achse, das zweite ein Vektor parallel zur z-Achse ($\mathfrak{n} = \mathfrak{k}$), d. h. wir haben

$$\mathfrak{A}' = \int_S [\varphi]_u^o \, d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} \quad \ldots \ldots \ldots (31)$$

$$\mathfrak{W}' = -\mathfrak{k} \int_E \frac{\mathfrak{u}^2}{2}\, d\sigma \quad \ldots \ldots \ldots (32)$$

Wir formen die Integrale weiter um. $d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U}$ steht auf $d\mathfrak{s}$ im Sinne einer Linksschwenkung in Bild 12 senkrecht, ist also $= U\,\mathfrak{n}\,ds$, und mithin

$$\int_S [\varphi]_o^u \, d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} = U \int_S (\varphi_o - \varphi_u)\,\mathfrak{n}\, ds.$$

Durchlaufen wir also S doppelt und lassen die Normale $\mathfrak{n}$ wie immer vom Flüssigkeitsraum nach außen weisen, Bild 13, so erhalten wir

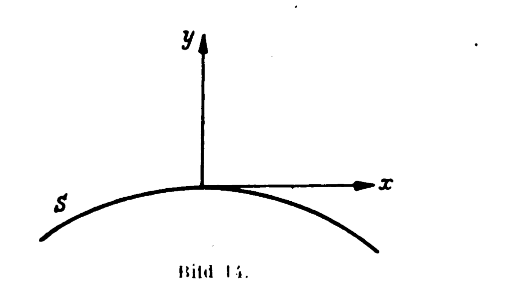


Bild 14.

$$\mathfrak{A}' = U \int_S \varphi\,\mathfrak{n}\, ds, \quad \ldots \ldots \ldots (33)$$

wo nun das Integral der (ebene) Längsimpuls im Kelvinschen Sinne der ebenen Strömung $\mathfrak{u} = \operatorname{grad} \varphi$ ist. Das Integral in (32) ist offenbar die kinetische Energie dieser Strömung, d. h.

$$\mathfrak{W}' = -\mathfrak{k}\,\frac{1}{2} \int_S \varphi\,\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds \quad \ldots \ldots (34)$$

Nehmen wir jetzt die Dichte ϱ wieder explizit auf, so erhalten wir endgültig für die Luftkräfte $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{W} = -\mathfrak{W}'$

$$\boxed{\mathfrak{A} = -\varrho\, U \int_S \varphi\,\mathfrak{n}\, ds; \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{k}\,\frac{\varrho}{2} \int_S \varphi\,\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds} \quad (35)$$

Wie man sieht, geht in diese Formeln nur noch das Wirbelband, d. h. die von ihm weit hinten erzeugte ebene Potentialströmung $\mathfrak{u} = \operatorname{grad} \varphi$ ein! Auch gelten sie für geradlinige wie für schiefe Anströmung. Denken wir uns das xy-System längs der z-Achse in den Mittelpunkt von S geschoben, Bild 14, so erfolgt die betreffende Strömung für einen üblichen symmetrischen Flügel bei geradliniger Anströmung ebenfalls symmetrisch, d. h. $\mathfrak{A}$ weist in die Richtung der y-Achse, ist also ein reiner Auftrieb. Erfolgt sie jedoch schief, so ist auch $\mathfrak{A}$ schief gerichtet, und enthält also noch eine Seitenkraft parallel zu x; dasselbe gilt, wenn der Flügel nicht symmetrisch gebaut ist, ob nun die Anströmung geradlinig erfolgt oder nicht. — Schließlich erwähnen wir noch folgenden Umstand: statt nach der früheren Totwassermethode hätten wir, wie bekannt, die Strömung auch noch auf mannigfach andere Art ins Flügelinnere fortsetzen können; dann hätte sich wohl für jeden Bandwirbel beim Eintritt in den Flügel der Lauf etwas geändert, jedoch nicht die Auswertung des Integrales (26) in Form von (27), ganz in Übereinstimmung mit dem Resultat (35), wonach die Luftkräfte allein durch das erzeugte Wirbelband bestimmt sind.

Wie steht es nun mit dem Moment? Dasselbe erhalten wir, wenn wir in (23) rechts überall unter den Integralen von vorn mit $\mathfrak{r}$ vektoriell multiplizieren. Dann könnten wir aber nicht mehr wie damals schließen, daß

$$\int \mathfrak{r} \times \mathfrak{U}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n})\, d\sigma = -\mathfrak{U} \times \int \mathfrak{r}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{n})\, d\sigma$$

verschwindet: denn das Integral rechts ist $= \int (\mathfrak{u}\cdot\nabla)\,\mathfrak{r}\, d\tau = \int \mathfrak{u}\, d\tau$, d. h. die Bewegungsgröße der Strömung $\{\mathfrak{u}\}$ innerhalb des Zylinders, zeigt also bei den ausgeführten Grenzübergängen kein bestimmtes Verhalten! Und selbst wenn wir uns auf das Moment um die Längsachse beschränken, so können wir wohl noch in derselben Weise wie früher abschätzen und durch die Grenzübergänge $R \to \infty$, $d \to \infty$ die betreffenden Glieder zum Verschwinden bringen, jedoch



nicht das aus den beiden unterstrichenen Gliedern in (24) und (25) jetzt sich ergebende Integral durch das Band allein ausdrücken; hierzu brauchten wir vielmehr die genaue Kenntnis der Wirbelfäden einschließlich der geschlossenen auf dem Flügel. Wohl liefert z. B. bei schiefer Anströmung und symmetrischem Flügel $\mathfrak{u} = \text{grad}\,\varphi$ einen Kelvinschen Drehimpuls $\int \mathfrak{r}' \times \varphi\, \mathfrak{n}\, ds$ ($\mathfrak{r}'$ = Radiusvektor in E), und damit ein Moment um die Längsachse, aber i. a. eben nur einen Teil des Gesamtmomentes um diese Achse. Wir stellen also fest: das Moment können wir nicht berechnen und auch nicht einmal einen Teil davon, wie z. B. die in die Längsachse fallende Komponente.

III. Das Wirbelband.

Wie schon betont, geht in die Luftkräfte nur das erzeugte Wirbelband ein: durch seine Kinematik, d. h. geometrische Form + φ-Strömung sind die Kräfte eindeutig bestimmt. Für jeden Körper bzw. jedes Körpersystem, welches zu einem solchen Wirbelband bzw. solchen Wirbelbändern Anlaß gibt, lassen sich demnach die Luftkräfte gemäß (35) berechnen. Dabei ist die geometrische Form gegeben durch die scharfe Hinterkante bzw. Hinterkanten, von denen das Band bzw. die Bänder abgehen, so daß als Unbekannte nur die Strömung $\mathfrak{u} = \text{grad}\,\varphi$, d. h. das Potential φ bleibt. Um zum Flügel zurückzukehren, müssen und können sich also auch gegebenenfalls Beziehungen zwischen den Kräften nur am Wirbelband aufzeigen lassen. Als Beispiel betrachten wir den Doppeldecker mit dem Ziel, den bekannten Satz nachzuweisen, daß die gegenseitig induzierten Widerstände einander gleich sind, d. h. in üblicher Bezeichnung

$$W_{12} = W_{21} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

ist. Bild 15 deutet das Schnittgebilde S an, $S = S_1 + S_2$. Das zugehörige Potential sei φ. Dieses wird erzeugt durch eine Wirbelbelegung von S_1 und S_2, deren Einzelpotentiale φ_1 und φ_2 seien. Dann erhalten wir für den Widerstand W in leicht verständlicher Rechnung

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_S \varphi \underline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}$$

$$\underline{\quad} = (\varphi_1 + \varphi_2)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}}_{W_{11}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}}_{W_{12}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_S \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}}_{W_{21}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_S \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}}_{W_{22}}.$$

Hier ist das erste und vierte Integral der Eigenwiderstand von S_1 und S_2, wobei — da für eine Wirbelströmung die Normalgeschwindigkeit beim Durchtritt durch S_1 oder S_2 stetig bleibt — im ersten Integral die Integration nur über S_1 und im vierten nur über S_2 zu erstrecken ist. Das zweite und dritte Integral sind aber einander gleich gemäß (3), wobei wieder im zweiten bei der Integration S_2 und im dritten S_1 unterdrückt werden darf, womit (36) bewiesen ist. Der Beweis zeigt auch, daß (36) für irgend zwei Teile von S gilt, ferner, daß S hierbei ganz beliebig sein kann, ebenso wie die Wirbelströmung φ.

IV. Der sogen. Cauchysche Hauptwert.

Bleiben wir beim Eindecker, wo das Schnittgebilde S aus einem zusammenhängenden Kurvenstück besteht, das wir uns in der Darstellung von Bild 11 von links nach rechts durchlaufen zu denken haben. Dann folgt aus diesem Bild, die in Bild 16 für unsere jetzigen Zwecke ergänzt ist, daß auf das Bogenelement ds die Wirbelmasse $d\Gamma$ entfällt, m. a. W.: die linienhafte Wirbeldichte $\gamma = \dfrac{d\Gamma}{ds}$ ist (Bogenlänge s vom linken Ende an gerechnet). Durch γ ist die Strömung eindeutig gegeben und umgekehrt. Geht man von dieser Wirbelbelegung aus, so erscheint die Strömung φ als die Überlagerung der auf S liegenden Wirbel. Berechnet man in dieser Weise die Geschwindigkeit, so macht dies für eine außerhalb S liegende Stelle keinerlei Schwierigkeit. Nur auf S ist zunächst Vorsicht geboten, da dann die zu der betreffenden Stelle s_0 gehörenden Wirbel die Integration zunächst unbestimmt machen. Die Regel lautet dann bekanntlich dahin, daß man diese Integration nach Cauchy so vorzunehmen hat, daß man zunächst die Wirbel aus $s_0 - \varepsilon \ldots s_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ wegläßt und im Resultat den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ macht, kurz von dem betreffenden Integral den sog. Cauchyschen Hauptwert nimmt und, anschaulich gesprochen, sich bei der Integration symmetrisch von links und rechts der kritischen Stelle s_0 nähert. Da man nun aber rein mathematisch eine solche Annäherung auch unsymmetrisch in mannigfachster Weise so durchführen kann, daß dabei ein endlicher Wert für das Integral herauskommt, so erscheint eine Begründung für den Cauchyschen Grenzübergang erwünscht (von Herrn Prof. Dr. Cremer an der T.H. Breslau im Gespräch gelegentlich geäußert!). Wir deuten eine solche in aller Kürze an. Dabei kann die Belegung ganz beliebig sein, braucht also nicht notwendig von einem Tragflügel herzurühren, d. h. die Gesamtmasse der Wirbel braucht nicht notwendig = 0 zu sein.

Die betreffende Stelle sei s_0, die dortige Belegungsdichte γ_0. Dann sieht man sofort, daß für die Belegung $\gamma - \gamma_0$ die Integration bestimmt ist, woraus erhellt, daß es genügt, sich auf den Fall konstanter Belegungsdichte zu beschränken. Ist nun weiter S an s_0 gekrümmt, t ein Stück der Tangente, das s_0 als inneren Punkt enthält, und denkt man sich t mit $-\gamma_0$ belegt, so ist für die solchermaßen erhaltene Belegung von S und t die Integration (immer in s_0!) wieder bestimmt, m. a. W.: es genügt, sich auf eine geradlinige Strecke zu beschränken. Diesen Fall veranschaulicht Bild 17, wo die Bogenlänge jetzt von 0 aus gezählt und mit x, die kritische Stelle mit x_0, bezeichnet ist, und wir noch annehmen dürfen, daß $x_0 > 0$ ist und im offenen Intervall $\left(-\dfrac{b}{2}, +\dfrac{b}{2}\right)$ liegt.

Um nun weiterzukommen, haben wir uns zu erinnern, daß die linienhafte Belegung selbst wieder nur eine Abstraktion ist und durch Grenzübergang einer flächenhaften Belegung gewonnen wurde. Dies veranschaulicht Bild 18, in welchem die Strecke zu einem achsensymmetrischen Rechteck von der kleinen Höhe h auseinandergezogen erscheint. Die hierzu gehörige und wieder konstante flächenhafte Dichte

y
x
-b/2
x0
+b/2

Bild 17.

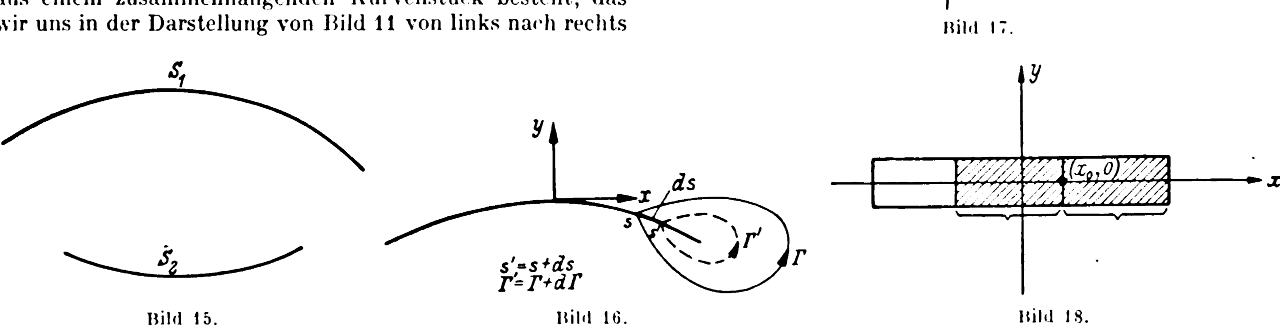


Bild 15. Bild 16. Bild 18.

γ_0 bestimmt sich dann aus der Forderung, daß die gesamte Wirbelmasse dieselbe geblieben ist, d. h. es muß $\gamma_0 h = \gamma_0$ sein. Denken wir uns nun das durch x_0 und $b/2$ gegebene Rechteck an $x = x_0$ nach links gespiegelt, so liefert das dadurch entstehende Rechteck im Mittelpunkt $(x_0, 0)$ offenbar die Geschwindigkeit 0, m. a. W.: wir dürfen uns bei der Berechnung von $\mathfrak{u}_0 = u(x_0)\,\mathfrak{j}$ auf das übriggebliebene Rechteck beschränken. Bei dieser Berechnung kann aber in dem betreffenden Integral für $\mathfrak{u}_0$ der Grenzübergang $h \to 0$ ohne weiteres sowohl im Resultat wie unter dem Integralzeichen vollzogen werden, woraus sich ergibt, daß für die linienhafte Belegung die Berechnung tatsächlich im Sinne Cauchys vorzunehmen ist. Wir deuten dies durch Anhängen eines Striches an und schreiben also

$$u(x_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}{}' \frac{\gamma(x)}{x - x_0}\,dx,$$

wo nun $\gamma(x)$ bereits wieder als beliebig angenommen ist. Rührt die Belegung von einem Tragflügel her, dessen Hinterkante also geradlinig ist, so ist $\gamma(x) = \frac{d\Gamma}{dx}$, und wir erhalten

$$u(x_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}{}' \frac{\frac{d\Gamma}{dx}}{x - x_0}\,dx.$$

Hier können wir noch partiell integrieren, müssen jedoch dabei beachten, daß wir dann als Stammfunktion von $\frac{d\Gamma}{dx}$ nicht $\Gamma(x)$ sondern $\Gamma(x) - \Gamma(x_0)$ zu nehmen haben, um wieder zu einem Cauchyschen Integral zu gelangen

$$u(x_0) = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{\Gamma(x) - \Gamma(x_0)}{x - x_0}\right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}{}' \frac{\Gamma(x) - \Gamma(x_0)}{(x - x_0)^2}\,dx\right\}$$

wo die eckige Klammer die Differenz andeutet und unter Beachtung von $\Gamma\left(\frac{b}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{b}{2}\right) = 0$ leicht ausgewertet werden kann. Erwähnen wir noch, daß Ähnliches auch für eine Quellbelegung und schließlich auch für eine beliebige Quell- und Wirbelbelegung gilt.

V. Über die Bestimmung der Strömung des Wirbelbandes.

Wie schon erwähnt, bleibt bei gegebener Anströmung als einzige Unbekannte nur die Strömung des Wirbelbandes. Was läßt sich über ihre Bestimmung sagen? Darauf möchten wir mit einer Analogie antworten, indem wir den Strömungsvorgang am Flügel in Parallele setzen zu den Wirbelstraßen, wie sie sich in günstigen Fällen hinter einem umströmten Körper einstellen, von uns kurz angedeutet durch das Schema

Raum	Ebene
Angeströmter Tragflügel	Angeströmter Körper
Wirbelband	Wirbelstraße
Luftkräfte bestimmt durch Wirbelband	Körperkräfte bestimmt durch Wirbelstraße
?	Wirbelstraße stabil

wo wir auf die letzte Zeile noch nicht achten. Während man nun beim ebenen Körper die bestimmenden (kinematischen) Größen der Straße durch photographische Aufnahmen aus dem Versuch gut ermitteln kann und so für die theoretische Durchdringung stets festen Boden unter den Füßen hat, scheint dies beim räumlichen Tragflügel nicht mehr so einfach, d. h. hier könnte man eine Theorie vorläufig nur indirekt insoweit überprüfen, als es die (gesamten) Luftkräfte betrifft, was aber für die Praxis jedenfalls völlig hinreichend wäre. Im Falle des ebenen Körpers ist nun bekanntlich eine solche theoretische Durchdringung möglich auf Grund der natürlichen Annahme, daß, wenn eine Wirbelstraße sich einstellt, eine solche jedenfalls stabil sein müsse, eine Annahme, die einfache Folgerungen nach sich zieht, die leicht überprüft werden können und auch wurden, und wobei sich eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment ergab. Die Frage, die wir dann stellen, lautet: Sollte man im Falle des Flügels, wo das Wirbelband als Unstetigkeitsfläche zunächst doch auch stark labil ist, nicht eine ähnliche Annahme dahingehend machen, daß, wenn sich überhaupt ein solches Band einstellt, dasselbe irgendwie ähnlich stabil wie die Wirbelstraße sein müsse, unter stabil genauer gesagt einfach dies verstanden, daß das Band »sich erhält«, d. h. seine Gestalt und seine Belastung bewahrt, kurz, daß es sich, ähnlich wie die Wirbelstraße, als Ganzes in genügender Entfernung vom Flügel wie starr bewegt? Denn, so möchten wir weiter argumentieren, wie man bei der Wirbelstraße bei dem heutigen Stande unseres Könnens einfach darauf verzichten muß, die Kinematik der Straße aus der gegebenen Anströmung und den Körper zu gewinnen, sondern diese vielmehr mit dem Preis einer oder zweier Parameter durch eine Stabilitätsbetrachtung weit hinten vom Körper aus dem Wirbelgebilde herauszieht, so müssen wir uns auch beim Tragflügel ganz an das von ihm gelieferte Wirbelgebilde halten, durch welches die Luftkräfte bereits eindeutig bestimmt sind, und den Flügel bei Seite lassen. Auf alle Fälle wäre dadurch ein Weg geöffnet, den weiter zu beschreiten der mathematische Geist sich nur verlockt fühlen kann. Aber selbst wenn wir von diesem allem absehen, so ist die obige Annahme jedenfalls eine mögliche und wir können, indem wir dieser Annahme als einem provisorischen Wegführer einmal vertrauen, zusehen, wohin er uns leitet, was sich dabei ergibt und wie es mit der Übereinstimmung mit dem Experiment steht.

Die Annahme verlangt, daß sich das Wirbelband weit hinten starr bewegt, was nach I. ein Minimum der kinetischen Energie der Querströmung, d. h. Wirbelströmung und mithin nach (35) ein Minimum des Flügelwiderstandes nach sich zieht und umgekehrt. Bleiben wir vorerst bei der geradlinigen Anströmung eines symmetrisch gebauten Flügels und nehmen einmal an, die Hinterkante sei geradlinig, d. h. das Band eben, so bedeutet jene Annahme bekanntlich eine elliptische Verteilung des Auftriebes $\Gamma = [\varphi]_0^u$. Da nun aber die sog. Umrechnungsformeln auf andere Seitenverhältnisse auf einer solchen elliptischen Verteilung beruhen und andererseits durch das Experiment gut bestätigt erscheinen, so dürfen wir darin umgekehrt in gewissem Sinne eine Bestätigung jener Annahme sehen. Ist die Hinterkante bzw. das Schnittgebilde des Wirbelbandes nicht geradlinig, so würde jene Annahme allgemein folgendes ergeben:

Für ein gegebenes U und ϱ sowie einen festen geometrischen Anstellwinkel α wäre die geometrische Gestalt von S als die Projektion der Hinterkante auf die Querebene gegeben: $S = S(\alpha)$. Weiter existierte dann genau eine Translation $\mathfrak{w} = -w\,\mathfrak{j}$ $(w > 0)$, welche die Reaktion $\mathfrak{A}'$ des Auftriebes ergäbe

$$\mathfrak{A}' = \varrho\, U \int_{S(\alpha)} \varphi\, \mathfrak{n}\, ds,$$

wo φ die zu $\mathfrak{w}$ gehörige Potentialströmung ist. Ist φ_0 die zu $\mathfrak{j}$ gehörige starre Strömung, so ist $\varphi = -w\,\varphi_0$ und es wird

$$\mathfrak{A}' = -\varrho\, U\, w \int_{S(\alpha)} \varphi_0\, \mathfrak{n}\, ds,$$

wo das Integral nur von der Geometrie von $S(\alpha)$ abhängt und dem Betrag nach von der Dimension einer Fläche $F_0(\alpha)$ ist. Gehen wir also zu den Beträgen über, so erhalten wir für den Auftrieb A

$$A = \varrho\, U\, w\, F_0(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Messen wir mithin A in folgender Weise dimensionslos

$$A = \varrho\, U^2 F_0(\alpha)\, \gamma_a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

so ist

$$\gamma_a = \frac{w}{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$



Von zwei Flügeln mit demselben $S(\alpha)$ oder $F_0(\alpha)$ wäre demnach auftriebsmäßig jener der günstigere, für den γ_a, d. h. w/U größer wäre. Allerdings wäre für diesen dann auch der Widerstand W größer

$$W = \frac{\varrho}{2} \int\limits_{S(\alpha)} \underbrace{\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{n}} ds = \frac{\varrho}{2} \mathfrak{w} \cdot \int\limits_{S(\alpha)} \varphi \mathfrak{n} \, ds = \frac{\varrho}{2} w w F_0(\alpha) \quad (40)$$

oder

$$W = \frac{1}{2} \frac{w}{U} A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Aus (37) und (41) folgt

$$A^2/W = \frac{A}{W} \cdot A = \frac{1}{2} \varrho U^2 F_0(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Benutzen wir jedoch die übliche dimensionslose Darstellung mit fester Bezugsfläche f

$$A = \varrho U^2 f c_a,$$
$$W = \varrho U^2 f c_w,$$

so folgt aus (41)

$$c_a^2 = \frac{1}{2} \frac{F_0(\alpha)}{f} c_w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Die Theorie liefert also unter der gemachten Annahme die Polarkurve oder anders gesprochen, sie stiftet einen Zusammenhang zwischen der Auftriebs- und der Widerstandskurve von solcher Art, daß, wenn die eine Kurve bekannt ist, man die andere berechnen kann. Und damit ist nun die Möglichkeit gegeben, jene Annahme indirekt experimentell auf ihre Tragweite hin zu prüfen. Für einen Flügel mit geradliniger Hinterkante ist $F_0(\alpha)$ konstant und auch nur für diesen: dann wird die Polarkurve streng eine Parabel. Für einen beliebigen Flügel ändert sich $F_0(\alpha)$, jedoch bei den üblichen länglichen Flügeln und bei mäßigen Anstellwinkeln nicht besonders stark, so daß die Polarkurve immer noch einer Parabel ähnelt. Sieht man sich nun z. B. alle Polarkurven an, die in den Göttinger Mitteilungen stehen, so springt ihr parabelförmiger Verlauf in die Augen, was um so schwerer wiegt, als ja in jenen Kurven auch der Reibungswiderstand enthalten ist, während die von uns die zugrunde gelegte Strömung ideal, d. h. ohne Reibung erfolgt. Denkt man sich also — immer in dem »gesunden« Anstellwinkelbereich, welchem im Bilde der Wirbelstraße der entsprechende gesunde Bereich auf der $\mathfrak{Re}$-Achse, in welchem sich deutlich eine Straße einstellt, zugeordnet werden kann — einen in erster Annäherung als konstant angenommenen passenden Mittelwert des Reibungswiderstandes von jeder experimentellen Polarkurve abgetrennt, wodurch ja der gestaltliche Verlauf nicht geändert wird, und bedenkt weiter, daß auch die von uns theoretisch erhaltene Kurve (43) keineswegs eine strenge Parabel ist, sondern durch α noch eine Abweichung hereinkommt, so wird man wohl sagen dürfen, daß es geradezu erstaunlich ist, wie gut das doch relativ grobe Modell der Strömung, das wir unserer Betrachtung zugrunde gelegt haben, zusammen mit unserer oben gemachten Annahme den typischen Verlauf der wirklichen Polarkurve zu geben vermag, und wir können nicht umhin, als darin ein Zeichen der Ermutigung zu erblicken, auf dem eingeschlagenen Wege weiter zu gehen.

VI. Die Hauptaufgabe.

In der hier entwickelten Auffassung gibt es nur eine Hauptaufgabe, die wir für den einfachsten Fall des symmetrisch gebauten und geradlinig angeströmten Eindeckers noch formulieren wollen.

Das Flugzeug fliege also durch vorher ruhende Luft mit der Geschwindigkeit U und unter einem festen geometrischen Anstellwinkel α. Dann ist der Auftrieb gleich dem Gewicht, und wir kennen mit A, U und der Dichte ϱ nach (35) den Kelvinschen Längsimpuls der zugehörigen Wirbelströmung. Daß der Flügel schwach belastet ist, bedeutet dann exakt, daß dieser Längsimpuls, dimensionslos gemessen, genügend klein ist. Wären wir nun hinsichtlich des doppelt zu durchlaufenden oder bespülten Umfanges von S an keine Einschränkung gebunden, so könnten wir nach I., indem wir S genügend groß gestalten, die Energie der Wirbelströmung, d. h. den Widerstand des Flügels, beliebig klein machen. Es ist daher sinnvoll, wenn wir den bespülten Umfang vorschreiben und alsdann nach der günstigsten geometrischen Form des Wirbelgebildes S fragen, welche bei demselben Impuls die kleinste Energie hat. Für die so formulierte Variationsaufgabe liefert der unter I. angewandte Lagrangesche Ansatz leicht eine Bestimmungsgleichung, für die die Strecke jedenfalls eine Lösung darstellt. Halten wir uns einmal an diese Lösung, so wäre dies der einzige Hinweis, den wir dem Konstrukteur zu geben vermögen: Die Hinterkante ist geradlinig zu gestalten, alle weitere Formgebung des Flügels jedoch Sache der experimentellen Forschung.

Aber auch abgesehen von den Erfordernissen der Tragflügeltheorie darf jene Variationsaufgabe das Interesse des Mathematikers beanspruchen: so liefert sie, wie noch erwähnt sei, für eine äußere Strömung eine Bedingungsgleichung, die weder von der Strecke noch vom Kreis befriedigt wird; der dadurch bestimmte Körper wäre vom Standpunkte der idealen Flüssigkeiten in dem Sinne der günstigste, als er einen vorgeschriebenen Kelvin-Impuls mit der geringsten Energie zu tragen vermag. Für weitere Ausführungen verweisen wir auf die demnächst erscheinende Dissertation von Frl. Ruth Proksch.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 16. April 1943 Lfg. 3

Die Kerbzähigkeit von Flugzeugbaustählen*).

Von W. Stieda und W. Tödter.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen-Flughafen.

Nach einer grundsätzlichen Betrachtung über Bedeutung und Wert der Kerbschlagbiegeprüfung werden die Einflüsse von Härtetemperatur, Anlaßtemperatur und Anlaßdauer auf die Kerbzähigkeit einiger Flugzeugbaustähle an Hand von Versuchsergebnissen behandelt.

Gliederung.

I. Einleitung, Bedeutung der Kerbzähigkeit von Werkstoffen für ihre Beurteilung.

Die Kerbschlagbiegeprüfung zur Bestimmung der Kerbzähigkeit von Stählen hat im Flugzeugbau in letzter Zeit wieder an Bedeutung gewonnen, da eine Reihe von noch unbekannten Stählen eingeführt worden ist. Die Kerbschlagbiegeprüfung wird meist anderen Versuchsarten zur Bestimmung der Sprödigkeit bzw. Zähigkeit vorgezogen, da sie besonders einfach durchzuführen ist. Die Kerbzähigkeit soll eigentlich ein rein werkstoffgebundener Kennwert sein und anzeigen, wieweit der Werkstoff in Abhängigkeit vom Werkstoffzustand bei verschiedenen Temperaturen schlagartiger Beanspruchung gewachsen ist, d. h. spröde oder zäh ist. Der Wert der Kerbschlagbiegeprobe und die Beurteilungsmöglichkeit von Flugzeugstählen auf Grund ihrer Kerbzähigkeit sind allerdings auch jetzt noch viel umstritten, und zwar hauptsächlich aus folgenden Gründen:

1. Die Ergebnisse sind nicht allein von der Zusammensetzung des Werkstoffes, sondern in ebenso hohem Maße von der Herstellungsart und Durcharbeitung sowie von Bearbeitungsart und Oberflächenbeschaffenheit der Kerbschlagprobestäbe abhängig. Die Abhängigkeit der Werkstoffeigenschaften von den Abmessungen der Halbzeuge, d. h. die Grenzen der Durchvergütung sowie die Unterschiede zwischen Randzone und Kern für eine Reihe von Flugzeugstählen sind in dem Aufsatz von A. Krisch, »Festigkeit, Durchhärtung und Zähigkeit der Austauschstähle« behandelt worden.
2. Im Flugbetrieb aufgetretene Brüche konnten leider nicht genügend dahingehend ausgewertet werden, ob schlagartige Beanspruchung, Sprödigkeit bzw. Kaltsprödigkeit und Kerbwirkung die Ursache waren. Aus diesem Grunde ist auch für den Flugzeugbau kein absolutes Maß für die jeweils erforderliche Kerbzähigkeit bekannt, wie es für andere Gebiete der Technik bereits teilweise der Fall ist.
3. Die meist übliche Kerbschlagprobe nach DIN DVM A 115 verwendet nur eine bestimmte Kerbform, während in Bauteilen die Kerbwirkung ganz verschiedenartig und manchmal von einer solchen Größenordnung ist, daß das entsprechende Bauteil auch bei Verwendung eines Werkstoffes und Werkstoffzustandes guter Kerbzähigkeit schlagartiger Beanspruchung nicht ausreichend gewachsen ist.

Um die Kerbschlagbiegeprüfung zur Beurteilung der reinen Werkstoffeigenschaften anwenden zu können, muß man also bei Herstellung der Probestäbe die Vorbehandlung und Bearbeitung derselben in starkem Maße berücksichtigen und sie gleichartig gestalten. Bei den durchgeführten Untersuchungen wurden die Probestäbe in endgültiger Abmessung, jedoch vor dem abschließenden Schleifen vergütet, so daß Vorbehandlung und Abmessung des Halbzeuges damit weitgehend ausgeschaltet waren. Als Abschreckmittel wurden für die einzelnen Stähle die in der Fertigung üblichen Abschreckflüssigkeiten verwendet, obwohl man durch Wasserabschreckung in den meisten Fällen die beste Kerbzähigkeit der Werkstoffe erhält.

Es muß betont werden, daß die Kenntnis der Kerbzähigkeit eines Werkstoffes nur bedingten Wert für den Konstrukteur hat, da außerdem Bauteilform und Beanspruchungsart von mindestens ebenso großem Einfluß sind. Auch stellen die Vorbehandlung und Bearbeitung der Kerbschlagbiegeproben gegenüber den üblichen Fertigungsmethoden eine Idealform dar, und schließlich kann mit Rücksicht auf fehlende Erfahrungen kein absolutes Maß für die jeweils erforderliche Kerbzähigkeit angegeben werden. Die Untersuchung der Kerbzähigkeit neuer Stähle muß also vorwiegend im Vergleich mit bekannten, im Flugzeugbau bereits mit Erfolg angewendeten Stählen durchgeführt werden. Man kann auch nicht die Kerbzähigkeitswerte von Werkstoffen aus verschiedenen Laboratorien eindeutig vergleichen, da selbst bei der genauen Festlegung des Probenherstellungsverfahrens nach DIN DVM A 115 kleine Differenzen in der Ausbildung der Kerbe, der Kanten und der Oberfläche vorhanden sein können und die Versuchswerte wesentlich beeinflussen können.

Schließlich muß noch darauf geachtet werden, ob es sich um Trennungsbruch oder Verformungsbruch bzw. um das Übergangsgebiet zwischen beiden handelt. Bei einem sehr spröden Werkstoff treten bei den untersuchten Stählen Trennungsbrüche auf. Hierbei ist der Streubereich leicht ziemlich groß, außerdem ist die Beurteilungsbasis für Trennungsbrüche eine andere als für Verformungsbrüche. Bei Anwendung der Probenform nach DIN DVM A 115 treten die meisten Brüche als Verformungsbrüche bzw. im Übergangsgebiet zwischen beiden Bruchарbeiten auf. Nur in einzelnen Fällen treten bei den untersuchten Werkstoffen ziemlich reine Trennungsbrüche auf. Es handelte sich dann um geringere Anlaßtemperaturen oder um Anlaßtemperaturen über dem Umwandlungspunkt bei etwa 720°, d. h. bei Werkstoffzuständen, die praktisch nicht in Frage kommen. Außerdem traten derartige Brüche vorwiegend bei den Kälteversuchen, d. h. in kaltsprödem Zustand auf.

*) A 223.

II. Aufgabenstellung, Versuchsdurchführung und Versuchsergebnisse.

Unter Berücksichtigung dieser Umstände wird im folgenden eine Reihe von Versuchsergebnissen über die Kerbzähigkeit der wichtigsten Flugzeugbaustähle wiedergegeben, wobei ausdrücklich betont wird, daß alle Proben hintereinander nach dem gleichartigen Verfahren zubereitet wurden. In allen Fällen wurde die Halbzeugform des untersuchten Werkstoffes ausdrücklich genannt, jedoch wurden in allen Fällen erst die fertigen Probestäbe warmbehandelt, so daß eine gleichmäßige, gute Durchvergütung gegeben war. Ein abschließendes Schleifen und Polieren der Stäbe wurde nach der Warmbehandlung vorgenommen. Die Versuchsergebnisse geben demnach einen möglichst eindeutigen Vergleich der reinen Werkstoffeigenschaften. Sie zeigen aus den eingangs angeführten Gründen wie üblich einen größeren Streubereich als andere mechanisch-technologische Prüfungswerte, jedoch konnte durch peinlichst gleichartige Probenzubereitung das Band des Streubereiches verhältnismäßig schmal gehalten werden. Die Versuche wurden bei + 20° und —60° C durchgeführt.

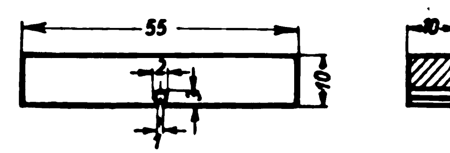


Bild 1. Kleine Kerbschlagprobe nach DIN DVM A 115.

Bei der Durchführung der Kerbschlagversuche bei —60° C wurde entsprechend gleichartigen, im Schrifttum behandelten Versuchen vorgegangen. Der Temperaturanstieg in den Proben, gemessen mittels Thermoelement während der Entnahme der Proben aus dem Kältekasten bis zum Augenblick des Zerschlagens auf dem Pendelschlagwerk, betrug wie bereits im Schrifttum behandelt, etwa 1° pro Sekunde, d. h. insgesamt etwa 3 bis 4° C. Wie oben festgestellt, sollten bei den Versuchen die Einflüsse der Bauteil- bzw. Probenform möglichst ausgeschaltet sein. Für die untersuchten Stähle sollte der Werkstoffzustand, d. h. insbesondere der Einfluß von Härtetemperatur, Anlaßtemperatur und Anlaßdauer auf die Kerbzähigkeit betrachtet werden. Folgende Untersuchungen wurden angestellt:

Zahlentafel 1. Abmessungen und Analysen der untersuchten Werkstoffe.

Werkstoff	Abm.	Hersteller	Prüfsch.	C	Mn	Si	P	S	Cr	Mo	V
—	mm	—	—	%	%	%	%	%	%	%	%
1208	16 Dmr.	a)	2409	0,23	1,33	0,31	0,020	0,018	1,26	—	—
		b)	—	0,23	1,33	*)	*)	*)	1,30	—	—
		c)	—	0,18/0,23	1,2/1,5	0,4	0,035	0,035	1,2/1,5	—	—
1265	16	d)	14926	0,18	2,03	*)	*)	*)	—	—	—
	Dmr.	b)	—	0,17	2,18	0,30	0,018	0,017	—	—	—
	Blech 15	e)	129	0,16	2,4	0,4	*)	*)	—	—	—
	Dmr.	b)	—	0,18	2,46	0,41	0,020	0,040	—	—	—
	—	c)	—	0,12/0,2	2,0/2,3	0,3/0,6	0,04	0,04	—	—	—
1267	28 Dmr.	a)	—	*)	*)	*)	*)	*)	—	—	—
		b)	—	0,38	1,76	*)	*)	*)	—	—	—
		c)	—	0,33/0,4	1,6/1,9	0,4	0,035	0,035	—	—	—
1310	100	f)	—	*)	*)	*)	*)	*)	—	—	*)
	Dmr.	b)	—	0,39	1,81	0,40	0,018	0,034	—	—	0,12
	67	a)	—	*)	*)	*)	*)	*)	—	—	*)
	Dmr.	b)	—	0,39	1,72	0,30	0,025	0,033	—	—	0,12
	—	c)	—	0,38/0,4	1,6/1,9	0,4	0,035	0,035	—	—	0,10/0,18
1452	12 · 12		—	*)	*)	*)	*)	*)	*)	*)	—
		b)	—	0,26	*)	*)	*)	*)	0,94	*)	—
		c)	—	0,22/0,28	0,7	0,35	0,02	0,015	0,9/1,2	0,15/0,25	—
1604	15 Dmr.		—	*)	*)	*)	*)	*)	*)	—	*)
		b)	—	0,27	1,21	*)	0,011	0,010	0,74	—	0,18
		c)	—	0,24/0,30	1,0/1,3	0,4	0,025	0.020	0,6/0,9	—	0,1/0.2

*) Analyse nicht durchgeführt.

Zahlentafel 2. Warmbehandlung der vorbereiteten Proben.

Werkstoff	Art der Untersuchung	Härtetemperatur	Abschreckflüssigkeit	Anlaßtemperatur	Anlaßzeit
—	—	°C	—	°C	Std.
1208	verschiedene Anlaßtemperat.	830— 840	Fortan	0—700	1
1265	verschiedene Anlaßtemperat. Anlaßsprödigkeit	840— 850	Wasser	0—700 500	1 1 ÷ 10
1267	verschiedene Anlaßtemperat.		Öl	0—800	1
1310	verschiedene Anlaßtemperat. verschiedene Härtetemperat. Anlaßsprödigkeit	840— 850 830— 920 840— 850	Öl	0—700 500 500	1 1 1 — 10
1452	verschiedene Anlaßtemperat. verschiedene Härtetemperat.	840— 850 770— 920	Fortan	0—700 500	1 1
1604	verschiedene Anlaßtemperat. verschiedene Härtetemperat. Anlaßsprödigkeit	880— 890 800—1000 880— 890	Fortan	0—700 500 500	1 1 1 — 10

Nach dem Anlassen wurden sämtliche Proben in Wasser abgekühlt.

1. Kerbzähigkeit der Fliegwerkstoffe 1208, 1265, 1267, 1310, 1452, 1604 für den Anlaßbereich von 0° bis 700° C bei Anwendung von jeweils einer für den betreffenden Werkstoff üblichen Härtetemperatur,
2. Kerbzähigkeit der Fliegwerkstoffe 1310, 1452 und 1604 bei verschiedener Härtetemperatur und einheitlicher Anlaßtemperatur von 500° C,
3. die Änderung der Kerbzähigkeit der Fliegwerkstoffe 1265, 1310 und 1604 in Abhängigkeit von der Zeit des Anlassens, d. h. die Neigung zur Anlaßsprödigkeit.

Für die Bestimmung eines Punktes wurden jeweils 4 Proben verwendet. Sämtliche Proben wurden, wie bereits erwähnt, auf 10,3 × 10,3 mm gehobelt und auf die Länge von 55 mm zugeschnitten. Nach der anschließenden Warmbehandlung wurden die Proben auf das vorgeschriebene Maß (lt. DIN DVM A 115) 10 × 10 mm geschliffen, die Bohrung 1,9 mm Dmr. gebohrt, auf 2 mm Dmr. aufgerieben und anschließend aufgeschlitzt (siehe Bild 1, Abmessungen der kleinen DIN DVM-Probe A 115). Die Festigkeitswerte der Proben wurden durch je zwei Kugeleindrücke H 5/750/30 bestimmt.

Entsprechend den drei Aufgabenstellungen wurden die Versuchsergebnisse folgendermaßen zusammengestellt:

Tafel I: Abmessungen und Analysen der untersuchten Stähle.

Tafel II: Warmbehandlung der vorbereiteten Proben.

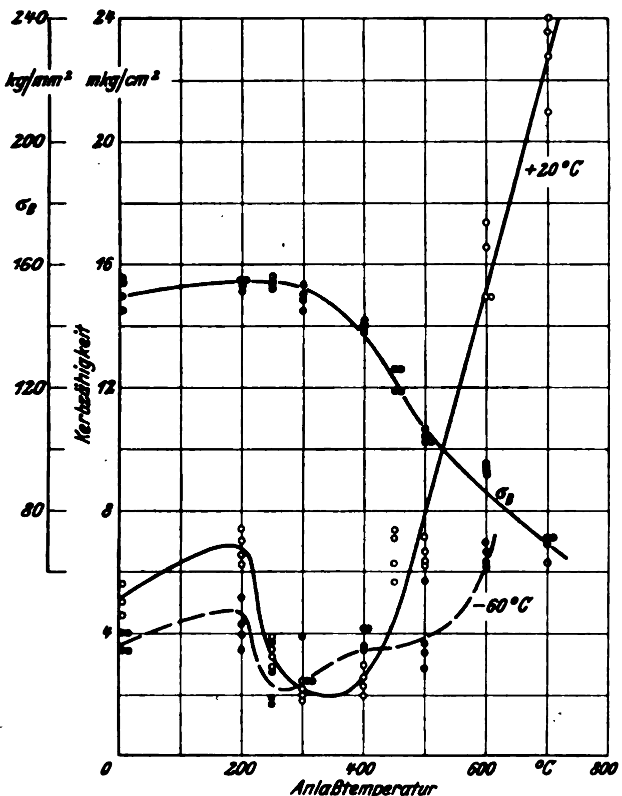


Bild 2. Stahl 1208. Kerbzähigkeit in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur + 20° C, Härtetemperatur 830 bis 840° C, abgeschreckt in Öl. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.

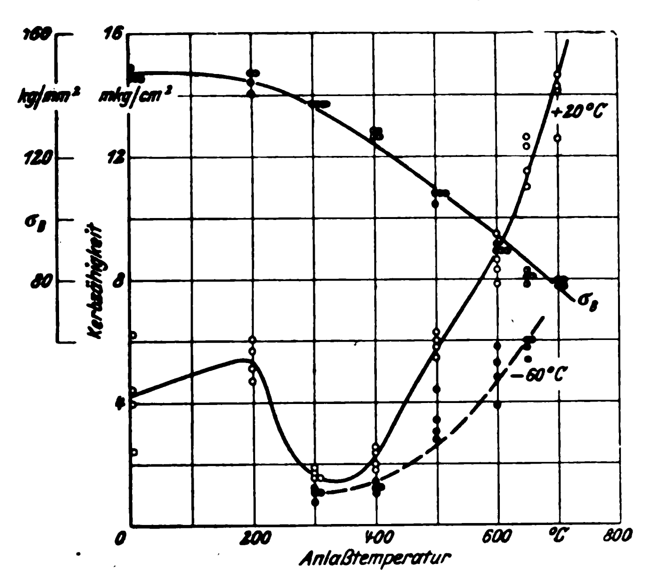


Bild 4. Stahl 1265 (Mn = 2,4 %, C = 0,18 %). Kerbzähigkeit in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur, Härtetemperatur 850 bis 860° C, abgeschreckt in Fortan. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.

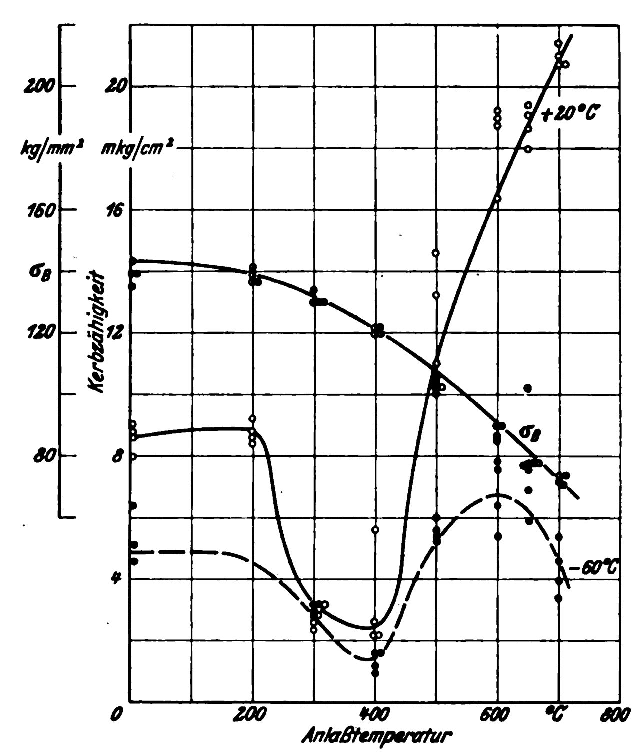


Bild 3. Stahl 1265 (Mn = 2,18, C = 0,17 %). Kerbzähigkeit in % Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur, Härtetemperatur 850 bis 860° C, abgeschreckt in Fortan. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.

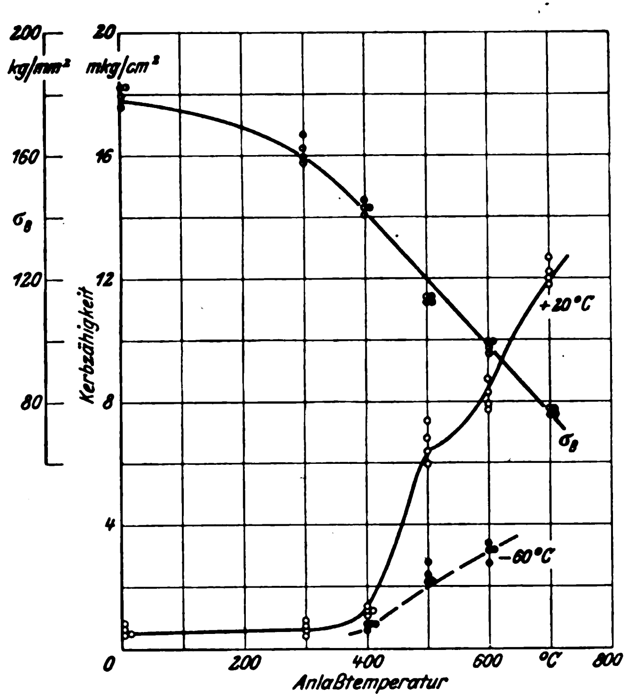


Bild 5. Stahl 1267. Kerbzähigkeit in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur. Härtetemperatur 840 bis 850° C, abgeschreckt in Öl. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.

Bild 2 bis 9: Bruchfestigkeit und Kerbzähigkeit der Werkstoffe 1208, 1265, 1267, 1310, 1452, 1604 für verschiedene Anlaßtemperaturen.

Tafel III: Bruchfestigkeit und Kerbzähigkeit der Werkstoffe 1310, 1452 und 1604 bei verschiedenen Härtetemperaturen und einheitlicher Anlaßtemperatur von 500° C.

Tafel IV: Bruchfestigkeit und Kerbzähigkeit der Werkstoffe 1265, 1310 und 1604 in Abhängigkeit von der Anlaßzeit, d. h. Neigung zur Anlaßsprödigkeit.

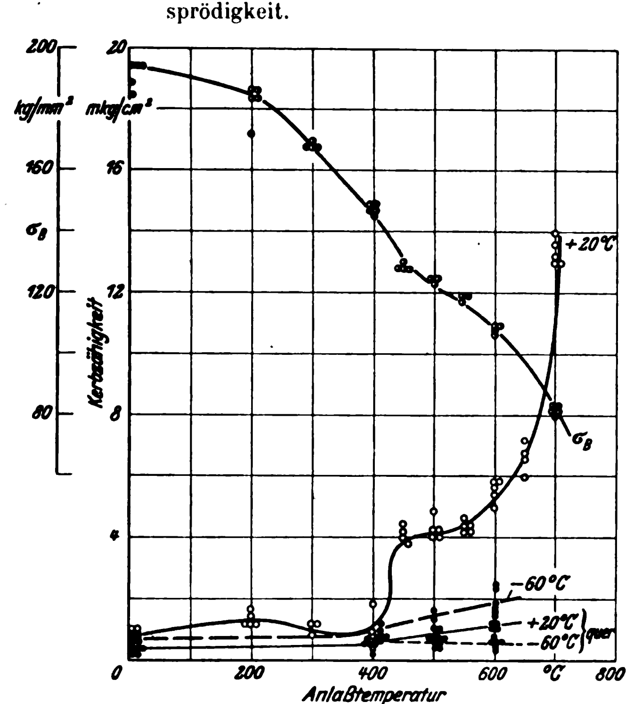


Bild 6. Stahl 1310 (100 mm Dmr.). Kerbzähigkeit in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur. Härtetemperatur 840 bis 850° C, abgeschreckt in Öl. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.

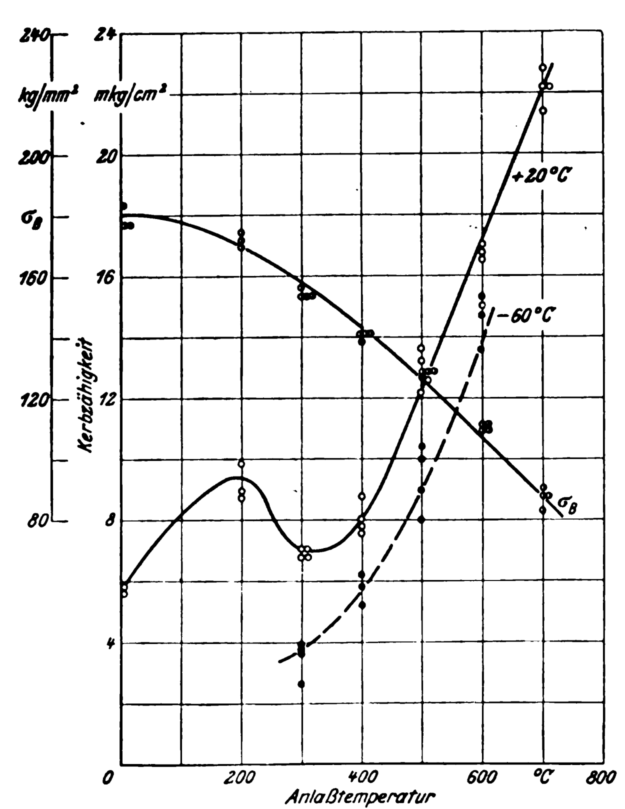


Bild 8. Stahl 1452. Kerbzähigkeit in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur, Härtetemperatur 840 bis 850° C, abgeschreckt in Fortan. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.

III. Beurteilung der Ergebnisse.

Die Ergebnisse zu Aufgabenstellung 1 zeigen, daß der molybdänhaltige Stahl 1452 weitaus die beste Kerbzähigkeit hat. Die Kerbzähigkeit des Werkstoffes 1604 liegt schon wesentlich schlechter. Die beiden Stähle 1452 und 1604 mit mittelhohem Kohlenstoffgehalt und in noch stärkerem Maße die niedrig gekohlten Stähle 1208 und 1265 haben bei Anlaßtemperaturen von 200 bis 350° C ein Minimum der Kerbzähigkeit, welches bei Raumtemperatur wesentlich ausgeprägter ist als bei der Temperatur von — 60°. Nur bei dem Stahl 1604 ist für — 60° ein derartiges Minimum nicht festzustellen. Die beiden Stähle 1267 und 1310

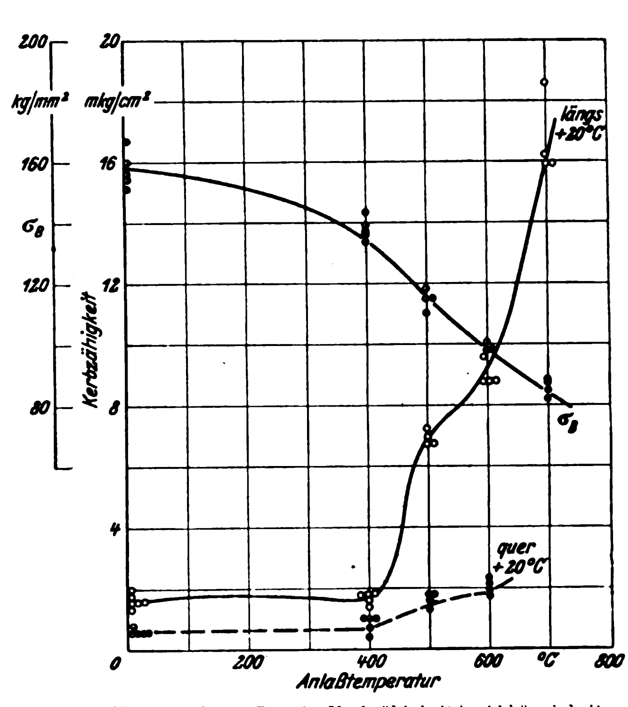


Bild 7. Stahl 1310 (67 mm Dmr.). Kerbzähigkeit in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur, Härtetemperatur 840 bis 850° C, abgeschreckt in Öl. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.

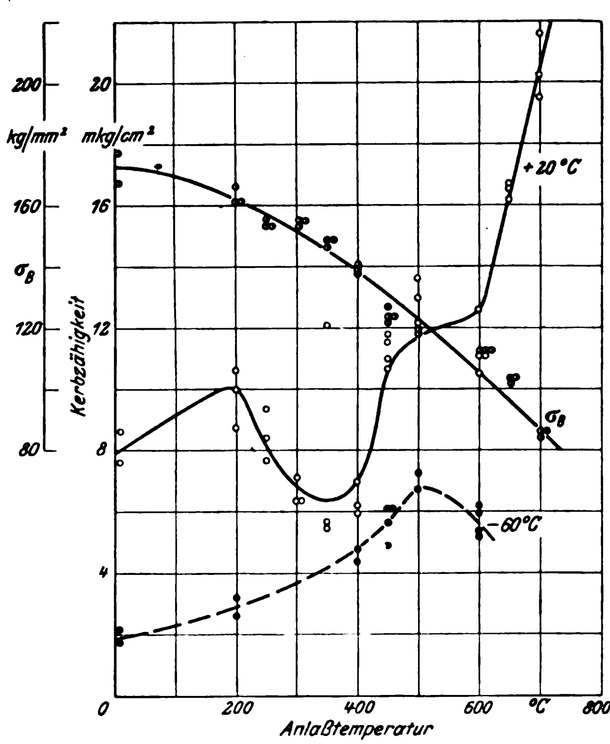


Bild 9. Stahl 1604. Kerbzähigkeit in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur, Härtetemperatur 880 bis 890° C, abgeschreckt in Fortan. Nach dem Anlassen in Wasser abgekühlt.



Zahlentafel 3. Bruchfestigkeit und Kerbzähigkeit in der Abhängigkeit von der Härtetemperatur.

Werkstoff	Härtetemperatur °C																									
	800		820		830		840		860		880		830		900		920		940		960		980		1000	
	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.
	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²
1310	109	3,6			118	4,0			120	4,2			120	5,2			122	5,0								
	112	5,0			118	4,2			120	5,4			122	5,2			122	5,0								
	108	4,6			119	5,0			123	5,2			122	4,3			123	5,4								
	109	4,3			119	4,8			122	4,0			120	4,0			123	5,0								
	106	4,0			119	4,0			123	4,4			120	5,0			123	5,2								
1452	118	13,3			125	13,6			127	12,0			127	11,3			122	12,2								
	116	13,2			125	12,1			123	11,6			128	11,8			122	13,0								
	114	13,8			127	13,0			125	12,4			120	12,4			123	11,6								
	112	13,0			125	12,0			125	13,8			125	11,6			123	11,6								
	113	12,6			125	12,4			125	12,6			123	12,2			122	11,8								
1604	110	13,4	115	12,9			118	13,5	118	12,6	118	13,0			120	10,3	119	11,6	119	10,4	120	8,7	121	8,0	119	8,6
	108	13,9	116	12,6			118	12,4	119	11,4	118	12,9			120	11,6	119	11,6	119	11,4	119	9,0	120	8,3	120	7,7
	110	13,6	116	13,4			118	12,0	118	12,1	118	12,1			119	11,1	119	9,6	119	11,4	120	8,6	121	8,8	120	7,6

σ_B bestimmt aus H 5/750/30.
Behandlung: Von der Härtetemperatur abgeschreckt 1. 1310 in Öl, 2. 1452 in Fortan, 3. 1604 in Fortan.
Nach dem Härten 1 h bei 500° C angelassen und in Wasser abgekühlt.

mit höherem Kohlenstoffgehalt haben diesen Tiefstwert weder für Raumtemperatur noch für eine Temperatur von — 60°. Beim Stahl 1310 und besonders beim Stahl 1604 (siehe Bild 6, 7 und 9) fällt eine gewisse Unstetigkeit des Kerbzähigkeitsanstieges zwischen 450° und 600° C Anlaßtemperatur auf, welche vermutlich in Zusammenhang mit einer Vanadinkarbid-Ausscheidung steht. Bei 1604 dürfte diese Erscheinung besonders stark hervortreten, da hier die Härtetemperatur den Umwandlungspunkt von etwa 820° C in stärkerem Maße übersteigt, als es bei den anderen untersuchten Werkstoffen der Fall war. Die Kerbzähigkeitswerte der Stähle 1267 und 1310 bei niedriger Anlaßtemperatur sind besonders gering. Bei starkem Anlassen, d. h. bei einer Festigkeit von weniger als $\sigma_B = 120$ kg/mm² sind auch diese Werkstoffe noch brauchbar, sofern es sich nicht um besonders ausgesprochene, schlagartige Beanspruchung bei möglichen tiefen Temperaturen handelt. Ganz allgemein müßte als Mindestanlaßtemperatur für die untersuchten Stähle 450° C festgelegt werden, da bei geringerer Anlaßtemperatur die Kerbzähigkeit nicht ausreichend ist. Bei betriebsmäßiger Bearbeitung dieser Werkstoffe dürfte dann die Festigkeit sowieso noch geringer liegen als sie auf Grund vorliegender Versuchsergebnisse in den Kurven dargestellt ist. Der Kerbzähigkeitsverlauf für den Stahl 1265 (siehe Bild 3) bei — 60° C zeigt ab 600° C Anlaßtemperatur nochmals einen Abfall, welcher dadurch zu erklären sein dürfte, daß der Stahl 1265 bereits bei 700° C e'ne Umwandlung erfährt. Der Konstrukteur kann auf Grund der hier wiedergegebenen Ergebnisse je nach Bauteil und Auftreten von schlagartiger Beanspruchung beispielsweise in einem Fahrgestell oder Sporn einen Werkstoff sowie einen bestimmten Werkstoffzustand auswählen. In allen Fällen wurden die Kerbschlagbiegeversuche mit Proben längs zur Walzrichtung oder Faser durchgeführt. Selbstverständlich liegen die entsprechenden Kerbzähigkeitswerte quer zur Faser wesentlich tiefer.

Die Ergebnisse zu Aufgabenstellung 2 zeigen, daß die Höhe der Härtetemperatur nur einen geringen Einfluß auf die Kerbzähigkeit hat. Lediglich beim Werkstoff 1604 muß

Zahlentafel 4. Neigung zur Anlaßsprödigkeit.

Anlaßzeit	1265		1310		1604	
	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.	σ_B	Kerbz.
Std.	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²	kg/mm²	mkg/cm²
1	108	5,5	120	4,4	120	13,2
	107	4,9	118	3,6	120	12,5
	108	6,0	120	3,7	119	13,2
	104	5,2	119	4,8	120	12,6
	—	—	120	5,2	116	12,6
2	103	4,8	120	4,2	119	12,4
	103	5,7	118	3,6	120	13,0
	103	5,7	116	4,6	120	14,0
	103	5,0	120	4,2	118	12,2
	—	—	119	4,0	115	12,5
5	103	1,6	—	—	119	12,2
	103	3,0	—	—	116	12,2
	101	3,3	—	—	116	12,2
	101	2,6	—	—	116	11,8
	—	—	—	—	115	13,3
10	98	0,8	116	1,8	116	10,4
	99	1,0	118	2,6	116	10,6
	98	0,8	116	2,6	115	9,4
	100	0,8	118	2,4	116	10,4
	—	—	116	2,6	116	9,4

σ_B aus H 5/750/30
Behandlung: Härten 1. 1265 von 840—850° C in Wasser,
2. 1310 von 840—850° C in Öl,
3. 1604 von 880—890° C in Fortan.

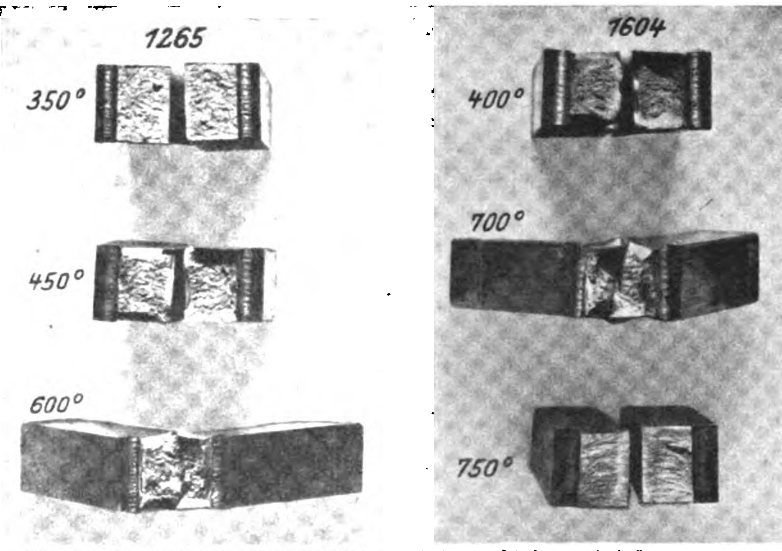


Bild 10. Bruchart von Kerbschlagproben bei verschiedenen Anlaßtemperaturen.

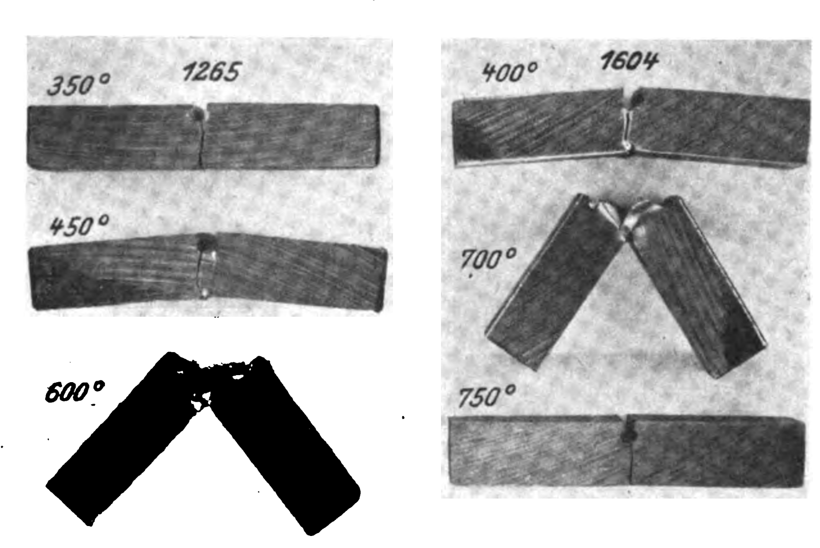


Bild 11. Bruchart von Kerbschlagproben bei verschiedenen Anlaßtemperaturen.

ein gewisser Bereich der Härtetemperatur eingehalten werden, da sonst die Kerbzähigkeit ungünstig beeinflußt wird. Die hiermit in Zusammenhang stehende Unstetigkeit im Anstieg der Kerbzähigkeit wurde in den Ausführungen zur Aufgabenstellung 1 bereits behandelt.

Die Ergebnisse zu Aufgabenstellung 3 zeigen, daß der Stahl 1604 keine Neigung zur Anlaßsprödigkeit hat, daß jedoch die Kerbzähigkeit des Fliegwerkstoffes 1310 bei einer Anlaßdauer von 10 Stunden bereits auf etwa 50% absinkt, und daß die Kerbzähigkeit des Fliegwerkstoffes 1265 sogar auf nur 20% seiner normalen Kerbzähigkeit absinkt. Es ergibt sich also als eindeutige Folgerung, daß nur so lange angelassen werden darf, wie es die Abmessungen des Bauteiles unbedingt erforderlich machen, d. h. daß das ganze Bauteil gut durchgeglüht ist.

Die Bruchart der Kerbschlagproben zeigt in fast allen Fällen eine deutlich sichtbare Verformung. Nur in einigen Fällen bei gewissen ungünstigen Werkstoffzuständen treten Brüche mit kaum sichtbarer Verformung auf, die bereits ziemlich reine Trennungsbrüche genannt werden können (Bild 10 und Bild 11). Die Beurteilung der Ergebnisse konnte auf Grund der Bruchformen noch einheitlich vorgenommen werden, d. h. die Ergebnisse konnten in fortlaufenden Kurven zusammengetragen werden.

IV. Zusammenfassung.

Nach einer Klarlegung der allgemeinen Bedeutung der Kerbschlagbiegeprüfung wurden Versuchsergebnisse von Kerbschlagbiegeversuchen zur Beantwortung von drei Aufgabenstellungen gebracht. Die Versuchsergebnisse zeigten einmal die Kerbzähigkeit von neu eingeführten, flieggenormten Stählen im Vergleich zur Kerbzähigkeit von bekannten, flieggenormten Stählen bei verschiedenen Anlaßtemperaturen. Diese in Kurvenblättern dargestellten Versuchsergebnisse stellen für den Konstrukteur und Festigkeitsprüfer brauchbare Unterlagen dar. Die Versuchsergebnisse zeigten weiterhin, daß für die meisten üblichen Fliegwerkstoffe eine gewisse Streuung in der angewendeten Härtetemperatur auf die Kerbzähigkeit keinen Einfluß bzw. in einem Fall nur einen geringen Einfluß hat. Diese Frage ist wichtig bei der gleichzeitigen Vergütung verschiedenartiger Werkstoffe, welche zusammengeschweißt sind. Schließlich kann auf Grund der Versuchsergebnisse geschlossen werden, daß verschiedene der üblichen flieggenormten Stähle starke Neigung zur Anlaßsprödigkeit haben, so daß allgemein die Forderung auf möglichst kurzzeitiges Anlassen und schnelle Abkühlung nach dem Anlassen gestellt werden muß.

V. Schrifttum.

Siebel, Werkstoff-Handbuch, Bd. II, S. 156 und S. 311.
F. Fettweiß, Die Kerbschlagprobe, Entwicklung und Kritik. Bericht Nr. 143 des Werkstoffausschusses des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute.
A. Krisch, »Festigkeit, Durchhärtung und Zähigkeit der Austauschstähle«, Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1943) Lfg. 10/12 S. 133.



Wärmeausdehnung und Umwandlungstemperaturen von Eisenwerkstoffen*).

Von H. Cornelius, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Mittlere lineare Wärmeausdehnungsbeiwerte, Längenänderungen bei den Umwandlungen, Umwandlungstemperaturen und Temperaturen beginnender Überhitzung für Stähle mit 0,05 bis 1,40 % C, 0,12 bis 3,0 % Si, 0,13 bis 3,66 % Mn, 0 bis 15 % Cr, 0 bis 1,49 % Mo, 0 bis 0,27 % V, 0 bis 0,23 % Ti, 0 bis 0,96 % Th, 0 bis 5,24 % Ni und 0 bis 1,22 % Al sowie für drei niedriglegierte Graugüsse. Mittlere lineare Ausdehnungsbeiwerte für austenitische Stähle mit 0,1 bis 0,50 % C, 1 bis 3,4 % Si, 0,74 bis 18 % Mn, 11,8 bis 17,6 % Cr, 0 bis 2,1 % W, 0 bis 0,3 % Ti und 0,030 bis 0,18 % N_2.

Gliederung.

Bei den in den letzten Jahren an Austauschstählen durchgeführten Untersuchungen wurden zahlreiche Dilatometerkurven — meist zur Feststellung der Umwandlungstemperaturen — aufgenommen. Ein Teil dieser sowie einige ergänzend vorgenommene Aufnahmen wurden nunmehr eingehender ausgewertet. Die Ergebnisse: mittlere lineare Ausdehnungsbeiwerte (α_m), Längenänderungen bei den Umwandlungen — auch beim Wachsen von Gußeisen — sowie Umwandlungstemperaturen sollen im folgenden dargelegt werden, da sich entsprechende, für die Austauschstähle geltende Unterlagen im Schrifttum nur vereinzelt finden, aber von praktischem Wert sind. Außer auf die angeführten Eigenschaften wird im folgenden noch auf die Temperaturen beginnender Überhitzung der Versuchsstähle eingegangen.

I. Versuchsdurchführung.

Die Versuche mit einem Leitz-Dilatometer nach F. Bollenrath[1]) wurden im Hochvakuum (etwa 0,002 bis 0,004 Torr) durchgeführt. Die Temperaturänderungsgeschwindigkeit wurde mit Hilfe eines Programmreglers auf 1,5°/min eingestellt. Bei Temperaturen ab etwa 200 bis 300° ging die Abkühlung langsamer vor sich. Die Vergleichsprobe bestand aus Pyros. Die Probenlänge betrug 50 mm, nur für Platin, das zu Vergleichsmessungen herangezogen wurde, 25 mm, bei einem Probendurchmesser von 3,8 mm. Die in den photographisch aufgenommenen Dilatometerkurven enthaltene Verminderung der Probenausdehnung durch die Längenänderung der Probenhalter aus Quarzglas wurde beim Ermitteln der Wärmeausdehnungsbeiwerte der Versuchswerkstoffe berücksichtigt. Hierbei wurden die folgenden mittleren Wärmeausdehnungsbeiwerte für Quarzglas[2]) (Bezugstemperatur 0°) benutzt:

*) E 21 1—2.

[1]) F. Bollenrath, Z. Metallkde. Bd. 25 (1933), S. 163/65; Bd. 26 (1934), S. 62/65. H. Esser u. H. Eusterbrock, Arch. Eisenhüttenw. Bd. 14 (1940/41), S. 341/55, hierzu Zuschrift von F. Bollenrath, S. 577. H. J. Otto, Dr.-Ing.-Diss. (1941), München (Techn. Hochschule); vgl. H. Borchers und H. J. Otto, Z. Metallkde. Bd. 34 (1942), S. 136/44.

[2]) Berücksichtigt wurden Angaben von: R. B. Sosman, The properties of silica, New York (1927); L. Holborn u. F. Henning, Ann. Physik Bd. 10 (1903), S. 446/48; H. M. Randall, Phys. Rev. Bd. 30 (1910), S. 216/35; K. Scheel, Verh. Dtsche. Phys. Ges. Bd. 5 (1903), S. 119/23, sowie Zeitschr. Phys. Bd. 5 (1921), S. 167/72; W. Souder u. P. Hidnert, Sci. Paper Bur. Standards Bd. 21 (1926), S. 1/23; Glastechnische Tabellen, Berlin 1932; Druckschrift von E. Leitz, Wetzlar, »Dilatometer nach Bollenrath« (1939), S. 25.

Temperatur	$\alpha_m \cdot 10^6$	Temperatur	$\alpha_m \cdot 10^6$
100°	0,46	500°	0,56
200°	0,51	600°	0,56
300°	0,53	700°	0,55
400°	0,55	800°	0,54
		900°	0,52

Die mittleren Ausdehnungsbeiwerte für den Vergleichsstoff Pyros sind für die Bezugstemperatur von 20° nach Messungen von F. Bollenrath[3]) die folgenden:

Temperatur	$\alpha_m \cdot 10^6$	Temperatur	$\alpha_m \cdot 10^6$
100°	12,45	500°	14,75
200°	13,10	600°	15,06
300°	13,80	700°	15,40
400°	14,50	800°	15,8
		850°	15,9

Um den Vergleich der eigenen Messungen an den Versuchswerkstoffen mit den im Schrifttum vorliegenden Angaben für ähnliche Stoffe zu ermöglichen, sind in Bild 1 die gemessenen mittleren Wärmeausdehnungsbeiwerte von Platin[4]) denen gegenübergestellt, die aus einer von J. B. Austin[5]) an Hand interferometrischer Messungen aufgestellten Formel errechnet sowie außerdem von H. Esser

[3]) Für die Überlassung dieser bisher unveröffentlichten Angaben danke ich auch hier bestens.

[4]) Nach Messungen von F. Bollenrath mit dem gleichen Dilatometer und unter den gleichen Bedingungen wie die eigenen Versuche.

[5]) Physics Bd. 3 (1932), S. 24/67; vgl. Chem. Zbl. Bd. 104 (1933) I, S. 743/44.

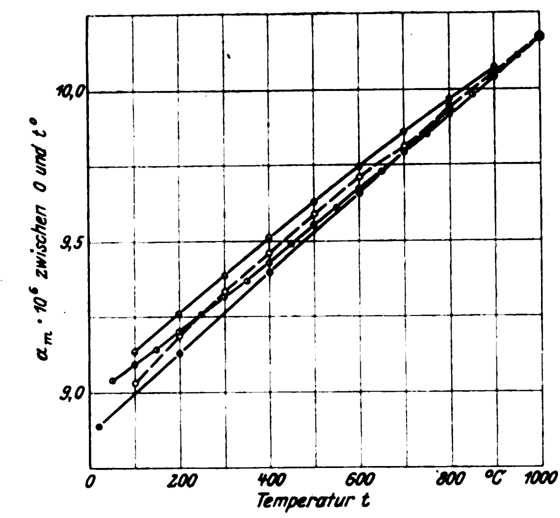


Bild 1. Mittlere lineare Wärmeausdehnungsbeiwerte von Platin.
●——● J. B. Austin, nach mitgeteilter Formel errechnet.
◐——◐ H. Esser u. H. Eusterbrock,
○– – –○ H. Esser u. H. Eusterbrock, umgerechnet mit den eigenen Quarzkorrekturen,
◒——◒ Messungen von F. Bollenrath[4]) zwischen 20 und t°, extrapoliert auf 0 und t°.

Zahlentafel 2. Chemische Zusammensetzung, mittlere lineare Wärmeausdehnungs-Beiwerte, Umwandlungstemperatur-Bereiche und Temperaturen beginnender Überhitzung der Versuchswerkstoffe.

Nr.	Werkstoff Art	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Cr %	Mo %	W %	V %	Ni %	Sonstige %	Mittlere lineare Wärmeausdehnungsbeiwerte[1] ($\alpha_m \cdot 10^6$) zwischen 20° und 200° mm · mm⁻¹ · °C⁻¹	400°	600°	700°	800°	900°	zwisch. 800 u. 900°	Umwandlungstemperaturbereiche $A_{c_{1,3}}$ °C	$Ar_{3,1}$ °C	Temperatur beginnender Überhitzung °C
1	Unlegierte Stähle	0,07	0,17	0,46	0,012	0,014	—	—	—	—	—	—	12,3	13,6	14,15	14,5	—	—	—	764—878	840—860	—
2		0,25	0,34	0,62	0,020	0,026	—	—	—	—	—	—	13,0	14,2	14,8	15,1	—	—	24,15	730—835	777—667	910
3		0,62	0,20	0,54	0,015	0,021	—	—	—	—	—	—	12,8	13,8	14,6 (14,6)	14,85	—	—	23,2	723—762	700—667	880—900
4		0,65	0,23	0,24	0,01	0,01	—	—	—	—	—	—	12,2	13,2	13,9	14,15	—	—	23,85	744—762	722—700	—
5		0,77	0,13	0,13	0,006	0,015	—	—	—	—	—	—	12,6	13,65	14,5	14,7	—	—	—	741—762	732—708	—
6		1,40	0,12	0,18	0,01	0,01	—	—	—	—	—	—	12,0	13,25	13,85	14,6	—	—	—	743—760	712—702	910
7	Mn-(V-) Stähle	0,08	0,34	1,51	0,012	0,013	—	—	—	—	—	—	12,6	13,8	14,65	14,8	—	—	—	755—853	823—605	—
8		0,38	0,33	1,85	0,027	0,025	—	—	—	—	—	—	13,0	14,15	14,9	15,1	—	—	24,9	718—784	655—593	890
9		0,41	0,26	1,69	0,017	0,025	—	—	—	0,15	—	—	13,2	14,3	15,0	15,2	—	—	23,5	762—800	648—592	930
10	Mn-Si- (V-, Th-) Stähle	0,14	0,86	3,66	0,012	0,023	—	—	—	—	—	—	12,8	14,1	13,4	—	—	—	25,6	683—830	469—265[2]	—
11		0,12/0,20	0,3/0,6	2,0/2,4	~0,02	~0,02	—	—	—	—	—	—	13,4	14,6	15,1	15,3	—	—	25,2	706—832	700—580 510—355[2]	890
12		0,33	1,13	1,22	0,020	0,027	—	—	—	—	—	—	13,0	14,2	14,7	14,9	—	—	24,8	728—842	745—644	910
13		0,31	0,71	1,81	n. b.	n. b.	—	—	—	0,26	—	—	12,9	13,9	14,5	14,65	—	—	—	735—827	710—617	930
14		0,30	1,18	1,77	»	»	—	—	—	—	—	0,96 Th	12,1	13,7	14,5	15,0	—	—	—	742—842	722—618	930
15	Niedrig-legierte Cr-(Mo-, V-) Stähle	0,05	0,30	0,60	0,015	0,016	5,01	—	—	—	—	—	11,2	12,3	12,9	13,2	—	—	—	814—845	776—718	—
16		0,26	0,30	0,70	0,011	0,013	1,07	0,22	—	—	—	—	12,5	13,55	14,2 (14,2)	14,4	—	—	24,5	746—832	742—683	900—920
17		0,30	0,25	0,74	0,018	0,010	2,38	—	—	0,27	—	—	12,4	13,55	14,4	14,6	—	—	—	768—830	735—697	940
18		0,27	0,25	0,68	0,018	0,010	2,48	0,21	—	0,19	—	—	12,6	13,6	14,45	14,7	—	—	24,5	773—835	712—635 456—300[2]	950
19		0,24	0,29	0,70	n. b.	n. b.	2,43	0,28	—	0,25	—	—	12,8	13,6	14,2	14,8	—	—	—	792—830	740—705	930
20		0,48	0,28	0,64	0,020	0,014	1,05	—	—	0,18	—	—	12,7	14,0	14,75	14,8	—	—	25,0	746—788	707—685	930
21	Hochlegierte Cr-(Si-)Stähle	0,15/0,25	< 0,8	0,3/0,5	n. b.	n. b.	13/16	—	—	—	—	—	10,3	11,4	11,85	12,1	12,7	—	—	850—894[3]	770—742 685—645	—
22		0,35/0,50	0,5/0,7	0,3/0,5	»	»	13/16	—	—	—	—	—	10,7	11,7	12,25 (12,2)	12,4	12,85	—	—	800—825	770—727	1050
23		1,8/2,2	~0,35	~0,5	»	»	11/13	—	—	—	—	—	11,9	12,75	13,05	13,2	—	—	—	780—805	762—740	> 1060
24		0,4/0,6	~3,0	~0,5	»	»	8/12	—	—	—	—	—	11,9	12,5	13,55	13,75	14,15 (13,7)	14,6	—	> 900	—	1080
25	Niedrig-legierte Cr-Mn-(V-) Stähle	0,12	0,36	1,23	n. b.	n. b.	0,82	—	—	—	—	—	12,95	14,15	14,35	14,9	—	—	24,5	742—843	757—650	910
26		0,19	0,33	1,50	»	»	1,27	—	—	—	—	—	12,8	14,35	15,2	15,2	—	—	27,6	740—812	735—677	910
27		0,28	0,18	1,19	0,019	0,010	0,83	—	—	0,12	—	—	12,95	14,1	14,8	14,6	—	—	24,7	732—813	720—652	910
28	Mo-Stähle	0,08	0,27	0,66	0,009	0,016	—	0,55	—	—	—	—	12,35	13,5	13,7	14,5	—	—	—	748—897	844—655	—
29		0,09	0,28	0,69	0,012	0,018	—	1,49	—	—	—	—	12,5	13,6	14,25	14,5	—	—	—	764—915	868—679	—
30	Ni- und Ni-Cr-Stahl	0,08	0,22	0,60	0,012	0,007	—	—	—	—	5,24	—	11,5	12,6	13,05	—	—	—	24,0	685—776	617—535	—
31		0,09	0,34	0,77	0,014	0,011	2,58	—	—	—	2,54	—	10,4	12,5	12,9 (13,2)	13,1	—	—	—	752—805	450—293[2]	—

[1]) Eingeklammerte Werte für vergleichbare Stähle nach Werkstoffhandbuch Stahl und Eisen, Düsseldorf (1937), S. B 15—6 und S. a 1—1. [2]) Umwandlung in der Zwischenstufe. [3]) Teilumwandlung.

Nr.	Werkstoff Art	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Cr %	Mo %	W %	V %	Ni %	Sonstige %	Mittlere lineare Wärmeausdehnungsbeiwerte[1] ($\alpha_m \cdot 10^6$) zwischen 20° und 200° mm · mm⁻¹ · °C⁻¹	400°	600°	700°	800°	900°	zwisch. 800 u. 900°	Umwandlungstemperatur-bereiche $A_{c_{1,3}}$ °C	$Ar_{3,1}$ °C	Temperatur beginnender Überhitzung °C
32	mehrfach niedriglegierte Stähle	0,31	0,30	0,77	n. b.	n. b.	1,26	0,27	—	—	—	1,22 Al	12,55	13,4	13,95	14,3	—	—	—	725—910	800—725	940
33		0,33	1,17	1,78	»	»	0,91	—	—	—	—	0,23 Ti	12,5	13,55	13,85	14,2	—	—	—	754—822	706—654	> 950
34		0,34	0,52	2,08	»	»	—	—	—	0,24	—	0,64 Al	12,95	13,9	14,55	14,8	—	—	—	743—860	707—617	900—920
35		0,31	0,86	2,02	»	»	—	—	—	—	—	1,22 Al	12,6	13,7	14,05	14,45	—	—	—	754—> 935	770—637	970
36	Austenitische Cr-Ni-W-Stähle	0,50	1,73	0,74	n. b.	n. b.	15,8	—	2,1	—	13,0	n. b.	17,75	18,0	18,4	—	18,8 (19,2)	—	—	—	—	—
37		0,44	1,81	1,13	»	»	17,6	—	1,1	—	9,1	»	16,6	17,8	18,6	—	19,35	20,05	25,2	—	—	—
37a		0,48	1,75	1,20	»	»	17,4	—	1,15	—	9,2	»	16,65	18,0	19,15	—	19,35	—	—	—	—	—
38	Austenitische Cr-Mn-Ni (W-, N_2-) und Cr-Mn-Stähle	0,50	2,3	6,5	n. b.	n. b.	14,8	—	0,4	—	3,2	0,065 N_2	17,0	18,5	19,15	—	20,2	20,3	23,4	—	—	—
39		0,46	2,6	6,3	»	»	14,8	—	1,1	—	4,8	0,18 N_2	16,8	18,3	19,05	—	19,9	20,7	25,5	—	—	—
40		0,43	3,4	6,0	»	»	11,8	—	1,2	—	6,0	0,030 N_2	17,0	18,4	19,05	—	19,6	20,5	26,15	—	—	—
41		0,45	3,2	6,7	»	»	12,8	—	1,2	—	5,1	0,16 N_2	17,0	18,3	19,15	—	19,8	20,7	27,8	—	—	—
42		< 0,14	0,5/1,0	17/19	»	»	10/13	—	—	—	—	0,3 Ti	17,5	19,0	19,65	—	20,9	21,5	26,35	—	—	—
43[4]		3,97	2,86	0,65	0,69	0,035	—	0,25	—	—	—	—	11,8	13,0	20—500° 13,5	—	—	—	—	805—~900	825—760	—
44[5]	Grauguß	3,46	2,21	0,97	0,43	0,032	0,38	—	—	—	0,28	—	11,85	13,0	20—500° 13,4	—	—	—	—	780—850	805—740	—
45[6]		3,59	2,81	0,59	0,51	0,043	0,55	0,93	—	0,09	—	1,56 Cu	12,2	13,5	20—500° 13,9	—	—	—	—	768—855	770—746	—

[4]) Kolbenring-Einzelguß, 3,58% Graphit. [5]) Kolbenring-Topfguß, 2,88% Graphit. [6]) Feuerring-Guß, 2,82% Graphit.

Zahlentafel 1. Mittlere lineare Wärmeausdehnungsbeiwerte und Umwandlungstemperatur-Bereiche von Stahl mit 0,77% C bei verschiedenen Temperaturänderungsgeschwindigkeiten.

Temperatur-änderungs-geschwindigkeit	$\alpha_m \cdot 10^6$ zwischen 20° und 200° mm · mm⁻¹ · °C⁻¹	400°	600°	700°	Umwandlungstemperatur-Bereiche $A_{c_{1-3}}$ °C	$Ar_{3,1}$ °C
0,2°/min*)	12,63	13,70	14,50	14,83	740—758	732—710
0,5°/min*)	12,62	13,60	14,50	14,75	728—752	730—708
1,5°/min	12,58	13,65	14,50	14,73	741—762	732—708

*) Zwischen 650 und 850°, sonst 1,5°/min.

und H. Eusterbrock[1]) dilatometrisch — unter Verwendung einer 3,90 mm langen Probe — gewonnen wurden. Die Übereinstimmung ist besonders bei 800 und 900° gut, bei den tieferen Temperaturen nicht voll befriedigend. Die Ursache für die Abweichungen liegt z. T. in der Berichtigung der gemessenen Werte mit verschiedenen Ausdehnungsbeiwerten für Quarzglas. Während z. B. Esser und Eusterbrock α_m für Quarzglas im Bereich von 0 bis 1000° unverändert zu $0{,}52 \cdot 10^{-6}$ angenommen haben, liegen die bei den eigenen Auswertungen benutzten Werte zwischen 0,46 und $0{,}56 \cdot 10^{-6}$ (s. o.) mit dem unzweifelhaft bestehenden Höchstwert bei 500 bis 600°. Rechnet man die Angaben von Esser und Eusterbrock mit diesen Ausdehnungsbeiwerten für Quarzglas um, so unterscheiden sich die erhaltenen Ausdehnungsbeiwerte des Platins bei t = 300 bis 900° nur um —0,01 bis $-0{,}05 \cdot 10^{-6}$ von den eigenen Meßergebnissen. Bei t = 100° werden die Abweichungen durch die Umrechnung größer. Es ist noch zu erwähnen, daß die Wahl der Ausdehnungsbeiwerte für Quarzglas auch die Genauigkeit interferometrischer Messungen (Austin) beeinflußt.

Um die Wiederholbarkeit der Messungen der Wärmeausdehnungsbeiwerte bei den eigenen Versuchen zu prüfen, wurden drei Dilatometeraufnahmen (1,5 °/min) mit dem gleichen Probestab aus einem unlegierten Stahl mit 0,77% C durchgeführt (Versuche von F. Bollenrath[4])). Hierbei wurde gleichzeitig der Einfluß der Temperaturänderungsgeschwindigkeit auf die Höhe der Umwandlungstemperaturen dadurch erfaßt, daß zwischen 650 und 850° mit Temperaturänderungsgeschwindigkeiten von 0,2, 0,5 und 1,5°/min gearbeitet wurde. Die in Zahlentafel 1 dargelegten Versuchsergebnisse zeigen die gute Wiederholbarkeit der Ausdehnungsmessungen und eine vernachlässigbar kleine Abhängigkeit der Umwandlungstemperaturen von der Temperaturänderungsgeschwindigkeit zwischen 0,2 und 1,5 °/min. Die letzte Geschwindigkeit braucht also nicht unterschritten zu werden. Merkwürdig ist in Zahlentafel 1 die niedere Temperatur der $A_{c_{1-3}}$-Umwandlung bei 0,5 °/min im Vergleich zu den untereinander fast gleichen Temperaturen bei 0,2 und 1,5 °/min.

II. Versuchsergebnisse.

Vor dem Dilatometerversuch wurden alle Versuchswerkstoffe durch eine geeignete Warmbehandlung in einen Zustand gebracht, der dem Gleichgewicht in der Nähe der Raumtemperatur möglichst angenähert ist. Die Versuche erstreckten sich auf sechs unlegierte Stähle mit 0,07 bis 1,4% C, drei niedriglegierte Mangan-Stähle, fünf niedriglegierte Mangan-Silizium-Stähle, sechs niedriglegierte Chromstähle, vier hochlegierte Chromstähle, drei niedriglegierte Chrom-Mangan-Stähle, zwei Molybdänstähle, je einen niedriggekohlten Nickel- und Chrom-Nickelstahl und vier mehrfach niedriglegierte Stähle. Neben den angeführten Hauptlegierungselementen enthalten die Stähle zum Teil noch Zusätze von Molybdän, Vanadin, Titan, Thorium und Aluminium. An austenitischen Stählen wurden drei Chrom-Nickel-Wolfram-Ventilkegelstähle sowie vier Chrom-Mangan-Nickel-Stähle, alle mit Kohlenstoffgehalten von rd. 0,5% und Zusätzen von Wolfram und z. T. Stickstoff sowie ein

Mangan-Chrom-Stahl mit kleinem Kohlenstoffgehalt untersucht. Schließlich erstreckten sich die Versuche noch auf drei Graugüsse mit Legierungszusätzen von Chrom, Molybdän (Vanadin), Nickel und Kupfer, einzeln oder zusammen.

Zahlentafel 2 enthält für die genannten Werkstoffe Angaben über die chemische Zusammensetzung, die mittleren linearen Wärmeausdehnungsbeiwerte zwischen 20 und 200 bis 900°, in einigen Fällen auch zwischen 800 und 900° (γ-Mischkristall), die Umwandlungstemperaturbereiche $A_{c_{1-3}}$ und $A_{r_{3-1}}$ sowie für eine Reihe von Stählen die Temperaturen beginnender Überhitzung. Die linearen Ausdehnungsbeiwerte zwischen 20 und t^0 wurden aus den bei der Erhitzung erhaltenen Dilatometerkurven ermittelt, während die Angaben zwischen 800 und 900° sich auf die Abkühlungskurve beziehen. In Zahlentafel 2 sind in Klammern Ausdehnungsbeiwerte nach dem Werkstoffhandbuch Stahl und Eisen[6]) eingetragen, soweit hier Angaben für vergleichbare Werkstoffe vorlagen. Diese Werte stimmen mit den eigenen für die Stähle 3, 16 und 22 gut überein, während bei den Stählen 24, 31 und 36 größere Abweichungen vorliegen. Ähnliche Unterschiede haben auch die eigenen Messungen für die Stähle 3 und 4 ergeben, ohne daß die kleinen Unterschiede der Zusammensetzung als ausreichende Erklärung anzusehen wären. Auch die fast gleich zusammengesetzten Stähle 37 und 37a unterscheiden sich zum Teil in ihren Ausdehnungsbeiwerten um Beträge, die über die Fehlergrenzen der Bestimmung hinausgehen. Möglicherweise liegen die Ursachen hierfür in der Gefügeausbildung, also der Vorbehandlung. Im einzelnen soll hier auf die in Zahlentafel 2 angegebenen Wärmeausdehnungsbeiwerte nicht weiter eingegangen werden. Einen Überblick vermittelt Zahlentafel 3, in der die Versuchswerkstoffe zu Gruppen mit von oben nach unten zunehmenden Beiwerten zwischen 20 und 200° zusammengefaßt sind. An die Chrom-, Nickel- und Chrom-Nickel-Stähle mit den kleinsten Beiwerten schließt sich der Grauguß an. Auf diesen folgen die niedriggekohlten, mit Mangan oder Molybdän legierten Stähle, dann die unlegierten Stähle mit Kohlenstoffgehalten bis 1,4% und die noch nicht genannten, Mangan, Silizium, Chrom, Molybdän, Vanadin, Titan, Thorium und Aluminium einzeln oder zu mehreren enthaltenden, niedriglegierten Stähle mit 0,08 bis 0,48% C. Mit den höchsten Beiwerten schließen sich die austenitischen Stähle an. Diese haben nach Zahlentafel 2 zwischen 800 und 900° im Mittel die gleiche Wärmedehnung ($\alpha_m = 23{,}4$ bis $27{,}8 \cdot 10^{-6}$) wie die in diesem Temperaturbereich im austenitischen Zustand befindlichen, unlegierten und niedriglegierten Stähle ($\alpha_m = 23{,}2$ bis $27{,}6 \cdot 10^{-6}$).

Die in Zahlentafel 2 angegebenen Umwandlungstemperaturen und Temperaturen beginnender Überhitzung schließen den Härtetemperaturbereich der einzelnen Stähle ein. Im allgemeinen wählt man bekanntlich die Härtetemperatur je nach der Stahlart 30 bis 60° über der beendeten $A_{c_{1-3}}$-Umwandlung. Bei gleicher Stahlart können bei Ölabschreckung höhere Härtetemperaturen als bei Wasserabschreckung zweckmäßig sein. In neuerer Zeit nimmt man die Abschreckung auch von Temperaturen kurz oberhalb $A_{r_{3-1}}$ vor, nachdem entweder eine Erhitzung auf 30 bis 60° über $A_{c_{1-3}}$ vorgenommen wurde, oder der Stahl zunächst noch eine bei der Warmformgebung angenommene, über $A_{c_{1-3}}$ liegende Temperatur hatte. In besonderen Fällen liegt auch die richtige Härtetemperatur weit über der beendeten $A_{c_{1-3}}$-Umwandlung, so z. B. für den hochlegierten Chromstahl 23 (etwa 900 bis 950°). Übliche Härtetemperaturen ($A_{c_{1-3}} + 50°$) sind hier mit der Bildung von Troostit neben Martensit verknüpft. Bei höherer Temperatur werden die Chromkarbide in stärkerem Maße aufgelöst und die Abschreckhärte steigt aus diesem Grunde und wegen der unterbleibenden Troostitbildung. Zu hohe Härtetemperaturen führen infolge zu weitgehender Auflösung der Karbide zu Überhitzungserscheinungen und vermehrter Restaustenitbildung bei demgemäß gesenkter Abschreckhärte. Die Temperaturen beginnender Überhitzung in Zahlentafel 2 gelten für Haltezeiten von 30 min. Längere Haltezeiten können schon bei tieferer Temperatur zur Überhitzung führen.

Im Zusammenhang mit der Wärmeausdehnung soll auch auf die infolge der Umwandlungen $A_{c_{1-3}}$ und $A_{r_{3-1}}$ auftretenden Längenänderungen eingegangen werden, mit denen sich J. B. Austin und R. H. H. Pierce[7]) sowie in neuerer Zeit H. Esser und H. Eusterbrock[1]) schon befaßt haben. Die Beobachtungen der Letzteren beziehen sich auf unlegierte, aus Eisenkarbonyl hergestellte Stähle, während den folgenden Ausführungen die technischen, unlegierten und legierten Werkstoffe nach Zahlentafel 2 zugrunde liegen. Für die Ermittlung der Längenänderungen bei den Umwandlungen liegen zwei verschiedene Verfahren nahe. Bestimmt man die Längenänderung durch Vergleich der Probenlänge zu Beginn und nach Ablauf der Umwandlung, vergleicht man also die Probenlänge bei verschiedenen Temperaturen, so sind die erhaltenen Längenänderungen nach Bild 2 (E_2 = Verkürzung bei der Erhitzung, A_2 = Ver-

[6]) Werkstoffhandbuch Stahl u. Eisen, Düsseldorf 1937, S. B 15—1 bis 6 und Q 1—1.

[7]) Physics Bd. 4 (1933), S. 409/10; vgl. Physik. Berichte Bd. 15 (1934), S. 390.

Zahlentafel 3. Überblick über die Ausdehnungsbeiwerte der Versuchswerkstoffe.

Werkstoff-Gruppe	Gehaltsgrenzen	$\alpha_m \cdot 10^6$ mm · mm⁻¹ · °C⁻¹ 20—200°	20—600°	20—800°
Chromstähle	0,05 bis etwa 2,0% C, 0,25 bis etwa 3,0% Si, etwa 0,5% Mn, 5 bis 16% Cr	10,3 bis 11,9	11,85 bis 13,55	—
Nickel- und Nickel-Chrom-Stähle	0,08 bis 0,09% C, 0,22 bis 0,34% Si, 0,60 bis 0,77% Mn, 5,2% Ni oder 2,6% Cr + 2,5% Ni	10,4 bis 11,5	12,9 bis 13,05	—
Grauguß		11,8 bis 12,2	20—500°: 13,45 bis 13,95	
Niedriggekohlter Stahl, mit Molybdän oder Mangan legiert	0,07 bis 0,09% C, 0,17 bis 0,34% Si, 0,46 bis 1,51% Mn, 0 bis 1,49% Mo	12,35 bis 12,6	13,65 bis 14,65	—
Unlegierte Stähle, Mn-, Mn-Si-, Cr-, Cr-Mn-, Mn-Si-Cr-Stähle auch mit Zusätzen von Mo, V, Ti, Th und Al	0,07 bis 1,4% C (unlegiert), 0,08 bis 0,48% C (legiert), 0,1 bis 1,2% Si, 0,13 bis 3,66% Mn, 0 bis 2,5% Cr, 0 bis 0,28% Mo, 0 bis 0,23% Ti, 0 bis 0,96% Th, 0 bis 1,22% Al	12,0 bis 13,4	13,45 bis 15,2	—
Austenitische Ventilkegelstähle	0,43 bis 0,50% C, 1,7 bis 3,4% Si, 0,7 bis 6,7% Mn, 11,8 bis 17,6% Cr, 3,2 bis 13,0% Ni, 0,4 bis 2,1% W, 0,02 bis 0,18% N_2	16,6 bis 17,75	—	20—800°: 19,2 bis 20,2
Austenitischer Mangan-Chrom-Stahl	< 0,14% C, 0,5/2,0% Si, 17/19% Mn, 10/13% Cr, etwa 0,3% Ti	17,5	—	20—800°: 20,9

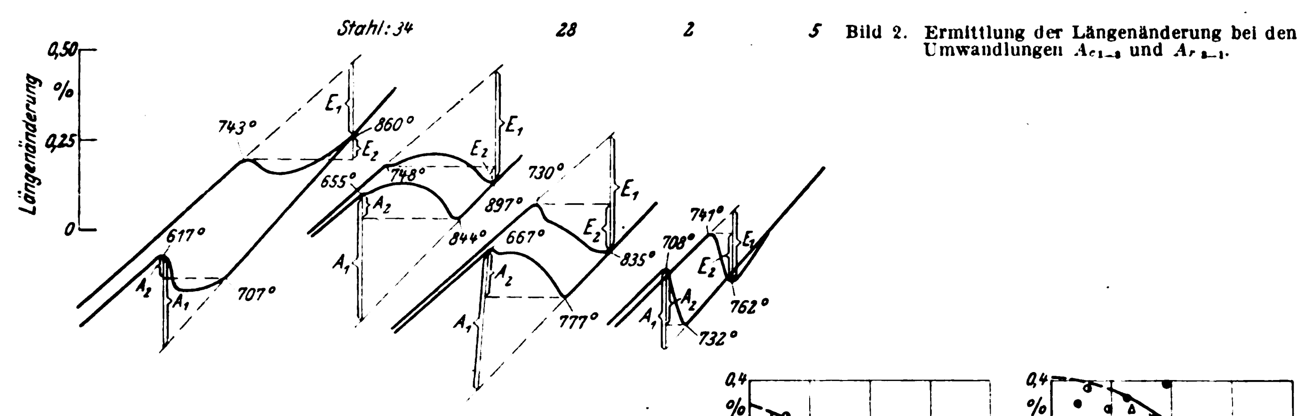


Bild 2. Ermittlung der Längenänderung bei den Umwandlungen A_{c1-3} und A_{r3-1}.

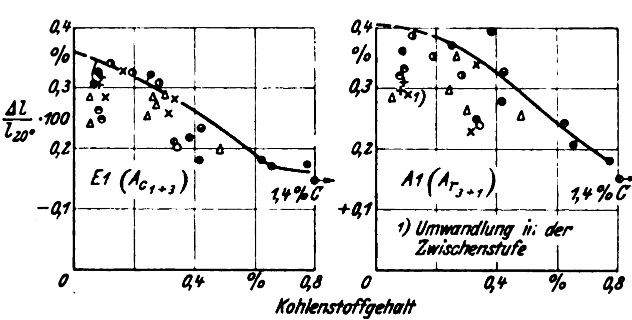


Bild 3. Auf die Länge bei 20° bezogene Längenänderung durch die Umwandlungen in Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt der Versuchsstähle.

◌——◉ unlegierte Stähle.
● Mn-(V)-Stähle, ◐ Mn-Si-Cr-Ti-Stahl, + Mo-Stähle,
△ Cr-(Mo-, V-)Stähle, × Mn-Si-(V-)-Stähle, ◒ Ni-Cr-Stähle,
◑ Cr-Mn-Stähle, ◒ Cr-Stahl, hochlegiert, ○ Mn-Si-Al-V-Stahl.

längerung bei der Abkühlung) in hohem Maße von der Größe des Umwandlungsintervalls abhängig. Mit dessen Zunahme nehmen E_2 und A_2 ab infolge der gegenüber dem α-Mischkristall größeren Wärmedehnung des bei teilweise abgelaufener Umwandlung schon entstandenen (Erhitzung) bzw. wieder umgewandelten (Abkühlung) γ-Mischkristalls. Diese Wirkung kann gegenüber den Längenänderungen durch die Umwandlung an sich so stark vorherrschen, daß bei der Erhitzung eine negative Verkürzung, also eine Längenzunahme gemessen wird (Stahl 34 in Bild 2). Auf das Auswertungsverfahren durch Vergleich der Probenlänge bei zwei verschiedenen Temperaturen wurde daher verzichtet. Nach dem zweiten Auswerteverfahren ergeben sich die Längenänderungen bei den Umwandlungen (Bild 2: E_1 = Verkürzung durch die Umwandlung A_{c1-3}, A_1 = Längenzunahme durch die Umwandlung A_{r3-1}) dadurch, daß man die Umwandlung auf eine Temperatur — es wurde die der beendeten Umwandlung gewählt — bezieht. Diese Art der Auswertung liegt den in Bild 3 für die Versuchsstähle in Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt aufgetragenen Ergebnissen zugrunde. Für alle Stähle wird die Verkürzung bei der Umwandlung A_{c1-3} (E_1) etwas kleiner als die Verlängerung bei A_{r3-1} (A_1) gefunden. Dies beruht auf der verschiedenen Neigung der Dilatometerkurven unterhalb und oberhalb der Umwandlungen infolge der abweichenden Wärmedehnung des α- und γ-Mischkristalls. Jedoch stört dieser Umstand die gewählte Art der Auswertung mit einer Bezugstemperatur für die Umwandlung bei weitem nicht in dem Maße wie die Auswertung mit zwei Bezugstemperaturen. Die Längenänderung durch die Umwandlung der Kohlenstoffstähle nimmt nach Bild 3 mit deren wachsendem Kohlenstoffgehalt ab, bis ein Kohlenstoffgehalt in der Nähe des eutektoidischen erreicht wird und ändert sich dann nur noch wenig. Die legierten Stähle haben bei gleichem Kohlenstoffgehalt vorwiegend kleinere Längenänderungen bei der Umwandlung als die unlegierten Stähle. Legierungszusätze wirken also ähnlich wie Kohlenstoff unterhalb der eutektoidischen Konzentration. Alle in Bild 3 ausgewerteten legierten Stähle sind untereutektoidisch. Die durch die Legierungszusätze hervorgerufene Verkleinerung der Längenänderungen bei den Umwandlungen läßt sich mit der Verschiebung der eutektoidischen Kohlenstoffkonzentration durch die Legierungszusätze zu kleineren Kohlenstoffgehalten in Zusammenhang bringen. In Einklang hiermit steht die Beobachtung, daß der Umwandlungsablauf, wie er sich auf Dilatometerkurven darstellt, für legierte Stähle (z. B. 0,3% C, 3,0% Cr) und unlegierte Stähle mit höherem Kohlenstoffgehalt (z. B. 0,6% C) weitgehend übereinstimmt. — Die Längenänderungen in Bild 3 betragen zwischen 0,14 und rd. 0,4%. Längenänderungen dieser Größe werden — bei Annahme eines mittleren linearen Ausdehnungsbeiwertes von $12 \cdot 10^{-6}$ — beispielsweise durch Erhitzen von 0 auf 115 bzw. 330° erhalten. — Unterschiede der Längenänderungen bei Erhitzung und Abkühlung hängen mit bleibenden Querschnittsänderungen der Probestäbe beim Durchlaufen der Umwandlungen zusammen.

Angaben über die Längenänderungen des hochgekohlten Chromstahles 23 und der Graugüsse 43 bis 45 bei den Umwandlungen sowie über das Wachsen der Graugüsse unterhalb A_{c1} und beim Durchlaufen der Umwandlungen enthält Zahlentafel 4. Hiernach erfährt der hochgekohlte Chromstahl 23 bei den Umwandlungen größere Längenänderungen als z. B. ein übereutektoidischer, unlegierter Stahl. Wachsen tritt naturgemäß nicht ein. — Bei der auch für die Graugüsse eingehaltenen Temperaturänderungsgeschwindigkeit von 1,5 °/min war der Beginn des Wachsens für den hochgekohlten Grauguß 43 bei 535° festzustellen. Schon vor dem Erreichen des dem Ausgangszustand entsprechenden Umwandlungsbeginns war das Wachsen beendet (720°), die 0,39% C entsprechende Zementitmenge also vollständig in Eisen und Graphit zerfallen[8]), was durch die Rechnung (Zahlentafel 4) bestätigt wird. Demgemäß (Schwerlöslichkeit des Graphits) laufen die Umwandlungen erst bei hoher

[8]) Da die Versuche im Vakuum durchgeführt wurden, ist das Wachsen nur auf Zementitzerfall zurückzuführen.

Zahlentafel 4. Längenänderung bei der Umwandlung von hochgekohltem Chromstahl und Grauguß.

Werkstoff Nr.	Kohlenstoff als		Längenänderung bei der Umwandlung		Wachsen (Temperaturänderungs-Geschwindigkeit 1,5°/min)		
	Graphit	Karbid	E_1	A_1	Beginn	unter A_{c1}	gesamt
	%	%	%	%	°C	%	%
23 (12% Cr-Stahl)	—	rd. 2,0	−0,205	+0,228	—	0	0
43 (Grauguß mit Mo)	3.58	0,39	−0,397	+0,393	535	0,231	0,232[1])
44 (Grauguß mit etwas Cr und Ni)	2,88	0,58	−0,237	+0,353	590	0,119	0,260[2])
45 (Grauguß mit Mo, Cr, Cu u. V)	2,82	0,77	−0,073	+0,231	610	0,148	0,345[2])

[1]) Aus dem als Karbid gebundenen Kohlenstoffgehalt von 0.39% ergibt sich rechnerisch bei vollständigem Karbidzerfall eine Längenzunahme von 0,234%. Der Karbidzerfall ist bei 720° beendet.
[2]) Karbidzerfall unter A_{c1} und im Umwandlungsgebiet.

Temperatur ab und sind die Längenänderungen bei den Umwandlungen etwa so groß wie für kohlenstoffarmen Stahl (vgl. Bild 3). Bild 4 gibt die Dilatometerkurve von Gußeisen 43 wieder, dessen Gefüge nach dem Dilatometerversuch zementitfrei war. — Das Wachsen des Graugusses 44 begann bei 590° und erreichte unterhalb des Umwandlungsbeginns nur einen rund halb so großen Betrag wie bei dem Grauguß 43. Unmittelbar vor dem Eintritt der Umwandlung beim Erhitzen lag der Kohlenstoff also teilweise noch als Zementit gebunden vor. In Übereinstimmung hiermit liegen die Umwandlungstemperaturen beim Erhitzen niedriger als bei Grauguß 43 und erreicht die Verkürzung durch die Umwandlung beim Erhitzen einen Betrag, der etwa einem Stahl mit 0,4% C entspricht. Die Verlängerung durch die Umwandlung während der Abkühlung ist bedeutend größer, was darauf zurückzuführen ist, daß diese Umwandlung von weiterem Zementitzerfall begleitet war. Im Gefüge war nach dem Dilatometerversuch noch etwas Perlit vorhanden, entsprechend einem rechnerisch aus der Längenzunahme beim Wachsen ermittelten Kohlenstoffgehalt von 0,16%. — Der höher als die Graugüsse 43 und 44 legierte Guß 45 erfuhr eine Verlängerung durch Zementitzerfall erst ab 610°. Infolge der Zerfallsbeständigkeit des Zementits kann vor der Beendigung dieses Vorganges die Umwandlung einsetzen, die demgemäß ähnlich wie für den Guß 44 bei niedrigerer Temperatur als für den Guß 43 gefunden wird. Die Verkürzung durch die Umwandlung während der Erhitzung wird für den Guß 45 deswegen sehr klein gefunden, weil während der Umwandlung eine Verlängerung durch das Fortschreiten des Wachsens eintritt. Die Verlängerung durch die Umwandlung beim Abkühlen ist etwa so groß wie die eines Stahles mit rd. 0,2 bis 0,3% C. Einem derartigen Kohlenstoffgehalt entspricht rechnerisch auch, unter Berücksichtigung des Legierungsgehaltes, die Perlitmenge im Gefüge des Gusses 45 nach dem Dilatometerversuch.

An den Graugüssen 43 bis 45 ist gezeigt worden, daß die Längenänderungen durch die Umwandlungen von Grauguß erwartungsgemäß in Zusammenhang mit dem Wachsen beurteilt werden müssen. Die bei den eigenen Versuchen ausschließlich durch Zementitzerfall bedingte Längenzunahme durch Wachsen kann unterhalb der Umwandlungstemperaturen schon beendet sein und so zu großen Längenänderungen bei den Umwandlungen, entsprechend denen von kohlenstoffarmem Stahl, führen (Guß 43). Tritt die Umwandlung ein bevor der Zementitzerfall beendet ist, so kann dessen weiterer Ablauf im Umwandlungsbereich die Verkürzung durch die Umwandlung beim Erhitzen teilweise ausgleichen (Guß 45) oder die Verlängerung durch die Umwandlung beim Abkühlen (scheinbar) vergrößern (Guß 44).

Die gesamte (d. h. nach dem Dilatometerversuch vorhandene) Längenzunahme durch Zementitzerfall der Graugüsse 43 bis 45 steigt mit ihrem Gehalt an Zementit im Ausgangszustand an. Die Längenzunahme ist jedoch nicht der ursprünglichen Zementitmenge proportional, da die Beständigkeit des Zementits in den einzelnen Güssen wegen ihrer verschiedenen chemischen Zusammensetzung nicht gleich ist.

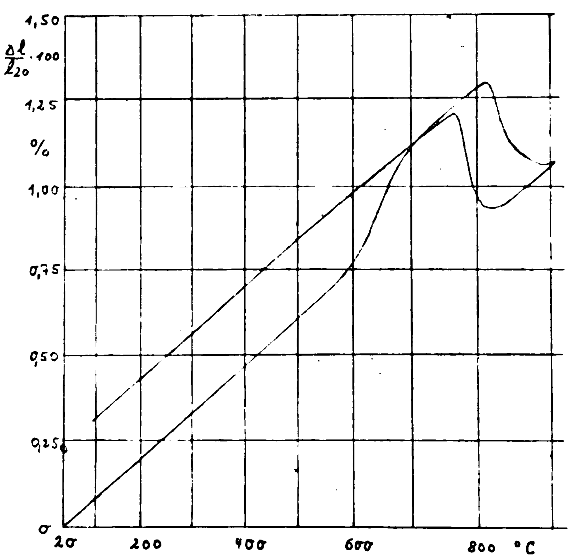


Bild 4. Original-Dilatometeraufnahme von Grauguß 43. V = 0,7.

III. Zusammenfassung.

Für eine größere Zahl unlegierter und legierter Stähle, unter den letzten hauptsächlich solche, die in neuerer Zeit Bedeutung erlangt haben, werden Angaben über die mittleren linearen Wärmeausdehnungsbeiwerte, die Längenänderungen bei den Umwandlungen, die Umwandlungstemperaturen und die Temperaturen beginnender Überhitzung gemacht. Die Versuchsstähle enthielten 0,05 bis 1,4% C, 0,12 bis 3% Si, 0,13 bis 3,66% Mn, 0 bis 15% Cr, 0 bis 1,5% Mo, 0 bis 0,27% V, 0 bis 0,23% Ti, 0 bis 0,96% Th, 0 bis 5,24% Ni und 0 bis 1,22% Al. Entsprechende Versuchsergebnisse wie für die genannten Stähle, mit Ausnahme der Überhitzungstemperaturen, werden unter Berücksichtigung des Wachsens durch Zementitzerfall auch für Grauguß mit 3,46 bis 3,97% C, 2,21 bis 2,86% Si, 0,59 bis 0,97% Mn, 0,43 bis 0,69% P, 0 bis 0,55% Cr, 0 bis 0,93% Mo, 0 bis 0,28% Ni und 0 bis 1,56% betragendem Kupfergehalt mitgeteilt. Für austenitische Stähle mit 0,1 bis 0,50% C, 1 bis 3,4% Si, 0,74 bis 18% Mn, 11,8 bis 17,6% Cr, 0 bis 2,1% W, 0 bis 0,3% Ti und 0,030 bis 0,18% N_2 werden die mittleren linearen Ausdehnungsbeiwerte angegeben.

Das Abwindfeld hinter Tragflügeln mit Klappenausschlag*).

Von Werner Richter, Braunschweig**).

Bericht des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Braunschweig.

Für drei Flügel (ein Rechteckflügel und zwei Trapezflügel) ohne und mit Landeklappenausschlag wird die Berechnung des Abwindfeldes in einer Ebene senkrecht zur Flugrichtung am Ort des Leitwerkes ausgeführt bei verschiedenen Anstellwinkeln des Flügels und Ausschlägen der Landeklappe. Die Rechnungen geben einen Beitrag zur Beurteilung von Momentenausgleich und Stabilität um die Querachse.

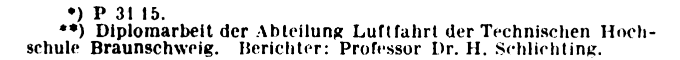
Gliederung.

I. Aufgabenstellung.

Für die Beurteilung der Längsstabilität eines Flugzeuges ist die genaue Kenntnis des Abwindes am Ort des Höhenleitwerkes von großer Bedeutung. Die bisher für die Berechnung des Abwindes ausgebildeten Verfahren [1, 2] beschränken sich im wesentlichen darauf, die Größe des Abwindes in der Wirbelfläche zu ermitteln. Senkrecht zur Wirbelfläche ändert sich der Abwind jedoch sehr stark, und zwar hat er nach der Theorie in der Wirbelfläche ein scharfes Maximum mit einer Spitze, welches durch Messungen gut betätigt wird. Das Multhoppsche Rechenverfahren [1] gestattet zwar auch noch die Ermittlung der ersten Ableitung des Abwindes nach dem senkrechten Abstand von der Wirbelfläche. Für die in der Praxis zuweilen vorkommenden Höhenlagen des Leitwerkes reicht diese Abschätzung jedoch nicht immer aus. Für Flügel mit unstetiger Tiefen- und Anstellwinkelverteilung (z. B. Landeklappenausschlag) ist die Abwindverteilung in der Wirbelfläche selbst stark singulär und gibt kein klares Bild von der Abwindverteilung in der Umgebung der Wirbelfläche. Andere bisher bekannt gewordene systematische Abwindrechnungen und -messungen [4, 7] beschränken sich auf die Ermittlung des Abwindfeldes in der Flugzeugsymmetrieebene. Die Änderung des Abwindfeldes in der Querrichtung ist jedoch bei stark zugespitzten Flügeln recht beträchtlich.

Es besteht deshalb der Wunsch, für einige praktisch wichtige Flügelformen eine vollständige Berechnung des Abwindfeldes für die Ebene senkrecht zur Flugrichtung am Ort des Leitwerkes auszuführen. Besondere Bedeutung haben hierbei auch die Fälle mit Landeklappenausschlag wegen der großen Abwindwinkel im Bereich des Höhenleitwerkes.

Im folgenden werden die Ergebnisse einiger solcher Rechnungen mitgeteilt. Diese wurden ausgeführt an einem Rechteckflügel und zwei Trapezflügeln mit verschiedener


*) P 31 15.
**) Diplomarbeit der Abteilung Luftfahrt der Technischen Hochschule Braunschweig. Berichter: Professor Dr. H. Schlichting.

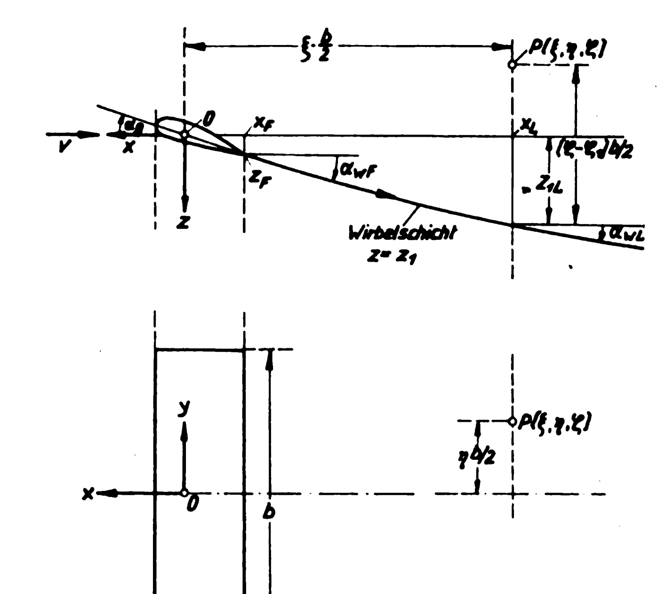


Bild 1. Das für die Rechnung zugrunde gelegte Koordinatensystem.

Zuspitzung. Sämtliche drei Flügel wurden auch mit Landeklappenausschlag gerechnet.

II. Bezeichnungen.

Für die Rechnungen wird das in Bild 1 dargestellte strömungsfeste rechtwinklige Koordinatensystem x, y, z zugrunde gelegt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt auf der tragenden Linie ($= l/4$-Linie) des Flügels. Die Bezeichnungen sind nach dem Normblatt DIN L 100 »Bezeichnungen in der Flugmechanik« gewählt. Außerdem sind folgende verwendet worden:

$\xi = \frac{2x}{b}$, $\eta = \frac{2y}{b}$, $\zeta = \frac{2z}{b}$ dimensionslose Koordinaten (s. Bild 1)

x_F, z_F = Koordinaten der Flügelhinterkante

x_L = Lage der Leitwerksebene

z_{1L} = Lage der Wirbelschicht am Ort des Leitwerkes (s. Bild 1)

z_1 = Abstand eines Punktes von der Wirbelschicht in Richtung der z-Achse

$\zeta_1 = \frac{2z_1}{b}$ = dimensionsloser Abstand eines Punktes von der Wirbelschicht

$w(x, y, z)$ = induzierte Abwärtsgeschwindigkeit; $w > o$ in Richtung der positiven z-Achse

$\alpha_g(y)$ = geometrischer Anstellwinkel eines Flügelschnittes, gemessen von der Nullauftriebsrichtung aus

$\alpha_w(x, y, z)$ = Abwindwinkel; $\alpha_w = w/v$

b_K = Spannweite der Landeklappe
η_K = Ausschlagwinkel der Landeklappe
$\Gamma(y)$ = Zirkulation eines Flügelschnittes
$\gamma(y) = \frac{\Gamma(y)}{b \cdot v}$ = dimensionslose Zirkulation.

III. Theoretische Grundlagen.

Die Voraussetzungen für die Rechnung sind die bei den bisherigen Abwindrechnungen üblichen, wie sie bei G. Braun und H. Scharn [2] ausführlich formuliert sind. Die Verformung der Wirbelfläche infolge ungleichmäßiger Abwindverteilung längs der Spannweite wird für die Ausrechnung des Abwindes vernachlässigt. Sie ist für die Fälle mit Landeklappenausschlag ziemlich groß, doch ist auch hier die Bedingung erfüllt, daß die Absenkung innerhalb der Leitwerksspannweite recht gleichmäßig ist. Die Absenkung der Wirbelfläche wird in allen Fällen mit berechnet. Schraubenstrahleinfluß und Rumpfeinfluß werden vernachlässigt.

Für die Berechnung des Abwindfeldes wird das Koordinatensystem nach Bild 1 zugrunde gelegt. Die Zirkulation $\Gamma(y)$ um einen Flügelschnitt wird nach Multhopp dimensionslos gemacht in der Form

$$\gamma(y) = \frac{\Gamma(y)}{b \cdot v} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Die Lage der Wirbelschicht ist gegeben durch $\zeta = \zeta_1(\xi, \eta)$. Für die Abwärtsgeschwindigkeit in einem Punkt ξ, η, ζ, welcher von der Wirbelschicht den Abstand $\zeta - \zeta_1$ hat, liefert das Biot-Savartsche Gesetz für den Beitrag des gebundenen und der freien Wirbel:

$$w(\xi,\eta,\zeta) = \frac{v}{2\pi}\int\limits_{\eta'=-1}^{+1} \frac{d\gamma}{d\eta'}\left\{\frac{-\xi}{\xi^2+(\zeta-\zeta_1)^2}\cdot\frac{\eta'-\eta}{\sqrt{\xi^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta'-\eta)^2}} + \frac{\eta'-\eta}{(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta'-\eta)^2}\left[1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta'-\eta)^2}}\right]\right\}d\eta' \quad \ldots \ldots (2)$$

In dieser Form ist die Gleichung für die Ermittlung des Abwindfeldes nicht gut brauchbar, da von der Auftriebsverteilung über den Flügel die erste Ableitung $d\gamma/d\eta$ eingeht, welche bei allgemeinen Flügelformen nur graphisch ermittelt werden kann. Nach Multhopp [1] läßt sich durch partielle Integration Gl. (2) so umformen, daß nur noch $\gamma(\eta)$ selbst eingeht. Man erhält für den Abwindwinkel $\alpha_w = w/v$:

$$\alpha_w(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\eta'=-1}^{+1}\gamma(\eta')\frac{(\zeta-\zeta_1)^2-(\eta'-\eta)^2}{[(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta'-\eta)^2]^2}\left\{1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta'-\eta)^2}}\right\}d\eta' - \frac{1}{2\pi}\xi(\zeta-\zeta_1)^2\int\limits_{\eta'=-1}^{+1}\frac{\gamma(\eta')\,d\eta'}{[(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta'-\eta)^2]\sqrt{\xi^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta'-\eta)^2}^{\,3}} \quad \ldots \ldots (3)$$

Für Punkte in Höhe der Wirbelschicht ($\zeta = \zeta_1$) und außerhalb der Flügelspannweite, $|\eta| > 1$, wird hieraus:

$$\alpha_w(\xi,\eta,\zeta_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\eta'=-1}^{+1}\frac{-\gamma(\eta')}{(\eta'-\eta)^2}\left[1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+(\eta'-\eta)^2}}\right]d\eta' \quad \ldots \ldots (4)$$

Dagegen ist für Punkte in der Wirbelschicht und innerhalb der Flügelspannweite, $|\eta| < 1$, nach Multhopp [1] der Hauptwert zu nehmen:

$$\alpha_w(\xi,\eta,\zeta_1) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{4\frac{\gamma(\eta)}{\varepsilon} - \int\limits_{\eta'=-1}^{\eta-\varepsilon}\frac{\gamma(\eta')}{(\eta-\eta')^2}\left[1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+(\eta'-\eta)^2}}\right]d\eta' - \int\limits_{\eta'=\eta+\varepsilon}^{+1}\frac{\gamma(\eta')}{(\eta-\eta')^2}\left[1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+(\eta'-\eta)^2}}\right]d\eta'\right\} \quad \ldots \ldots (5)$$

Die Multhoppsche Abwindrechnung, welche sich auf die Punkte in der Wirbelschicht beschränkt, knüpft an Gl. (5) an und verwendet für die Ausrechnung von α_w das mechanische Quadraturverfahren, welches für die Berechnung der Auftriebsverteilung längs der Flügelspannweite entwickelt wurde.

Im vorliegenden Fall, wo das ganze Abwindfeld berechnet werden soll, kann man dieses mechanische Quadraturverfahren nicht anwenden, sondern es muß die Gl. (3) zugrunde gelegt werden. Die darin auftretenden Integrale werden numerisch und graphisch ausgewertet. Außerhalb der Spannweite des Flügels, $|\eta| > 1$, wird für $\zeta = \zeta_1$ die Gl. (4) benutzt.

Absenkung der Wirbelfläche: Nachdem die Berechnung des Abwindfeldes ausgeführt ist, kann noch die Absenkung der Wirbelfläche am Ort des Leitwerkes durch eine Quadratur ermittelt werden. Es ist

$$\zeta_{1L}(\eta) = \zeta_F(\eta) + \int\limits_{\xi=\xi_F}^{\xi_L}\alpha_w(\xi,\eta,\zeta_1)\,d\xi \quad \ldots \ldots (6)$$

Der Abwindwinkel wird für ein paar Werte von ξ errechnet und Gl. (6) durch numerische Integration ausgewertet. Es ist üblich, die Rechnung für den Leitwerksabstand ξ_L und den Zwischenpunkt $\xi_M = (\xi_F + \xi_L)/2$ auszuführen. Der Anfangswert für den Integranden in Gl. (6) ist gleich dem Abströmwinkel α_{wF} an der Flügelhinterkante. Nach der Simpsonschen Regel erhält man dann für die Absenkung der Wirbelschicht am Ort des Leitwerkes

$$\zeta_{1L}(\eta) = \zeta_F + \frac{\zeta_F - \zeta_M}{3}(\alpha_{wF} + 4\,\alpha_{wM} + \alpha_{wL}) \quad \ldots (7)$$

Die Absenkung wurde nach Gl. (7) ermittelt.

IV. Durchführung der Rechnung.

Die Rechnungen wurden durchgeführt für drei Flügel ohne Verwindung und ohne Pfeilstellung von dem Seitenverhältnis $\Lambda = 6$: ein Rechteckflügel und zwei Trapezflügel mit den Zuspitzungen $l_a/l_i = 0{,}6$ und $0{,}2$. Jeder Flügel wurde erstens ohne Klappe und zweitens mit einer Landeklappe gerechnet, deren Spannweite gleich der halben Flügelspannweite ist ($b_K/b = 1/2$). Für die Wirksamkeit der Landeklappe wurde gesetzt $(d\alpha/d\eta_K)_{\text{örtl.}} = 0{,}6$. Dies entspricht nach der Theorie von Glauert einem Verhältnis von Klappentiefe zu Flügeltiefe $l_K/l \approx 0{,}25$. Die Daten der Flügel zusammen mit den aus der Auftriebsverteilungsrechnung erhaltenen Werten von $dc_a/d\alpha$ und $dc_a/d\eta_K$ des ganzen Flügels sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

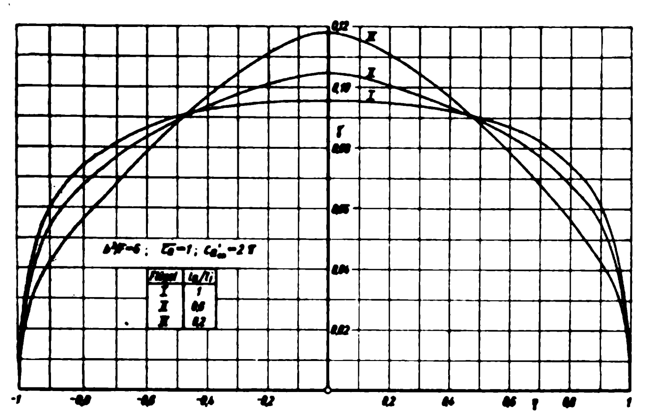


Bild 2. Auftriebsverteilung über Spannweite für die Flügel I, II und III ohne Klappenausschlag.
Flügel I: Rechteck
Flügel II: Trapez, $l_a/l_i = 0{,}6$
Flügel III: Trapez, $l_a/l_i = 0{,}2$.

Zahlentafel 1.

Flügel	Form	$\frac{l_a}{l_i}$	Λ	$\frac{d c_a}{d \alpha}$	$\frac{d c_a}{d \eta_K}$	$\left(\frac{d \alpha}{d \eta_K}\right)_{krs}$
I	Rechteck	1	6	4,53	1,46	0,322
II	Trapez	0,6	6	4,64	1,56	0,336
III	Trapez	0,2	6	4,67	1,71	0,366

$$\frac{b_K}{b} = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{d\alpha}{d\eta_K}\right)_{\text{örtl.}} = 0{,}6; \quad c'_{a\,\infty} = 2\pi.$$

Die nach Multhopp errechnete Auftriebsverteilung über die Flügelspannweite für die drei Flügel ohne Klappenausschlag ist ein Bild 2 angegeben; die Auftriebsverteilungen beim Landeklappenausschlag $\eta_K = 10°$ mit $\alpha_g = 0$ zeigt Bild 3. Diese Verteilungen wurden ohne Abspaltung der Sprungstelle gerechnet. Aus diesen beiden Auftriebsverteilungen können alle anderen Kombinationen von α und η_K leicht durch lineare Überlagerung erhalten werden. Einige weitere typische Fälle der Auftriebsverteilung solcher Überlagerungen sind in den Ergebnistafeln Bild 8 bis 12 mit angegeben.

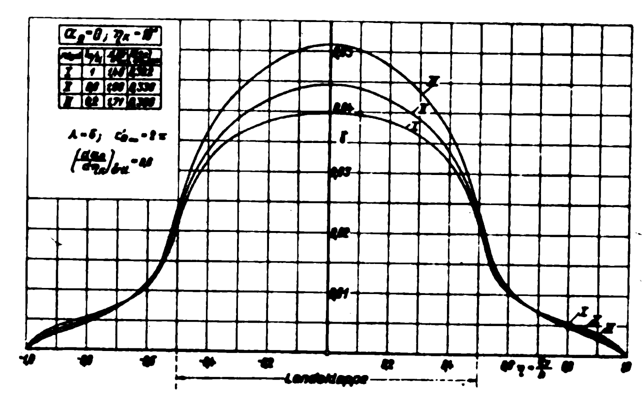
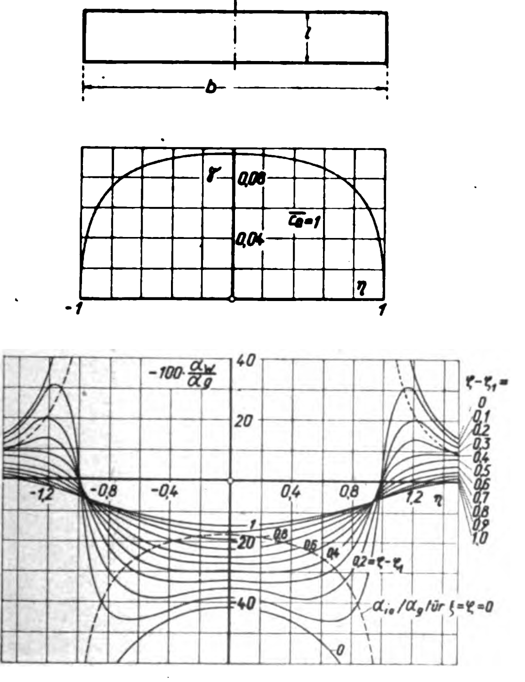


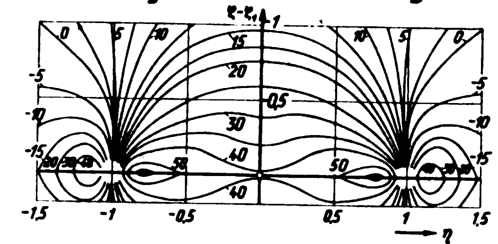
Bild 3. Auftriebsverteilung über Spannweite für die Flügel I, II und III mit Landeklappenausschlag $\eta_K = 10°$ beim Anstellwinkel $\alpha_g = 0$.
——— Abwind am Ort des Flügels in der Wirbelschicht.

Bei der numerischen Berechnung des Abwindfeldes nach Gl. (3) traten gewisse Schwierigkeiten dadurch auf, daß der Wert des ersten Integrales für Punkte nahe an der Wirbelschicht ($\zeta - \zeta_1 = 0{,}1$ bis $0{,}3$) aus der Differenz großer positiver und negativer Anteile besteht, die, absolut genommen, nahezu gleich sind. Hier mußte deswegen sehr genau gerechnet werden. Das Abwindfeld wurde gerechnet für den Bereich

$$\xi = -1$$
$$-1{,}6 \leq \eta \leq +1{,}6$$
$$-1 \leq \zeta - \zeta_1 \leq +1.$$

Für die Flügel ohne Klappenausschlag sind die Flügelenden $\zeta - \zeta_1$, $\eta = \pm 1$ singuläre Punkte des Abwindfeldes; für die Fälle mit Klappenausschlag außerdem auch die Klappenenden $\zeta - \zeta_1 = 0$, $\eta = \pm 0{,}5$. In diesen Punkten hat der Abwind eine Unstetigkeitsstelle. Die Werte des Abwindes auf der Wirbelfläche, $|\eta| < 1$, $\zeta - \zeta_1 = 0$, wurden nach Multhopp und Braun-Scharn berechnet und gaben eine willkommene Kontrolle der vorliegenden Rechnung, indem die Kurven α_w über $\zeta - \zeta_1$ bei $\eta =$ konst. für $\zeta - \zeta_1 = 0$ an die Multhoppschen Werte anschließen müssen. Dies war in allen Fällen gut erfüllt.





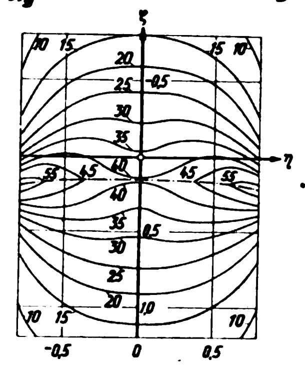


Bild 4. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Rechteckflügel, ohne Klappenausschlag
Flügel I: $\Lambda = 6$; $c'_{a\infty} = 2\pi$. ——— Abwind am Ort des Flügels in der Wirbelschicht.

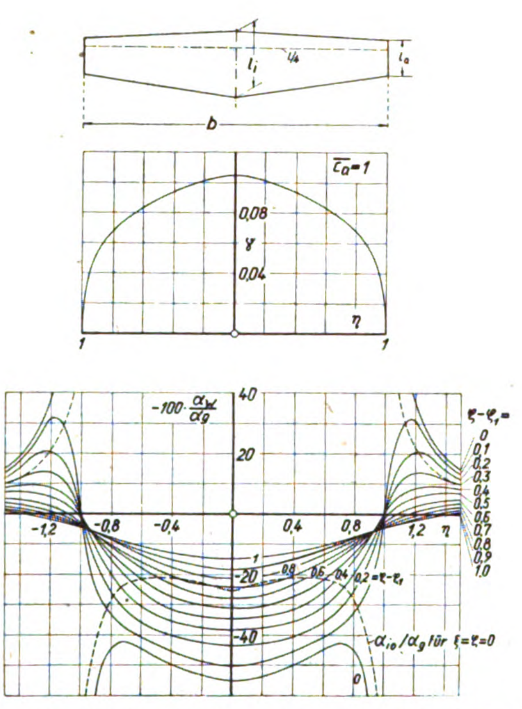
V. Ergebnisse.

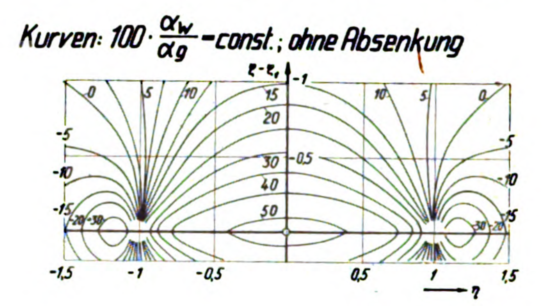
a) ohne Klappenausschlag.

Eine Auswahl der umfangreichen Ergebnisse ist in Bild 4 bis 12 dargestellt. Diese Auswahl wurde so getroffen, daß alle anderen gewünschten Fälle durch Überlagerung hieraus leicht erhalten werden können.

Bild 4, 5 und 6 zeigen die Ergebnisse für die drei Flügel ohne Klappenausschlag. Die linke Hälfte dieser Bilder zeigt neben dem Flügelgrundriß und der Auftriebsverteilung die Kurven α_w/α_g über η mit $\zeta-\zeta_1$ als Parameter. Für diese Fälle des unverwundenen Flügels ist α_w/α_g unabhängig vom Auftriebsbeiwert. Vergleichsweise ist noch der Abwind am Ort des Flügels ($\xi = 0$, $\zeta = 0$) eingetragen. Diese Werte sind immer etwas geringer als die Hälfte der Werte am Ort des Leitwerkes bei $\zeta-\zeta_1 = 0$. Ein entsprechendes Bild für einen Ellipsenflügel, jedoch am Ort des Flügels $\xi = 0$, ist schon früher von Betz [6] angegeben worden.

In der rechten Hälfte von Bild 4, 5 und 6 sind die Kurven konstanten Abwindes $\alpha_w/\alpha_g =$ konst. in der Ebene $\xi = -1$





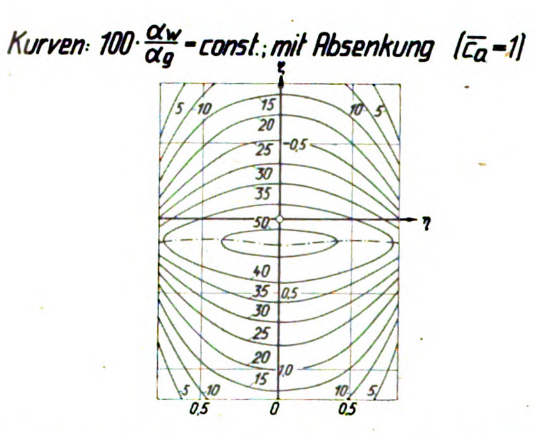
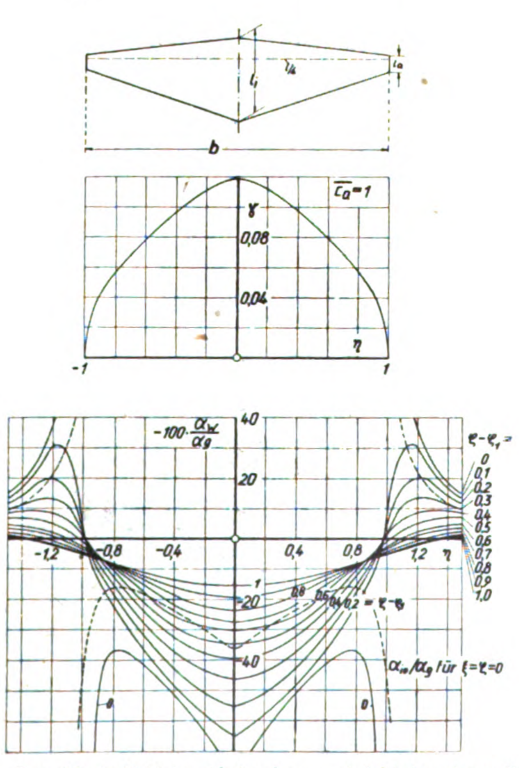
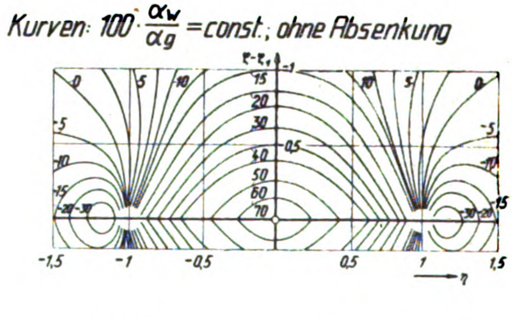


Bild 5. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Trapezflügel mit der Zuspitzung $l_a/l_i = 0{,}6$, ohne Klappenausschlag. Flügel II: $\Lambda = 6$; $c_{a\zeta}' = 2\pi$. — — — Abwind am Ort des Flügels in der Wirbelschicht.





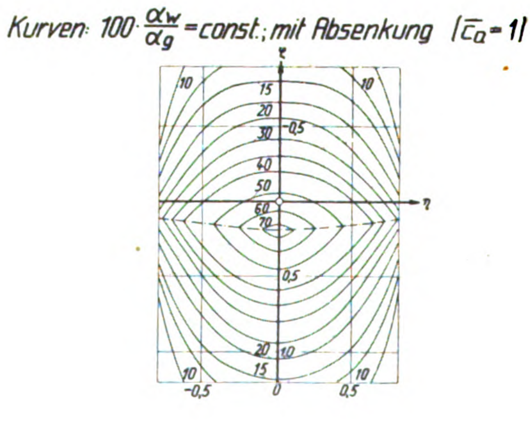


Bild 6. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Trapezflügel mit der Zuspitzung $l_a/l_i = 0{,}2$, ohne Klappenausschlag. Flügel III: $\Lambda = 6$; $c_{a\zeta}' = 2\pi$.

Bild 7. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Rechteckflügel mit den Landeklappenausschlägen $\eta_k = 0, 10°, 20°$ bei $\overline{c_a} = 1$.

Bild 8. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Rechteckflügel mit dem Landeklappenausschlag $\eta_K = 20°$.
a) bei $\overline{c_a} = 0{,}510$ ($\alpha_g = 0$);
b) bei $\overline{c_a} = 1{,}5$ ($\alpha_g = 12{,}5°$).

--- $\xi = 0$; $\zeta = 0$

Bild 9. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Trapezflügel mit der Zuspitzung $l_a/l_i = 0{,}6$ mit den Landeklappenausschlägen $\eta_K = 0$, 10°, 20° bei $\overline{c_a} = 1$.

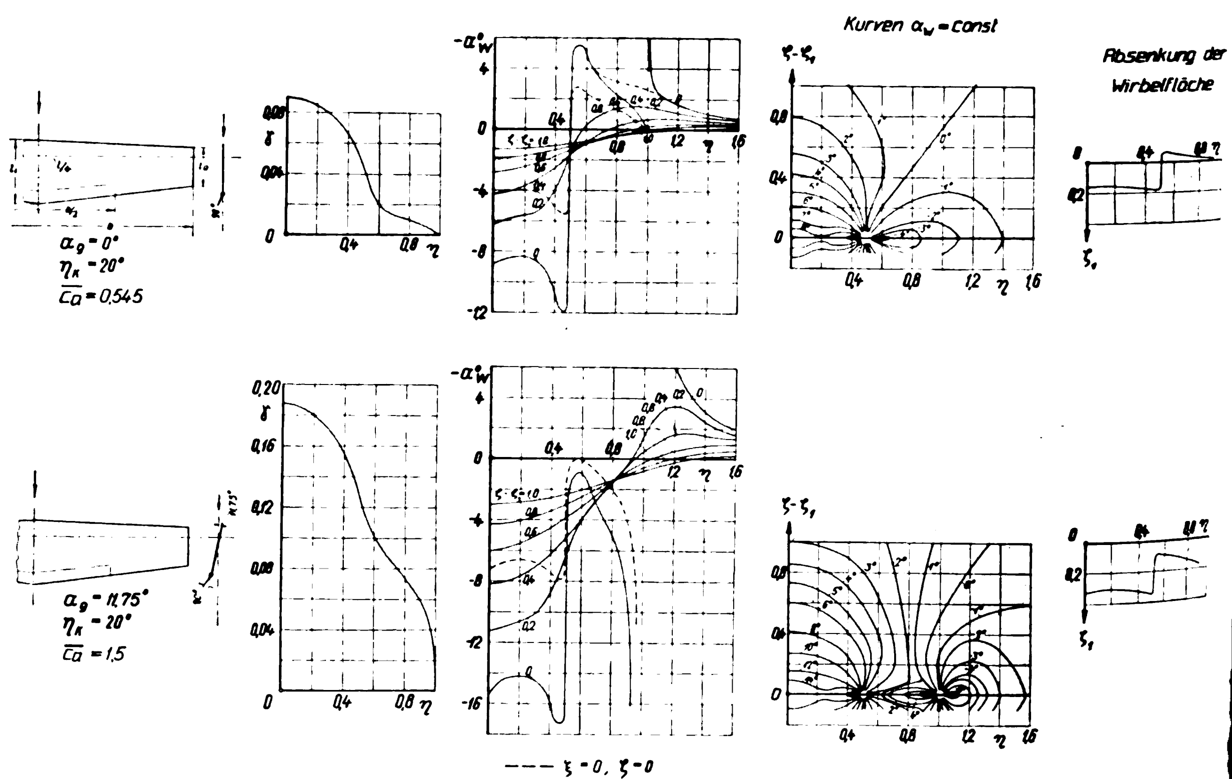


Bild 10. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Trapezflügel mit der Zuspitzung $l_a/l_i = 0{,}6$ mit dem Landeklappenausschlag $\eta_K = 20°$.

a) bei $\overline{c_a} = 0{,}545$ ($\alpha_g = 0°$);
b) bei $\overline{c_a} = 1{,}5$ ($\alpha_g = 11{,}75°$).

Bild 11. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Trapezflügel mit der Zuspitzung $l_a/l_i = 0{,}2$ mit den Landeklappenausschlägen $\eta_K = 0,\ 10°,\ 20°$ bei $\overline{c_a} = 1$.

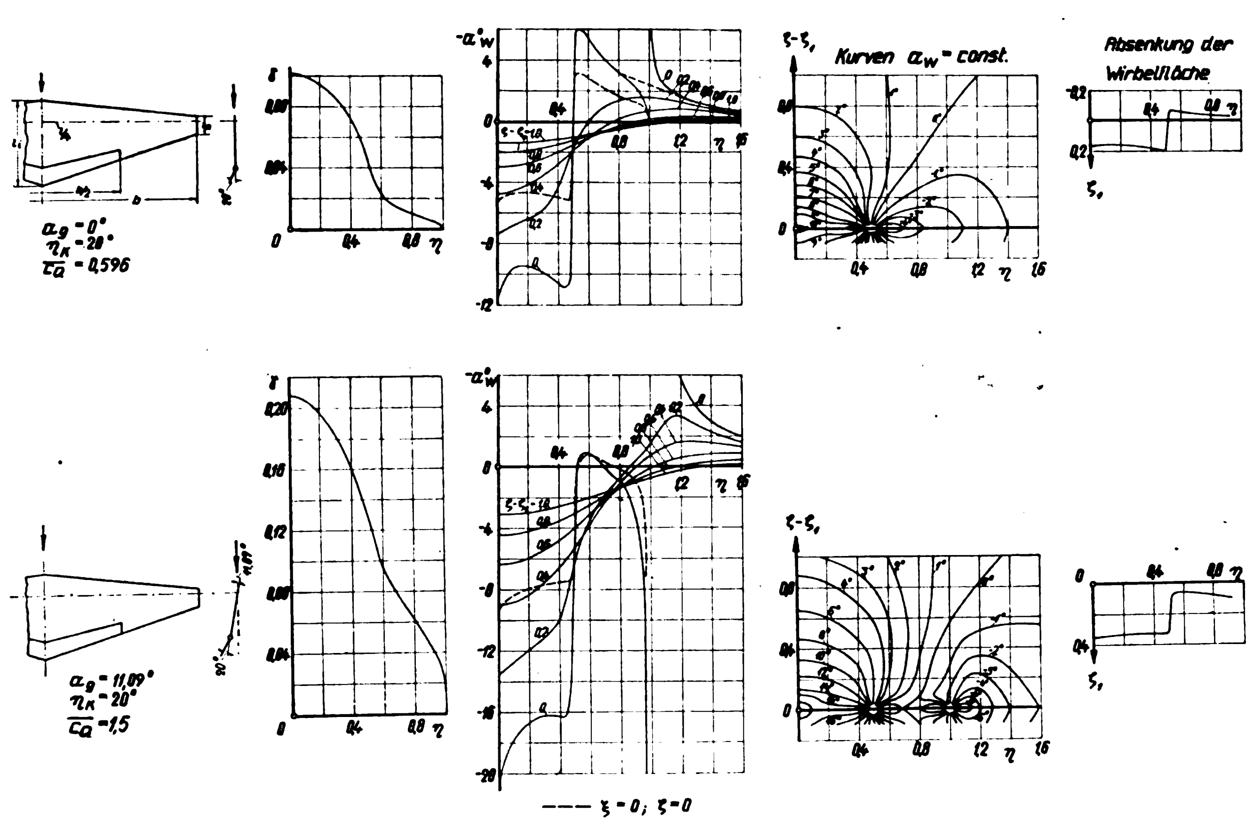


Bild 12. Das Abwindfeld im Abstand $x = -b/2$ hinter einem Trapezflügel mit der Zuspitzung $l_a/l_i = 0{,}2$ mit dem Landeklappenausschlag $\eta_K = 20°$.
a) bei $\overline{c_a} = 0{,}596$ ($\alpha_g = 0$);
b) bei $\overline{c_a} = 1{,}5$ ($\alpha_g = 11{,}1°$).

dargestellt, und zwar in der oberen Hälfte ohne Absenkung, in der unteren mit Absenkung der Wirbelfläche. Die Maximalwerte des Abwindes liegen in jedem Fall auf der Wirbelfläche, und zwar beim Rechteckflügel (Bild 4) bei $\eta = 0{,}8$ mit $\alpha_w/\alpha_g = 0{,}6$, dagegen beim stark zugespitzten Trapezflügel (Bild 6) in der Flügelmitte $\alpha_w/\alpha_g = 0{,}75$. Das Aufwindgebiet außerhalb der Flügelspannweite ist bei allen drei Flügeln nahezu gleich. Die nach Gl. (7) berechnete Absenkung der Wirbelfläche am Ort des Leitwerkes wird an den Flügelenden ($\eta = \pm 1$) rechnerisch unendlich groß. Die Kurven konstanten Abwindes mit Berücksichtigung der Absenkung (rechts unten in Bild 4, 5 und 6) werden aus denen ohne Absenkung erhalten, indem das ganze Feld um die Absenkung $\zeta_{1L}(\eta)$ nach abwärts versetzt wird. Außerhalb der Spannweite würde man durch den Abwind eine Versetzung nach oben erhalten. Diese ist jedoch nicht berechnet worden. Aus Bild 4, 5 und 6 erkennt man, daß der Einfluß der Flügelform auf das ganze Abwindfeld sehr beträchtlich ist.

b) mit Klappenausschlag.

Die Ergebnisse der Abwindrechnung mit Landeklappenausschlag sind für jeden der drei Flügel in zwei Tafeln zusammengefaßt. Bild 7 und 8 zeigt die Ergebnisse für den Rechteckflügel, Bild 9 und 10 für den Trapezflügel $l_a/l_i = 0{,}6$ und Bild 11 und 12 für den Trapezflügel $l_a/l_i = 0{,}2$. In jedem dieser Bilder ist neben dem Flügelgrundriß dargestellt: die Auftriebsverteilung $\gamma(\eta)$, die Abwindverteilung α_w über η mit $\zeta - \zeta_1$ als Parameter, Kurven konstanten Abwindwinkels $\alpha_w =$ konst. in der Ebene $\xi = -1$ und die Absenkung der Wirbelfläche. Bild 7, 9 und 11 zeigt für jeden der drei Flügel den Einfluß des Klappenausschlages auf die Abwindverteilung bei festgehaltenem Auftriebsbeiwert $\overline{c_a} = 1$ bei den drei Klappenwinkeln $\eta_K = 0^0$, 10^0 und 20^0. Im Klappenbereich ist die Abwindverteilung in der Spannweitenrichtung in allen Fällen ziemlich gleichmäßig. Im Bereich der Wirbelschicht ist jedoch am Klappenende eine starke Unstetigkeit vorhanden, die in einigem Abstand von der Wirbelschicht jedoch in eine stetige Verteilung übergeht. Besonders aus den Kurven konstanten Abwindes erkennt man, daß das Klappenende im Abwindfeld eine stark singuläre Stelle ist. In einiger Entfernung von der Wirbelschicht ist das Feld jedoch durchaus regulär. Auch mit Klappenausschlag ist in Flügelmitte der Abwind am größten für den stark zugespitzten Trapezflügel.

Weiter ist in Bild 8, 10 und 12 das Abwindfeld dargestellt erstens bei $\alpha_g = 0$ und $\eta_K = 20^0$ und zweitens für $\overline{c_a} = 1{,}5$ bei $\eta_K = 20^0$. Der erstere Fall soll dazu dienen, um durch Überlagerung mit dem Flügel ohne Klappenausschlag (Bild 4, 5, 6) für jede gewünschte Kombination von α und η_K das Abwindfeld errechnen zu können. Der zweite Fall stellt etwa die Abwindverhältnisse bei der Landung dar. Bemerkenswert ist, daß man im Fall des reinen Klappenausschlages ($\alpha_g = 0$) außerhalb des Klappenbereiches ziemlich starken Aufwind erhält. In diesem Fall ist nur das Klappenende, aber nicht das Flügelende eine singuläre Stelle des Abwindfeldes.

Für $\overline{c_a} = 1{,}5$ bei $\eta_K = 20^0$ ergeben sich naturgemäß im Klappenbereich besonders große Abwindwinkel, z. B. auf der Wirbelfläche $\alpha_w = 13^0$ für den Rechteckflügel und $\alpha_w = 18^0$ für den Trapezflügel $l_a/l_i = 0{,}2$.

Bezüglich der Änderung des Abwindfeldes mit dem Leitwerksabstand x ist zu sagen, daß diese für die praktisch in Frage kommenden Leitwerksabstände zwischen $x = 0{,}5\,\frac{b}{2}$ und $x = 1{,}5\,\frac{b}{2}$ nur gering ist. Sie kann aus den Rechnungen nach [7] abgeschätzt werden.

VI. Zusammenfassung.

Für drei unverwundene Flügel vom Seitenverhältnis 6 (ein Rechteck- und zwei Trapezflügel) ohne und mit Landeklappenausschlag wird das vollständige Abwindfeld in einer Ebene senkrecht zur Flugrichtung am Ort des Leitwerkes ($x = -b/2$) berechnet. Dabei ist auch die Absenkung der Wirbelfläche ermittelt worden. Während die bisherigen Abwindrechnungen meist nur den Abwind in der Wirbelschicht liefern, geben die vorliegenden Ergebnisse Aufschluß über die Änderung des Abwindes ober- und unterhalb der Wirbelschicht.

VII. Schrifttum.

[1] H. Multhopp, Die Berechnung des Abwindes hinter Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 463.

[2] G. Braun u. H. Scharn, Kurventafeln zur Abkürzung der Abwindrechnung nach Multhopp und zwei Anwendungsbeispiele. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 179.

[3] H. Multhopp, Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 153.

[4] A. Silverstein, S. Katzoff, W. K. Bullivant, Downwash and wake behind plain and flapped airfoils. NACA Report Nr. 651, 1939.

[5] H. Muttray, Untersuchungen über den Abwind hinter einem Trapezflügel mit Rumpf und Schraube. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 101.

[6] A. Betz, Tragflügel und hydraulische Maschinen. Handbuch der Physik, Bd. VII (1927), S. 215.

[7] A. Silverstein, S. Katzoff, Design charts for predicting downwash angles and wake characteristics behind plain and flapped wings. NACA Rep. Nr. 648, 1939.

Profilsystematik und Singularitätenverfahren.

(Beiträge zur Profilforschung I.)

Von H. B. Helmbold und F. Keune.

Bericht aus der Entwurfsabteilung der Ernst Heinkel Flugzeugwerke, Rostock-Marienehe.

Es wird eine Einführung in den Problemkreis der folgenden Beiträge zur Profilforschung gegeben und dabei auf die Grundlagen der Profilgestaltung und ihrer Geschwindigkeitsberechnung näher eingegangen.

Gliederung.

1. Aufgaben der Profilsystematik.

Ziel der Profilzüchtung ist die Verbesserung der Flugleistungen, der Flugeigenschaften und des Flugzeugrüstgewichtes. Die Flugleistungen werden besser, wenn es gelingt, den Profilwiderstand zu verkleinern oder auch den Höchstauftrieb zu steigern. Der Profilwiderstand kann auf direktem Wege durch Vergrößern der laminaren Anlaufstrecke der Grenzschicht vermindert werden, auf indirektem Wege durch Herabsetzen der größten Übergeschwindigkeit am Profilumfang, womit das Auftreten von örtlichen Überschallgeschwindigkeiten nach größeren Fluggeschwindigkeiten hin verschoben wird. Im allgemeinen ist die Geschwindigkeitsspanne durch das Verhältnis von Höchstauftrieb und Profilwiderstand $\frac{c_{a\,max}}{c_{wp\,min}}$ bestimmt; nur wenn die größten Geschwindigkeiten am Profilumfang sich der kritischen Schallgeschwindigkeit nähern, ist sie durch das Verhältnis der kritischen Machzahl (Fluggeschwindigkeit dividiert durch ungestörte Schallgeschwindigkeit) zur Wurzel aus dem Höchstauftrieb $\frac{\mathfrak{M}_k}{\sqrt{c_{a\,max}}}$ festgelegt. Von befriedigenden Flugeigenschaften läßt sich erst dann sprechen, wenn der Tragflügel gegen heftiges seitliches Abkippen beim Überziehen gesichert ist; hierzu ist allmähliches, von der Flügelwurzel her einsetzendes Abreißen der Strömung am Flügel erforderlich, das durch geeignete Wahl und Verteilung der Profile im Tragflügel ausschlaggebend beeinflußt werden kann. Einfluß auf das Gewicht des Flügels und gelegentlich auch anderer Flugzeugteile (Rumpf und Höhenleitwerk) hat das Dickenverhältnis $\delta = \frac{d_{max}}{t}$ und das Sturzflugmoment des Flügels, letzteres über das Verhältnis $\frac{c_{a\,max}}{c_{mo}}$.

Die Anzahl der für die aerodynamischen Eigenschaften eines Profiles maßgeblichen geometrischen Veränderlichen ist ziemlich groß, so daß es schon einiges Geschick oder größere Erfahrung erfordert, im Einzelfalle ein günstiges Kompromiß zu finden, das es gestattet, alle wünschenswerten Eigenschaften in einem Tragflügel zu vereinigen. Die Treffsicherheit, mit der dieses Kompromiß gefunden werden kann, hängt nun in hohem Maße von der Güte und Vollständigkeit der verfügbaren Unterlagen über den Einfluß der Profilform und der Oberflächenbeschaffenheit auf die Profileigenschaften ab; sie ist heute noch sehr mäßig, weil die vorliegenden Versuchsergebnisse entweder lückenhaft oder geringwertig oder auch unsystematisch sind. Seit den Anfängen der experimentellen Aerodynamik sind viele Hunderte von Flügelprofilen untersucht worden, ohne daß dabei ihre aerodynamischen Eigenschaften in angemessenem Verhältnis zur dauernd wachsenden Anzahl der untersuchten Profile verbessert worden wären; auch der Ertrag an quantitativer Information von bleibendem Wert ist erstaunlich gering geblieben. Das Mißverhältnis von Arbeitsaufwand und technischem Nutzen wurde mit der Zeit immer größer, bis man dazu überging, systematische Versuchsreihen durchzumessen. Die umfangreichste derartige Untersuchung, 78 Flügelprofile umfassend, war die systematische Reihe des NACA—TR 460. Sie schien eine recht gute Orientierung über die Einflüsse von Dicke und Wölbung ergeben zu haben. Indessen wurde die dieser Reihe zugrunde liegende Systematik sofort wieder verlassen und durch eine andere ersetzt, als ein größeres Versuchsprogramm über Schnellflugprofile (NACA TR 492) in Angriff genommen wurde. Und noch eine dritte Systematik wurde eingeführt, als Profilformen entdeckt wurden, die denen der ursprünglichen Systematik in einigen Punkten offenbar überlegen waren (NACA—TR 537 und 610). Erst bei der letztgenannten Versuchsreihe ging man dazu über, die Krümmungssprünge in der Mittellinie und in der Tropfenkontur zu beseitigen. Wir sehen also keine stetige Entwicklung, sondern mit dem Wechsel der Entwicklungsziele sprunghaftes Verändern der Systematik. Es ist hierin auch noch kein Ende abzusehen, denn neuerdings scheint in Nordamerika wieder ein neuer Profiltypus, das Davis-Profil, aufzukommen. Mag der Mangel an Folgerichtigkeit in der Systematik nur als bloßer Schönheitsfehler zu bewerten sein oder auch nicht, jedenfalls sind die Versuchsergebnisse, die im Überdruckkanal des NACA gewonnen waren, inzwischen als ziemlich minderwertig erkannt worden. Im Laufe der Zeit stieg die Anzahl der Korrekturen, die an den Originalmeßwerten anzubringen sind, auf 5 und auch dann konnte noch keine Gewähr für die Richtigkeit der so gewonnenen Ergebnisse übernommen werden (NACA—TR 679), so daß sich das NACA in seinem 25. Jahresbericht (1939) schließlich doch zu dem Eingeständnis genötigt sah, daß die derzeitige Lage unbefriedigend sei und neue Methoden der Profilforschung gefunden werden müßten. Auch die Schnellkanalversuche des TR 492 sind noch mit stark fälschenden Einflüssen des endlichen Kanalquerschnittes behaftet. Das Vorhandene ist also nicht mehr geeignet, die Zukunft zu belasten und so finden wir das Feld frei, um die Frage nach einer zweckmäßigen Systematik für Flügelprofile neu aufzurollen.

Den Zweck der Systematik sehen wir in der Aufgabe, die Kontinuität der experimentellen Forschung und der technischen Entwicklung zu gewährleisten, die Verbindung zwischen der Theorie und dem Experiment aufrechtzuerhalten und den Entwurf und die Konstruktion von hochwertigen Tragflügeln durch Ersparnisse an Zeit und Arbeit wirtschaftlicher zu machen. Dieser Zielsetzung entsprechend müssen an eine Profilsystematik etwa folgende Anforderungen gestellt werden.

2. Anforderungen an eine Profilsystematik.

a) Alle Profilformen sollen in möglichst einfacher Weise, also ohne Zuhilfenahme eines Parameters, etwa in orthogonalen Koordinaten (Mittellinie und dazu senkrechte Ordinaten), analytisch darstellbar sein, um beim Aufzeichnen von Tragflügelentwürfen die mit unvermeidlichen Fehlern behaftete Strakarbeit durch ein bequemes und rationelles Verfahren zu ersetzen. Die Profile sollen durch eine über die ganze Flügeltiefe durchlaufende Funktion definiert sein. Insbesondere sollen sie krümmungsstetig sein.

b) Bei Veränderung des Dicken- und Wölbungsverhältnisses sollen die Profilformen der Systematik affin verzerrt werden. Profile der Systematik sollen als Summe oder Differenz der Ordinaten eines Paares anderer Profile der Systematik darstellbar sein, so daß man Profilformen linear überlagern kann.

c) Die geometrischen Verhältnisse der Profile sollen von einfach definierten, anschaulichen Formparametern abhängen. Diese Formparameter sollen in möglichst engem Zusammenhang mit den aerodynamischen Profileigenschaften stehen.

d) Die Systematik soll die einfachsten, in der Theorie ausführlich behandelten Formen wie Ellipse, Kreiszweieck, Schukowskitropfen und Kreisbogenwölbung mit enthalten, um den Anschluß an umfangreiches Ergebnismaterial der Grundlagenforschung herzustellen. Andererseits soll die Systematik auch als ausgefallen geltende Profilformen umfassen, weil man nie voraussehen kann, ob nicht irgendwann eine solche doch noch eine praktische oder wenigstens erkenntnisfördernde Bedeutung gewinnt.

e) Die Geschwindigkeitsverteilung (Druckverteilung) auf dem Profil samt ihrer 1. und 2. Ableitung nach dem Profilumfang (oder nach der Tiefenkoordinate) soll analytisch darstellbar sein. Die Systematik soll es erleichtern, ein einfaches Verfahren zu gewinnen, nach dem die Geschwindigkeitsverteilung auf dem Umfang eines vorgegebenen Profils in guter Näherung berechnet werden kann; dabei soll dieses Verfahren auch umkehrbar sein, so daß man zu einer vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung das zugehörige Profil finden kann. Eine hohe Genauigkeit ist nicht erforderlich, wenn sich das Opfer an Genauigkeit durch geringen Zeitaufwand für die Berechnung und raschen Überblick über das qualitative Ergebnis bezahlt macht, andererseits soll die Genauigkeit mit angemessenem Aufwand an Zeit und Mühe so weit gesteigert werden können, als mit Rücksicht auf die Herstellungsgenauigkeit von Windkanalmodellen Sinn hat.

Die hier aufgeführten Anforderungen gelten natürlich nur für das Grundprofil ohne Düsenspalte, Vorflügel, Spaltklappen, Spreizklappen oder andere Landehilfen.

3. Die Profilparameter.

Das Dickenverhältnis $\delta = \frac{d_{\max}}{t}$ zählen wir nicht zu den Formparametern im eigentlichen Sinne, sondern betrachten es bloß als den Maßstab der affinen Verzerrung (Affinitätsfaktor). Für den Profiltropfen haben wir als kennzeichnend folgende 5 dimensionslosen Formparameter festgelegt:

den Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = \frac{r_N\, t}{d_{\max}^2}$,

den Vorderkantentangens $\frac{\varepsilon}{\delta}$ $\left(\text{insbesondere wenn } \frac{\varrho_N}{\delta^2} = 0\right)$,

die Dickenrücklage $\xi_\delta = \frac{X_\delta}{t}$,

den Scheitelradius $\varrho_\delta \cdot \delta = \frac{r_\delta\, d_{\max}}{t^2}$ an der Stelle ξ_δ

und den Hinterkantentangens $\frac{\tau}{\delta}$.

Beim gewölbten Profil treten für die Mittellinie zwei Formparameter hinzu:

Die Wölbungsrücklage $\xi_\varphi = \frac{X_\varphi}{t}$

und das Wölbungsmaß $\frac{\varphi_{\max}}{\delta} = \frac{f_{\max}}{\delta_{\max}}$.

Alle diese Formparameter bleiben bei affiner Verdickung oder Verdünnung des Profils mit δ unverändert. Für den Profilwiderstand maßgeblich sind außer δ selbst die Formparameter ξ_δ, $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ und $\frac{\varphi_{\max}}{\delta}$. Die größte Übergeschwindigkeit bei stoßfreiem Eintritt hängt außer von δ in erster Linie von ξ_δ, $\varrho_\delta \cdot \delta$, ξ_φ und $\frac{\varphi_{\max}}{\delta}$ ab, bei Umströmung der Profilnase infolge Anstellwinkel sind auch $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ und $\frac{\varepsilon}{\delta}$ von Einfluß. Der Höchstauftrieb ist in gewissen Grenzen von δ unabhängig und hauptsächlich durch $\frac{\varrho_N}{\xi_\delta}$ und $\varphi_{\max}$ bestimmt, in geringerem Maße durch ξ_φ. Würde man statt des profilfesten Koordinatensystems ein strömungsfestes zugrunde legen, dann müßte man den Anstellwinkel $\frac{\alpha}{\delta}$ als Formparameter mitzählen. Es ist zu beachten, daß wegen der Überlagerungsmöglichkeit auch Profile mit Nasenradius $\left(\frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0\right)$ einen positiven oder negativen Vorderkantenwinkel enthalten können. Die Anzahl der von uns gewählten Formparameter ist groß genug, um alle aerodynamisch wesentlichen Formeigenschaften zu erfassen, und doch wieder nicht zu groß, um den Überblick zu behalten.

4. Vorschläge für eine neue Profilsystematik.

Als allgemeinsten Wölbungstypus legen wir den Prandtl-Birnbaumschen zugrunde:

$$y_w = \sum_1^\infty s_n\, x^{n-1} (1 - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hier ist $x = \frac{2\,X}{t}$ die auf halbe Profiltiefe bezogene Abszisse mit der Mitte der Tiefe als Ursprung, $y_w = \frac{2\,Y_w}{t}$ die ebenfalls auf halbe Profiltiefe bezogene Wölbungsordinate. Für gewöhnlich bricht man die Reihe bereits nach dem 2. Gliede ab und begnügt sich mit Parabelbogen und S-Schlag als Grundverteilungen der Profilwölbung (B). Der neuerdings von K. H. Kawalki vorgeschlagene Wölbungstyp (K), der den neueren NACA-Wölbungen ähnelt, ohne ihre Mängel zu besitzen, ist als Spezialfall in [1] enthalten.

Bei der Dickenverteilung sind wir vom Keuneschen [4] Typus ausgegangen:

$$y_T = d_0 (1 - x^2) + d_1 (1 - x) \sqrt{1 - x^2} + (1 - x^2) \sqrt{1 - x^2} \sum_2^\infty d_\nu\, x^{\nu - 2}.$$

Hier ist $y_T = \frac{2\,Y_T}{t}$ die auf halbe Profiltiefe bezogene halbe Breite des Profils. Das Glied mit δ_0 stellt ein Parabelzweieck dar, das Glied mit d_1 ist der affine Schukowski-Tropfen. Dieses läßt sich auch in der Form der an dritter Stelle stehenden unendlichen Reihe schreiben und lautet dann

$$d_1 (1 - x^2) \sqrt{1 - x^2} \sum_2^\infty (-1)^{\nu - 2} x^{\nu - 2}.$$

Wir haben nun noch weitere Glieder vom Typus $d_\sigma\, x^\sigma (1 - x^2)$, dem das Glied $d_0 (1 - x^2)$ mit $\sigma = 0$ angehört, hinzugenommen und so einen allgemeinen Typus geschaffen, der sich aus Gliedern zweier[1]) unendlichen Reihen zusammensetzt:

$$y_T = (1 - x^2) \sum_0^\infty d_\sigma\, x^\sigma + (1 - x^2)^{3/2} \sum_2^\infty [(-1)^{\nu - 2} + d_\nu]\, x^{\nu - 2}$$

[1]) Wenn wir für das Parabelzweieck $d_0 (1 - x^2)$ und ebenso für alle weiteren Glieder $d_\sigma x_\sigma (1 - x^2)$ den Ausdruck $(1 - x^2)$ mit Hilfe der Taylor-Entwicklung in der Form

$$(1 - x^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{3/2} \left(1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{3}{8}\, x^4 + \ldots\right)$$

schreiben, so gehen die beiden unendlichen Reihen in eine einzige Reihe über, wobei wir berücksichtigen, daß in der Taylor-Entwicklung die Punkte $x = \pm 1$, also die Nase und die Hinterkante, ausgeschlossen bleiben müssen.

oder wenn wir die Reihe nach einer endlichen Anzahl Glieder abbrechen:

$$y_t = (1 - x^2) \sum_0^\sigma d_\sigma x^\sigma + d_1 (1 - x) \sqrt{1 - x^2} + (1 - x^2)^{3/2} \sum_2^\nu d_\nu x^{\nu - 2} \quad . \; . \; . \; (2)$$

An Stelle der Ordnungszahlen $\sigma = 0, 1, 2...$ schreiben wir als Indizes $\sigma = 0, \alpha, \beta...$ Die Dickenverteilung mit dem Index α nennen wir das überschlagene Parabelzweieck: $y_\alpha = d_\alpha \; x \; (1 - x^2)$.

Eine Tropfenform mit Wendepunkt im hinteren Teil ist offenbar unwirtschaftlich, weil sie große örtliche Druckanstiege mit großen Oberflächen vereinigt. Die bisherige unsystematische Profilzüchtung hat längst zur Ausscheidung derartiger Formen geführt, und so haben auch wir dem allgemeinen Profiltypus die einschränkende Bedingung der Wendepunktfreiheit auferlegt. Nun haben aber alle Dickenanteile der Reihe $d_1.....d_\nu$ eine Unendlichkeitsstelle der Krümmung in der Hinterkante und einen Wendepunkt davor, so daß das allgemeine Profil nach (2) ebenfalls einen Wendepunkt bekommt. Um diese Dickenanteile trotzdem verwenden zu können, haben wir sie untereinander derart gekoppelt, daß die durch Kopplung neu entstandenen Profile von der unendlichen Krümmung an der Hinterkante befreit sind, und zwar ist dies auf die Weise geschehen, daß wir

$$d_2 = -\frac{d_1}{2}, \; d_2 = -d_3, \; d_2 = -d_4 \text{ und } d_5 = -d_3$$

gesetzt haben. Die neu entstandenen Dickenanteile tragen Doppelindizes $d_{\nu\mu}$, also beispielsweise d_{12}, d_{32}, d_{42} und d_{53}. Mit den Dickenanteilen der anderen Reihe $d_0...d_\sigma$ verfahren wir aus einem anderen Grunde ähnlich, indem wir dem Zweieck das überschlagene Zweieck gleichen Kantenwinkels einmal positiv ($d_{0\alpha}$), einmal negativ ($d_{\alpha 0}$) überlagern und verfügen damit über insgesamt 6 Dickenanteile. Da die Dickenanteile $d_{\nu\mu}$ keine Kantenwinkel besitzen, bestimmt $d_{\alpha 0}$ allein den Hinterkantentangens x und $d_{0\alpha}$ allein den Vorderkantentangens ε, wenn die Reihe $d_0...d_\sigma$ bereits nach dem zweiten Gliede abgebrochen wird. Ebenso bestimmt d_1 bzw. d_{12} allein den Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 2\left(\frac{d_1}{\delta}\right)^2 = 2\left(\frac{d_{12}}{\delta}\right)^2$. Hiermit besitzen wir drei Dickenanteile, von denen jeder für sich allein einen Formparameter des zusammengesetzten Profils festlegt[2]). Wir haben bisher davon abgesehen, die Kopplung für weitere Dickenanteile festzusetzen, weil wir mit den im vorigen aufgeführten 6 Dickenanteilen bereits in der Lage sind, Profiltropfen mit 5 vorgeschriebenen Formparametern darzustellen.

Mit der Bildung gekoppelter Dickenanteile $d_{\nu\mu}$ und $d_{\sigma\varrho}$ haben wir den ersten Schritt auf dem Wege zur Spezialisierung unseres allgemeinen Profiltypus getan. Weitere Spezialisierungen ergeben sich, wenn man die geometrischen Eigenschaften der Profilnase analysiert. Hierfür wählen wir ein Koordinatensystem mit Ursprung im Nasenpunkt und den dimensionslosen Koordinaten ξ und η, die mit der ganzen Flügeltiefe dimensionslos gemacht sind. Nun machen wir in Übereinstimmung mit Gl. (2) für die Profilnase folgenden doppelten Reihenansatz

$$\frac{\eta}{\delta} = A_0 \xi^{1/2} + A_1 \xi^{3/2} + A_2 \xi^{5/2} + \dots + B_0 \xi + B_1 \xi^2 + B_2 \xi^3 + \dots \quad . \; . \; . \; (3)$$

Das erste Glied der ersten Reihe liefert den Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = \frac{A_0^2}{2}$, das erste Glied der zweiten Reihe den Vorderkantentangens $\frac{\varepsilon}{\delta} = B_0 = 4 \frac{d_{0\alpha}}{\delta}$. Ist $B_0 \neq 0$, so trägt die Profilnase einen Knick im Krümmungsverlauf (Krümmungsknick). Profile mit $B_0 = 0$ nennen wir glattnasig (G). Für das aerodynamische Verhalten des Profils scheint es uns ziemlich gleichwertig zu sein, ob ein Vorderkantenwinkel tatsächlich vorhanden ist oder nur durch das Glied $A_1 \xi^{3/2}$ vorgetäuscht wird, mit anderen Worten: ob $B_0 \neq 0$ und $A_1 \neq 0$ oder ob $B_0 = 0$ und $A_1 \neq 0$. Da wir jedoch verlangen daß die Formparameter — hier handelt es sich um $\frac{\varepsilon}{\delta}$ — eine möglichst eindeutige aerodynamische Bedeutung haben sollen, haben wir durch entsprechende Koppelung der Dickenanteile d_{12} und d_{32}, die als einzige von unseren 6 Grundanteilen Beiträge zu A_1 liefern, A_1 zu Null gemacht. Den so entstandenen neuen Dickenanteil kennzeichnen wir durch d_{123}. Da für die NACA-Profile $A_1 = A_2 = ... = 0$ ist, bezeichnen wir Profile mit $A_1 = 0$, $A_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$ als Profile mit NACA-Nase (N). Ist $A_1 = 0$ und auch $B_0 = 0$, so sprechen wir von einer Parabelnase (P). Profile mit $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $B_0 > 0$ nennen wir Überschallprofile (Ü). Mit jeder Spezialisierung nimmt die Anzahl der freien Formparameter ab. Eine andere Art der Spezialisierung ergibt sich durch Koppelung der Formparameter. Verlangen wir beispielsweise, daß Dickenrücklage, Nasenradius, Scheitelradius und die Zahlenkonstante A_1 mit den entsprechenden Formparametern eines elliptischen Profilvorderteils übereinstimmen, so erhalten wir den einparametrigen Profiltypus mit Ellipsenkopplung (E)[3]).

5. Das Singularitätenverfahren.

Die durch konforme Abbildung gewonnenen Profilformen besitzen nicht die geforderte Eigenschaft der Affinität und sind daher auch nur näherungsweise durch die Gl. (1) und (2) darzustellen. Es besteht zwar im allgemeinen noch die Möglichkeit, durch geeignete Reihenentwicklungen der Abbildungsfunktion affine Profile zu erzeugen. Dieses Verfahren ist aber sehr unbequem zu handhaben. Deshalb empfiehlt es sich, ein anderes Verfahren zu wählen, das der Erzeugung von Profilformen durch lineare Überlagerung besser entspricht und das wir als Singularitätenverfahren bezeichnen wollen.

Daß man einen festen Körper in einer Strömung immer durch eine Oberflächenbelegung mit Wirbellinien ersetzen kann, indem man das Körperinnere als ruhende Flüssigkeit auffaßt und die Wirbeldichte gleich der Geschwindigkeit auf der Oberfläche macht, ist trivial; nur hat man bei dieser Betrachtungsweise immer die Gewähr, daß eine solche Wirbelbelegung auch existiert, um so mehr als sie auch physikalische Realität besitzt. Denn die im mathematischen Schema in der Fläche verteilten Wirbellinien sind in der physikalischen Wirklichkeit nichts anderes als die im engen Raum der Grenzschicht zusammengedrängte Rotation. Aber diese Art Singularitätenverteilung hat den Nachteil ebenfalls auf sehr unbequeme Rechnungen zu führen. Was wir kurz als Singularitätenverfahren bezeichnen, ist die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung auf der Profilkontur unter der Annahme einer Singularitätenbelegung auf einer Linie im Profilinnern[4]). Die Existenz einer solchen linienhaften Belegung ist immer dann anzunehmen, wenn es möglich ist, dasselbe oder ein bis auf kleine Abweichungen höherer Ordnung übereinstimmendes Profil durch konforme Abbildung zu gewinnen und wenn dann der Schlitz, in den die analytische Fortsetzung der Außenströmung ins Profilinnere einmündet, nur zwei Verzweigungspunkte (Endpunkte besitzt. Dieser Schlitz ist die Linie, wo die Singularitätenbelegung anzunehmen ist. Die Existenz derartiger Belegungen ist für die Profile nach Gl. (2) ohne weiteres vorauszusetzen, da nach Gl. (3) insbesondere die Bedingung er-

[2]) Profile mit hinterer Abrundung (wie z. B. die Ellipse) erhält man durch Überlagerung des Schukowskiprofils mit vertauschten Profilenden (d_{-1}).

[3]) Neuerdings wurde ein besonders zweckmäßiger spezieller Profiltyp aus der Lemniskate entwickelt, um wendepunktfreie Profiltropfen mit Monotonie des Krümmungsverlaufs und seiner Ableitung zu erhalten.

[4]) Für Wölbungsformen ohne Dicke hat erstmalig W. Birnbaum (1923) [1] eine Singularitätenbelegung (Wirbel) berechnet, für symmetrische Körper (Schiffskörper) gab zuerst H. Föttinger (1924) [2] eine Quellbelegung an. Die Birnbaumsche Näherung ist dann später (1938) von F. Keune [3] mit Quellbelegungen auf Profile endlicher Dicke erweitert worden.

füllt ist, daß sich an der Nase $\frac{\eta_T}{\delta}$ wie ξ^n verhält, wobei $n \geqslant \frac{1}{2}$ ist. Der Übergang von der konformen Abbildung zum Singularitätenverfahren ist nicht mehr zu vermeiden, wenn es sich um die Untersuchung dreidimensionaler Strömungsvorgänge wie z. B. beim Ringflügel handelt, bei denen das Singularitätenverfahren die einzige Berechnungsmöglichkeit darstellt.

Solange man sich bei der Anwendung des Singularitätenverfahrens auf dünne Profile beschränkt, genügt eine erste Näherung vollauf zur ersten Orientierung über den Zusammenhang zwischen Profilform und Geschwindigkeitsverteilung; nur an der Profilnase versagt diese Näherung und dort ergänzt man das Verfahren, indem man das Abklingen der Störgeschwindigkeiten von der (verkürzten) Belegungslinie bis zur Profilkontur berücksichtigt. Wegen der Linearität des Zusammenhangs zwischen Profilform und Geschwindigkeitsverteilung ist das Verfahren in der ersten Näherung bequem umkehrbar, so daß man ebenso leicht zu einer gegebenen Geschwindigkeitsverteilung das zugehörige Profil bestimmen kann wie man zum gegebenen Profil die Geschwindigkeitsverteilung findet. Dadurch ist es zur Profilzüchtung besonders geeignet. Hierbei ist es sehr von Vorteil, wenn man voraussetzen kann, daß man es mit Profilen der Systematik zu tun hat, weil man dann jede gesuchte Lösung durch fertig vorrätige Funktionsreihen darstellen kann. Wird eine höhere Genauigkeit verlangt, so geht man zur zweiten Näherung über, wobei die gesteigerte Genauigkeit natürlich durch einen angemessenen Mehraufwand an Rechenarbeit erkauft werden muß. In der von uns gewählten Form ist das Verfahren iterationsfähig, so daß auch höhere Näherungen ohne grundsätzliche Schwierigkeiten berechnet werden können. Indessen scheint das Verfahren rasch genug zu konvergieren, um höhere Näherungen praktisch überflüssig zu machen.

Das Bemühen, die Genauigkeit der Rechnung zu steigern, ist übrigens nur so lange sinnvoll, als die Herstellungsgenauigkeit der Windkanalwerkstätten oder des Flugzeugbaues und der Grad der Übereinstimmung zwischen wirklicher Strömung und Potentialströmung damit nicht in Widerspruch geraten. Ist die Gestalt und Größe von Formänderungen, die durch Konstruktion, Fertigung und Betriebsbelastung bedingt sind, bekannt, so können auch diese Abweichungen berücksichtigt werden, die sich unter Umständen nur über einen Teil der Profiltiefe erstrecken (z. B. Beulen).

Der Einfluß der Grenzschicht läßt sich erfassen, wenn der Verlauf der Verdrängungsdicke auf Druck- und Saugseite bekannt ist; die Verdrängungsdicke wird einfach auf die Profildicke aufgeschlagen, so daß sich die Profilkontur hinten nicht mehr schließt. Die Gesamtergiebigkeit der im Profilinnern eingeschlossenen Quellen ist dann nicht mehr Null. Die Profilmittellinie verschiebt sich nach der Seite, wo die Verdrängungsdicke größer ist; entsprechend verändert sich der Anstellwinkel. Die Luftkräfte erhält man dann durch Integration der Schubspannungen und Drücke auf der wahren Kontur, wobei jedoch die Drücke auf der verdickten Kontur zu entnehmen sind.

6. Zusammenfassung.

Die Profilsystematik ist ein Hilfsmittel zur Entwicklung von Flügelprofilen, mit denen bessere Flugleistungen, bessere Flugeigenschaften und verringerte Flugzeugrüstgewichte erzielt werden sollen. Die Anforderungen an eine derartige Systematik werden formuliert und eine Anzahl Formparameter zur Kennzeichnung der Profilgestalt werden definiert. Es folgen Vorschläge für eine Profilfamilie von großer Allgemeinheit, die für den praktischen Gebrauch nach anschaulichen Eigenschaften klassifiziert und spezialisiert wird. Da die Profile der Systematik durch lineare Überlagerung auseinander hervorgehen, erscheint es als das Natürlichste, die Geschwindigkeitsverteilung auf dem Profilumfang mittels des Singularitätenverfahrens zu bestimmen, das hierfür wenigstens in der 1. Näherung ebenfalls lineare Zusammenhänge ergibt.

7. Schrifttum

[1] W. Birnbaum, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923) S. 290.

[2] H. Föttinger, Fortschritte der Strömungslehre im Maschinenbau und Schiffbau. Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft 1924, S. 295.

[3] F. Keune, Die ebene Potentialströmung um allgemeine dicke Tragflügelprofile. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. I 3.

[4] F. Keune, Theoretische Profilformen mit weitgehend freier Wahl der Dickenverteilung und der Skelettform. (Nicht veröffentlicht.)

Beiträge zur Profilforschung.

Von H. B. Helmbold und F. Keune.

II. Geometrie der Profilsystematik*).

Von F. Keune.

Bericht der Ernst-Heinkel-Flugzeugwerke, Seestadt Rostock.

Die aus Tropfenform und Wölbungsform zusammengesetzten Profile werden analytisch dargestellt, und es werden für sie geometrische und aerodynamische Parameter angegeben, welche die Profilform charakterisieren und die einzelnen Dicken- und Wölbungsanteile des Profiles bestimmen.

Gliederung.

1. Einleitung.

Die Aufgabe, praktisch brauchbare Tragflügelprofile zu konstruieren, ist zuerst durch konforme Abbildung des Kreises (Schukowski, Kármán-Trefftz) gelöst worden. Da für alle so gewonnenen Profile die Druckverteilung exakt berechnet werden kann, sind später auch allgemeine Profilformen mit Hilfe der konformen Abbildung berechnet worden. Jedoch haben alle so entstandenen Profile Nachteile, die ihre Verwendung für den praktischen Flügelentwurf verhindern. Für einen solchen Entwurf wird man von vornherein die Änderung einiger aerodynamisch wichtiger Formparameter über die Spannweite vorgeben müssen, damit der Flügel bestimmte vorgeschriebene Eigenschaften hat. Zu diesen vom Dickenverhältnis $\frac{d_{mx}}{t} = \delta$ unabhängigen Formparametern gehören vor allem der Nasenradius $\frac{r_N \cdot t}{d_{mx}^2} = \frac{\varrho_N}{\delta^2}$, die Dickenrücklage ξ_δ, das Wölbungsmaß $\frac{f_{mx}}{d_{mx}} = \frac{\varphi_{mx}}{\delta}$ und die Wölbungsrücklage ξ_φ. Schon für diese wenigen Parameter könnten die Abbildungskonstanten, die den Kreis in das vorgegebene Profil verwandeln, nur sehr umständlich und in Abhängigkeit von der Dicke bestimmt werden. Mit einer Änderung der Profildicke — oder eines anderen Formparameters — wären alle Abbildungskonstanten neu zu bestimmen, so daß bei der großen Zahl der Formparameter eine riesige Vorarbeit zu leisten wäre. Erst dann könnte man an die Berechnung der Profile für die einzelnen Flügelschnitte herangehen, die dann auch noch mit einer größeren Rechenarbeit verbunden ist. Da aber beim Flugzeugentwurf mit seinen immer wieder notwendig werdenden Änderungen das Aufzeichnen der Flügelschnitte nur einen angemessenen geringen Zeitaufwand beanspruchen darf, werden stets solche Profilformen gefordert werden, die analytisch gegeben sind. Für sie müssen Änderungen der Formparameter rasch durchführbar sein, zwei von ihnen, nämlich Profildicke δ und Wölbungsmaximum φ_{mx}, sollen zweckmäßig durch eine Verzerrung der Profilkontur veränderlich sein. Deshalb wurden im Flügelbau die NACA-Profile (Stack und v. Doenhoff) oder die Günter-Piercy-Profile[1]) bevorzugt, die beide für den Dickenverlauf (den Tropfen) und den Wölbungsverlauf analytisch in orthogonalen Koordinaten gegeben und rasch für die vorgegebenen Formparameter unabhängig von δ und φ_{mx} zu berechnen sind.

Der Günter-Piercy-Tropfen gibt alle Formparameter in Abhängigkeit von der Dickenrücklage ξ_δ und ist ein besonders schöner einparametriger Profiltyp, der sich vom analytisch gegebenen Schukowski-Profil (gerechnet für $\delta \to 0$) über Lemniskate und Munkschen Tropfen bis zum Kreisbogenzweieck erstreckt. Da er aber für die heutigen und die zukünftigen Erfordernisse nicht allgemein genug ist, hat er sich dem NACA-Tropfen gegenüber nicht durchgesetzt. Beim NACA-Profil sind außer der Dickenrücklage noch der Nasenradius $\left(\text{und in engen Grenzen der Hinterkantentangens } \frac{\varkappa}{\delta}\right)$ eines Tropfens frei wählbar. Aber auch diese zwei (bzw. drei) freien Formparameter genügen noch nicht den Anforderungen, die an eine systematische Gestaltung der Profilformen gestellt werden müssen. Selbst dann, wenn man zur Zeit noch mit den vorhandenen Formparametern und mit dem vom NACA-Tropfen vorgeschriebenen Dickenverlauf auskommt, wird doch jede Abweichung von dieser Profilkontur willkürlich bleiben und nicht in die NACA-Systematik einzuordnen sein. Die Willkür notwendiger Formänderungen kann mit Hilfe neuer anschaulicher Formparameter beseitigt werden, wenn damit eine entsprechende Erweiterung der Profilgleichung verbunden ist. Deshalb soll hier die Aufgabe gelöst werden, einen Profiltyp zu schaffen, bei dem jederzeit eine Änderung der Kontur über die ursprünglich vorgesehenen freien Formparamater hinaus möglich bleibt, ohne daß die einmal begonnene Systematik verletzt wird. Dabei soll der vorrätige Formenreichtum nicht die Berechnung von Profilen mit wenigen Parametern belasten, der Arbeitsaufwand darf nur mit der Anzahl der freien Parameter wachsen.

Die im folgenden zu entwickelnden Profilformen werden analytisch in orthogonalen Koordinaten gegeben, jedoch ist eine Erweiterung des NACA-Tropfens nicht vorgesehen. Dieser ist durch zwei im Dickenmaximum ξ_δ aneinandergeflickte Kurven dargestellt, die dort einen Knick im Krümmungsverlauf und damit eine Unstetigkeit in der Krümmungsänderung haben, die aerodynamisch schlecht sein könnte, wenn die Profilform praktisch genau nachgebaut würde. Ebenso werden die NACA-Skelettformen nicht verwendet werden, da sie ebenfalls aus zwei Parabeln bestehen, welche sogar mit einem Krümmungssprung aneinanderschließen oder aus einer kubischen Parabel und einer Geraden nur mit Krümmungsknick. Es sollen hier solche Formen gewählt werden, die durch eine von der Profilnase bis zur Hinterkante mit allen Ableitungen stetige Funktion beschrieben sind. Im Hinblick auf eine angenäherte Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung nach dem später erörterten Singularitätenverfahren sollen diese Profile aus verschiedenen Grundanteilen (Dickenverteilungen und Wölbungsverteilungen) additiv zusammengesetzt werden, die sich alle über die ganze Profiltiefe erstrecken. Dann besteht

*) P 31 13.

[1]) Die von W. Günter (1927) aufgestellte Formel wurde 1939 von C. N. H. Lock als Näherungsformel für kleine Dicken eines von N. A. Piercy (1937) mit konformer Abbildung erhaltenen Profiltyps wiedergewonnen [5].

nämlich auch die Geschwindigkeitsverteilung aus entsprechenden analytisch gegebenen Grundanteilen (Geschwindigkeitsanteilen), die sich additiv zur Übergeschwindigkeit am Profil zusammensetzen lassen. Damit sind auch die theoretischen Berechnungen auf ein Mindestmaß an Arbeitsaufwand beschränkt und die Geschwindigkeitsrechnungen bleiben jederzeit — im Gegensatz zu den Methoden der hier als Fremdkörper wirkenden konformen Abbildung — auch für den Praktiker anschaulich. Die Genauigkeit dieser Methode wird mindestens die gleiche sein wie die des auf konformer Abbildung beruhenden Theodorsen-Verfahrens.

2. Das symmetrische Profil.

Die drei bisher gebräuchlichen Formparameter, der Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$, die Dickenrücklage ξ_δ und der Hinterkantentangens $\frac{\varkappa}{\delta}$ genügen nur dann zur genauen Beschreibung eines Profiles, wenn die Gleichung des Profiles immer die gleiche bleibt. Wählt man eine andere analytische Darstellung der Tropfenform, so kann die Profilkontur mit den gleichen drei Formparametern eine ganz andere Gestalt haben. Vor allem an der Profilnase und im Dickenmaximum ξ_δ hängt die Profilform noch sehr von der Profilgleichung ab, so daß für diese Stellen noch zwei weitere Formparameter zur grundsätzlichen Beschreibung des Dickenverlaufs notwendig sind. Außerdem werden weitere Änderungen der mit drei Parametern festgesetzten Profilkontur meist in der Umgebung der Profilnase und des Dickenmaximums vorgenommen werden müssen, so daß für sie eine Festlegung durch Formparameter erforderlich ist.

In der nächsten Umgebung der Profilnase ergeben sich schon zwischen den beiden bisher genannten Profiltypen, dem NACA- und dem Günter-Piercy-Profil, systematische Unterschiede. Denkt man sich für beide Profile die Dickenrücklage ξ_δ und den Hinterkantentangens $\frac{\varkappa}{\delta}$ ungeändert, so würde in der Profilnase für verschwindenden Nasenradius bei den Günter-Piercy-Profilen eine unendlich dünne Spitze (waagerechte Tangente) und für NACA-Profile ein spitzer Winkel, der »Vorderkantenwinkel« auftreten. Der Formparameter »Vorderkantentangens $\frac{\varepsilon}{\delta}$« deutet also auf eine völligere oder schlankere Nase hin, als sie beim Profil mit glatter Nase $\left(\frac{\varepsilon}{\delta} = 0\right)$ und gleichem ϱ_N/δ^2 erscheint, je nachdem, ob $\frac{\varepsilon}{\delta}$ positiv oder negativ ist; die Profile haben dann überparabolische oder unterparabolische Nasen. Für Profile ohne Nasenradius $\left(\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 0\right)$, die Überschallprofile, ist stets $\frac{\varepsilon}{\delta} > 0$. Der fünfte Formparameter ist in der Umgebung des Dickenmaximums zu wählen und ist im Punkt der Dickenrücklage ξ_δ mit der »Scheitelkrümmung $\frac{1}{\varrho_\delta \cdot \delta}$« unabhängig von der Profildicke δ gegeben. Man wird also zwischen Profilen mit flachem und scharfem Dickenmaximum unterscheiden können.

Zu diesen fünf von der Profildicke δ unabhängigen Formparametern $\frac{\varrho_N}{\delta^2}, \frac{\varepsilon}{\delta}, \xi_\delta, \frac{1}{\varrho_\delta \cdot \delta}$ und $\frac{\varkappa}{\delta}$ gehören fünf freie Dickenkonstanten, zu denen wegen der Bedingung $\left(\frac{y}{\delta}\right)_{\xi=\xi_\delta} = 1$ eine abhängige Konstante hinzukommt. Damit sind alle Dickenkonstanten auf die maximale Dicke $\delta = 1$ bezogen, so daß sie für jede Profildicke durch lineare Verzerrung bestimmt sind. Da die symmetrische Profilform durch Addition einer Reihe von Dickenverteilungen entstehen soll, werden wir zu den sechs Dickenkonstanten sechs Dickenverteilungen so zuordnen, daß möglichst viele der Konstanten direkt durch die Formparameter auszudrücken sind. Die charakteristische Nasenform eines Profiles wird im allgemeinen durch eine an der Nase parabelähnliche Kurve dargestellt, so etwa durch das analytische Schukowski-Profil oder jedes Günter-Piercy-Profil. Wir wählen hier im Anschluß an meine mit der konformen Abbildung durchgeführte Arbeit [4] das Schukowski-Profil als Ausgangspunkt der einen Reihe von Grundverteilungen[2]). Das Schukowski-Profil selbst $\frac{y_1}{d_1} = \sqrt{1 - x^2}\,(1 - x)$ gibt den Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ an, die Ordinate geht aber in der Hinterkante mit der Potenz 3/2 gegen Null, so daß dort die 2. Ableitung und damit die Krümmung $(1/\varrho)$ gegen Unendlich geht[3]). In der Hinterkante wird die Potenz also auf 5/2 erhöht werden müssen. Wenn sich das Profil von $X = -\frac{t}{2}$ (Nase) bis $X = +\frac{t}{2}$ (Hinterkante) oder für $\frac{2X}{t} = x$ von $x = -1$ bis $x = +1$ mit $\frac{2Y}{t} = y$ erstreckt, erhalten wir die abgeänderte Grundverteilung (Bild II, 1)

$$\frac{y_{12}}{d_{12}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2}\,(1 - x)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (\text{II}, 1)$$

mit dem Nasenradius

$$\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 2 \left(\frac{d_{12}}{\delta}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{II}, 2)$$

Das Parabelzweieck (Kreisbogenzweieck) $\frac{y_0}{d_0} = \pm (1 - x^2)$ als Grundverteilung würde sowohl den Vorderkanten- als auch den Hinterkantentangens in gleicher Größe gekoppelt liefern, so daß mit Hilfe des zweiten Gliedes dieser Reihe, des überschlagenen Zweiecks $\frac{y_\alpha}{d_\alpha} = \pm x\,(1 - x^2)$, durch Subtraktion und Addition $\left(\frac{y_0}{d_0} \mp \frac{y_\alpha}{d_\alpha}\right)$ eine Trennung in

$$\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}} = \pm (1 + x)\,(1 - x)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{II}, 3)$$

mit dem Vorderkantentangens

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = 8\,\frac{d_{0\alpha}}{\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{II}, 4)$$

und in

$$\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}} = \pm (1 + x)^2\,(1 - x) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{II}, 5)$$

mit dem Hinterkantentangens

$$\frac{k}{\delta} = 8\,\frac{d_{\alpha 0}}{\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{II}, 6)$$

möglich ist. Für beide Verteilungen geht die Ordinate an dem nicht vom Formparameter erfaßten Ende ($x = -1$ bzw. $x = +1$) quadratisch gegen Null, so daß jeder der bisher gegebenen drei Dickenanteile nur einen einzigen Formparameter bestimmt. Die drei Grundanteile (II, 1), (II, 3) und (II, 5) bilden eine zweiparametrige Schar (später mit A II bezeichnet) symmetrischer Profile (Tropfen)

$$\frac{y_T}{\delta} = \frac{d_{0\alpha}}{\delta}\,\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}} + \frac{d_{\alpha 0}}{\delta}\,\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}} + \frac{d_{12}}{\delta}\,\frac{y_{12}}{d_{12}} \; . \; . \quad (\text{II}, 7)$$

von deren drei Dickenkonstanten nur zwei frei wählbar bleiben, die im allgemeinen nicht aus den Formparametern Gl. (II, 4) oder (II, 6) berechnet werden, sondern man wird sie aus den beiden wichtigsten Formparametern ξ_δ und ϱ_N/δ^2 bestimmen (wenn x_δ die Dickenrücklage $x_\delta = 2\,\xi_\delta - 1$ in den hier gewählten Koordinaten ist). Die anderen Formparameter und Dickenkonstanten sind dann sofort bestimmt (vgl. auch Tafel II 2):

[2]) Eine andere Reihe von Grundanteilen wird später veröffentlicht. Sie geht von der Forderung weitgehender Monotonie der Krümmung aus und wird mit Hilfe der Lemniskate gebildet.

[3]) Später wird sich zeigen, daß diese Eigenschaften auch für die Geschwindigkeitsberechnung ungünstig sind.

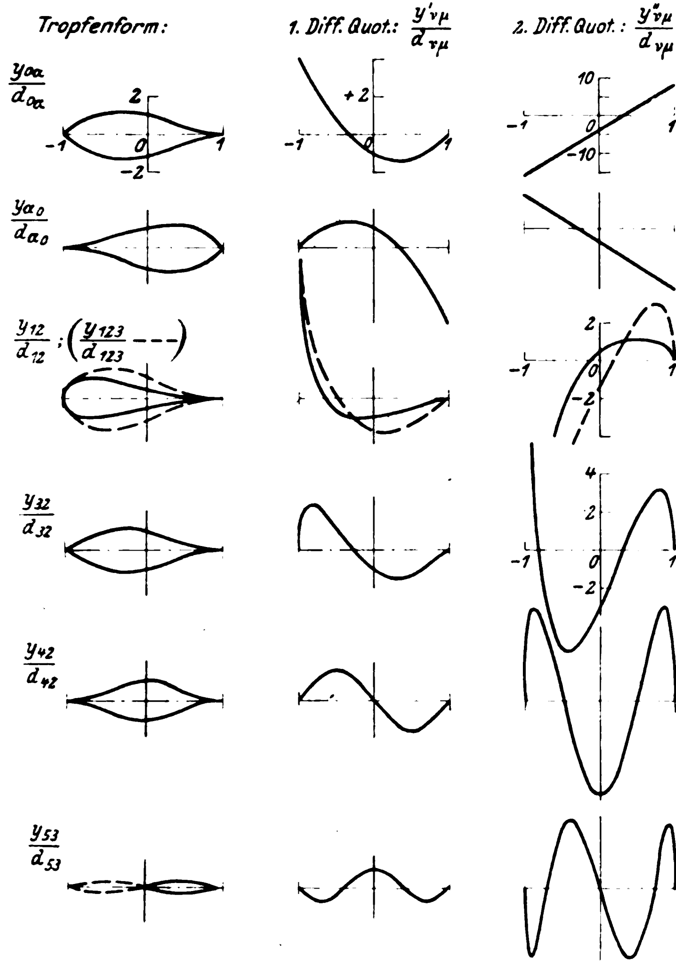


Bild II, 1. Die Tropfenformen und ihre ersten beiden Ableitungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d_{12}}{\delta} &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varrho_N}{\delta^2}} \qquad x_\delta = 2\,\xi_\delta - 1 \\ \frac{d_{0\alpha}}{\delta} &= \frac{1-3\,x_\delta}{2\,(1-x_\delta)^2\,(1+x_\delta)} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varrho_N}{\delta^2}}\sqrt{\frac{1-x_\delta}{1+x_\delta}} \\ \frac{d_{\alpha 0}}{\delta} &= \frac{1+3\,x_\delta}{2\,(1-x_\delta)\,(1+x_\delta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varrho_N}{\delta^2}\frac{1-x_\delta}{1+x_\delta}}\sqrt{\frac{1-x_\delta}{1+x_\delta}} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II},7^{\mathrm{a}})$$

Untersuchen wir die Umgebung der Nase der Profile (II, 7), so ist nach der Koordinatentransformation

$$x = 2\,\xi - 1 \quad y = 2\,\eta \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II},8)$$

nach der das Profil von $\xi = 0$ (Nase) bis $\xi = +1$ verläuft, für $\xi \ll 1$

$$\frac{\eta}{\delta} \approx \sqrt{2\frac{\varrho_N}{\delta^2}}\,\xi^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}\,\xi - \frac{5}{2}\sqrt{2\frac{\varrho_N}{\delta^2}}\,\xi^{3/2}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\frac{k}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\xi^2 + \frac{15}{8}\sqrt{2\frac{\varrho_N}{\delta^2}}\,\xi^{5/2} \quad \ldots \quad (\mathrm{II},9)$$

Wenn das hier auftretende Glied mit dem Faktor $\xi^{3/2}$ zum Verschwinden gebracht werden kann, stimmen die Potenzen der ersten drei Glieder mit denen der NACA-Nase überein. Dies ist mit Hilfe des zweiten Gliedes der mit Gl. (II, 1) begonnenen Reihe möglich, bei dem der Nasenradius zum Verschwinden gebracht ist:

$$\frac{y_{32}}{d_{32}} = \pm\sqrt{1-x^2}\,(1-x)^2\,(1+x) \quad \ldots \quad (\mathrm{II},10)$$

Für diese Dickenverteilung ist die Profilnase mit

$$\frac{\eta_{32}}{\delta} \approx 8\,\frac{d_{32}}{\delta}\,\xi^{3/2} - 20\,\frac{d_{32}}{\delta}\,\xi^{5/2} \quad \ldots \quad (\mathrm{II},10^{\mathrm{a}})$$

gegeben, so daß wegen Gl. (II, 9) das Glied mit $\xi^{3/2}$ verschwindet, wenn beim Addieren

$$\frac{d_{32}}{\delta} = \frac{5}{16}\sqrt{2\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}} = \frac{5}{8}\,\frac{d_{12}}{\delta} \quad \ldots \quad (\mathrm{II},11)$$

gesetzt wird. Bilden wir aus der Dickenverteilung (II, 1) unter der Bedingung (II, 11) mit der Verteilung (II, 10) eine neue Dickenverteilung $\left(\frac{y_{12}}{d_{12}} = \pm\frac{5}{8}\frac{y_{32}}{d_{32}}\right)$ (Bild 1):

$$\frac{y_{123}}{d_{123}} = \pm\frac{9}{8}\sqrt{1-x^2}\,(1-x)^2\left(1+\frac{5}{9}\,x\right) \text{ mit } \frac{\varrho_N}{\delta^2} = 2\left(\frac{d_{123}}{\delta}\right)^2, \quad \ldots \quad (\mathrm{II},12)$$

so erhalten wir eine neue zweiparametrige Schar von Profilen (später mit N II bezeichnet):

$$\frac{y_T}{\delta} = \frac{d_{0\alpha}}{\delta}\,\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}} + \frac{d_{\alpha 0}}{\delta}\,\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}} + \frac{d_{123}}{\delta}\,\frac{y_{123}}{d_{123}}, \quad \ldots \quad (\mathrm{II},13)$$

deren Nase dem NACA-Typ ähnelt. Werden für diesen Profiltyp die beiden wichtigsten Formparameter $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ und ξ_δ gegeben, so erhalten wir die anderen Formparameter $\frac{\varepsilon}{\delta}$, $\varrho_\delta \cdot \delta$ und $\frac{\varkappa}{\delta}$ (Tafel II, 3) und damit die drei Dickenkonstanten zwangsläufig:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d_{123}}{\delta} &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varrho_N}{\delta^2}}\,; \quad x_\delta = 2\,\xi_\delta - 1 \\ \frac{d_{0\alpha}}{\delta} &= \frac{1-3\,x_\delta}{2\,(1-x_\delta)^2\,(1+x_\delta)} \\ &\quad - \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varrho_N}{\delta^2}}\sqrt{1-x_\delta^2}\,\frac{5\,x_\delta^2+15\,x_\delta+22}{16\,(1+x_\delta)} \\ \frac{d_{\alpha 0}}{\delta} &= \frac{1+3\,x_\delta}{2\,(1-x_\delta)\,(1+x_\delta)^2} \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varrho_N}{\delta^2}}\sqrt{1-x_\delta^2}\,\frac{(4+5\,x_\delta+5\,x_\delta^2)\,(1-x_\delta)}{16\,(1+x_\delta)^2} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II},13^{\mathrm{a}})$$

Selbstverständlich sind die so gewonnenen Profile nicht alle wendepunktfrei[4]); sie sind es nur dann, wenn längs der ganzen Profiltiefe $(-1 \leq x \leq +1)$ stets $\frac{y''}{\delta} < 0$ bleibt (Bild II, 1, Tafel II, 1). Nur für einparametrige Profile ist diese Forderung bequem zu übersehen. Setzen wir z. B. $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 0$, so wird der verbleibende Profiltyp (das einparametrige Überschallprofil *Ü I*) wendepunktfrei sein für

$$\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) < \xi_\delta < \frac{1}{3}\sqrt{3}\,,$$

so daß dann

$$\frac{1}{2}\,\frac{d_{\alpha 0}}{\delta} < \frac{d_{0\alpha}}{\delta} < 2\,\frac{d_{\alpha 0}}{\delta} \text{ gilt}^{5)}.$$

Eine Änderung der angesetzten beiden zweiparametrigen Profiltypen des *A II* = (Gl. (II, 7)) und des *N II*-Profils (Gl. (II, 13)), ist nun mit Hilfe weiterer Formparameter und damit weiterer Dickenverteilungen möglich, die dann auch

[4]) Untersucht sind folgende wendepunktfreien Bereiche, über die hinaus noch Wendepunktfreiheit für *A II* (Gl. II, 7)) und *N II* (Gl. (II, 13)) möglich ist: $\xi_\delta = 0{,}3$; $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 1{,}1$; $\xi_\delta = 0{,}35 : 1{,}375 \geqslant \frac{\varrho_N}{\delta^2} \geqslant 0{,}55$; $\xi_\delta = 0{,}40 : 1{,}1 \geqslant \frac{\varrho_N}{\delta^2} \geqslant 0{,}275$; $\xi_\delta = 0{,}45 : 0{,}825 \geqslant \frac{\varrho_N}{\delta^2} \geqslant 0{,}275$ und $\xi_\delta = 0{,}5 : 0{,}825 \geqslant \frac{\varrho_N}{\delta^2} \geqslant 0{,}0$. Die unrunden Zahlen bei $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ entstehen aus der amerikanischen Definition des »Normalradius« $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 1{,}1$, von dem $^5/_4$, $^4/_4$, $^3/_4$, $^2/_4$ und $^1/_4$ gewählt werden.

[5]) Sowohl nach Gl. (II, 13ª) als auch nach Gl. (II, 7ª) können wir einparametrige Tropfenformen (*N I* bzw. *A I*) gewinnen, wenn wir die Dickenkonstanten $d_{0\alpha}/\delta = 0$ setzen. Aus der entsprechenden Formel der Gl. (II, 13ª) bzw. (II, 7ª) erhalten wir dann die Kopplung zwischen ϱ_N/δ^2 und ξ_δ und können die Gebiete der Wendepunktfreiheit leicht bestimmen.

Tafel II, 1. Vgl. Bild II, 1 und Zahlentafel II, 1 bis II, 3.

η, 0, ξ, $+1$; y, -1, 0, x, $+1$

$$\frac{y_T}{\delta}=\frac{d_{0\alpha}}{\delta}\,\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}+\frac{d_{\alpha 0}}{\delta}\,\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}+\text{usw.}$$

Dickenformen	Nasen-verhalten	Hinter-kanten-verhalten	Dickenverteilungen	1. Ableitungen der Dickenverteilungen	2. Ableitungen der Dickenverteilungen
$\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}$	$b_0'(1+x)$	$(1-x)^2$	$(1+x)(1-x)^2$	$-(1-x)(1+3x)$	$-2(1-3x)$
$\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}$	$b_1'(1+x)^2$	$(1-x)$	$(1+x)^2(1-x)$	$+(1+x)(1-3x)$	$-2(1+3x)$
$\frac{y_{12}}{d_{12}}$	$a_0'(1+x)^{1/2}+a_1'(1+x)^{3/2}$	$(1-x)^{5/2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(1-x)^2$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1-x)(2+3x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1+8x+6x^2}{1+x}$
$\frac{y_{32}}{d_{32}}$	$a_1'(1+x)^{3/2}$	$(1-x)^{5/2}$	$\sqrt{1-x^2}(1-x)^2(1+x)$	$-\sqrt{1-x^2}(1-x)(1+4x)$	$-3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1-2x-4x^2)$
$\frac{y_{42}}{d_{42}}$	$a_2'(1+x)^{5/2}$	$(1-x)^{5/2}$	$\sqrt{1-x^2}(1-x)^2(1+x)^2$	$5x\sqrt{1-x^2}(1-x)(1+x)$	$-5\sqrt{1-x^2}(1-4x^2)$
$\frac{y_{53}}{d_{53}}$	$a_2'(1+x)^{5/2}$	$(1-x)^{5/2}$	$x\sqrt{1-x^2}(1-x)^2(1+x)^2$	$+\sqrt{1-x^2}(1-x)$ $\times(1+x)(1-6x^2)$	$-15x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)$
$\frac{y_{123}}{d_{123}}$	$a_0'(1+x)^{1/2}+a_2'(1+x)^{5/2}$	$(1-x)^{5/2}$	$\frac{9}{8}\sqrt{1-x^2}(1-x)^2$ $\times\left(1+\frac{5}{9}x\right)$	$-\frac{13}{8}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1-x)$ $\times\left(1+\frac{37}{13}x+\frac{20}{13}x^2\right)$	$-\frac{11}{8}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1}{1+x}$ $\times\left(1-\frac{47}{11}x+-\right.$ $\left.-\frac{114}{11}x^3-\frac{60}{11}x^3\right)$

Zahlentafel II, 1. Die Dickenverteilungen.

x	$\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}$	$\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}$	$\frac{y_{12}}{d_{12}}$	$\frac{y_{32}}{d_{32}}$	$\frac{y_{42}}{d_{42}}$	$\frac{y_{53}}{d_{53}}$	$\frac{y_{123}}{d_{123}}$
−1,0	0	0	0	0	0	0	0
−0,95	0,1901	0,0048	0,5936	0,0593	0,0029	−0,0028	0,6307
−0,9	0,3610	0,0190	0,7867	0,1573	0,0157	−0,0141	0,8851
−0,8	0,6480	0,0720	0,9720	0,3888	0,0777	−0,0622	1,2150
−0,6	1,0240	0,2560	1,0240	0,8192	0,3276	−0,1966	1,5360
−0,4	1,1760	0,5040	0,8981	1,0778	0,6466	−0,2586	1,5718
−0,2	1,1520	0,7680	0,7054	1,1287	0,9029	−0,1805	1,4109
0	1	1	0,5	1	1	0	1,125
0,2	0,7680	1,1520	0,3135	0,7524	0,9029	0,1805	0,7838
0,4	0,5040	1,1760	0,1649	0,4619	0,6466	0,2586	0,4536
0,6	0,2560	1,0240	0,0640	0,2048	0,3276	0,1966	0,1920
0,8	0,0720	0,6480	0,0120	0,0432	0.0777	0,0622	0,0390
0,9	0,0190	0,3610	0,0021	0,0082	0,0157	0,0141	0,0073
0,95	0,0048	0,1901	0,0003	0,0015	0,0029	0,0028	0,0013
1,0	0	0	0	0	0	0	0

den Bereich der Wendepunktfreiheit der Profile vergrößern können. Es fehlen zu den vier Dickenverteilungen $\frac{y_{12}}{d_{12}}$ und $\frac{y_{32}}{d_{32}}\left(\text{oder } \frac{y_{123}}{d_{123}}\right)$ sowie $\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}$ und $\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}$ noch zwei weitere (Bild II, 1), die wir aus $\frac{y_{32}}{d_{32}}$ ableiten wollen, indem wir zunächst die Potenz bei $x=-1$ erhöhen:

$$\frac{y_{42}}{d_{42}}=\pm\sqrt{1-x^2}\,(1-x)^2\,(1+x)^2, \quad . \ . \ (\text{II}, 14)$$

um eine zur y-Achse symmetrische Verteilung zu gewinnen, zu der dann noch eine antimetrische hinzukommt:

Zahlentafel II, 2. Die 1. Differential-Quotienten der Dickenverteilungen.

x	$\left(\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}\right)'$	$\left(\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}\right)'$	$\left(\frac{y_{12}}{d_{12}}\right)'$	$\left(\frac{y_{32}}{d_{32}}\right)'$	$\left(\frac{y_{42}}{d_{42}}\right)'$	$\left(\frac{y_{53}}{d_{53}}\right)'$	$\left(\frac{y_{123}}{d_{123}}\right)'$
−1,0	4,0	0	∞	0	0	0	∞
−0,95	3,6075	0,1925	5,1755	1,7048	0,1446	−0,1344	5,2410
−0,9	3,2300	0,3700	2,8986	2,1533	0,3726	−0,3196	4,2444
−0,8	2,5200	0,6800	1,0800	2,3760	0,8640	−0,6134	2,5650
−0,6	1,2800	1,1200	−0,3200	1,7920	1,5360	−0,5939	0,7800
−0,4	0,2800	1,3200	−0,8554	0,7698	1,5397	0,0307	−0,3742
−0,2	−0,4800	1,2800	−1,0287	−0,2351	0,9406	0,7148	−1,1757
0	−1	1	−1	−1	0	1	−1,6250
0,2	−1,2800	0,4800	−0,8491	−1,4109	−0,9406	0,7148	−1,7309
0,4	−1,3200	−0,2800	−0,6284	−1,4297	−1,5397	0,0307	−1,5220
0,6	−1,1200	−1,2800	−0,3800	−1.0880	−1,5360	−0,5939	−1,0600
0,8	−0,6800	−2,5200	−0,1466	−0,5040	−0,8640	−0,6134	−0,4616
0,9	−0,3700	−3,2300	−0,0539	−0,2005	−0,3726	−0,3196	−0,1792
0,95	−0,1925	−3,6075	−0,0194	−0,0749	−0,1446	−0,1344	−0,0662
1,0	0	−4,0	0	0	0	0	0

$$\frac{y_{53}}{d_{53}}=\pm x\sqrt{1-x^2}\,(1-x)^2\,(1+x)^2 \quad . \ . \ (\text{II}, 15)$$

Der allgemeine Profiltyp A umfaßt nun die Summe aller 6 Dickenverteilungen:

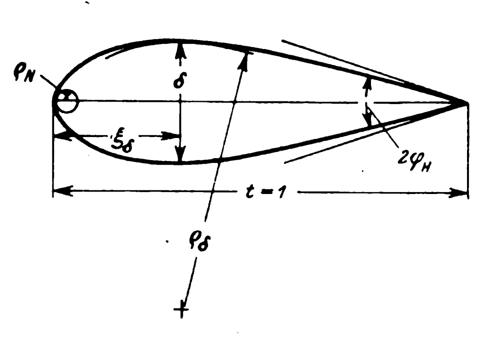
$$\frac{y_T}{\delta}=\frac{d_{0\alpha}}{\delta}\,\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}+\frac{d_{\alpha 0}}{\delta}\,\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}+\frac{d_{12}}{\delta}\,\frac{y_{12}}{d_{12}}$$
$$+\frac{d_{32}}{\delta}\,\frac{y_{32}}{d_{32}}+\frac{d_{42}}{\delta}\,\frac{y_{42}}{d_{42}}+\frac{d_{53}}{\delta}\,\frac{y_{53}}{d_{53}}, \quad . \ . \ (\text{II}, 16)$$

was wir symbolisch durch die Indices (0α — $\alpha 0$ — 12 — 32 — 42 — 53) ausdrücken wollen und gestattet die freie Wahl

Tafel II, 2. Berechnung der Dickenkonstanten aus den Formparametern.

Formparameter:

Dickenrücklage	$x_\delta = 2\,\xi_\delta - 1$
Nasenradius	$\dfrac{\varrho_\nu}{\delta^2} = \dfrac{r_\nu \cdot t}{d_{mx}^2}$
Vorderkantentangens	$\dfrac{\varepsilon}{\delta} = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi_v$
Scheitelkrümmung	$\varrho_\delta \cdot \delta = \dfrac{r_\delta \cdot d_{mx}}{t^2}$
Hinterkantentangens	$\dfrac{\varkappa}{\delta} = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi_H$



Dickenkonstanten:

$$\frac{d_{0\varepsilon}}{\delta} = \frac{1}{8}\,\frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \frac{d_{\varkappa 0}}{\delta} = \frac{1}{8}\,\frac{\varkappa}{\delta}$$

$$\frac{d_{12}}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_\nu}{\delta^2}}$$

$$\frac{d_{32}}{\delta} = a_0 + a_1\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_\nu}{\delta^2}} + \frac{1}{2}\,a_2\,\frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{a_3}{\varrho_\delta \cdot \delta} + \frac{1}{2}\,a_4\,\frac{\varkappa}{\delta}$$

$$\frac{d_{42}}{\delta} = b_0 + b_1\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_\nu}{\delta^2}} + \frac{1}{2}\,b_2\,\frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{b_3}{\varrho_\delta \cdot \delta} + \frac{1}{2}\,b_4\,\frac{\varkappa}{\delta}$$

$$\frac{d_{53}}{\delta} = c_0 + c_1\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_\nu}{\delta^2}} + \frac{1}{2}\,c_2\,\frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{c_3}{\varrho_\delta \cdot \delta} + \frac{1}{2}\,c_4\,\frac{\varkappa}{\delta}.$$

Berechnung der Konstanten a, b, c (vgl. Zahlentafel II, 4 und Kurvenblatt II, 1).

$$a_0 = \frac{5}{2}\,\frac{1 + 6\,x_\delta^2}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)\,(1 - x_\delta)^4}$$

$$a_1 = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{1 + x_\delta}$$

$$a_2 = -\frac{3}{8}\,\frac{1 - 2\,x_\delta + 2\,x_\delta^2}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 - x_\delta)^2}$$

$$a_3 = -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{1 - x_\delta^2}}{(1 - x_\delta)^3}$$

$$a_4 = -\frac{3}{8}\,\frac{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + 2\,x_\delta + 2\,x_\delta^2)}{(1 - x_\delta)^4}$$

$$b_0 = -\frac{3}{2}\,\frac{1 + 4\,x_\delta + 14\,x_\delta^2 + 16\,x_\delta^3}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)^3\,(1 - x_\delta)^4}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\,\frac{2 + 3\,x_\delta}{(1 + x_\delta)^3}$$

$$b_2 = \frac{1}{8}\,\frac{1 + 2\,x_\delta^2 + 6\,x_\delta^3}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)^2\,(1 - x_\delta)^2}$$

$$b_3 = \frac{1}{4}\,\frac{1 + 2\,x_\delta}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)\,(1 - x_\delta)^2}$$

$$b_4 = \frac{1}{8}\,\frac{1 + 16\,x_\delta + 22\,x_\delta^2 + 6\,x_\delta^3}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)\,(1 - x_\delta)^3}$$

$$c_0 = \frac{5}{2}\,\frac{1 + 2\,x_\delta + 4\,x_\delta^2}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)^3\,(1 - x_\delta)^4}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1 + x_\delta)^3}$$

$$c_2 = -\frac{1}{8}\,\frac{1 + 2\,x_\delta^2}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)^2\,(1 - x_\delta)^2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)\,(1 - x_\delta)^2}$$

$$c_4 = -\frac{1}{8}\,\frac{5 + 8\,x_\delta + 2\,x_\delta^2}{\sqrt{1 - x_\delta^2}\,(1 + x_\delta)\,(1 - x_\delta)^3}$$

Zahlentafel II, 8. Die 2. Differential-Quotienten der Dickenverteilungen.

x	$\frac{y''_{0\varepsilon}}{d_{0\varepsilon}}$	$\frac{y''_{\varkappa 0}}{d_{\varkappa 0}}$	$\frac{y''_{12}}{d_{12}}$	$\frac{y''_{32}}{d_{32}}$	$\frac{y''_{42}}{d_{42}}$	$\frac{y''_{53}}{d_{53}}$	$\frac{y''_{123}}{d_{123}}$
−0,95	−7,7	3,7	−74,003	13,301	4,074	−3,581	−65,689
−0,9	−7,4	3,4	−29,204	5,753	4,881	−3,648	−25,608
−0,8	−6,8	2,8	−11,700	−0,360	4,680	−2,016	−11,925
−0,6	−5,6	1,6	−4,100	−4,560	1,760	2,016	−6,950
−0,4	−4,4	0,4	−1,578	−5,315	−1,558	3,739	−4,900
−0,2	−3,2	−0,8	−0,275	−4,556	−4,115	2,704	−3,123
0	−2,0	−2,0	+0,500	−3,000	−5,000	0,000	−1,375
0,2	−0,8	−3,2	+0,966	−1,077	−4,115	−2,704	0,292
0,4	+0,4	−4,4	+1,206	0,864	−1,558	−3,739	1,746
0,6	+1,6	−5,6	+1,243	2,460	1,760	−2,016	2,781
0,8	+2,8	−6,8	+1,040	3,159	4,680	2,016	3,015
0,9	+3,4	−7,4	+0,788	2,808	4,881	3,648	2,543
0,95	+3,7	−7,7	+0,575	2,166	4,074	3,581	1,929
1,0	+4,0	−8,0	0	0	0	0	0

aller fünf Formparameter, während der Profiltyp N mit fünf Dickenkonstanten $(0\varepsilon — \varkappa 0 — 123 — 42 — 53)$

$$\frac{y_v}{\delta} = \frac{d_{0\varepsilon}}{\delta}\,\frac{y_{0\varepsilon}}{d_{0\varepsilon}} + \frac{d_{\varkappa 0}}{\delta}\,\frac{y_{\varkappa 0}}{d_{\varkappa 0}} + \frac{d_{123}}{\delta}\,\frac{y_{123}}{d_{123}} + \frac{d_{42}}{\delta}\,\frac{y_{42}}{d_{42}} + \frac{d_{53}}{\delta}\,\frac{y_{53}}{d_{53}} \quad \ldots \quad \text{(II, 17)}$$

nur vier freie Formparameter hat. Tafel II, 1 gibt einen Überblick über die einzelnen genannten Dickenverteilungen, ihre ersten beiden Ableitungen und ihre Eigenschaften an Profilnase und Hinterkante. Dazu gehören die Zahlenangaben der Zahlentafeln II, 1 bis II, 3[6]) und Bild II, 1. Für den allgemeinen Profiltyp sind die Dickenkonstanten aus den Formparametern nach Tafel II, 2 und Zahlentafel II, 4[1]) zu berechnen, für irgendwelche Profilkopplungen sind in Tafel II, 3 Angaben gemacht worden. Will man Günter-Piercy- oder NACA-Profile (Stack und v. Doenhoff) durch die hier gegebenen Profilformen darstellen oder einen Überblick über normale Größen der Formparameter gewinnen, so findet man in Tafel II, 4 die notwendigen Angaben.

Die Dickenanteile der hier gewonnenen Profilformen sind Sonderfälle der in [4] begonnenen unendlichen Reihe, die mit dem Schukowski-Profil beginnt:

$$\frac{y_x}{\delta} = \sum_\nu \frac{d_\nu}{\delta}\,\frac{y_\nu}{d_\nu} = \pm\,\frac{d_1}{\delta}\sqrt{1 - x^2}\,(1 - x)$$

$$\pm \sum_{\nu = 2}^{\nu} \frac{d_\nu}{\delta}\,(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,x^{\nu - 2} \quad . \; . \; . \quad \text{(II, 18)}$$

und einer zweiten vom Parabelzweieck (Kreisbogenzweieck) ausgehenden Reihe:

6) Die genauen Zahlenwerte sind mir von der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., freundlicherweise zur Verfügung gestellt worden.

$$\frac{y_K}{\delta} = \sum_{\sigma} \frac{d_\sigma}{\delta}\,\frac{y_\sigma}{d_\sigma} = \pm \sum_{\sigma=1}^{\sigma} \frac{d_\sigma}{\delta}\,(1-x^2)\,x^{\sigma-1} \qquad \text{(II, 19)}$$

so daß die allgemeinste Profilform (Tropfenform) mit

$$\frac{y_T}{\delta} = \frac{y_J}{\delta} + \frac{y_K}{\delta} \;\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(II, 20)}$$

gegeben ist. Diese Reihen sind ein zweckmäßiges Analogon zur allgemeinen Fourier-Reihe von Profilformen, in die diese Reihen übergeführt werden könnten. Tafel II, 5 zeigt die Zusammenhänge zwischen diesen allgemeinen Reihen (II, 18) und (II, 19) und den von uns gewählten Dickenverteilungen, die aus der Reihe so ausgewählt sind, daß sie an den Profilenden ($x = \pm 1$) mit den gewünschten Potenzen nach Null gehen.

Eine besondere Stelle nimmt das Schukowski-Profil ein. Es vermittelt nicht nur den Anschluß unserer Profilformen an die allgemeinen Reihen, sondern führt auch zum Übergang in die Ellipse. Führt man neben dem Schukowski-Profil

$$\frac{y_1}{\delta} = \pm \frac{d_1}{\delta}\sqrt{1-x^2}\,(1-x) \;\ldots\ldots \qquad \text{(II, 21}^{a}\text{)}$$

noch das an der y-Achse gespiegelte Profil ein

$$\frac{y_{-1}}{\delta} = \pm \frac{d_{-1}}{\delta}\sqrt{1-x^2}\,(1+x), \;\ldots\ldots \qquad \text{(II, 21}^{b}\text{)}$$

so erhält man mit der Summe beider Profile

$$\frac{y_e}{\delta} = \frac{y_1}{\delta} + \frac{y_{-1}}{\delta} = \pm \frac{d_1}{\delta}\sqrt{1-x^2}\left[1 + \frac{d_{-1}}{d_1} - \left(1 - \frac{d_{-1}}{d_1}\right)x\right] \;\ldots\ldots \qquad \text{(II, 22)}$$

bei beliebigem Verhältnis $\frac{d_{-1}}{d_1}$ ein auch an der Hinterkante abgerundetes Profil, das für $\frac{d_{-1}}{d_1} = 1$ und $\frac{d_1}{\delta} = \frac{1}{2}\frac{d_e}{\delta}$ in die Ellipse übergeht

$$\frac{y_e}{\delta} = \frac{d_e}{\delta}\sqrt{1-x^2} \;\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(II, 23)}$$

Zahlentafel II, 4. Zusammenfassung der Konstanten a_ν, b_ν, c_ν.

ξ_δ	$+a_0$	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$
0,20	3,767	3,750	0,5346	0,0488	0,0238
0,25	2,851	3,000	0,4811	0,0641	0,0320
0,30	2,319	2,500	0,4425	0,0835	0,0465
0,35	2,018	2,142	0,4140	0,1085	0,0726
0,40	1,907	1,875	0,3933	0,1417	0,1204
0,45	2,021	1,666	0,3800	0,1868	0,2089
0,50	2,500	1,500	0,3750	0,2500	0,3750
0,55	3,690	1,363	0,3815	0,3412	0,6938
0,60	6,437	1,250	0,4066	0,4784	1,3276
0,65	12,930	1,153	0,4653	0,6952	2,6520
0,70	29,466	1,071	0,5910	1,0607	5,6221

ξ_δ	$-b_0$	$+b_1$	$+b_2$	$+b_3$	$+b_4$
0,20	0,822	1,562	0,1617	−0,0610	−0,1884
0,25	1,368	2,000	0,1924	0,0000	−0,1924
0,30	1,214	1,851	0,1809	0,0463	−0,1875
0,35	1,008	1,603	0,1610	0,0886	−0,1688
0,40	0,911	1,367	0,1428	0,1328	−0,1262
0,45	1,022	1,165	0,1299	0,1845	−0,0404
0,50	1,500	1,000	0,1250	0,2500	0,1250
0,55	2,686	0,864	0,1315	0,3383	0,4427
0,60	5,381	0,752	0,1561	0,4651	1,0648
0,65	11,601	0,659	0,2123	0,6582	2,3338
0,70	26,987	0,583	0,3293	0,9741	5,0982

ξ_δ	$+c_0$	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$
0,20	9,238	7,812	0,6561	0,3051	0,0877
0,25	4,561	4,000	0,3849	0,2566	0,1283
0,30	2,761	2,314	0,2551	0,2319	0,1756
0,35	2,033	1,457	0,1867	0,2215	0,2368
0,40	1,826	0,976	0,1495	0,2214	0,3211
0,45	1,977	0,685	0,1307	0,2307	0,4425
0,50	2,500	0,500	0,1250	0,2500	0,6250
0,55	3,567	0,375	0,1307	0,2819	0,9117
0,60	5,623	0,289	0,1495	0,3322	1,3870
0,65	9,737	0,227	0,1867	0,4114	2,2275
0,70	18,715	0,182	0,2551	0,5412	3,8426

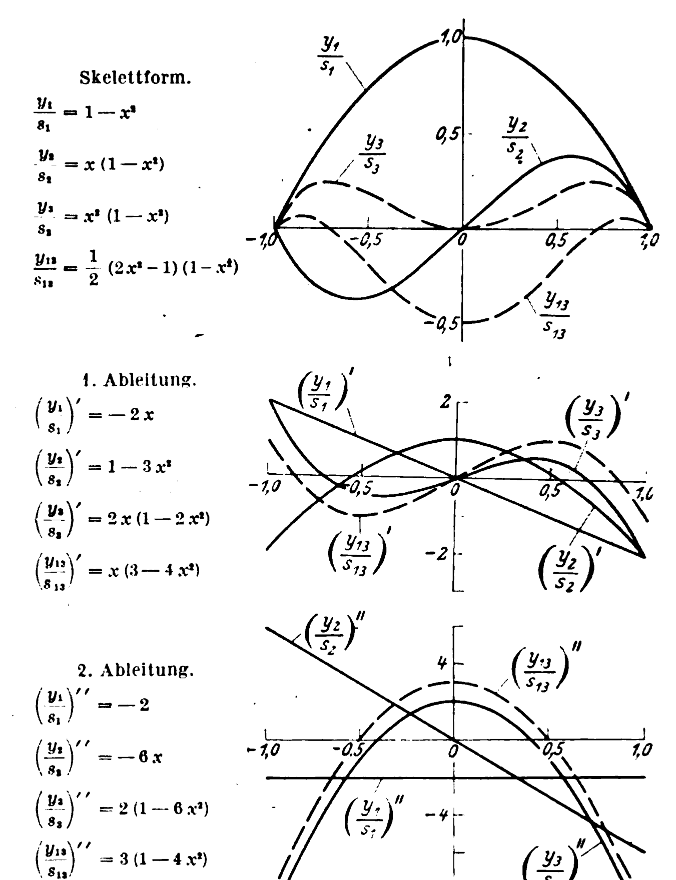


Bild II, 2. Die Skelettformen und ihre ersten beiden Ableitungen.

3. Die Skelettform und das gewölbte Profil.

Die Skelettform bilden wir aus den bekannten Birnbaumschen Wölbungsformen [1]. Am häufigsten gebraucht wird die Vereinigung des Kreisbogenskeletts (Bild II, 2 und Zahlentafel II, 5)

$$\frac{y_1}{s_1} = 1 - x^2 \;\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(II, 24)}$$

mit dem S-Schlag-Skelett (Bild II, 2 und Zahlentafel II, 6)

$$\frac{y_2}{s_2} = x(1 - x^2) \;\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(II, 25)}$$

zu der Skelettform

$$\frac{y_w}{\varphi_{mx}} = \frac{s_1}{\varphi_{mx}}\,\frac{y_1}{s_1} + \frac{s_2}{\varphi_{mx}}\,\frac{y_2}{s_2}, \;\ldots\ldots \qquad \text{(II, 26)}$$

wenn φ_{mx} die maximale Wölbung angibt. Die Wölbungskonstante s_1 gibt bei dieser Skelettform die Wölbung in Profilmitte $\frac{f}{t} = \varphi$ (in der »Hütte« ist $2\frac{f}{t} = \beta$ gesetzt) an: $2\frac{\varphi}{\varphi_{mx}} = \frac{s_1}{\varphi_{mx}}$, während die Konstante s_2 mit dem gebräuchlichen Wert γ zusammenfällt: $s_2 = -\gamma$.

Beide Werte sind mit der Wölbungsrücklage ξ_φ gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s_1}{\varphi_{mx}} &= \frac{6\,\xi_\varphi(1-\xi_\varphi) - 1}{4\,\xi_\varphi^2(1-\xi_\varphi)^2} \\ \frac{s_2}{\varphi_{mx}} &= \frac{2\,\xi_\varphi - 1}{4\,\xi_\varphi^2(1-\xi_\varphi)^2} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots \qquad \text{(II, 27)}$$

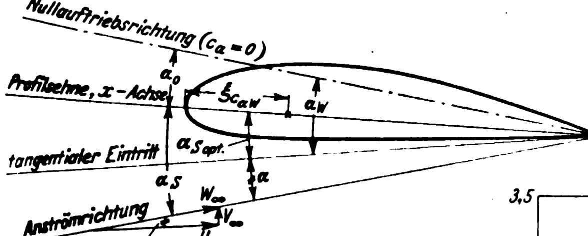
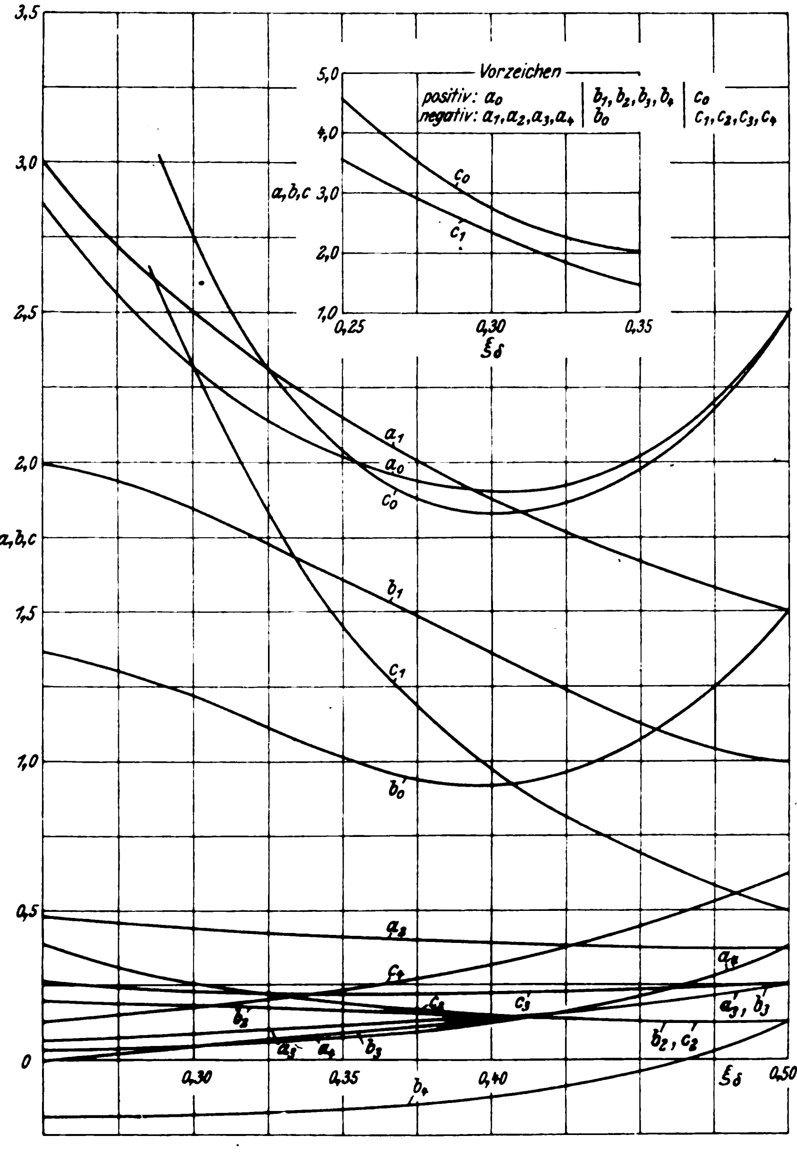


Bild II, 3 (links). Die ausgezeichneten Anblasrichtungen am Profil.

Kurvenblatt II, 1 (unten). Zur Berechnung der Dicken-Konstanten. Die Hilfskonstanten a), b), c) aufgetragen über ξ_δ.



Die aerodynamischen Eigenschaften dieser einparametrigen Skelettform hängen von den Wölbungskonstanten ab[7]). Die nur von der Wölbungskonstanten s_1 abhängige Auftriebszahl

$$c_{a\,W} = 2\pi\,\alpha_W = 2\pi\,s_1 \quad . \; . \quad (II, 28)$$

ist gegeben, wenn das Skelett gegenüber der Skelettsehne unter dem Winkel $\alpha_{s\,\mathrm{opt}}$ (Bild II, 3) des tangentialen Eintritts angestellt ist, bei dem an der Skelettnase kein Geschwindigkeitssprung auftritt. Dieser Anstellwinkel wird durch den S-Schlag bestimmt:

$$\alpha_{s\,\mathrm{opt}} = -\frac{1}{2}\,s_2 \quad . \; . \; . \quad (II, 29)$$

Der S-Schlag läßt die Auftriebszahl $c_{a\,W}$ ungeändert. Der Winkel zwischen Nullauftriebsrichtung und Profilsehne (Bild II, 3) heißt Nullauftriebswinkel und beträgt

$$\alpha_0 = \alpha_W - \alpha_{s\,\mathrm{opt}} = s_1 + \frac{1}{2}\,s_2 \quad (II, 30)$$

Unterscheidet sich die Anströmrichtung von der Anströmrichtung des tangentialen Eintritts um den Winkel α^*, so erhöht sich der Auftrieb $c_{a\,W}$ um den Wert $c_{a\,a} = 2\pi\,\alpha^*$ auf

$$c_a = c_{a\,W} + c_{a\,a} = 2\pi\,(s_1 + \alpha^*) = 2\pi\,\alpha \quad (II, 31)$$

In den meisten Fällen wird die Auftriebszahl c_a vorgegeben sein, so daß dann der Anstellwinkel α^* zu berechnen ist:

$$\alpha^* = \frac{c_a}{2\pi} - s_1 = \frac{c_{a\,a}}{2\pi} \quad . \; . \quad (II, 31^a)$$

[7]) Vgl. hierzu »Hütte«, [1] oder [4]. Sie sind außerdem im dritten Beitrag dieser Arbeit für allgemeine Fälle berechnet.

Zahlentafel II, 5. Die Skelettformen.

		Ordinaten			1. Ableitung			2. Ableitung		
x	ξ	y_1/s_1	y_2/s_2	y_{12}/s_{12}	y_1'/s_1	y_2'/s_2	y_{12}'/s_{12}	y_1''/s_1	y_2''/s_2	y_{12}''/s_{12}
−1,00	0	0	0	0	+2,0	−2,00	+1,00	−2,0	+6,0	−9,0
−0,95	0,025	0,0975	−0,093	+0,0382	+1,9	−1,775	+0,579	−2,0	+5,7	−7,8
−0,90	0,05	0,19	−0,171	+0,059	+1,8	−1,43	+0,215	−2,0	+5,4	−6,72
−0,80	0,1	0,36	−0,288	+0,0504	+1,6	−0,96	−0,352	−2,0	+4,8	−4,68
−0,60	0,2	0,64	−0,384	−0,0896	+1,2	−0,08	−0,936	−2,0	+3,6	−1,32
−0,40	0,3	0,84	−0,336	−0,286	+0,8	+0,42	−0,984	−2,0	+2,4	+1,08
−0,20	0,4	0,96	−0,192	−0,441	+0,4	+0,88	−0,568	−2,0	+1,2	+2,52
0	0,5	1,00	0	−0,500	0	+1,00	0	−2,0	0	+3,00
+0,20	0,6	0,96	+0,192	−0,441	−0,4	+0,88	+0,568	−2,0	−1,2	+2,52
+0,40	0,7	0,84	+0,336	−0,286	−0,8	+0,42	+0,984	−2,0	−2,4	+1,08
+0,60	0,8	0,64	+0,384	−0,0896	−1,2	−0,08	+0,936	−2,0	−3,6	−1,32
+0,80	0,9	0,36	+0,288	+0,0504	−1,6	−0,96	+0,352	−2,0	−4,8	−4,68
+0,90	0,95	0,19	+0,171	+0,059	−1,8	−1,43	−0,215	−2,0	−5,4	−6,72
+0,95	0,975	0,0975	+0,093	+0,0382	−1,9	−1,775	−0,579	−2,0	−5,7	−7,8
+1,00	1,000	0	0	0	−2,0	−2,00	−1,00	−2,0	−6,0	−9,0

Tafel II, 8. Berechnung gekoppelter Formparameter.

$$a_1^* = \begin{cases} a_1 & \text{für Profiltyp } A \\ a_1 - \frac{5}{8} & \text{für Profiltyp } N \end{cases}$$

1. Eine Dickenkonstante Null:

$$\frac{d_{32}}{\delta} = 0: \quad -\frac{\varkappa}{\delta} = 2\left[\frac{a_0}{a_4} + \frac{a_1^*}{a_4}\Big|\,\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_s}{\delta^2} + \frac{a_2}{a_4}\,\frac{\varepsilon}{2\,\delta} + \frac{a_3}{a_4}\,\frac{1}{\varrho_s\cdot\delta}\right]$$

$$\frac{d_{42}}{\delta} = 0: \quad -\frac{\varkappa}{\delta} = 2\left[\frac{b_0}{b_4} + \frac{b_1}{b_4}\Big|\,\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_s}{\delta^2} + \frac{b_2}{b_4}\,\frac{\varepsilon}{2\,\delta} + \frac{b_3}{b_4}\,\frac{1}{\varrho_s\cdot\delta}\right]$$

$$\frac{d_{53}}{\delta} = 0: \quad -\frac{\varkappa}{\delta} = 2\left[\frac{c_0}{c_4} + \frac{c_1}{c_4}\Big|\,\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_s}{\delta^2} + \frac{c_2}{c_4}\,\frac{\varepsilon}{2\,\delta} + \frac{c_3}{c_4}\,\frac{1}{\varrho_s\cdot\delta}\right]$$

2. Zwei Dickenkonstanten Null:

$$\frac{d_{53}}{\delta} = 0 \text{ und } \frac{d_{42}}{\delta} = 0: \quad -\frac{1}{\varrho_s\cdot\delta} = \frac{c_0\,b_4 - b_0\,c_4}{c_3\,b_4 - b_3\,c_4} + \frac{c_1\,b_4 - b_1\,c_4}{c_3\,b_4 - b_3\,c_4}\Big|\,\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_s}{\delta^2} + \frac{1}{2}\,\frac{c_2\,b_4 - b_2\,c_4}{c_3\,b_4 - b_3\,c_4}\,\frac{\varepsilon}{\delta}$$

$-\frac{\varkappa}{\delta}$ wird nach 1. für $\frac{d_{53}}{\delta} = 0$ oder $\frac{d_{42}}{\delta} = 0$ berechnet.

$$\frac{d_{53}}{\delta} = 0 \text{ und } \frac{d_{32}}{\delta} = 0: \quad -\frac{1}{\varrho_s\cdot\delta} = \frac{c_0\,a_4 - a_0\,c_4}{c_3\,a_4 - a_3\,c_4} + \frac{c_1\,a_4 - a_1^*\,c_4}{c_3\,a_4 - a_3\,c_4}\Big|\,\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_s}{\delta^2} + \frac{1}{2}\,\frac{c_2\,a_4 - a_2\,c_4}{c_3\,a_4 - a_3\,c_4}\,\frac{\varepsilon}{\delta}$$

$-\frac{\varkappa}{\delta}$ wird nach 1. für $\frac{d_{53}}{\delta} = 0$ oder $\frac{d_{32}}{\delta} = 0$ berechnet.

$$\frac{d_{42}}{\delta} = 0 \text{ und } \frac{d_{32}}{\delta} = 0: \quad -\frac{1}{\varrho_s\cdot\delta} = \frac{a_0\,b_4 - b_0\,a_4}{a_3\,b_4 - b_3\,a_4} + \frac{a_1^*\,b_4 - b_1\,a_4}{a_3\,b_4 - b_3\,a_4}\Big|\,\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_s}{\delta^2} + \frac{1}{2}\,\frac{a_2\,b_4 - b_2\,a_4}{a_3\,b_4 - b_3\,a_4}\,\frac{\varepsilon}{\delta}$$

$-\frac{\varkappa}{\delta}$ wird nach 1. für $\frac{d_{42}}{\delta} = 0$ oder $\frac{d_{32}}{\delta} = 0$ berechnet.

3. Drei Dickenkonstanten Null: vgl. Gl. (II, 7 a) u. Gl. (II, 13 a).

Für die Konstanten a, b, c vgl. Zahlentafel II, 4.

Gibt man jetzt für ein Profil den Nullauftriebswinkel α_0 und die Auftriebszahl vor, so sind die Konstanten s_1 und s_2 ebenfalls gegeben.

Das kopflastige Moment um die Skelettnase ist allgemein

$$c_m = c_{m\,o} + \frac{1}{4}\,c_a = c_{m\,o} + \frac{1}{4}\,(c_{a\,w} + c_{a\,\alpha}) \qquad (\text{II}, 32)$$

und $c_{m\,o}$ das Sturzflugmoment bei Nullauftrieb ($c_{a\,\alpha} = -c_{a\,w}$) für den vorliegenden Wölbungstyp

$$c_{m\,o} = \frac{\pi}{2}\left(s_1 + \frac{3}{4}\,s_2\right) \quad \ldots\ldots \quad (\text{II}, 33)$$

Das Moment um den Einviertelpunkt ($x = -0{,}50$)

$$c_{m\,0\,25} = c_m - \frac{1}{4}\,c_a = c_{m\,o} \quad \ldots\ldots \quad (\text{II}, 34)$$

ist stets vom Anstellwinkel α^* unabhängig. Der Einviertelpunkt ist also der Neutralpunkt des Skelettes. Die Druckpunktlage des Profiles ist $\xi_{c_a} = \frac{c_m}{c_a} = \frac{1}{4} + \frac{c_{m\,o}}{c_a}$, sie ist von c_a unabhängig, wenn das Sturzflugmoment verschwindet, wenn also nach Gl. (II, 33)

$$s_2 = -\frac{4}{3}\,s_1, \left(\frac{s_2}{\varphi_{m\,x}} = -\frac{4}{3}\,\frac{s_1}{\varphi_{m\,x}}\right) \quad \ldots \quad (\text{II}, 35)$$

ist; das Profil ist dann druckpunktfest und der Druckpunkt liegt bei $\xi_{c_a} = 0{,}25$, ($x_{c_a} = -0{,}50$).

Für diese einparametrige Skelettform (später mit $B\,I$ bezeichnet) ist die von der Wölbungsform unabhängige Auftriebszahl bei tangentialem Eintritt durch die Profilwölbung φ in Profilmitte gegeben: $c_{a\,w} = 4\,\pi\,\varphi$. In der Praxis ist es üblich, das Sturzflugmoment $c_{m\,o}$ mit dem $c_{m\,o\,\varphi}$ der Kreisbogenwölbung φ ins Verhältnis zu setzen:

$$\left(\frac{c_{m\,o}}{c_{m\,o\,\varphi}}\right)_{B\,I} = \frac{c_{m\,o}}{c_{m\,o\,w}} = 4\,\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}} = 1 + \frac{3}{4}\,\frac{s_2}{s_1}\,.$$

Da für allgemeinere Wölbungsformen die Wölbung φ in Profilmitte nicht mehr für $c_{m\,o\,w}$ maßgebend ist ($c_{m\,o\,\varphi} \neq c_{m\,o\,w}$), wird dann das Verhältnis $\frac{c_{m\,o}}{c_{m\,o\,\varphi}}$ nicht mehr charakteristisch für die Wölbungsform, so daß es als Formparameter nicht verwendet werden kann. Wir bilden deshalb das Verhältnis $\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}} = \xi\,(c_{a\,w}) - \frac{1}{4}$ als ein Maß für die Güte des Skelettes, das für die einparametrige Skelettform übergeht in $\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}} = \frac{1}{4}\left(\frac{c_{m\,o}}{c_{m\,o\,\varphi}}\right)_{B\,I}$. Dieser Wert, welcher der zweite Formparameter der Skelettform sein wird, ist hier mit

$$\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{s_2}{s_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (\text{II}, 36)$$

gegeben. Für die einparametrige Skelettform sind in Bild II, 4 aufgetragen über dem Formparameter (Wölbungsrücklage) ξ_φ die Wölbungskonstanten $\frac{s_1}{\varphi_{m\,x}}$ und $\frac{s_2}{\varphi_{m\,x}}$ und die aerodynamischen Größen $\frac{\alpha_0}{\varphi_{m\,x}}$, $\frac{c_{a\,w}}{\varphi_{m\,x}}$ und $\frac{c_{m\,o}}{c_{m\,o\,w}} = 4\,\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}$. Der Formparameter $\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}$ ist durch ξ_φ festgelegt.

Will man die bisherige Kopplung zwischen der Wölbungsrücklage ξ_φ und der Druckpunktlage $\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}$ etwas lockern, so wird man eine weitere Wölbungsverteilung hinzunehmen. Nach Gl. (II, 24) und (II, 25) würde die Wölbungsform (Bild II, 2 und Tafel II, 6)

$$\frac{y_3}{s_3} = x^2\,(1 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{II}, 37)$$

folgen. Diese liefert aber Beiträge zum Auftrieb und zum Moment:

$$c_{a\,w} = \pi\,s_3;\; c_{m\,o\,w} = \frac{\pi}{4}\,s_3,$$

die unerwünscht sind und die mit den Beiträgen einer zusätzlichen Wölbungsform $\frac{y_1^*}{s_1^*} = 1 - x^2$: $c_{a\,w} = 2\,\pi\,s_1^*$, $c_{m\,o\,w} = \frac{\pi}{2}\,s_1^*$ zum Verschwinden gebracht werden können.

Tafel II, 4. Die Formparameter bekannter Profiltypen.

a) der Günter-Piercy-Profile:

$$a_1 = \sqrt{2\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}}; \quad a_2^2 = \frac{1}{4\,(1-\xi_\delta)}\left(\frac{\varkappa^2}{\delta^2} - \frac{1}{\xi_\delta\,(1-\xi_\delta)^2}\right)$$

Nasenradius:

$$\frac{\varrho_N}{\delta^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1-2\,\xi_\delta}{\xi_\delta\,(1-\xi_\delta)^3};$$

Vorderkantentangens:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{1}{4} \leq \xi_\delta < \frac{1}{2}; \\ \frac{\varkappa}{\delta} & \text{für } \xi_\delta = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\eta}{\delta} = \sqrt{\xi\,(a_1^2 + a_2^2\,\xi)}\,(1-\xi); \text{ für } 0 \leq \xi \leq 1}$$

Freier Formparameter: ξ_δ Dickenrücklage

Scheitelkrümmung:

$$\frac{1}{\varrho_\delta \cdot \delta} = \frac{1}{2\,(1-\xi_\delta)^2}\left[3 + \frac{1}{\xi_\delta^2}\,(1-\xi_\delta)\,(1-3\,\xi_\delta)\right]$$

Hinterkantentangens:

$$\frac{\varkappa}{\delta} = \frac{\sqrt{4\,\xi_\delta - 1}}{\xi_\delta\,(1-\xi_\delta)};$$

b) der Stack- und v. Doenhoff-(N.A.C.A.)-Profile:

$$a_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{\varrho_N}{\delta^2}};$$

$$b_1 = \xi_\delta\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa}{\delta}\cdot\frac{1}{1-\xi_\delta} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1-2\,\xi_\delta}{\xi_\delta^2\,(1-\xi_\delta)^2} - \frac{15}{8}\,\frac{a_1}{\xi_\delta\sqrt{\xi_\delta}}\right]$$

$$b_2 = -2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa}{\delta}\cdot\frac{1}{1-\xi_\delta} + \frac{3}{4}\,\frac{1-2\,\xi_\delta-\xi_\delta^2}{\xi_\delta^2\,(1-\xi_\delta)^2} - \frac{5}{8}\,\frac{a_1}{\xi_\delta\sqrt{\xi_\delta}}\right]$$

$$b_3 = \frac{1}{\xi_\delta}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa}{\delta}\,\frac{1}{1-\xi_\delta} + \frac{1}{2}\,\frac{1-2\,\xi_\delta-2\,\xi_\delta^2}{\xi_\delta^2\,(1-\xi_\delta)^2} - \frac{3}{8}\,\frac{a_1}{\xi_\delta\sqrt{\xi_\delta}}\right]$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa}{\delta};$$

$$B_2 = \frac{1}{(1-\xi_\delta)^2}\left[\frac{3}{2} - \frac{\varkappa}{\delta}\,(1-\xi_\delta)\right];$$

$$B_3 = -\frac{1}{(1-\xi_\delta)^3}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa}{\delta}\,(1-\xi_\delta)\right];$$

Vorderkantentangens: $\frac{\varepsilon}{\delta} = 2\,b_1$;

Scheitelkrümmung: $\frac{1}{\varrho_\delta \cdot \delta} = \frac{3 - \frac{\varkappa}{\delta}\,(1-\xi_\delta)}{(1-\xi_\delta)^2}$;

Hinterkantentangens:

Interpolationsformel für $\frac{\varkappa}{\delta}$:

$$\frac{\varkappa}{\delta} \approx \frac{2{,}24 - 5{,}42\,\xi_\delta + 12{,}3\,\xi_\delta^2}{1 - 0{,}878\,\xi_\delta};$$

wenn $0{,}2 \leq \xi_\delta \leq 0{,}5$!

$$\boxed{\frac{\eta_1}{\delta} = a_1\sqrt{\xi} + b_1\,\xi + b_2\,\xi^2 + b_3\,\xi^3; \text{ für } 0 \leq \xi \leq \xi_\delta}$$

$$\boxed{\frac{\eta_2}{\delta} = B_1\,(1-\xi) + B_2\,(1-\xi)^2 + B_3\,(1-\xi)^3; \text{ für } \xi_\delta \leq \xi \leq 1}$$

Freie Formparameter: ξ_δ, $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ und in engen Grenzen auch $\frac{\varkappa}{\delta}$.

Anhaltspunkte für $\frac{\varkappa}{\delta}$:

ξ_δ	$\frac{\varkappa}{\delta}$
0,2	2,00
0,3	2,34
0,4	3,15
0,5	4,65
0,6	7,00

c) der Profile, die bis zum Dickenmaximum aus Ellipsen gebildet werden:

Nasenradius:

$$\frac{\varrho_N}{\delta^2} = \frac{1}{4\,\xi_\delta};$$

Scheitelkrümmung:

$$\frac{1}{\varrho_\delta \cdot \delta} = \frac{1}{2 \cdot \xi_\delta^2};$$

Vorderkantentangens: $\frac{\varepsilon}{\delta} = 0$;

$$\boxed{\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\xi - \xi_\delta}{\xi_\delta}\right)^2}; \text{ für } \xi \leq \xi_\delta}$$

Freier Formparameter: ξ_δ.

wenn wir aus beiden Formen eine neue bilden (Bild II, 2) und Tafel II, 6) mit $s_1^* = -\frac{1}{2}\,s_3$:

$$\frac{y_{13}}{s_{13}} = \frac{y_3}{s_3} - \frac{1}{2}\,\frac{y_1^*}{s_1^*} = \frac{1}{2}\,(2\,x^2 - 1)\,(1 - x^2) \qquad (\text{II}, 38)$$

Für sie ist also $c_{aW} = c_{m0W} = \alpha_{s\,opt} = \alpha_0 = 0$.

Mit den bisherigen Wölbungsanteilen zusammen bildet $\frac{y_{13}}{s_{13}}$ die Skelettform

$$\frac{y_W}{\varphi_{mx}} = \frac{s_1}{\varphi_{mx}}\,\frac{y_1}{s_1} + \frac{s_2}{\varphi_{mx}}\,\frac{y_2}{s_2} + \frac{s_{13}}{\varphi_{mx}}\,\frac{y_{13}}{s_{13}}, \qquad (\text{II}, 39)$$

deren aerodynamische Eigenschaften unabhängig von der Konstanten $\frac{s_{13}}{\varphi_{mx}}$ bleiben. Berechnet man die Skelettform aus den Profiltangenten in den Punkten $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $x = 0$ (vgl. z. B. A. Betz: Durand, Bd. IV, S. 31) oder aus den Ordinaten in den Punkten $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, die sich genauer bestimmen lassen als die Tangenten, so bleibt der Einfluß der Wölbungsform $\frac{y_{13}}{s_{13}}$ unberücksichtigt und deshalb frei wählbar[8]). Ebenso bleibt aber auch der Formparameter

[8]) Dann ist:

$$\frac{\alpha_0}{\varphi_{mx}} = 1{,}707\left(\frac{y}{\varphi_{mx}}\right)_{+\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 0{,}293\left(\frac{y}{\varphi_{mx}}\right)_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$\frac{\alpha_{s\,opt}}{\varphi_{mx}} = 0{,}707\left[\left(\frac{y}{\varphi_{mx}}\right)_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \left(\frac{y}{\varphi_{mx}}\right)_{+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right].$$

Tafel II, 5. Zusammenhang zwischen den einziffrigen und den mehrziffrigen Dickenverteilungen:

$\frac{y_{12}}{d_{12}} = \frac{y_1}{d_1} - \frac{1}{2}\frac{y_2}{d_2}$	$d_{12} = d_1$	$d_1 = d_{12} + d_{123}$
$\frac{y_{32}}{d_{32}} = \frac{y_2}{d_2} - \frac{y_3}{d_3}$	$d_{32} = -\left(d_3 + d_5 + \frac{5}{8} d_{123}\right)$	$d_2 = -\frac{1}{2} d_{12} + \frac{1}{8} d_{123} + d_{32} + d_{42}$
$\frac{y_{42}}{d_{42}} = \frac{y_2}{d_2} - \frac{y_4}{d_4}$	$d_{42} = -d_4$	$d_3 = -d_{32} - \frac{5}{8} d_{123} + d_{53}$
$\frac{y_{53}}{d_{53}} = \frac{y_3}{d_3} - \frac{y_5}{d_5}$	$d_{53} = -d_5$	$d_4 = -d_{42}$
$\frac{y_{0a}}{d_{0a}} = \frac{y_0}{d_0} - \frac{y_a}{d_a}$	$2\, d_{0a} = d_0 - d_a$	$d_5 = -d_{53}$
$\frac{y_{a0}}{d_{a0}} = \frac{y_0}{d_0} + \frac{y_a}{d_a}$	$2\, d_{a0} = d_0 + d_a$	$d_0 = d_{a0} + d_{0a}$
$\frac{y_{123}}{d_{123}} = \frac{y_1}{d_1} + \frac{1}{8}\frac{y_2}{d_2} - \frac{5}{8}\frac{y_3}{d_3}$	$d_{123} = d_1$	$d_a = d_{a0} - d_{0a}$

Zusammenhang zwischen den Kawalki- und den Birnbaum-Skeletten.

$$\xi_q = 1 - \sqrt{\frac{1}{n+1}} : \left(\frac{s_1}{\varphi_{m\,x}}\right)_{Kn} = \frac{1}{2\,\xi_q\,(1-\xi_q)\left[1 + \sum_n \frac{s_n}{s_1}(2\,\xi_q - 1)^{n-1}\right]}.$$

Kawalki-Kn: $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Rekursionsformel: nach F. Kalscheuer

$$\left(\frac{s_n}{s_1}\right)_{Kn} = (-1)^{n-1}\frac{(a_n)_{Kn}}{(a_1)_{Kn}} \quad \bullet \quad \begin{cases}(a_1)_{Kn} = 2\,(a_1)_{K(n-1)} + 1\\ (a_n)_K = (a_{n-1})_{K(n-1)} + (a_n)_{K(n-1)}\end{cases}$$

Beispiele:

Kn \ $\left(\frac{s_n}{s_1}\right)_{Kn}$	$\left(\frac{s_2}{s_1}\right)_{Kn}$	$\left(\frac{s_3}{s_1}\right)_{Kn}$	$\left(\frac{s_4}{s_1}\right)_{Kn}$	$\left(\frac{s_5}{s_1}\right)_{Kn}$	$\left(\frac{s_6}{s_1}\right)_{Kn}$	$\left(\frac{s_7}{s_1}\right)_{Kn}$	$\left(\frac{s_8}{s_1}\right)_{Kn}$
$n = 1$	0/1						
2	— 1/3	0/3					
3	— 4/7	+ 1/7	0				
4	— 11/15	+ 5/15	— 1/15	0			
5	— 26/31	+ 16/31	— 6/31	+ 1/31	0		
6	— 57/63	+ 42/63	— 22/63	+ 7/63	— 1/63	0	
7	— 120/127	+ 99/127	— 64/127	+ 29/127	— 8/127	+ 1/127	0

$\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}$ für beliebige Werte von $\frac{s_{13}}{\varphi_{m\,x}}$ ungeändert, die aus dem Formparameter $\xi_q \lessgtr \frac{1}{2}$ berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{s_2}{s_1} &= -\frac{4}{3}\left(1 - 4\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}\right) \qquad x_q = 2\,\xi_q - 1\\
\frac{s_{13}}{s_1} &= \frac{2\,x_q + \frac{4}{3}\left(1 - 4\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}\right)(1 - 3\,x_q^2)}{x_q\,(3 - 4\,x_q^2)}\\
\frac{s_1}{\varphi_{m\,x}} &= \frac{2}{(1 - x_q^2)\left(1 + \frac{s_2}{s_1}x_q + \frac{s_{13}}{s_1}\frac{2\,x_q^2 - 1}{2}\right)} = \frac{1}{2\pi}\frac{c_{a\,w}}{\varphi_{m\,x}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II, 40)}$$

In manchen Fällen wird man auf die Skelettgeometrie mehr Wert legen als auf die Festlegung von ξ_q und $\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}$, wenn nur $\xi_q < 1/2$ und damit $\frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}}$ kleiner ist als beim Kreisbogen. So kann man die zweiparametrige Skelettform (später mit *B II* bezeichnet) dadurch bestimmen, daß man die Hinterkante ($x = +1$) möglichst gradlinig macht. Man erreicht das dadurch, daß das Skelett im Punkt $x = +1$ einen Wendepunkt hat $\left(\text{Krümmung } \frac{1}{\varrho} = 0\right)$ und daß außerdem die Tangente der Krümmung in diesem Punkt Null ist $\left(\frac{d}{d\,x}\frac{1}{\varrho}\right)_{x=+1} = 0$. Dann erhalten wir eine von K. H. Kawalki auf andere Weise dargestellte Kopplung der Wölbungsanteile:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{s_2}{s_1} = -\frac{8}{15},\ \frac{s_{13}}{s_1} = +\frac{2}{15};\ \frac{s_1}{\varphi_{m\,x}} = 1{,}982\\
&\xi_q = 0{,}370,\ x_q = -0{,}260\\
&\alpha_0 = 1{,}452\,\varphi_{m\,x},\ c_{a\,w} = 12{,}46\,\varphi_{m\,x},\ \frac{c_{m\,o}}{c_{a\,w}} = 0{,}15
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II, 41)}$$

Diese Kopplung ist der Spezialfall ($n = 3$) (später mit *K 3* bezeichnet) einer allgemeineren gekoppelten Skelettform von K. H. Kawalki mit möglichst gradlinigem Verlauf im hinteren Teil des Skeletts, was damit erreicht wird, daß alle höheren als die erste Ableitung im Punkt $x = +1$ Null sein müssen[9]) ($-1 < x \leq +1$):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{y_w}{\varphi_{m\,x}} = \frac{2\,(n+1)}{n\,(1-\xi_q)}\,\frac{1-x}{2}\left[1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^n\right]\\
&\xi_q = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}};\ x_q = 1 - 2\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II, 42)}$$

[9]) Diese sehr einfache Darstellung der Kawalki-Kopplung ist mir von Herrn Dr. R. Irrgang mitgeteilt worden.

Tafel II, 6. Birnbaum-Skelett: vgl. Zahlentafel II, 5.

$$\frac{y_W}{\varphi_{mx}} = \frac{s_1}{\varphi_{mx}} \frac{y_1}{s_1} + \frac{s_2}{\varphi_{mx}} \frac{y_2}{s_2} + \text{usw.}$$

Wölbungsformen	Wölbungsteilungen $\frac{y_n}{s_n}$	1. Ableitung $\frac{y_n'}{s_n}$	2. Ableitung $\frac{y_n''}{s_n}$	$\frac{\alpha_{S\,opt\,n}}{s_n}$	$\frac{c_{a\,W\,n}}{s_n}$	$\frac{c_{m\,on}}{s_n}$
$\frac{y_1}{s_1}$	$1 - x^2$	$-2x$	-2	0	2π	$\pi/2$
$\frac{y_2}{s_2}$	$x(1 - x^2)$	$1 - 3x^2$	$-6x$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{8}\pi$
$\frac{y_{13}}{s_{13}}$	$\frac{1}{2}(2x^2 - 1)(1 - x^2)$	$x(3 - 4x^2)$	$3(1 - 4x^2)$	0	0	0

Kawalki-Skelett Kn: vgl. Zahlentafel II, 6.

	$\frac{y_W}{\varphi_{mx}}$	$\frac{y_W'}{\varphi_{mx}}$	$\frac{y_W''}{\varphi_{mx}}$	$\frac{\alpha_{S\,opt}}{\varphi_{mx}}$	$\frac{c_{a\,W}}{\varphi_{mx}}$	$\frac{c_{mo}}{\varphi_{mx}}$
$n = 3$, $\xi_\varphi = 0{,}370$	$4{,}24\,\frac{1-x}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^3\right]$	$2{,}12\left[4\left(\frac{1-x}{2}\right)^3 - 1\right]$	$3{,}18\,(1-x)^2$	0,529	$2\pi \cdot 1{,}982$	$\pi \cdot 0{,}595$
$n = 5$, $\xi_\varphi = 0{,}301$	$3{,}435\,\frac{1-x}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^5\right]$	$1{,}718\left[6\left(\frac{1-x}{2}\right)^5 - 1\right]$	$1{,}611\,(1-x)^4$	0,819	$2\pi \cdot 2{,}115$	$\pi \cdot 0{,}453$

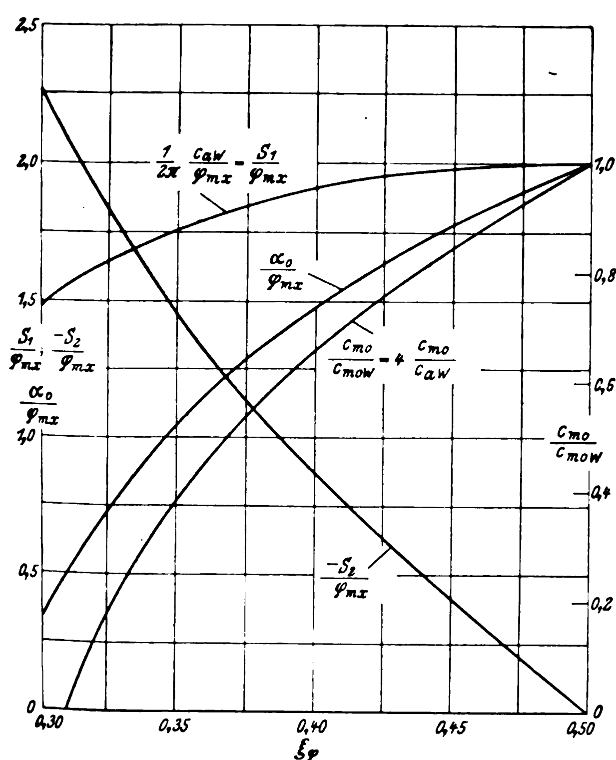


Bild II, 4. Die Konstanten der einparametrigen Skelettform (BI).

Sie ist ein Sonderfall der allgemeinen Birnbaumschen Skelettform

$$\frac{y_W}{\varphi_{mx}} = \sum_n \frac{s_n}{\varphi_{mx}} \frac{y_n}{s_n} = \sum_n \frac{s_n}{\varphi_{mx}} (1 - x^2)\, x^{n-1}, \quad (\text{II}, 43)$$

für welche die Wölbungskonstanten $\frac{s_n}{\varphi_{mx}}$ beliebig gewählt, alle aerodynamischen Eigenschaften und die Geschwindig-

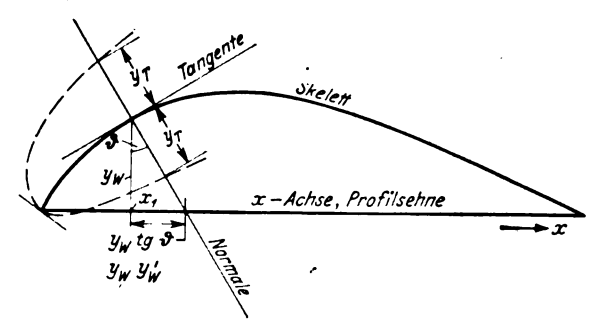


Bild II, 5. Der Aufbau des gewölbten Profils aus Tropfen und Wölbungsform.

keitsverteilung längs der Profiltiefe im dritten Beitrag zur Profilforschung berechnet werden. Die entsprechenden Werte für die allgemeine Kawalki-Kopplung sind dort ebenfalls angegeben.

Die Profilform des gewölbten Profiles muß aus den Ordinaten des symmetrischen Profiles (Tropfenform) und des Skelettes gewonnen werden. Die Ordinaten des Tropfens sollen auf dem Skelett senkrecht (Bild II, 5) stehen, sind also auf der Normalen des Skelettes aufzutragen[10]). Bei schwach gewölbten Profilen kann man sich die Konstruktion der Wölbungsnormalen sparen und die Profilordinate durch Addition der Ordinaten gewinnen:

$$\frac{y}{\delta} \approx \frac{\varphi_{mx}}{\delta} \frac{y_W}{\varphi_{mx}} \pm \frac{y_T}{\delta}, \ldots\ldots \quad (\text{II}, 44)$$

wenn das positive Vorzeichen für die Oberseite, das negative für die untere Seite des Profiles gilt. In beiden Fällen reicht das Skelett bis in den vordersten Nasenpunkt. Die Konstruktion der Normalen ergibt sich aus Bild II, 5

[10]) Die in [4] angegebene Konstruktion der Profile mit Hilfe der dem symmetrischen Profil (Tropfen) einbeschriebenen Kreise stimmt im allgemeinen bis auf die Umgebung der Profilnase mit der Methode der Normalen überein. Jedoch gibt man mit der Normalen das Profil punktweise an, während es sich mit den einbeschriebenen Kreisen nur als Einhüllende darstellt, die nicht sehr genau gezeichnet werden kann.

Zahlentafel II, 6. Die Koordinaten der Kawalki-Skelette.

$$\frac{y_W}{\varphi_{mx}} = \frac{2(n+1)}{n(1-\xi_\varphi)}\,\frac{1-x}{2}\left[1-\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\right] \qquad \xi_\varphi = 1-\sqrt[n]{\frac{1}{1+n}}.$$

x	ξ	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	
	$\xi_\varphi =$	0,370	0,3313	0,3012	0,2770	0,257	Wölbungsrücklage
−1,00	0	0	0	0	0	0	
−0,95	0,025	0,3018	0,3510	0,3982	0,4434	0,4872	
−0,90	0,05	0,5736	0,6588	0,7380	0,8122	0,8816	
−0,80	0,1	1,0324	1,1572	1,2656	1,3610	1,4444	
−0,60	0,2	1,6526	1,7658	1,8474	1,9050	1,9450	
−0,40	0,3	1,9468	1,9886	1,9998	1,9932	1,9762	
−0,20	0,4	1,9912	1,9524	1,9002	1,8460	1,7942	
0	0,5	1,8520	1,7524	1,6634	1,5884	1,5262	$\frac{y_W}{\varphi_{mx}}$
0,20	0,6	1,5848	1,4572	1,3600	1,2856	1,2284	
0,40	0,7	1,2356	1,1126	1,0378	0,9674	0,9230	
0,60	0,8	0,8400	0,7466	0,6866	0,6454	0,6152	
0,80	0,9	0,4228	0,3738	0,3434	0,3228	0,3076	
0,90	0,95	0,2116	0,1870	0,1716	0,1614	0,1538	
0,95	0,975	0,1008	0,0935	0,0858	0,0807	0,0769	
1,00	1,000	0	0	0	0	0	
—	Zwischenpunkte						
−0,925	0,0375	0,442	0,510	0,576	0,637	0,694	
−0,975	0,0125	0,1548	0,1812	0,2068	0,2316	0,2560	$\frac{y_W}{\varphi_{mx}}$ für Zwisch.-Punkte
−0,985	0,0075	0,0936	0,1096	0,1254	0,1406	0,156	
−0,995	0,0025	0,0320	0,0370	0,0426	0,0478	0,0532	
	$\alpha_{s\,opt}/\varphi_{mx}$	0,529	0,686	0,819	0,934	1,040	Anstellw. d. tangent. Eintritts
	c_{aW}/φ_{mx}	12,46	12,84	13,29	13,72	14,15	Wölb.-Auftrieb
	c_{m0}/φ_{mx}	1,870	1,605	1.423	1,288	1,180	Sturzflugmoment

4. Symbolik der Profilformen.

Zur Bezeichnung der einzelnen Profilformen ist eine symbolische Schreibweise vorteilhaft, welche über die verwendeten Dicken- und Wölbungsverteilungen und über die gewählten Formparameter übersichtlich Auskunft gibt.

Bei den symmetrischen Profilen unterscheiden wir nach den verschiedenen Nasenformen der Tropfen. Der allgemeine Tropfentyp mit der Nase

$$\frac{\eta}{\delta} = a_1\,\xi^{1/2} + b_1\,\xi + a_2\,\xi^{3/2} + b_2\,\xi^2 + a_3\,\xi^{5/2} \qquad \text{(II, 45)}$$

wird mit A gekennzeichnet. Die Anzahl der freien Formparameter wird in römischen Ziffern dahinter gesetzt, so z. B. wird für die mit Gl. (II, 7) gegebene zweiparametrige Schar *A II* geschrieben werden. Sind die Formparameter ξ_δ und $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ bekannt, etwa $\xi_\delta = 0{,}4$ und $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 0{,}375$, so stehen an Stelle der römischen Ziffern für den einzelnen Profiltropfen die hundertfachen Werte (die Prozentsätze) durch Schrägstriche voneinander getrennt:

$$A/40/37{,}5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II, 46}^a\text{)}$$

Ist die maximale Profildicke bekannt, die nur ein Affinitätsfaktor ist, so wird sie vor den Buchstaben A in gleicher Weise geschrieben, z. B. für $\delta = 0{,}11$:

$$11/A/40/37{,}5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II, 46}^b\text{)}$$

Ähnlich erhält man für Profile mit NACA-Nase ($a_2 = 0$), vgl. Gl. (II, 9) und (II, 45), den Tropfentyp N, bei dem für die Profilform nach Gl. (II, 13) im allgemeinen *N II* und für das eben angeführte Beispiel $11/N/40/37{,}5$ geschrieben wird. Im allgemeinsten Fall stehen uns sechs Dickenverteilungen und damit fünf Formparameter zur Verfügung. Sind sie alle frei gewählt worden, etwa für den Tropfentyp *A V*, so wollen wir die Reihenfolge der Formparameter von der Profilnase nach hinten ansetzen, mit Ausnahme der voranstehenden vorherrschend charakteristischen Dickenrücklage ξ_δ:

$$100\,\delta/\text{Tropfentyp}/100\,\xi_\delta/100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}\Big/100\,\frac{\varepsilon}{\delta}\Big/100\,\varrho_\delta\cdot\delta/100\,\frac{\varkappa}{\delta}$$

oder

$$\text{Dicke}/\text{Tropfentyp}\Big/\begin{matrix}\text{Dicken-}\\\text{rücklage}\end{matrix}\Big/\begin{matrix}\text{Nasen-}\\\text{radius}\end{matrix}\Big/\begin{matrix}\text{Vorderk.-}\\\text{tangens}\end{matrix}\Big/\text{Scheitelkr.}\Big/\begin{matrix}\text{Hinterk.-}\\\text{tangens}\end{matrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II, 47)}$$

Für jeden zusammengesetzten Profiltropfen kann man die Form dadurch kennzeichnen, daß man die Indices der Dickenverteilungen, durch Bindestriche voneinander getrennt, aufschreibt. Für *A II* wäre das (0α-α0-12) und für *N II* (0α-α0-123). Die Reihenfolge der Indizes sei am Typ *A V* gezeigt (vgl. Gl. (II, 16))

(0α-α0-12-32-42-53)

Tafel II, 7. Symbolik der Profilsystematik.

Tropfentyp	Zusammensetzung	Das Nasenverhalten $\eta/\delta =$	Kennzeichen der Einzeltropfen (Profildicke, Tropfentyp und freie Formparameter)
allgemein A	$0\alpha - \alpha 0 - 12 - 32 - 42 - 53$	$a_1 \xi^{1/2} + a_2 \xi^{3/2} + a_3 \xi^{5/2} + \ldots + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \ldots$	$100\,\delta$ | A | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ | $100\,\frac{\varepsilon}{\delta}$ | $100\,\varrho_\delta \cdot \delta$ | $100\,\frac{\varkappa}{\delta}$
glattnasig G	$\alpha 0 - 12 - 32 - 42 - 53$	$a_1 \xi^{1/2} + a_2 \xi^{3/2} + a_3 \xi^{5/2} + \ldots \quad + b_2 \xi^2 + \ldots$	$100\,\delta$ | G | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ | $100\,\varrho_\delta \cdot \delta$ | $100\,\frac{\varkappa}{\delta}$
NACA-Nase N	$0\alpha - \alpha 0 - 123 - 42 - 53$	$a_1 \xi^{1/2} \quad + a_3 \xi^{5/2} + \ldots + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \ldots$	$100\,\delta$ | N | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ | $100\,\frac{\varepsilon}{\delta}$ | $100\,\varrho_\delta \cdot \delta$ |
Parabel-Nase P	$\alpha 0 - 123 - 42 - 53$	$a_1 \xi^{1/2} \quad + a_3 \xi^{5/2} + \ldots \quad + b_2 \xi^2 + \ldots$	$100\,\delta$ | P | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ | $100\,\varrho_\delta \cdot \delta$
Nase für Überschallprofile $Ü$	$0\alpha - \alpha 0 - \quad 42 - 53$	$a_3 \xi^{5/2} + \ldots + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \ldots$	$100\,\delta$ | $Ü$ | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varepsilon}{\delta}$ | $100\,\varrho_\delta \cdot \delta$

Einige engere Auswahlen.

Tropfentyp	Zusammensetzung	Die freien Formparameter	Kennzeichen der Einzeltropfen
$A\,II$	$0\alpha - \alpha 0 - 12$	ξ_δ und $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ oder 1 anderer Formparameter	$100\,\delta$ | A | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}$
$G\,I$	$\alpha 0 - 12$	ξ_δ	$100\,\delta$ | G | $100\,\xi_\delta$
E (ellipt. Nase)	$\alpha 0 - [12 - 32 - 42 - 53]$	ξ_δ	$100\,\delta$ | E | $100\,\xi_\delta$
$N\,III$	$0\alpha - \alpha 0 - 123 - 42$	ξ_δ; ferner $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ und $\frac{\varepsilon}{\delta}$ oder $\varrho_\delta \cdot \delta$ oder $\frac{\varkappa}{\delta}$	$100\,\delta$ | N | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ | $100\,\frac{\varepsilon}{\delta}$
N_{42}	$0\alpha - \alpha 0 - 123 - 53$ (42 fehlt)	ξ_δ; ferner $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ und $\frac{\varepsilon}{\delta}$ oder $\varrho_\delta \cdot \delta$ oder $\frac{\varkappa}{\delta}$	$100\,\delta$ | N_{42} | $100\,\xi_\delta$ | $100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ | $100\,\frac{\varepsilon}{\delta}$
$P\,II$	$\alpha 0 - 123 - 42$	ξ_δ und $\frac{\varrho_N}{\delta^2}$ oder $\frac{\varepsilon}{\delta}$, oder $\varrho_\delta \cdot \delta$ oder $\frac{\varkappa}{\delta}$	

oder am Typ $N\,IV$:

$$(0\alpha\text{-}\alpha 0\text{-}123\text{-}42\text{-}53).$$

Dabei gibt die Anzahl der Bindestriche die Anzahl der freien Formparameter. Der Typ $N\,III$ wäre also mit (0α-$\alpha 0$-123-42) gegeben. Soll aber der Index 42, d. h. die Dickenverteilung $\frac{y_{42}}{d_{42}}$ ausgelassen werden, so wird symbolisch $N_{42}\,III$ zu schreiben sein für ($\alpha 0$-$\alpha 0$-123-53)[11].

In Tafel II, 7 sind einige der vorkommenden Nasenformen und ihre symbolische Schreibweise für Profiltropfen nach den hier angeführten Richtlinien zusammengestellt.

Die Skelettformen werden in der gleichen Weise symbolisch dargestellt. Die einparametrige Birnbaumsche Wölbungsform (Gl. (II, 26)) ist mit $B\,I$ oder (1-2), die zweiparametrige, Gl. (II, 39), ist mit $B\,II$ oder (1-2-13) gekennzeichnet, während die Kawalki-Kopplung, also $K\,3$ oder [1-2-13] bzw. [1-2-3], geschrieben wird.

Für gewölbte Profile werden die Symbole für den Tropfen und das Skelett untereinander geschrieben und durch einen waagerechten Strich getrennt:

$$\frac{100\,\delta/\text{Tropfentyp}/100\,\xi_\delta/100\,\frac{\varrho_N}{\delta^2}\Big/100\,\frac{\varepsilon}{\delta}\,/\,100\,\varrho_\delta\cdot\delta/100\,\frac{\varkappa}{\delta}}{100\,\varphi_{mx}/\text{Wölbungstyp}/100\,\xi_\varphi\,/100\,\frac{c_{m0}}{c_{aw}}} \quad \ldots \text{(II, 48)}$$

5. Die Berechnung von Tropfen, Skelett und gewölbtem Profil.

Die Tropfenform und die Skelettform des Profiles werden jede für sich unabhängig vom Dickenverhältnis δ und der maximalen Wölbung φ_{mx} berechnet. Die Dickenkonstanten $\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}$ werden aus den Formparametern des gewünschten Tropfens nach Tafel II, 2 oder II, 3, den Gl. (II, 7a) oder Gl. (II, 13a), die Wölbungskonstanten für Birnbaum-Skelette aus Gl. (II, 27) oder (II, 30) bestimmt. Einige der Konstanten können Null sein. Das Kawalki-Skelett ist für zwei Wölbungsrücklagen ($\xi_\varphi = 0{,}37$ und $0{,}301$) in Tafel II, 6 zu finden.

Der Tropfen und ebenso das Skelett sind durch die Summe der mit den zugehörigen Konstanten multiplizierten Grundverteilungen bestimmt (Rechenblatt **II, 1** und **II, 2**), dabei sind $\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}$ und $\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}$ zur Erleichterung der Tropfenberechnung in $\frac{y_0}{d_0}$ und $\frac{y_\alpha}{d_\alpha}$ aufgeteilt.

Für das Birnbaum-Skelett $B\,II$ wird die Berechnung nach Rechenblatt 3 durchgeführt, während das Kawalki-Skelett in Zahlentafel II, 6 $\frac{y_w}{\varphi_{mx}}$ für zwei Wölbungsrücklagen ($\xi_\varphi = 0{,}370$ und $\xi_\varphi = 0{,}301$) gegeben ist.

In allen Fällen, in denen das Wölbungsmaß $\frac{\varphi_{mx}}{\delta}$ oder wenigstens die maximale Wölbung φ_{mx} sehr klein ist, gewinnt man das gewölbte Profil durch Addition und Subtraktion (Rechenblatt II, 4) der Skelett- und der Tropfenordinaten:

$$\frac{y}{\delta} = \frac{y_w}{\varphi_{mx}}\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta} \pm \frac{y_T}{\delta}.$$

Diese Form ist eine Näherung für die genaue Konstruktion des gewölbten Profiles (Bild II, 5), bei der die Tropfenordinaten an einer Stelle $x = x_1$ auf der im Punkt ($x = x_1$; y_w) auf dem Skelett errichteten Normalen aufzutragen sind, damit sie alle auf dem Skelett senkrecht stehen. Die Konstruktion der Normalen ist mit Hilfe der Skelettangente y_w' genügend genau durchführbar, wenn man (Bild II, 5) von $x = x_1$ aus die Strecke $y_w y_w'$ abträgt; die Normale im Punkt $x = x_1$; y_w geht durch diesen Punkt hindurch.

[11]) Dickenanteile, die durch eine feste Kopplung miteinander verbunden sind, werden in eckigen Klammern geschrieben, so ist das Kreisbogenzweieck, für das $\frac{d_{0\alpha}}{\delta} = \frac{d_{\alpha 0}}{\delta}$ ist, mit [0α—$\alpha 0$] anzugeben.

Rechenblatt 1. Berechnung der Profilform.

Der Tropfen.

Berechnung der Dickenkonstanten nach Tafel II, 2.

$\frac{d_{0a}}{\delta} =$

$\frac{d_{a0}}{\delta} =$

$\frac{d_{12}}{\delta} =$

$\frac{d_0}{\delta} = \frac{d_{a0}}{\delta} + \frac{d_{0a}}{\delta} =$

$\frac{d_a}{\delta} = \frac{d_{a0}}{\delta} - \frac{d_{0a}}{\delta} =$

oder $\frac{d_{123}}{\delta} =$

Profil:

Anmerkung:
Mit y_0/δ und y_a/δ ist die Zahlenrechnung rascher durchführbar.

Ⓐ braucht nicht hier, sondern erst in der Spalte $\frac{y_r}{\delta}$ summiert zu werden.

② + ④ + ⑥ + ⑧ = Ⓐ

◯	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	Ⓐ
x	$\frac{y_0}{d_0}$	$\frac{y_0}{\delta}$	$\frac{y_a}{d_a}$	$\frac{y_a}{\delta}$	$\frac{y_{12}}{d_{12}}$	$\frac{y_{12}}{\delta}$	$\frac{y_{123}}{d_{123}}$	$\frac{y_{123}}{\delta}$	
	$\frac{d_0}{\delta} =$	① $\cdot \frac{d_0}{\delta}$	$\frac{d_a}{\delta} =$	③ $\cdot \frac{d_a}{\delta}$	$\frac{d_{12}}{\delta} =$	⑤ $\cdot \frac{d_{12}}{\delta}$	$\frac{d_{123}}{\delta} =$	⑦ $\cdot \frac{d_{123}}{\delta}$	

Rechenblatt 2. Berechnung der Profilform

Der Tropfen.

$\frac{d_{32}}{\delta} =$

$\frac{d_{42}}{\delta} =$

$\frac{d_{53}}{\delta} =$

Profil:

Berechnung der Dickenkonstanten nach Tafel II, 2.

② + ④ + ⑥ + Ⓐ = $\frac{y_r}{\delta} = \frac{2\,\eta_r}{\delta}$

◯	①	②	③	④	⑤	⑥	◯	◯	◯
x	$\frac{y_{32}}{d_{32}}$	$\frac{y_{32}}{\delta}$	$\frac{y_{42}}{d_{42}}$	$\frac{y_{42}}{\delta}$	$\frac{y_{53}}{d_{53}}$	$\frac{y_{53}}{\delta}$	ξ	② + ④ + ⑥ + Ⓐ	Tropfen allein $\frac{y_r}{\delta}\,\delta$
	$\frac{d_{32}}{\delta} =$	① $\cdot \frac{d_{32}}{\delta}$	$\frac{d_{42}}{\delta} =$	③ $\cdot \frac{d_{42}}{\delta}$	$\frac{d_{53}}{\delta} =$	⑤ $\cdot \frac{d_{53}}{\delta}$			

Rechenblatt 3. Berechnung der Profilform.

Das Skelett (Birnbaum).

Berechnung der Wölbungskonstanten nach Tafel 3 oder Zahlentafel 2.

$\frac{s_1}{\varphi_{mx}} =$

$\frac{s_2}{\varphi_{mx}} =$

$\frac{s_{13}}{\varphi_{mx}} =$

Profil:

$\varphi_{mx} =$

		② + ③		④ + ⑤		⑥ = $\frac{y_W}{\varphi_{mx}} = \frac{2\eta_W}{\varphi_{mx}}$			Skelett allein
○	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	○	⑧
x	$\frac{y_1}{s_1}$	$\frac{y_1}{\varphi_{mx}}$	$\frac{y_2}{s_2}$	$\frac{y_2}{\varphi_{mx}}$	$\frac{y_{13}}{s_{13}}$	$\frac{y_{13}}{\varphi_{mx}}$	② + ④ + ⑥		$\frac{y_W}{\varphi_{mx}} \varphi_{mx}$
	$\frac{s_1}{\varphi_{mx}} =$	① $\cdot \frac{s_1}{\varphi_{mx}}$	$\frac{s_2}{\varphi_{mx}} =$	③ $\cdot \frac{s_2}{\varphi_{mx}}$	$\frac{s_{13}}{\varphi_{mx}} =$	⑤ $\cdot \frac{s_{13}}{\varphi_{mx}}$			

Rechenblatt 4. Berechnung der Profilform.

Das gewölbte Profil.

$\delta =$

$\frac{\varphi_{mx}}{\delta} =$

$\frac{y_T}{\delta}$ siehe Rechenblatt 2.

$\frac{y_W}{\varphi_{mx}}$ siehe {Rechenblatt 3 für Birnbaum-} oder {Zahlentafel 3 für Kawalki-Skelette}.

Profil:

Spalten ② bis ⑤ für kleine Wölbungen

Spalte ⑦ für Profilkonstr. nach Bild 9

			$\frac{y}{\delta} = \frac{2\eta}{\delta}$		$y = 2\eta$				
			Saug-seite	Druck-seite	Saug-seite	Druck-seite			
○	○	①	②	③	④	⑤	○	⑦	○
x	ξ	$\frac{y_W}{\varphi_{mx}} \cdot \frac{\varphi_{mx}}{\delta}$	① $+ \frac{y_T}{\delta}$	① $- \frac{y_T}{\delta}$	$\frac{y}{\delta} \cdot \delta$	$\frac{y}{\delta} \cdot \delta$		$y_W \, y'_W$	
					$\delta =$			Rechenbl. 3	

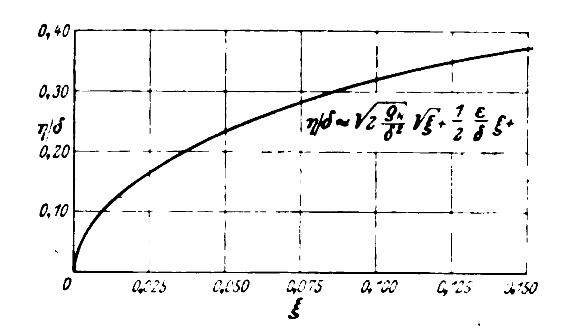
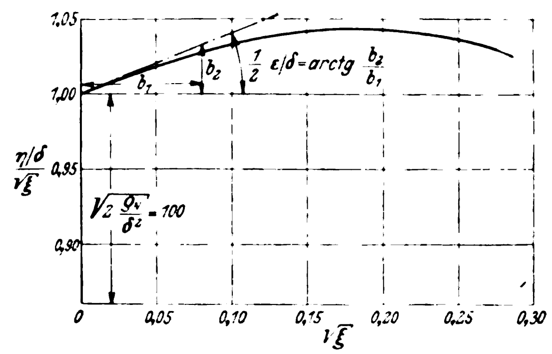



Bild II, 6, a), b). Zur Konstruktion des Nasenradius und des Vorderkanten-Winkels.

Anhang: Will man bekannte Profile durch die vorliegenden Profile annähern, so wird man die Dickenkonstanten ebenfalls aus den Formparametern berechnen. Für Günter-Piercy-Profile und für Stack- und v. Doenhoff-(NACA-) Profile sind die Formparameter in Tafel II, 4 gegeben. Bei empirischen Profilen (z. B. den Göttinger Profilen) müssen die Formparameter graphisch gewonnen werden. Den Nasenradius erhält man z. B. in solchen Fällen, wenn man die Nase als Parabel auffaßt und deshalb über $\sqrt{\xi}$ die Ordinate $\frac{\eta}{\delta}\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ aufträgt (ξ, η sind die Profilordinaten von der Nase aus gemessen, Hinterkante bei $\xi = +1$). Die Kurve der Kontur, die leicht nach $\sqrt{\xi} = 0$ extrapoliert werden kann, schneidet die Ordinatenachse im Punkt $\sqrt{2\frac{\varrho_N}{\delta^2}}$ (Bild II, 6). Entsprechend kann die Dickenrücklage und der Scheitelradius $\varrho_\delta \cdot \delta$ bestimmt werden (Bild II, 7).

Zur Kontrolle der richtigen Berechnung der Konstanten aus den Profilparametern wird man wenigstens einige Profilordinaten in der Umgebung des Dicken- (bzw. Wölbungs-) Maximums berechnen. Im Maximum wird stets $\frac{y_T}{\delta} = 1$, $\frac{y_W}{\varphi_{mx}} = 2$. Sind in diesem Punkt die Ungenauigkeiten größer als ½% der maximalen Ordinate, so sind die Konstanten zu ungenau bestimmt.

6. Zusammenfassung.

Jedes gewölbte Profil wird aus einem symmetrischen Profil und einem Skelett zusammengesetzt. Die Dickenverteilung eines symmetrischen Profiles wird durch Addition von zwei bis sechs einzelnen Dickenverteilungen gebildet,

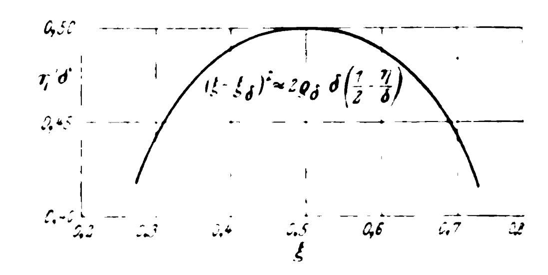
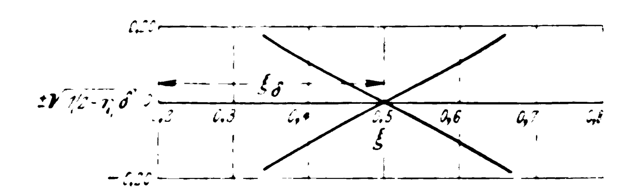
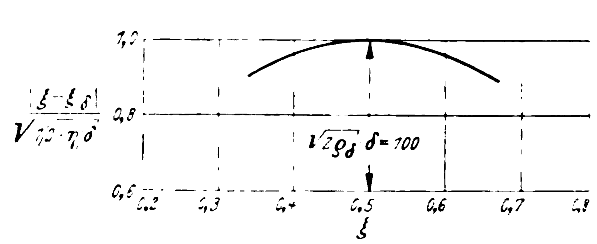




Bild II, 7, a), b), c). Zur Konstruktion von Dickenrücklage und Scheitelradius.

die in Abhängigkeit von einem bis fünf geometrisch anschaulichen Formparametern bestimmt sind. Diese Dickenverteilungen sind aus zwei Reihen entstanden, deren eine vom Schukowski-Profil und deren andere vom Kreisbogenzweieck ausgeht. Die gewählte Wölbungsform ist das Birnbaum-Skelett, für das die aerodynamischen Eigenschaften bekannt sind. Sowohl für die Dicken- als auch für die Wölbungsverteilungen können die gebildeten Reihen fortgesetzt werden oder es können besonders anschauliche Kopplungen zwischen den einzelnen Verteilungen vorgenommen werden, z. B. die Kawalki-Kopplung der Birnbaum-Skelette. Zur Unterscheidung der einzelnen Profilformen ist eine Symbolik (Zahlentafel II, 7) vorgeschlagen.

Bild II, 1 und II, 2 sowie Tafel II, 1 bis II, 3 und II, 6 geben einen vollständigen Überblick über die Geometrie der Profilsystematik und die aerodynamischen Eigenschaften der Skelettformen. Im 5. Abschnitt ist ein Verfahren zur raschen Berechnung des Profiles beschrieben.

7. Schrifttum.

[1] bis [4]: Vgl. das Schrifttum des I. Beitrages.

[5]: N. A. Piercy, R. W. Piper and J. H. Preston, A new family of wing profiles. Phil. Mag. VII s. Bd. 24 (1937), S. 425 und S. 1114.
N. A. V. Piercy, R. W. Piper and L. G. Whitehead, The new transformed wing sections. A method of evolving conformal sections of practical utility. Aircr. Engng. Bd. 10 (1938), S. 339.
C. N. H. Lock and J. H. Preston, The new type of airofoil sections. Aircr. Engng. Bd. 11 (1939), S. 151.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 30. April 1943 Lfg. 4

Wunibald Kamm.



Am 26. April dieses Jahres vollendet Dr.-Ing. Wunibald Kamm, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart und Leiter des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren sowie des Forschungsinstituts für Flugmotoren sein 50. Lebensjahr.

Wunibald Kamm ist in Basel geboren und entstammt einem alemannischen Geschlecht. Die Grundlage seiner erfolgreichen Arbeit ist in der Verbindung seiner ausgezeichneten technischen Begabung, mit der diesem Stamme eigenen Gründlichkeit und Beharrlichkeit zu suchen. Er besuchte das humanistische Gymnasium in Stuttgart—Bad Cannstatt und studierte an der Technischen Hochschule Stuttgart. Er stand von 1914 bis Herbst 1917 im Felde als Fesselballonbeobachter, zuletzt als Leutnant d. Res. und Führer eines Fesselballonzuges. Dabei wurde ihm das EK. I. und II. Klasse verliehen. Im Herbst 1917 wurde er als technischer Referent zur Bayrischen Inspektion für Luft- und Kraftfahrwesen nach München berufen. Auf Grund der Felderfahrungen entwickelte er hier den K-Ballon. Die Lösung bestand darin, die bis dahin mangelhafte Stabilität des Ballons durch geeignetere Formgebung zu erhöhen und den Ballon durch eine verstellbare Fesselung so zu halten, daß er bei den verschiedensten Stellungen stabil in der Luft lag.

Nach Kriegsende 1919 führte Kamm sein Studium weiter und schloß 1921 mit dem Diplom ab. 1922 promovierte er zum Dr.-Ing. mit einer Dissertation über Probleme des Fesselballons. Von 1921 bis 1925 war er dann bei der Daimler-Motoren G. m. b. H., Stuttgart-Untertürkheim, auf dem Konstruktionsbüro und in der Versuchsabteilung tätig. Neben anderen wertvollen Arbeiten entwickelte er dort auch den Rennmotor für den damals erfolgreichsten Mercedes-Rennwagen. 1924 wurde Kamm neben seiner Tätigkeit in der Industrie, mit der Vertretung des auf einige Jahre nach Japan berufenen Professors A. Baumann an der Technischen Hochschule Stuttgart beauftragt für den Lehrstuhl für Luft- und Kraftfahrwesen und hielt bis Oktober 1926 diese Vorlesungen. 1925 übernahm er bei den Schwäbischen Hüttenwerken die Leitung der Abteilung Motorenbau. Dort entwickelte er, seiner Zeit weit vorauseilend, den SHW-Wagen. Die Entwicklungsrichtung dieses Kraftwagens ist durch das Streben gekennzeichnet, die Fahrleistungen durch geringes Gewicht, kleine Stirnfläche und günstige Strömungsform zu erhöhen und die Fahreigenschaften durch tiefliegenden Schwerpunkt, geringes Gewicht der abgefederten Massen, Vorderradantrieb bei günstiger Gewichtsverteilung und 4-Radbremsung mit Bremskraftunterteilung auf die Räder entsprechend der Gewichtsverteilung zu verbessern. Der Wagen war mit Einzelfederung jedes Rades durch verkapselte Schraubenfedern ausgerüstet, hatte einen liegenden 2-Zylinder-Boxermotor und war insbesondere mit einem selbsttragenden Wagenkörper aus Leichtmetall versehen, wodurch gleichzeitig ein geringes Gewicht und eine außerordentlich tiefe Schwerpunktslage erreicht wurde. Er zeichnete sich neben guten Fahrleistungen insbesondere durch ausgezeichnete Fahreigenschaften aus.

Im Oktober 1926 wurde Kamm zum Leiter der Motorenabteilung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Berlin-Adlershof ernannt. Die DVL und insbesondere deren Motorenabteilung war bei seinem Eintritt noch sehr klein. Die Arbeiten auf motorentechnischem Gebiet waren vorwiegend Prüfarbeiten für die Sicherheit der Triebwerke in der Verkehrs- und Sportfliegerei. Kamm sah es als seine wichtigste Aufgabe an, darüber hinaus die Motorenabteilung der DVL zu einer Stätte der Forschung und des Versuchs auszubauen und sie entsprechend der wachsenden Bedeutung der zivilen Fliegerei sowie in der Hoffnung auf spätere Wiederaufnahme der Militärfliegerei in ihrem Umfang zu vergrößern. Die Übernahme der Leitung der damals einzigen Versuchs- und Forschungsstelle in Deutschland auf dem Gebiet des Flugzeugtriebwerks fällt in eine Zeit, in der der weitblickende Fachmann feststellen konnte, daß die bisherigen Formen des Flugmotorenbaues am Ende ihrer Entwicklung angelangt waren. Die Forderungen der zivilen und militärischen Luftfahrt gingen auf eine wesentliche Erhöhung der Leistungseinheiten hinaus, bei starker Betonung der Forderung auf Herabsetzung des Leistungsgewichts. Dazu kam die Forderung, den Kraftstoffverbrauch zu senken und durch Herabsetzung der Drehzahl der Luftschrauben deren Wirkungsgrad zu verbessern. In klarer Erkenntnis der zu gehenden Ent-

wicklungsrichtung leitete Kamm die Arbeiten ein und förderte sie durch Mitarbeit bei Behörden und Industrie und durch Aufklärung anderer interessierter Kreise. Innerhalb der Motorenabteilung der DVL hat er deshalb im besonderen die Fachgebiete Gestaltung des Triebwerks, Thermodynamik einschl. Höhentriebwerk sowie Mechanik, insbesondere Schwingungsverhalten, ausgebaut. Die dreieinhalb Jahre, die Kamm an der DVL gewirkt hat, waren außerordentlich fruchtbar und gaben die Grundlage für den weiteren Ausbau. Eine Reihe wertvoller Forschungsarbeiten kennzeichnet diese Periode seines Schaffens, in der er durch Mitarbeit an der Entwicklung von schnellläufigen Flugmotoren mit geringem Leistungsgewicht und verbessertem Verbrauch maßgebende Vorarbeiten für den heutigen Kriegsflugmotor geleistet hat.

Neben diesen technischen Arbeiten bei der DVL hat sich Kamm mit besonderer Aufmerksamkeit auch der Ausbildung der ihm anvertrauten jüngeren Ingenieure gewidmet und dadurch der DVL und auch der Flugmotorenindustrie einen Stamm hochwertiger Ingenieure zur Verfügung gestellt, was sich insbesondere beim starken Ausbau der Luftfahrt nach 1933 vorteilhaft bemerkbar machte.

Im April 1930 wurde Kamm als ordentlicher Professor auf den Lehrstuhl für Kraftfahrwesen und Flugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart berufen. Nunmehr konnte er den von ihm stets vertretenen Gedanken, Lehre und Forschung zu vereinigen, in die Tat umsetzen. Trotz der wirtschaftlich sehr ungünstigen Zeit übernahm er die Gründung und den Aufbau des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Flugmotoren.

Auf dem Gebiete des Kraftfahrwesens widmete sich Kamm hauptsächlich zwei Aufgaben, nämlich der wirtschaftlichen Steigerung der Fahrleistungen bei schnellfahrenden Fahrzeugen und der Verbesserung der Fahreigenschaften der Kraftfahrzeuge. Zur wirtschaftlichen Erzielung hoher Durchschnittsgeschwindigkeiten war die Beseitigung aller unnötigen schädlichen Widerstände (strömungsgünstige Form mit abgestumpftem Heck, Widerstandsbeiwert 0,23, im Grundgedanken 1933 dargelegt) und die Herabsetzung der toten Gewichte (selbsttragender Wagenkasten) Voraussetzung, um die Steigerung der Antriebsleistung in einem wirtschaftlich tragbaren Rahmen zu halten. Die Erhöhung der Fahrsicherheit bei hoher Geschwindigkeit setzt die Erforschung des Rollverhaltens im Zusammenwirken mit den Luftkräften voraus (Stabilisierung windschnittiger Fahrzeuge mittels Spaltflossen, Radhaftung, Bemessung der Federung, des Reifendrucks, der Bremskräfte, Schwerpunktslage und Massenverteilung). Die Richtigkeit der vertretenen Gedanken hat Kamm mehrfach durch Bau und Umbau von vollständigen Kraftfahrzeugen nachgewiesen, wobei insbesondere das letzte nach Kriegsbeginn fertig gewordene Fahrzeug einen außerordentlich starken Eindruck hinterließ.

Auf dem Gebiete des Flugzeugtriebwerks arbeitete Kamm hauptsächlich an Fragen der Gestaltung des Motors, insbesondere auch über die Verwendbarkeit kleinerer Zylindereinheiten, und an Fragen der Luftkühlung. Dies bedingte im einzelnen auch die Beschäftigung mit Zylindern, Kolben, Lagern, Fragen der Triebwerksdynamik, Ladern und Lüftern, auch axialer Bauart, und mit chemisch-physikalischen Vorgängen. Von den Einrichtungen des Forschungsinstituts sind bemerkenswert eine Modellversuchsbahn zur Untersuchung der Fahreigenschaften von Kraftfahrzeugmodellen, ferner ein Vollprüffeld für Kraftwagen, wobei der Wagen innerhalb eines mit bis zu 70 m/s blasenden Windkanals von 7,25 m Düsenbreite und 4,85 m Höhe an Ort und Stelle auf einer laufenden Fahrbahn rollt, die ihrerseits um eine senkrechte Achse im Windstrom drehbar ist.

Die ausgezeichnete Lehrtätigkeit von Professor Kamm ist neben dem erfolgreichen Einsatz seiner ehemaligen Schüler auch durch die Schaffung zweier wertvoller Bücher gekennzeichnet: Das Kraftfahrzeug, und Kamm-Schmidt: Das Versuchs- und Meßwesen auf dem Gebiete des Kraftfahrzeugs. Gestützt auf enge Fühlungnahme mit der Industrie und auf eigene tiefgreifende Forschungstätigkeit hat er den Studierenden stets mit weitschauendem Überblick lebendiges Wissen vermitteln können.

Nach 1933 stellte er sich auch der Wehrmacht wieder zur Verfügung und half bei der Neuaufstellung von Beobachtungsabteilungen mit Fesselballonzügen mit. Dabei wurde er zum Hauptmann d. B. ernannt. Hierbei hat er an der Weiterentwicklung des K-Ballons wesentlich mitgearbeitet. Kamm hat in unermüdlicher Schaffenskraft durch neue Gedanken die Entwicklung in hervorragender Weise befruchtet und auch viele Anregungen zu wissenschaftlichen Arbeiten gegeben. Seine persönlichen liebenswürdigen Eigenschaften, sein gerades Wesen und seine ruhige Sachlichkeit schaffen zwischen ihm und seinen Mitarbeitern ein enges Band. Auf der Höhe schöpferischer Arbeit stehend, werden auch in Zukunft seine Gedanken befruchtend für die Kraftfahrzeug- und für die Flugmotorenentwicklung sein. Das vorliegende Heft, das einige Arbeiten von Mitarbeitern und Schülern enthält, soll ein äußeres Zeichen der Anerkennung sein.

Kurt Löhner.

Die Kolbenfläche als Bezugsgröße für Ähnlichkeitsbetrachtungen*).

Von P. Riekert.

Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Die die Leistung des Einzylinders bestimmenden Einflußgrößen werden zweckmäßig zu einer einheitlichen Vergleichsgröße zusammengefaßt. Diese Vergleichszahl muß — wenn sie für Ähnlichkeitsbetrachtungen an verschieden großen Zylindern geeignet sein soll — so beschaffen sein, daß sie von den Zylinderabmessungen selbst nicht unmittelbar abhängt und die Verhältnisse möglichst anschaulich überblicken läßt. Der vielfach gebräuchlichen Hubraumleistung [PS/l], die Mitteldruck und Drehzahl erfaßt, haftet der Nachteil an, daß in sie bei sonst gleichen Verhältnissen die Zylinderabmessungen eingehen.

Als zweckmäßige Bezugsgröße für Ähnlichkeitsbetrachtungen erweist sich die Kolbenfläche. Diese Größe wird schon seit längerer Zeit von den Kolbenwerken in der auf ihre Einheit bezogenen Leistung [PS/cm²], die kurz Kolbenflächenleistung genannt sei, zur Beurteilung der Belastbarkeit des Kolbens verwendet. Ihre Anwendung auf den Vergleich von Motoren mit ähnlichen Zylindern bringt die Überlegenheit der von Prof. Dr.-Ing. W. Kamm vor dem Kriege geförderten schnellaufenden Motoren mit kleinen Zylinderabmessungen besonders deutlich zum Ausdruck[1]). Darüber hinaus lassen sich auch die praktisch erreichbaren Gewichtsverhältnisse auf die Kolbenfläche bezogen besser erfassen als bei Verwendung des Hubraumgewichts.

Gliederung.

1. Leistung des Einzylindermotors.

Zunächst seien die Verhältnisse an einem einzelnen Zylinder betrachtet. Seine Leistung bestimmt sich im Viertaktverfahren mit dem Mitteldruck p_{m_e} [at], der Kolbenfläche F [m²], dem Hub s [m] und der Drehzahl n [min⁻¹] aus der Beziehung

$$N_e = \frac{10^4 p_{m_e} F s n}{2 \cdot 60 \cdot 75} = \frac{p_{m_e} F s n}{0,9} \text{ [PS]} \quad . . . (1)$$

Führt man den Hubraum $V_h = Fs \cdot 10^3$ [l] ein, so erhält man hieraus die vielfach verwendete Hubraumleistung

$$\frac{N_e}{V_h} = \frac{p_{m_e} n}{900} \text{ [PS/l]} \quad . . . . (2)$$

Die Hubraumleistung ist jedoch, wie noch gezeigt werden soll, von den Abmessungen des Zylinders bei gleichem mittlerem Druck abhängig. Für die Frage der Bemessung von Mehrzylindermotoren ist es wesentlich zweckmäßiger, die auf die Einheit der Kolbenfläche bezogene Leistung N_e/F und die mittlere Kolbengeschwindigkeit $c_m = \frac{s\,n}{30}$ [m/s] einzuführen. Damit wird aus (1)

$$\frac{N_e}{F} = \frac{p_{m_e} c_m}{300} \text{ [PS/cm}^2\text{]} \quad . . . . (3)$$

*) K 31 3.

[1]) Nach einem Hinweis von Prof. Dr.-Ing. Madelung.

Die Kolbenflächenleistung ist durch den mittleren Druck p_{m_e} und die mittlere Kolbengeschwindigkeit c_m bestimmt.

Der mittlere Druck der vollkommenen Maschine p_{mv} [at] folgt aus der Überlegung, daß die während eines Arbeitsspiels geleistete Arbeit $p_{mv} Fs = p_{mv} V_h$ 10 [mkg] mit der in Arbeit umgesetzten Kraftstoffenergie übereinstimmen muß. Da zur vollständigen Verbrennung des Kraftstoffes eine aus dessen chemischer Zusammensetzung sich ergebende Mindestluftmenge notwendig ist, so läßt sich in der Raumeinheit eine bestimmte Kraftstoffmenge verbrennen und damit eine bestimmte Energiedichte, der sog. Gemischheizwert, H_u/V_g [kcal/m³] unterbringen. Dabei bedeutet H_u [kcal/kg] den auf die Gewichtseinheit bezogenen unteren Heizwert und V_g [m³/kg] die je kg Kraftstoff raummäßig mindestens erforderliche Gemischmenge. Der Gemischheizwert wird theoretisch mit dem Wirkungsgrad der vollkommenen Maschine η_v in Arbeit umgewandelt, so daß sich für einen Zylinder mit dem Hubraum V_h [l] die Bilanz ergibt

$$p_{m_v} V_h \cdot 10 = 427\, \eta_v \frac{H_u}{V_g} V_h \cdot 10^{-3} \quad \text{oder}$$

$$p_{m_v} = 427\, \eta_v \frac{H_u}{V_g} 10^{-4} \text{ [kg/cm}^2\text{]} \quad . . . (4)$$

Bei der selbstansaugenden Maschine ergibt sich mit dem Gemischheizwert von 900 kcal/m³ und dem Wirkungsgrad $\eta_v = 0,5$ der mittlere Druck $p_{mv} = 19,2$ kg/cm². Der praktisch erreichbare mittlere Druck p_{me} ist durch die Füllungs-, Drosselungs- und Wärmeverluste sowie durch die mechanischen Verluste geringer als der Wert p_{mv}. Wesentlich ist die Erkenntnis, daß der mittlere Druck an sich unabhängig von den Abmessungen der Maschine ist und daher eine wirkliche Kenngröße darstellt.

Eine Steigerung des mittleren Druckes ist vor allem durch Überladung möglich, was einer Vergrößerung von H_u/V_g entspricht. Der Einfluß der Art des Kraftstoffes ist verhältnismäßig gering, da die verwendeten flüssigen Kraftstoffe sich im Gemischheizwert nicht allzu sehr unterscheiden. Selbst Alkohole, die einen schlechten gewichtsmäßigen Heizwert aufweisen, ergeben wegen der geringeren zur Verbrennung erforderlichen Luftmenge einen günstigen Gemischheizwert. Einer beliebigen Steigerung des Mitteldrucks sind aber durch die Klopffestigkeit des Kraftstoffes und durch die thermische Belastung der Triebwerksteile, insbesondere der Kolben, Grenzen gezogen. Die Klopfgrenze kann durch Wahl geeigneter Kraftstoffe unter Zumischung von Klopfbremsen und günstige Einstellung des Kraftstoff-Luftverhältnisses einerseits und durch die Gestaltung des Verbrennungsraums andererseits beeinflußt werden. Der Übergang zum Schieber erweist sich in dieser Beziehung als Fortschritt, da die heißen Ventile wegfallen. Die Verkleinerung der Zylinderabmessungen ergibt kürzere Wärmeleitwege in Kolben und damit bei gleicher Wärmebeaufschlagung eine Senkung der Temperaturen in der Mitte des Kolbenbodens. Man kann daher den Mitteldruck des kleineren Zylinders unter Anpassung der Kolbentemperaturen an den großen Zylinder wesentlich gegenüber dem großen Zylinder steigern.

Als zweite Kenngröße ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit zu nennen. Einer beliebigen Steigerung ist dadurch eine Grenze gezogen, daß die bei ähnlichen Bauarten zu ihr verhältigen Gasgeschwindigkeiten in den Ventilen eine bestimmte Größe aus Gründen der Füllung nicht überschreiten dürfen. Die mittlere Kolbengeschwindigkeit kennzeichnet aber auch die Lagerbelastungen in geometrisch ähnlich gebauten Zylindern. Bedeutet m [kg m^{-1} s^2] die bewegten Massen, $r = \frac{s}{2}$ [m] den Kurbelhalbmesser, $\omega = \frac{\pi n}{30}$ [s^{-1}] die Winkelgeschwindigkeit und f [cm^2] die Lagerfläche, so ergibt sich für die Lagerpressung k infolge der Massenkräfte der Ausdruck

$$k = \frac{m\, r\, \omega^2}{f} = \frac{\pi^2}{60} \cdot \frac{m\, c_m\, n}{f} \cdot [\text{kg/cm}^2] \quad \ldots \quad (5)$$

Bei geometrisch ähnlicher Bauart verhalten sich die Massen wie die dritten Potenzen und die Lagerflächen f wie die Quadrate der linearen Abmessungen. Geht man mit der Kolbengeschwindigkeit c_m an die dem Stande der Technik bei gleichartiger Bauweise (Ventil oder Schieber) entsprechende obere Grenze, so folgert man aus (5), daß sich die Drehzahlen bei gleichen zulässigen Lagerpressungen umgekehrt wie die linearen Abmessungen verhalten. Es gilt daher bei den Zylinderdurchmessern d_1 und d_2

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wendet man bei ähnlichen Zylindern gleichen Ladedruck an, so wird der erreichbare mittlere Druck p_{me} bis auf die durch die höheren Drehzahlen beim kleinen Zylinder etwas größeren mechanischen Verluste etwa gleich und damit bei derselben mittleren Kolbengeschwindigkeit die Kolbenflächenleistung ein gleichbleibender Kennwert.

Die höhere Überladbarkeit des kleineren Zylinders läßt aber darüber hinaus infolge Zunahme von p_{me} eine Steigerung der Kolbenflächenleistung zu, ohne daß eine thermische Überlastung eintritt. Demgemäß bildet die Kolbenflächenleistung ein Maß für die thermische und die mechanische Schnelläufigkeit eines Triebwerks, in das die Abmessungen nur infolge der höheren Überladbarkeit des kleineren Zylinders eingehen.

Im Gegensatz dazu sinkt gemäß (2) die Hubraumleistung N_e/V_h mit vergrößerten Zylinderabmessungen schon bei gleicher Überladung wegen der bei gleicher Kolbengeschwindigkeit abnehmenden Drehzahlen umgekehrt verhältig den linearen Abmessungen ab. Da die Hubraumleistung durch die Abmessungen vor allem unmittelbar und auch mittelbar wegen der niedrigeren Belastbarkeit des größeren Zylinders beeinflußt wird, ist sie als Vergleichsmaß verschiedener Zylindergrößen ungeeignet.

In Bild 1 sind die Verhältniswerte der Hubraum- und der Kolbenflächenleistungen über dem Durchmesserverhältnis bei gleichbleibendem Ladedruck dargestellt.

Verändert man bei ein und derselben Zylinderabmessung das Verhältnis s/d von Hub zu Bohrung, so ändern sich die Drehzahlen bei gleichgehaltener Kolbengeschwindigkeit umgekehrt verhältig dem Hub. Die Leistung N_e von Zylindern mit gleichen Durchmessern bleibt bei Anwendung kleinerer Hübe und entsprechend abnehmenden Hubräumen gemäß (3) zunächst gleich. Jedoch sind einer beliebigen Verminderung durch die Lagerpressungen nach (5) Grenzen gezogen. Um die zulässigen Lagerbelastungen k bei gleicher Lagerfläche f nicht zu überschreiten, müßten die bewegten Massen im umgekehrten Verhältnis der Drehzahlen verringert werden. Dies ist jedoch praktisch nicht in dem erforderlichen Maß möglich, wie schon aus der Betrachtung von Kolben gleicher Durchmesser hervorgeht. Eine Vergrößerung des Hubes bedeutet aber wegen der abnehmenden Drehzahl nach (2) eine Verminderung der Hubraumleistung und damit eine schlechtere Ausnutzung des Hubraumes.

2. Leistung des Mehrzylindermotors.

Bei Mehrzylindermotoren läßt sich mittels der Kolbenflächenleistung in besonders übersichtlicher Weise die Frage des erforderlichen Gesamthubraumes und dessen Unterteilung beurteilen. Bei vorgegebener Überladung ergibt sich ein bestimmter Mitteldruck und mit Rücksicht auf Füllung und Lagerbeanspruchungen eine zulässige Kolbengeschwindigkeit. Dies bedeutet, daß nach (3) die Kolbenflächenleistung N_e/F einen bestimmten Wert erhält. Zur Verwirklichung einer vorgeschriebenen Leistung N_e ist daher eine bestimmte Gesamtkolbenfläche F erforderlich. Diese kann nun auf verschiedene Einzylinderflächen verteilt werden, die um so kleiner werden, je mehr Zylinder Verwendung finden. Baut man die jeweils sich ergebenden Zylindergrößen geometrisch ähnlich mit gleichem Verhältnis Hub/Bohrung, so erhellt ohne weiteres, daß der für die verlangte Leistung notwendige Gesamthubraum um so kleiner wird, je mehr Zylinder Verwendung finden. Aus dieser Erkenntnis, daß für die Erzielung einer gegebenen Gesamtleistung bei gleicher Überladung unabhängig von der Abmessung des einzelnen Zylinders lediglich eine bestimmte Gesamtkolbenfläche bereitgestellt werden muß, folgt zunächst weiter, daß eine Verkleinerung des Verhältnisses Hub/Bohrung eine weitere Verringerung des Gesamthubraumes nach sich zieht. Jedoch sind hierfür, wie schon beim Einzelzylinder erwähnt wurde, durch die zunehmenden Lagerbelastungen Grenzen gezogen. Nutzt man die höhere Überladbarkeit des kleineren Zylinders aus, so nimmt die Kolbenflächenleistung wegen des größeren Mitteldruckes zu und damit wird die erforderliche Gesamtkolbenfläche wesentlich kleiner,

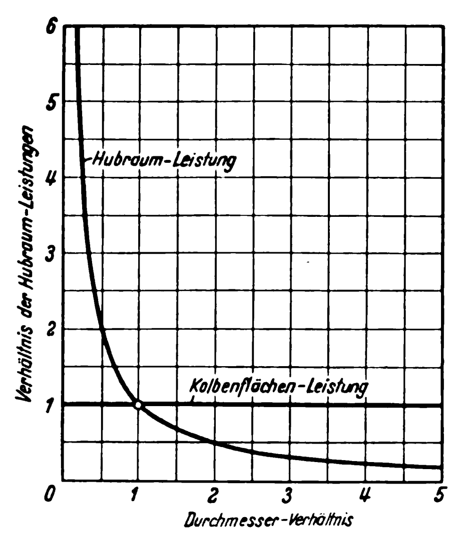


Bild 1. Verhältnis der Hubraumleistung und der Kolbenflächenleistung in Abhängigkeit vom Durchmesserverhältnis bei gleichbleibendem Ladedruck.

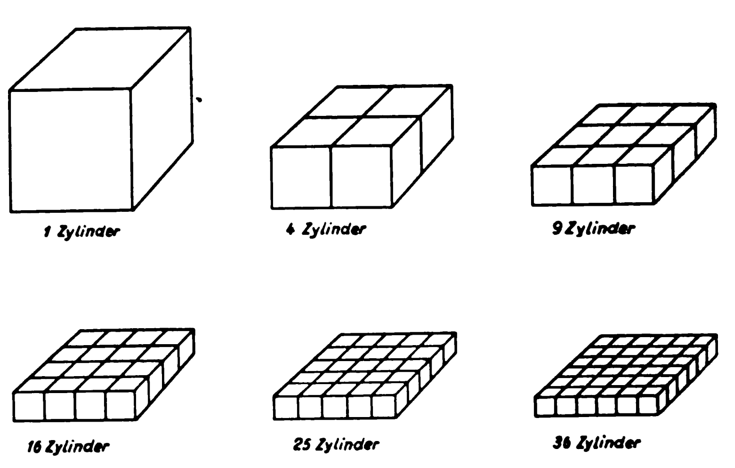


Bild 2. Verkleinerung des Gesamthubraums mit zunehmender Zylinderzahl bei gleicher Überladung in vereinfachter Darstellung.

so daß die Zahl der erforderlichen Zylinder geringer wird als bei Anwendung gleicher Überladung.

Zur anschaulicheren Übersicht sind in Bild 2 die für die Zylinderzahlen $z = 1, 4, 9, 16, 25$ und 36 erforderlichen Gesamthubräume bei gleicher Überladung mit der Einfachheit halber quadratisch gezeichneten Einzelzylinderflächen dargestellt. Da jeweils dieselbe Gesamtkolbenfläche zugrunde gelegt ist, geht die Abnahme des Gesamthubraumes mit wachsender Zylinderzahl deutlich hervor; bei Ausnützung der höheren Überladbarkeit des kleineren Zylinders würde die Abnahme noch stärker sein.

Der notwendige Gesamthubraum steht bei gleicher Überladung mit der gewählten Zylinderzahl z in folgendem Zusammenhang. Die einzelne Kolbenfläche wird $\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{F}{z}$ [m²], somit ist $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{F}{z}}$ [m]. Macht man der Einfachheit halber den Hub gleich der Bohrung, so wird der Gesamthubraum $V_h = F \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{F}{z}} \cdot 10^3$ [l]. Somit verhalten sich bei gleicher Überladung die Hubräume umgekehrt wie die Wurzeln aus den Zylinderzahlen. Hierin kommt nochmals zum Ausdruck, daß Vermehrung der Zylinderzahl, z. B. auf das Doppelte, eine Verminderung des notwendigen Hubraumes z. B. auf das $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71$ nach sich zieht. Bei Anwendung höherer Überladung in kleineren Zylindern werden die erforderlichen Hubräume noch kleiner. In Bild 3 sind zur Übersicht die Verhältniswerte der erforderlichen Gesamthubräume über dem Verhältnis der Zylinderzahlen bei gleichbleibendem Ladedruck aufgetragen.

3. Baugewicht.

Von Bedeutung ist weiterhin die Frage des Baugewichtes. Auch hierbei ist es zweckmäßig, das Baugewicht auf die Kolbenfläche zu beziehen. Bei geometrisch völlig ähnlicher Bauweise würden die Gewichte im Einzylindertriebwerk den Hubräumen verhältig sein und somit das auf die Einheit der Kolbenfläche bezogene Gewicht, das sog. Kolbenflächengewicht, $\frac{G_1}{F_1} = \frac{G_1}{V_{h1}} s_1$ bei gleichen Hubraumgewichten sich wie der Hub ändern. Eine vorgeschriebene Leistung N_e erfordert bei gleicher Überladung eine bestimmte Gesamtkolbenfläche F. Baut man das Triebwerk aus z gleichartigen Einzeltriebwerken auf, so ist sein Gesamtgewicht $G = z\,G_1$, und das auf die Gesamtkolbenfläche $F = z\,F_1$ bezogene Gewicht $\frac{G}{F} = \frac{G_1}{F_1} = \frac{G_1}{V_{h1}} s_1$ würde mit verkleinertem Hub, also vermehrter Zylinderzahl, abnehmen. Dementsprechend würde das Leistungsgewicht

$$\frac{G}{N_e} = \frac{F}{N_e} \cdot \frac{G_1}{V_{h1}} s_1 = C s_1$$

mit Vermehrung der Zylinderzahl günstiger werden.

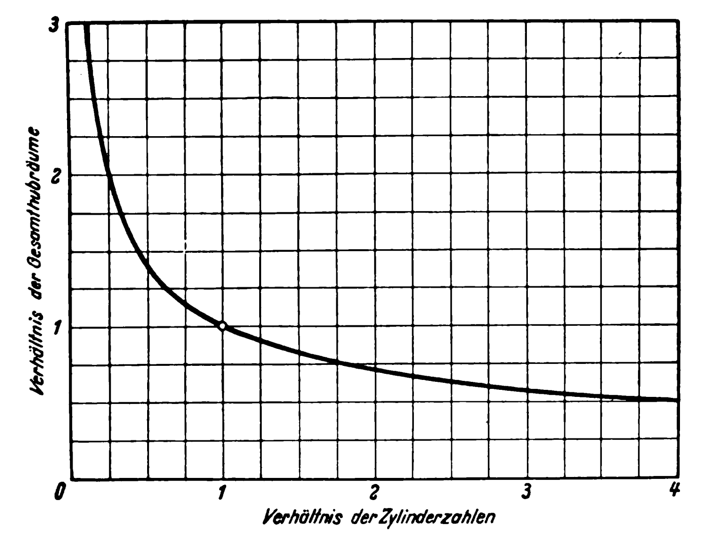


Bild 3. Verhältnis der Gesamthubräume in Abhängigkeit vom Verhältnis der Zylinderzahlen bei gleichbleibendem Ladedruck.

Praktisch lassen sich die Wandstärken der Zylinder und der Triebwerksteile bei kleineren Abmessungen nicht geometrisch ähnlich verkleinern, sondern werden verhältnismäßig stärker ausgeführt. Dazu kommen noch sonstige vom gemeinsamen Gehäuse, dem Luftschraubengetriebe und den Hilfsgeräten herrührende im gleichen Sinne verlaufende Einflüsse. Das Leistungsgewicht erreicht aber dasjenige des Motors mit wenigen großen Zylindern erst dann, wenn dasselbe Kolbenflächengewicht, d. h. verhältnismäßig schwerere Bauweise des Vielzylindermotors zugrunde gelegt wird. Wenn auch zahlenmäßige Unterlagen erst durch Auswertung der vielfachen gestalterischen Möglichkeiten gewonnen werden können, so ist doch die Verkleinerung der Zylinderabmessungen keineswegs mit einer Gewichtsvermehrung verbunden, zumal sich auch hierbei die höhere Belastbarkeit des kleineren Zylinders günstig auswirkt.

4. Stirnflächen- und Bauraumleistung.

Aus Gründen des Stirnwiderstandes spielt die auf die Einheit der Stirnfläche bezogene Leistung, die sog. Stirnflächenleistung, eine Rolle. Bei allen Bauarten (V-, X-, Mehrfachsternmotoren) wird die Stirnflächenleistung um so größer, je mehr Zylinder hintereinander in Reihe liegen. Bei vorgeschriebener Leistung führt die Verkleinerung der Zylinderabmessungen und Vermehrung der Zylinderzahlen demgemäß bei den einzelnen Bauweisen zu einer Erhöhung der Stirnflächenleistung.

Der zur Unterbringung einer verlangten Leistung notwendige Bauraum der Zylinder wird bei gleichartiger Bauweise innerhalb gewisser konstruktiv bedingter Grenzen durch Vermehrung der Zylinderzahlen verringert und damit wird auch im Gesamtmotor samt Luftschraubengetriebe und Geräteträger eine Erhöhung der auf die Einheit des Bauraumes bezogenen Leistung, der sog. Bauraumleistung, ermöglicht.

5. Schlußbetrachtung.

Die Entwicklung des Flugmotors hat mit den heute üblichen großen Zylinderabmessungen Kolbenflächenleistungen erreicht, die mit den in Kraftwagenrennmotoren erreichten Werten vergleichbar sind. Die dort verwendeten kleinen Zylinder ermöglichten die Unterbringung höchster Leistungen in beschränkten Räumen. Dem Kolbentriebwerk stehen daher im Flugmotorenbau noch ähnliche Wege offen. Die Verkleinerung der Zylinderabmessungen gestattet, entweder durch Herabsetzung der thermischen Belastungen mit verkleinerten Hubräumen dieselben Leistungen wie im Triebwerk mit großen Zylindern zu erzielen oder aber die jetzt erreichten Grenzwerte der Kolbenflächenleistungen noch wesentlich zu überschreiten.

Der in der Vermehrung der Triebwerksteile liegende Nachteil kann auf Grund der Erfahrungen auf verschiedenen Gebieten industrieller Fertigung durch Anwendung geeigneter Herstellungsverfahren der kleiner werdenden Einzelteile in gewissem Umfang ausgeglichen werden.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß es nach den für Kolbentriebwerke gültigen Ähnlichkeitsgesetzen möglich ist, höchste Leistungen in kleinen Bauräumen mit günstigen Stirnflächen zu verwirklichen, ohne die heute erreichten Kolbenflächenleistungen zu überschreiten, indem die Zylinderzahlen bei gleichzeitiger Verkleinerung der Zylinderbohrungen und des Gesamthubraumes vergrößert werden. Mit dieser Maßnahme tritt eine Anpassung des Kolbentriebswerks an die Strömungsmaschine mit vielen kleinen Arbeitszellen ein.

Gleitflächenschutz an Kolben*).

Entwicklung und Prüfung.

Von M. Rossenbeck.

Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Die für die Betriebssicherheit des Flugmotorenkolbens entscheidenden Zustände sind neben der Höchstlast das Einlaufen und der Notlauf, bei denen die beteiligten Flächen unter Mischreibung aufeinandergleiten. Die Notlaufeigenschaften von Grauguß- und besonders von Leichtmetallkolben lassen sich durch Schutzschichten auf den Gleitflächen verbessern. Die Entwicklung solcher Schutzschichten wurde teilweise durch die an Gleitlagern bereits früher geleistete Entwicklungsarbeit gefördert. Bei der Prüfung der Schutzschichten kommt es darauf an, die Notlaufbedingungen unter möglichst geringem Aufwand an Zeit und Hilfsmitteln nachzuahmen. Die Maßnahmen zur Herstellung der Notlaufbedingungen an Einzylinder-Prüfmotoren, wie sie sich in zahlreichen Versuchen des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart als zweckmäßig erwiesen haben, werden nachstehend dargestellt und die Kenngrößen für die Ermittlung der Gleiteigenschaften angeführt.

Gliederung.

1. Das Gleitproblem.

(Gleitreibung im Kurbeltrieb.)

Die Steigerung der Kolbenflächenleistung, die Betriebssicherheit und die Lebensdauer von Flugmotoren hängen wesentlich von dem Zustand der gleitenden Flächen des Kurbeltriebs ab. Kurbelwellenlager und Laufbahnen von Zylinder und Kolben stehen unter der Einwirkung von beträchtlichen wechselnden Kräften, Gleitgeschwindigkeiten und Temperaturen. Die hierbei zwischen Werkstoffen und Schmiermittel auftretenden Wechselwirkungen werfen viele gemeinsame Probleme auf, deren Lösung nur dann aussichtsreich ist, wenn die verschiedenen Betriebszustände im Sinne einer Ganzheitsbetrachtung — Werkstoff — Schmierstoff — Gegenwerkstoff — untersucht werden.

Die hin- und hergehende Bewegung des Kolbens im Zylinder wird durch die Kurbel in eine Drehbewegung umgeformt, die ihrer Art und ihren Belastungsverhältnissen nach einfacher ist und sich bei Temperaturen abspielt, die nur halb so hoch sind wie an der Zylinderlaufbahn. Diese einfacher zu übersehenden Verhältnisse ermöglichten eine sehr viel eingehendere Bearbeitung der Gleitlagerfragen, was sich wieder rückwirkend auf die Klärung der Gleitverhältnisse des Kolbens günstig auswirkte und dazu beitrug, die Maßnahmen zur Verbesserung seiner Gleiteigenschaften zu befruchten.

Fließreibung mit zugehöriger Vollschmierung läßt sich als Dauerzustand im Betrieb nicht ausschließlich verwirklichen. Meist ist nur Teilschmierung vorhanden und die aufeinandergleitenden Flächen bewegen sich unter Mischreibung, die gelegentlich, wenn die geordnete Schmierung aufhört, in Grenzreibung übergehen kann [1].

Während die Gleiteigenschaften der sich gegeneinander bewegenden Werkstoffe bei Fließreibung ohne Bedeutung sind, da ein ununterbrochener Ölfilm vorhanden ist, der beide Teile trennt, wird im Gebiet der Mischreibung das eigentliche Gleitverhalten des Werkstoffes ausschlaggebend für den weiteren Betrieb [2]. Die Unterschiede in der je nach Art und Grad der Fertigbearbeitung erreichbaren Bearbeitungsglätte sowie die Eigenschaft, im Betrieb eine weitere Steigerung der Oberflächenglätte zu erfahren — beide abhängig von dem kristallinen Feingefüge —, sind von größter Bedeutung für das Gleitverhalten und die Belastungsfähigkeit des Kolbens. Der Übergang von der Bearbeitungsglätte im neuen Zustand auf die zur Aufnahme der vollen Belastung erforderliche Glätte, bei der die örtlich hervorstehenden und einseitig tragenden Spitzen abgebaut werden, muß durch den Einlaufvorgang erfolgen [3].

2. Einlauf und Notlauf bei Kolben.

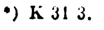
Auf den Einlauf der Kolben kann man trotz der durch Schleifen oder Drehen mit Diamant erzielbaren Oberflächenglätte nicht verzichten. Die senkrecht zu der Bewegungsrichtung des Kolbens verlaufenden Bearbeitungsriefen werden beim Einlauf abgerieben, danach erst — wenn er auf der gesamten am Gleitvorgang teilnehmenden Fläche trägt — ist der Kolben voll belastbar.

Während dieses Einlaufvorganges, der sich über eine längere Zeit erstreckt, ist die Gleitfläche besonders gegen Belastung und gegen Überlastung empfindlich, da die Bearbeitungskämme den tragenden Ölfilm durchbrechen und damit eine metallische Berührung der übliche Betriebszustand ist.

Es wird daher angestrebt, den Einlaufvorgang als solchen zu verkürzen und gleichzeitig die Sicherheit gegen Fressen während dieser Zeit zu erhöhen.

Auch bei bereits eingelaufenen Kolben treten im späteren Betrieb, besonders beim Anfahren, dann aber auch bei schlechten Kühl- und Schmierbedingungen Betriebszustände auf, die man in Anlehnung an die bei Gleitlagern übliche Benennung als Notlauf kennzeichnet. Die Gefahr, bei unzureichend schützendem Schmierfilm durch zu weitgehende metallische Berührung der Gleitflächen ein örtliches Verschweißen und damit ein Fressen des Kolbens zu erhalten, kann durch besondere Auswahl der aufeinandergleitenden Werkstoffe verringert werden. Diese Auswahl muß danach so erfolgen, daß ein Reibungspartner bei unzureichender oder aussetzender Schmierung einen Teil der Aufgabe des Schmieröls mit übernehmen kann. Das bedeutet, daß gewisse selbstschmierende Eigenschaften vorhanden sein müssen, wie sie bei einigen Metallen mit niedrigem Schmelzpunkt und großer Verformbarkeit vorliegen.

Während die Werkstoffpaarung bei Gleitlager und Welle aus einer großen Zahl verschiedenartiger Lagerwerkstoffe



*) K 31 3.



ausgewählt werden kann, sind die Möglichkeiten beim Kolben und Zylinder wesentlich beschränkter. Aus Forderungen der Wärmeabfuhr und des Gewichts heraus wurde seinerzeit der Graugußkolben trotz seiner ausgezeichneten Gleiteigenschaften verlassen und durch den Leichtmetallkolben ersetzt. Aus der Fülle der zunächst als Kolbenwerkstoffe verwendeten verschiedenartigen Leichtmetallegierungen sind nur einige wenige übriggeblieben. In Deutschland wird heute ausschließlich eine eutektische Aluminium-Silizium-Legierung verwendet. Bei den Zylinderwerkstoffen beschränkte man sich ebenfalls auf wenige Werkstoffe mit einer mittleren Zugfestigkeit von etwa 90 kg/mm² und einer Brinellhärte von ungefähr 250 kg/mm².

Durch diese Beschränkung in der beiderseitigen Werkstoffauswahl besteht danach heute die Aufgabe darin, zu einem gegebenen Leichtmetallwerkstoff und einem Stahlwerkstoff durch Zwischenschalten einer Schutzschicht die Gleitbedingungen herzustellen, die auch bei Mischreibung noch einwandfreien Betrieb gewährleisten.

3. Verbesserung der Notlaufeigenschaften durch Schutzschichten.

Für die Gleitflächenschutzschichten an Kolben können die bei Versuchen und im Betrieb mit Gleitlagerwerkstoffen erlangten Kenntnisse und Erfahrungen mit Vorteil verwertet werden.

Denn die Entwicklung der Gleitlagermetalle erfolgte infolge Unkenntnis und teilweise wohl auch Nichtbeachtung der Vorgänge bei Fließreibung und der daraus entspringenden Überschätzung der gefügebedingten reinen Gleiteigenschaften in der Richtung auf Werkstoffe, die auch bei Notlauf gute Gleiteigenschaften aufweisen. Diese Lagermetalle auf der Grundlage von Zinn, Blei, Antimon und Kadmium zeichnen sich alle durch ein großes plastisches Verformungsvermögen aus, das sie befähigt, örtlich auftretende Überlastungen beim Einlauf oder bei späteren Betriebszuständen abzubauen.

Ausgehend von dem in Amerika üblichen galvanischen Verzinnen von Graugußkolben wurde in Deutschland versucht, auf Leichtmetallgleitflächen gut haftende Schichten aus Zinn, Blei und Kadmium aufzubringen, wobei man aber wegen der geringeren Haftung und aus fertigungstechnischen Gründen von einer galvanischen Abscheidung absah und sich ausschließlich auf Tauch- und Ansiedeverfahren beschränkte [4]. Die durch Tauchen und Ansieden hergestellten Schichten haben eine Härte, die den Abscheidungsbedingungen im Bad entspricht. Sie sind weicher als die entsprechenden Lagermetalle, die mit Rücksicht auf die Tragfähigkeit durch Zusätze gehärtet werden müssen. Die Schichtdicke beträgt bis zu etwa 10 μ. Diese Schichten haben sich gut bewährt. Der Abstand der Betriebstemperaturen der Kolbengleitfläche mit im Mittel etwa 200° C vom Schmelzpunkt dieser Metalle ist nicht sehr groß (Zinn 231, Blei 327, Kadmium 321° C), so daß die Schichten beim Drücken des Kolbens im Betriebe sich rasch verformen und bei Aussetzen der Schmierung notfalls in flüssigem Zustand wirksam werden.

Es wurde auch vorgeschlagen, durch thermische Diffusion von Zinn- und Kadmiumstaub in die Gleitfläche eine Schutzwirkung zu erzielen [5]. Über praktische Ergebnisse dieser Verfahren ist jedoch nichts Näheres bekannt geworden.

Eine Verbesserung der Gleiteigenschaften bei Mischreibung wurde auch durch Eloxierung der Gleitfläche angestrebt [4]. Hierdurch entsteht eine allerdings harte Schicht mit vielen kleinen Poren, in denen das Öl besser haften soll. Der geringe in den Poren gespeicherte Ölvorrat ist allerdings nur ganz kurze Zeit wirksam, z. B. bei Kraftstoffüberfluß beim Starten. Die Eloxalschicht als solche hat keine eigentliche Schutzwirkung; unter Belastung frißt sie sehr heftig.

Die Zugabe von Graphit in kolloidaler Form zum Schmieröl gehört ebenfalls zu den Maßnahmen, die durch Verbesserung der Schmierfähigkeit des Öls ein leichteres Einlaufen ermöglichen sollen [7].

Während hierbei der ganze Schmierölkreislauf mit Graphit versehen wird und die Schmierfähigkeit ohne Berücksichtigung der besonders gefährdeten Teile überall erhöht wird, bedeutet die Beschränkung der an sich bewährten Graphitbehandlung auf den Kolben eine örtliche wesentliche Verbesserung des Gleitverhaltens.

Bei dem Graphitieren des Kolbenschaftes wird kolloidales Graphit nach vorangegangener Aufrauhung des Leichtmetallschaftes durch eine Beizbehandlung zusammen mit einem Bindemittel aufgebracht und anschließend eingebrannt [8, 9, 10]. Verglichen mit den leicht verformbaren und infolge der geringen Schichtdicke leichter abzureibenden Metallschichten sind die Graphitschichten dicker und haben eine entsprechend längere Lebensdauer.

Für den Gleitflächenschutz der Kolben steht danach heute eine Anzahl bewährter Verfahren zur Verfügung, aus der man den besonderen Forderungen des einzelnen Falles gemäß das geeignetste auswählen kann. Durch die Graphitierung ist es möglich, etwa auftretende Beschaffungsschwierigkeiten der Metalle zu vermeiden.

4. Prüfung der Notlaufeigenschaften und Prüfbedingungen am Einzylindermotor.

Die Arbeiten an der Entwicklung geeigneter Schutzschichten setzen eine zweckmäßige und rasche Prüfung der Notlaufeigenschaften der Schutzschichten voraus.

Die Gleiteigenschaften von Lagermetallen werden im wesentlichen auf besonderen Lagerprüfmaschinen untersucht, bei denen die verschiedenen Betriebszustände durch vereinfachte und übersichtliche Versuchsbedingungen getrennt voneinander hergestellt werden. Bei der Ermittlung des Notlaufverhaltens von Schutzschichten an Kolbengleitflächen verzichtet man auf eine so weitgehend vereinfachte Versuchsführung und erprobt die Schichten im Verbrennungsmotor unter den tatsächlich auftretenden Betriebsverhältnissen.

Hierzu eignen sich besonders gut Einzylindermotoren, Bild 1 [11]. Sie sind sparsam im Kraftstoffverbrauch,

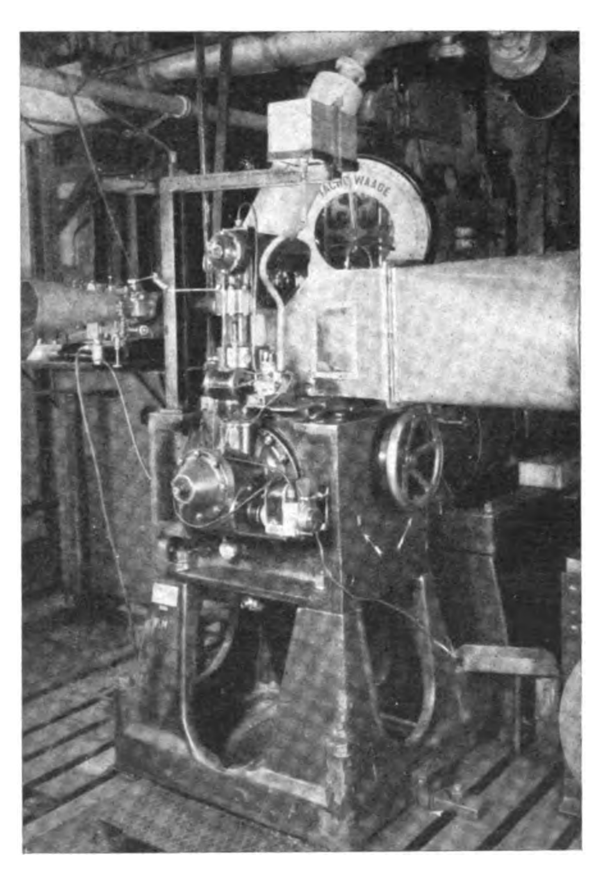


Bild 1. FKFS-Einzylinderprüfstand mit HM 508-Aufbau und Frischölschmierung.

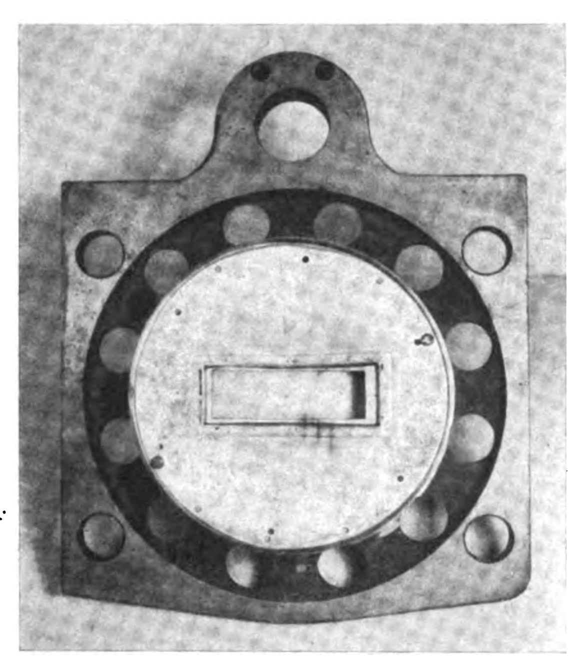


Bild 2. Spritzblech, an der Unterseite eines Prüfstandtisches angeordnet.

einfach zu bedienen und gestatten, jede gewünschte Einstellung rasch vorzunehmen. Die Ergebnisse können ohne zusätzliche Nachprüfungen auf dem Vollmotor uneingeschränkt übertragen werden.

Je nach Motorenmuster kann die Untersuchung bei Druckumlaufschmierung oder bei Frischölschmierung mit genau begrenzbarer Ölmenge durchgeführt werden. Die meisten Kraftwagen und Flugmotoren haben Druckumlaufschmierung. Die Zylinder- und Kolbenlaufflächen werden hierbei durch Schleuderöl geschmiert, das von den Pleuellagern hochspritzt. Der auf die Zylinderschmierung entfallende Schmierstoffanteil hängt daher vom Öldurchfluß durch die Kurbelwellenlager ab, der bei Gleitlagerung der Kurbelwelle nicht unter eine gewisse Größe verringert werden darf. Selbst bei starker Drosselung der Ölmenge ist die Schmierung der Kolbengleitbahn in der Regel so ausgezeichnet, daß kein Notlaufzustand eintritt. Hierzu muß erst ein Abdeckblech zwischen Zylinder und Kurbelgehäuse vorgesehen werden, das lediglich einen Schlitz in der Schwingungsebene des Pleuels frei läßt, Bild 2.

Die Einzylinderprüfstände können mit einfachen Mitteln vollständig auf Wälzlagerung der Kurbelwelle umgestellt werden. Hierdurch wird es möglich, die Lager der Kurbelwelle ausreichend zu schmieren, zugleich aber den an die Zylinderlaufbahn gelangenden Spritzölanteil zu verkleinern.

Eine geringe Öleintrittstemperatur verstärkt die Wirkung einer begrenzten Schmiermittelmenge. Auf gleichbleibende Öleintrittstemperatur ist zu achten.

Bei allen Versuchen über das Notlaufverhalten von Kolbengleitflächen ohne und mit Schutzschichten hat sich übereinstimmend ergeben, daß Fressen durch Verkleinerung der Schmiermittelmenge wesentlich mehr gefördert wird als durch Schwächung der Kühlung. Trotzdem reicht ein begrenzter Ölzulauf zur Zylinderlauffläche allein nicht aus, um den Kolben in kurzer Zeit fressen zu lassen. Die guten Gleiteigenschaften der Kolbenwerkstoffe gegen Stahl bleiben bis zu ganz geringen Schmiermittelmengen bestehen und verhindern oder verzögern das Fressen, so daß zu lange Versuchszeiten entstehen.

Weitere Maßnahmen von der Seite der Kühlung sind daher erforderlich. Bei Luftkühlung lassen sich die Kühlbedingungen einfacher herstellen und mit geringerem Aufwand steuern. Hierbei ist es außerdem möglich, wesentlich höhere Zylindertemperaturen zu erhalten als bei Flüssigkeitskühlung.

Ein entsprechend verminderter Anblasdruck der Kühlluft führt zu so hohen Temperaturen am Zylinder und Kolben, daß geringe Schmiermittelmengen schnell verdampfen. Der Freßbeginn wird so durch Gefügeveränderungen eingeleitet.

Bei den serienmäßigen Zylinder- und Zylinderkopfverkleidungen luftgekühlter Flugmotoren läßt sich der statische Druck der Kühlung nicht ohne besondere Maßnahmen in dem erforderlichen Ausmaß verringern, da der Zylinderkopf sonst zu heiß wird. Störungen im Verbrennungsablauf und Klopfen können sich einstellen, was wieder Oberflächenbeschädigungen im Zylinderkopf und auf dem Kolbenboden zur Folge hat. Um dies zu vermeiden, ist es erforderlich, die Kühlluft des Zylinders und des Zylinderkopfes getrennt zu führen, Bild 3. Der Kühlluftstrom wird hierbei durch ein Trennblech im Kühlluftschacht unterteilt. Der Zylinderkopf erhält hierdurch die sonst bei Vollast übliche Kühlluftmenge, während die Kühlluftmenge für den Zylinder so gedrosselt wird, daß Temperaturen bis zu 360° erhalten werden.

Mit der beschriebenen Einstellung der Schmierung und Kühlung wird aus dem kalten Zustand im Schnellstart angefahren. Zu Beginn wird der Prüfstand durch Fremdantrieb zunächst kurz geschleppt und danach durch Einschalten der Zündung in etwa 30 bis 40 s auf Vollast gebracht. Die Kraftstoffaufbereitungseinrichtung wurde in vorangegangenen Läufen auf Bestleistung eingestellt.

5. Erfassung und Wertung der Notlaufeigenschaften.

Außer Drehzahl und Drehmoment werden die Temperaturen an der Zylinderdruckseite, der Kraftstoffdurchfluß, ferner die Temperatur und der statische Druck der Kühlluft erfaßt.

Die einzelnen Stufen des Einlaufvorganges lassen sich an Hand der beim Schnellstartversuch aufgenommenen Meßwerte genau verfolgen.

Die Prüfstände werden so eingestellt, daß blanke unbehandelte Kolben in etwa 6 min fressen. Die mit Schutzschichten versehenen Kolben laufen entsprechend länger. Wird eine Laufzeit von etwa 15 bis 20 min überschritten, so frißt der Kolben in der Regel nicht mehr. Kolben, die einmal im Schnellstartversuch gelaufen waren, ohne zu fressen, zeigen bei einem erneuten Schnellstart keine oder wesentlich verringerte Freßneigung.

Die Zylindertemperatur steigt sehr schnell an und weist den für die Laufeigenschaften des Kolbenwerkstoffes oder der Schutzschicht kennzeichnenden Verlauf auf.

Bei fehlenden oder unzureichenden Schutzschichten vergrößert sich die Reibung durch Drücken. Die Temperatur steigt dauernd an bei zunächst geringem, dann immer stärkerem Abfallen der Leistung, bis es dann bei weiter steigenden Zylindertemperaturen zum Fressen kommt. Bei Schutzschichten mit guten Laufeigenschaften sinken die Temperaturen nach einem vorübergehenden Anstieg mit entsprechendem Leistungsabfall wieder ab, wobei die Leistung gleichzeitig bis zum Erreichen eines Beharrungszustandes zunimmt.

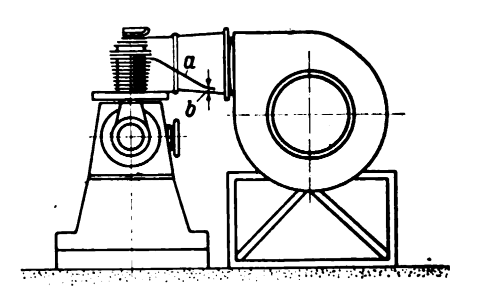


Bild 3. Luftführung mit verstellbarem Trennblech zur Bemessung der Kühlluftmenge für Zylinder und Zylinderkopf.

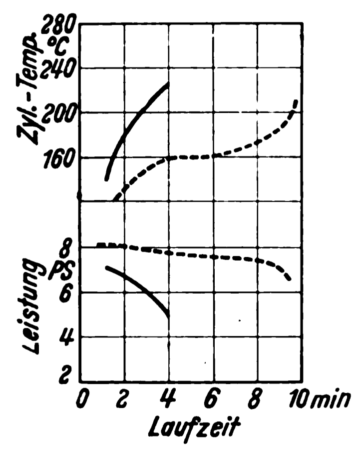


Bild 4. Leistungs-Temperatur-Zeit-Schaubild von blanken unbehandelten Kolben und Kolben mit ungeeigneter Oberflächenbehandlung.



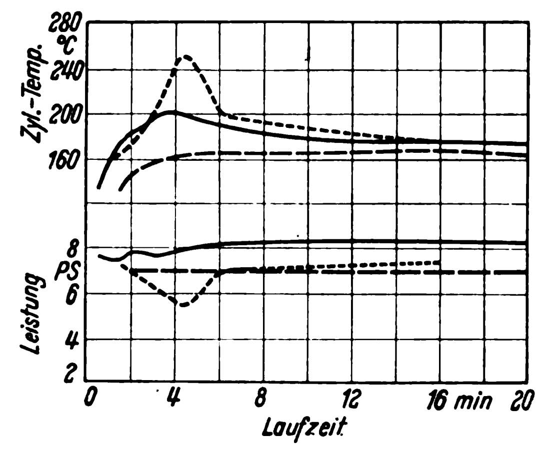


Bild 7. Leistungs-Temperatur-Zeit-Schaubild von Kolben mit Oberflächenschutzschichten aus Zinn und Graphit.

Werden die so ermittelten Leistungen und Temperaturen über der Laufzeit aufgetragen (Bild 4 und 7), so ergeben sich Kurvenzüge mit entgegengesetztem Verlauf. Bild 5, 6, 8, 9, 10 zeigen die dazugehörigen Kolben nach beendetem Lauf.

6. Meßgenauigkeit und Abgrenzung der Schäden.

Die Einstellung des Prüfstandes muß laufend überwacht werden. Es ist hierzu zweckmäßig, nach der einmal vorgenommenen Grundeinstellung in die Reihe der oberflächenbehandelten Kolben jeweils einige blanke unbehandelte Kolben einzuschalten. Zufälligkeiten in der Schmiermittelzufuhr und kleine Unterschiede in der Kühlung des Zylinders lassen sich so an ihren Auswirkungen erkennen; nachdem der Motor einmal auf Fressen eingestellt worden ist, spricht er außerordentlich empfindlich auf Veränderungen in der Schmierung und Kühlung an, indem sich die Laufzeiten ändern.

Der Betrieb unter Notlaufbedingungen erfolgt in einem nicht eindeutig bestimmten Grenzzustand. Bei den Untersuchungen über Schutzschichten werden daher in der Regel mindestens drei bis vier Kolben von jeder Oberflächenbehandlungsart geprüft, um so die Einflüsse durch kleine Unterschiede in der Bearbeitung und in den Abmessungen der Kolben auszuscheiden und durch die auftretende Häufigkeit der Prüfergebnisse die Neigung eines Kolbens, zu fressen, und damit die Eignung einer bestimmten Oberflächenschicht einwandfrei festzustellen. Bei dünnen Schutzschichten, wie sie z. B. durch die Art der Aufbringung beim Tauch- und Ansiedeverfahren bedingt sind, ist es zweckmäßig, eine größere Anzahl von Kolben zu untersuchen, damit Zufälligkeiten in der Bindung, ungenügende Vorbehandlung des Kolbenwerkstoffes oder veränderte Bedingungen des Bades beim Niederschlagen der Schichten als Störungsursachen eindeutig ausgeschieden werden können.

Das Gleitverhalten des Kolbens wird durch die Glätte der Zylinderoberfläche merklich mitbestimmt. Man muß daher für die Erprobung einem neuen Kolben jeweils einen neuen Zylinder zuordnen.



Bild 5. Lauffläche des unbehandelten blanken Kolbens, vgl. Bild 4.



Bild 6. Lauffläche des Kolbens mit ungeeigneter Laufschicht, vgl. Bild 4.



Bild 8. Lauffläche des Kolbens mit Zinnschutzschicht, vgl. Bild 7.



Bild 9. Lauffläche des Kolbens mit mäßig haftender Graphitschicht, vgl. Bild 7.



Bild 10. Lauffläche des Kolbens mit gut haftender Graphitschicht, vgl. Bild 7.



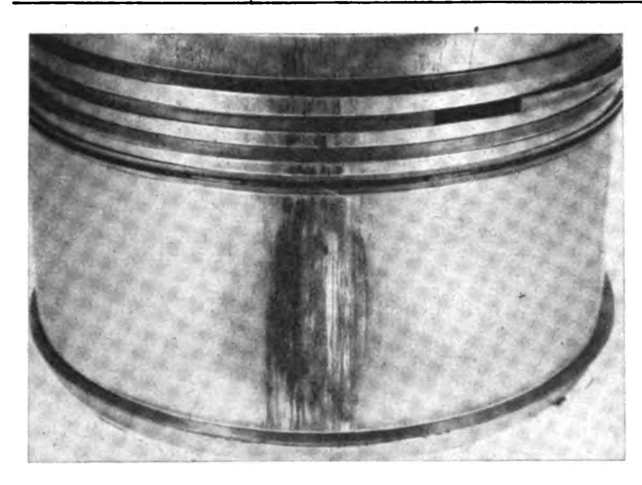


Bild 11. Kolben mit zuerst an der Lauffläche aufgetretener Freßstelle; die Kolbenringe sind frei.

Schäden an der Kolbengleitfläche können entstehen durch unzureichende Laufeigenschaften, durch zu starke Verformungen des Kolbenkörpers unter großen Belastungen und durch Festbrennen der Kolbenringe. Sollen die Ergebnisse der Schnellstartversuche eindeutige Aussagen über den Wert eines Gleitflächenschutzes ermöglichen, so müssen alle Ursachen, die — unabhängig von der Laufflächenbeschaffenheit — Fressen bewirken können, ausgeschaltet werden. Dies erfordert vor allem eine so bemessene Schmiermittel- und Kühlmittelmenge, daß die Kolbenringe nicht festbrennen können. In Bild 11 ist eine Kolbengleitfläche mit Freßstellen dargestellt. Hierbei ist zu erkennen, daß der Freßbeginn eindeutig auf ein Versagen der Gleitflächen zurückzuführen ist, da die Kolbenringe frei sind.

Beim Auftragen der Schutzschichten auf Kolbengleitflächen ist es üblich, von serienmäßigen Kolben ohne Änderung des Kolbendurchmessers auszugehen und die Schutzschichten unmittelbar aufzubringen. Hierdurch ergeben sich Maßänderungen je nach der Dicke der Schutzschicht. Bei der Erprobung von Gleitflächenschichten wird in gleicher Weise verfahren, so daß bei sonst gleichen Abmessungen bei Kolben mit Schutzschichten verschiedene Spiele je nach der Schichtdicke der Schutzschicht entstehen. Für die Erprobung sind Zylinder mit gleichem Durchmesser zu verwenden, damit nicht durch Änderungen des Laufspiels im betriebswarmen Zustand Einflüsse hinzukommen, die nicht mit dem eigentlichen Laufverhalten der Schutzschichten zusammenhängen.

Die Freßerscheinungen treten vorwiegend an der Gleitbahndruckseite der Kolben auf, die bei dem gewählten Aufbau gleichzeitig auch Abblasseite des Zylinders ist, so daß hier größte Flächenpressungen und höchste Temperaturen vorliegen. Je nachdem, wie sich beginnendes Fressen durch Temperatur und Leistungsabfall erkennen läßt und wie rasch daraufhin der Prüfstand abgestellt wird, fallen die Freßbilder nach Art und Umfang der Freßstelle unterschiedlich aus. Wird bei beginnendem Fressen nicht rasch genug abgestellt, so können abgetrennte Werkstoffteilchen von der Kolbengleitfläche auch in die Ringzone mitgenommen werden, dort die Kolbenringnuten verschmieren und die Kolbenringe festklemmen. In diesem Fall täuscht das Freßbild des Kolbens zunächst einen von den festsitzenden Kolbenringen ausgelösten Freßangriff vor. Bei genauerem Hinsehen wird man jedoch feststellen können, daß die Ringe in ihren Nuten vollständig frei sind und lediglich durch von der Kolbengleitfläche verschleppte Werkstoffteilchen örtlich festgehalten werden.

7. Zusammenfassung.

Die Betriebsbedingungen während des Einlaufs und im Notlauf unterscheiden sich grundsätzlich von den normalen Betriebsbedingungen, weil an die Stelle der Fließreibung die Mischreibung tritt. Das Gleitverhalten der beteiligten Werkstoffe wird damit entscheidend für den weiteren Betrieb. Die bei Gleitlagern seit langem bewährten niedrig schmelzenden und leicht verformbaren Metalle Zinn, Blei und Kadmium können heute im Tauchverfahren mit guter Haftung auf Leichtmetall-Kolbengleitflächen aufgebracht werden. Neuerdings ist kolloidaler Graphit, der mit einem Bindemittel auf die besonders aufgerauhte Kolbenoberfläche aufgespritzt und eingebrannt wird, als nichtmetallischer Schutz hinzugekommen. Die hierbei durch das Verfahren bedingten dickeren Schichten ermöglichen eine Schutzwirkung für längere Dauer.

Die Prüfung neu entwickelter Schutzschichten wird in Schnellstartuntersuchungen unter bestimmten Bedingungen durchgeführt, wozu sich Einzylindermotoren-Prüfstände besonders eignen. Die Änderungen der Zylindertemperatur und der Leistung während der Laufzeit lassen die Wirksamkeit der Schutzmittel erkennen und machen zusammen mit dem Aussehen der Gleitfläche nach dem Lauf eine Bewertung möglich. Die Ergebnisse lassen sich auf Vollmotoren unmittelbar anwenden.

8. Schrifttum.

[1] E. Heidebroek, Reibung und Verschleiß. Vorträge der VDI-Verschleißtagung Stuttgart 1938, Berlin 1939.

[2] G. Vogelpohl, Zur Klärung des Gleitreibungsvorganges. Öl und Kohle Bd. 16/35 (1939), S. 720/28.

[3] P. Sommer, Leichtmetallgleitflächen. Masch.-Bau-Betrieb Bd. 17 (1938), S. 579/82.

[4] E. Koch, P. Sommer, Neue Kolbenoberflächen. Jahrb. 1937 Dtsch. Luftf.-Forsch. II S. 193/97.

[5] E. Nitzsche, Ein weiterer Fortschritt auf dem Wege der Verbesserung der Notlaufeigenschaften von Leichtmetallkolben. Metallwirtschaft Bd. 18 (1939), S. 848/51.

[6] Britisches Patent 498371.

[7] C. Stephan, Schmierung und Oberflächenveredelung der Kolbenflächen und Zylinderlaufbahn in Verbrennungskraftmotoren. Sonderh. »Neue Wege im Kolbenbau« d. Dtsch. Mot.-Z. 1933. S. 16.

[8] Ver. St. Amerika 2157155.

[9] H. Schwarz, Laufflächenschutz für Leichtmetallkolben als Mittel gegen Drücken und Fressen. MTZ Bd. 4 (1941), S. 409/12.

[10] E. Meyer-Rässler, Neuartige Laufflächenschutzverfahren für Kolben von Verbrennungsmotoren. Z. VDI Bd. 86 (1942), S. 245/47.

[11] Der Einzylinderprüfmotor des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart. Autom. techn. Z. Bd. 39 (1936), S. 453/55.

Das Massenrückdrehmoment des Flugmotors*).

Von A. Kimmel.

Bericht aus dem Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Das bei Flugmotoren infolge der Massenwirkung der bewegten Motorteile auf die Motoraufhängung ausgeübte, um die Kurbelwellenachse wirkende Massendrehmoment, kurz Massenrückdrehmoment genannt, wird — zunächst für den Einzylindermotor — untersucht und in einer für die praktische Anwendung geeigneten handlichen Form dargestellt. Außerdem wird der Zusammenhang dieses Massenrückdrehmoments mit der bei Drehschwingungsuntersuchungen auftretenden erregenden Massendrehkraft sowie dem bei den Untersuchungen des Massenausgleichs eingeführten Massenumlaufmoment gezeigt.

Gliederung.

1. Einleitung.

Nach der beim Massenausgleich von Brennkraftmaschinen üblichen Betrachtungsweise wird unter dem Massenumlaufmoment das um die Kurbelwellenachse wirkende, infolge der Massenwirkung der bewegten Motorteile vom Motor auf das gesamte Fundament ausgeübte Moment verstanden. Nach den dortigen Festlegungen umfaßt hierbei das »Fundament« alle Befestigungsstellen zwischen Motor und Umwelt, also beim Flugmotor sowohl die Motoraufhängung als auch die von der Luftschraube erfaßte Luft, welche Kräfte und Momente auf die Schraube ausübt. Mit Rücksicht auf die Erregung der Schwingungen der Anordnung Motor — Motorvorbau und andere Fragen ist aber bei Flugmotoren — außer dem auf die Motoraufhängung rückwirkenden Moment der Gasdrehkraft — in der Regel nur das auf die eigentliche Motoraufhängung rückwirkende Massendrehmoment, im folgenden kurz Massenrückdrehmoment genannt, von Bedeutung.

Im folgenden wird dieses Moment zunächst für den Einzylindermotor mit unmittelbarem Antrieb der Luftschraube hergeleitet und sein Zusammenhang mit der erregenden Massendrehkraft sowie dem Massenumlaufmoment erläutert[1]). Über die Erweiterung auf Reihen- und Sternmotoren soll später gesondert berichtet werden.

Die Überlegungen, die hier im wesentlichen auf Flugmotoren zugeschnitten sind, gelten sinngemäß auch für andere Motorarten.

2. Das auf die Motoraufhängung wirkende Massenrückdrehmoment.

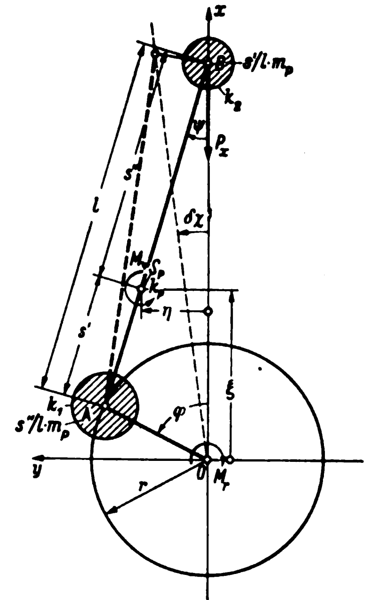
a) Herleitung.

Das vom Motor auf die Motoraufhängung ausgeübte Massenrückdrehmoment entsteht infolge der Massenwirkung der bewegten Kurbeltriebteile und wird von diesen über das Motorgehäuse auf die Aufhängung übertragen. Es könnte

*) M 2 — 2.

[1]) Bei den vorliegenden Untersuchungen hat Herr M. Läpple mitgewirkt.

Bild 1. Kurbeltrieb mit Ersatzmassen für das Pleuel.



etwa durch Anwendung der Zerschneidungsmethode und Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die einzelnen Kurbeltriebteile aus der vom Kolben auf die Zylinderlaufbahn übertragenen Normalkraft ermittelt werden. Einfacher ist aber die im folgenden gezeigte Herleitung dieses Moments mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen in Verbindung mit dem d'Alembertschen Prinzip.

Hierzu ersetzt man zunächst den wirklichen Kurbeltrieb durch eine einfache Ersatzanordnung[2]): Die Masse m_K des Kolbens denkt man sich im Kolbenbolzen B vereinigt. Das Pleuel mit der Masse m_p ersetzt man durch je eine mit Eigenträgheit behaftete Ersatzmasse im Kolbenbolzen und im Hubzapfen so, daß Gesamtmasse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment des Pleuels erhalten bleiben. Wählt man (mit den aus Bild 1 ersichtlichen Bezeichnungen) die auf dem Pleuel feste Ersatzmasse im Kolbenbolzen B zu $\frac{s'}{l}\,m_p$ mit dem Trägheitshalbmesser k_2 um eine zur Wellenachse parallele Achse durch B und diejenige im Hubzapfen A zu $\frac{s''}{l}\,m_p$ mit dem Trägheitshalbmesser k_1 um eine entsprechende Achse durch A, so stimmen Gesamtmasse und Schwerpunkt bereits mit dem wirklichen Pleuel überein. Damit auch das Trägheitsmoment $m_p\,k_p^2$ bezogen auf die (zur Kurbelwellenachse parallele) Achse durch den Schwerpunkt S_p übereinstimmt, muß nach dem Steinerschen Satz gelten:

$$m_p k_p^2 = \frac{s''}{l} m_p (k_1^2 + s'^2) + \frac{s'}{l} m_p (k_2^2 + s''^2) \quad . \;.\; . \quad (1)$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß $s' + s'' = l$ ist,

$$\frac{s''}{l} m_p k_1^2 + \frac{s'}{l} m_p k_2^2 = m_p (k_p^2 - s' s'') \quad . \;.\; . \quad (2)$$

Man erteilt nun dem ganzen Motor eine virtuelle Drehung $\delta\chi$ um die Kurbelwellenachse, während man sich die Kurbelwelle festgehalten denkt. Dafür müssen dann zur Zurückführung auf eine einfache Gleichgewichtsaufgabe die entsprechenden d'Alembertschen Kräfte und Momente angebracht werden; zunächst im Kolbenbolzen B eine Kraft $P_x = \left(m_K + \frac{s'}{l} m_p\right) \ddot{x}$ in $-x$-Richtung, wo $\ddot{x}$ die Kolben-

[2]) Vgl. etwa C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik. Berlin 1939, S. 846.

beschleunigung ist; ferner am Pleuel unter Beachtung von (2) ein Moment $M_\psi = (k_p^2 - s' s'') m_p \ddot{\psi}$ entgegen der Drehrichtung ψ, wo $\ddot{\psi}$ die Drehbeschleunigung des Pleuels ist; außerdem weitere auf die Ersatzmasse im Punkt A sowie die Kurbel wirkende Kräfte und Momente, die aber bei der virtuellen Drehung $\delta\chi$ keine Arbeit leisten und daher in Bild 1 sofort weggelassen wurden. Rechnet man das vom Motor auf die Aufhängung wirkende Massenrückdrehmoment im selben Sinn positiv, wie den Kurbelwinkel φ, so ist als äußeres, auf den Kurbeltrieb wirkendes Moment das Moment M_r entgegen dem Drehsinn der Kurbelwelle einzutragen.

Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ergibt sich dann bei einer virtuellen Drehung $\delta\chi$ des Motorgehäuses, der eine Änderung der Koordinate x des Kolbenbolzens B um δx und eine Drehung des Pleuels um den Winkel $\delta\chi - \delta\psi$ entspricht, die Beziehung

$$-M_r\,\delta\chi - \left(m_K + \frac{s'}{l}\,m_p\right)\ddot{x}\,\delta x + (k_p^2 - s' s'')\,m_p\ddot{\psi}\,(\delta\chi - \delta\psi) = 0 \quad . . . (3)$$

Die virtuellen Verrückungen $\delta\chi$, δx und $\delta\psi$ lassen sich in einer gemeinsamen Verrückung $\delta\varphi$ ausdrücken, wenn man beachtet, daß für diesen Zusammenhang die Drehung $\delta\chi$ kinematisch gleichwertig ist einer Drehung $-\delta\varphi$. Es ergibt sich nämlich, wenn man zur Abkürzung die Ableitungen nach dem Kurbelwinkel φ mit einem beigesetzten Strich bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \delta\chi &= -\delta\varphi, \\ \delta x &= \frac{\partial x}{\partial\varphi}\,\delta\varphi = x'\,\delta\varphi, \\ \delta\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,\delta\varphi = \psi'\,\delta\varphi. \end{aligned}\right\} \quad . . . . (4)$$

Damit erhält man aus (3), wenn man mit $\delta\varphi$ durchdividiert und sofort etwas umformt,

$$M_r = \left(m_K + \frac{s'}{l}\,m_p\right)\ddot{x}\,x' + (k_p^2 - s' s'')\,m_p\ddot{\psi}\,(1 + \psi') \quad . . . (5)$$

Mit der Drehschnelle $\omega = \dot{\varphi}$ und der Drehbeschleunigung $\dot{\omega}$ der Kurbelwelle sowie den Entwicklungen

$$\text{und} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= x'\,\dot{\varphi} = x'\,\omega \\ \ddot{x} &= x''\,\dot{\varphi}^2 + x'\,\ddot{\varphi} = x''\,\omega^2 + x'\,\dot{\omega} \end{aligned}\right\} \quad . . . . (6)$$

geht (5) über in

$$\left.\begin{aligned} M_r = \omega^2 &\left\{m_K\,x'\,x'' + m_p\left[\frac{s'}{l}\,x'\,x'' - (s' s'' - k_p^2)\,\psi''\,(1 + \psi')\right]\right\} \\ + \dot{\omega} &\left\{m_K\,x'^2 + m_p\left[\frac{s'}{l}\,x'^2 - (s' s'' - k_p^2)\,\psi'\,(1 + \psi')\right]\right\}. \end{aligned}\right\} (7)$$

b) Die Fourierreihe des Massenrückdrehmoments.

Für den praktischen Gebrauch, insbesondere zur Untersuchung von Schwingungsvorgängen, ist es zweckmäßig, den Ausdruck M_r (7) in eine Fourierreihe zu entwickeln.

Die bekannte Fourierreihe für die Kolbenkoordinate x lautet[3])

$$x = r\left(A_0 + \cos\varphi + \frac{A_2}{4}\cos 2\varphi + \frac{A_4}{16}\cos 4\varphi + \frac{A_6}{36}\cos 6\varphi + \ldots\right) \quad . . . (8)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{64}\lambda^3 - \frac{5}{256}\lambda^5 - \ldots, \\ A_2 &= \lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{15}{128}\lambda^5 + \ldots, \\ A_4 &= -\frac{\lambda^3}{4} - \frac{3}{16}\lambda^5 - \ldots, \\ A_6 &= \frac{9}{128}\lambda^5 + \ldots, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad . . . (9)$$

[3]) Vgl. etwa A. Kimmel, Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen bei Flugmotoren. Luftf.-Forschung Bd. 18 (1941), S. 229.

wo $\lambda = r/l$ das Schubstangenverhältnis bedeutet. Aus (8) findet man durch Ableitung nach φ sofort die Größen

$$x' = -r\left(\sin\varphi + \frac{A_2}{2}\sin 2\varphi + \frac{A_4}{4}\sin 4\varphi + \frac{A_6}{6}\sin 6\varphi + \ldots\right) \quad . . . (10)$$

und

$$x'' = -r\,(\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + A_4\cos 4\varphi + A_6\cos 6\varphi + \ldots). \quad . . . (11)$$

Die entsprechende Reihe für ψ lautet

$$\psi = \lambda\left(C_1\sin\varphi + \frac{C_3}{9}\sin 3\varphi + \frac{C_5}{25}\sin 5\varphi + \frac{C_7}{49}\sin 7\varphi + \ldots\right) \quad . . . (12)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 1 + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{3}{64}\lambda^4 + \frac{25}{1024}\lambda^6 + \ldots, \\ C_3 &= -\frac{3}{8}\lambda^2 - \frac{27}{128}\lambda^4 - \frac{135}{1024}\lambda^6 - \ldots, \\ C_5 &= \frac{15}{128}\lambda^4 + \frac{125}{1024}\lambda^6 + \ldots, \\ C_7 &= -\frac{35}{1024}\lambda^6 - \ldots, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad . . . (13)$$

woraus durch Ableitung nach φ sofort die weiteren Ausdrücke

$$\psi' = \lambda\left(C_1\cos\varphi + \frac{C_3}{3}\cos 3\varphi + \frac{C_5}{5}\cos 5\varphi + \frac{C_7}{7}\cos 7\varphi + \ldots\right) \quad . . . (14)$$

und

$$\psi'' = -\lambda\,(C_1\sin\varphi + C_3\sin 3\varphi + C_5\sin 5\varphi + C_7\sin 7\varphi + \ldots) \quad . . . (15)$$

folgen.

Setzt man die Reihen x' (10), x'' (11) sowie ψ' (14) und ψ'' (15) in (7) ein und multipliziert die auftretenden Produkte und Quadrate von Fourierreihen nach bekannten Rechenregeln[4]) aus, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} &\sigma' = \frac{s'}{l},\ \sigma'' = \frac{s''}{l},\ \sigma^* = \frac{k_p}{l} \\ \text{und}\quad &\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{l^2}\,(s' s'' - k_p^2) = \sigma'\sigma'' - \sigma^{*2} \end{aligned}\right\} \quad . . . (16)$$

sowie der weiteren Abkürzung für die gesamte hin- und hergehende Masse im Kolbenbolzen

$$m_h = m_K + \sigma'\,m_p \quad . . . . (17)$$

die endgültige Fourierreihe für das vom Motor auf die Aufhängung wirkende, in Drehrichtung der Kurbelwelle positiv gezählte Massenrückdrehmoment

$$\begin{aligned} M_r = r^2\omega^2 &\left\{-m_h\sum_{\nu=1}^{\infty}E_\nu\sin\nu\varphi + m_p\bar{\sigma}^2\sum_{\nu=1}^{\infty}K_\nu\sin\nu\varphi\right\} \\ + r^2\dot{\omega} &\left\{m_h\left(E_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\nu}\,E_\nu\cos\nu\varphi\right) - m_p\bar{\sigma}^2\left(L_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\nu}\,L_\nu\cos\nu\varphi\right)\right\} \quad . . . . (18) \end{aligned}$$

oder ausführlich

$$\left.\begin{aligned} M_r = r^2\omega^2 &\{-m_h\,(E_1\sin\varphi + E_2\sin 2\varphi + E_3\sin 3\varphi \\ &+ E_4\sin 4\varphi + E_5\sin 5\varphi + E_6\sin 6\varphi + \ldots) \\ &+ m_p\bar{\sigma}^2\,(K_1\sin\varphi + K_2\sin 2\varphi + K_3\sin 3\varphi \\ &+ K_4\sin 4\varphi + K_5\sin 5\varphi + K_6\sin 6\varphi + \ldots)\} \\ + r^2\dot{\omega} &\{m_h\,(E_0 + 2\,E_1\cos\varphi + E_2\cos 2\varphi \\ &+ \frac{2}{3}\,E_3\cos 3\varphi + \frac{1}{2}\,E_4\cos 4\varphi \end{aligned}\right\} (18\text{a})$$

[4]) Vgl. A. Kimmel, a. a. O., S. 239.

$$
\left.\begin{aligned}
&+\frac{2}{5}E_5\cos 5\varphi+\frac{1}{3}E_6\cos 6\varphi+\ldots)\\
&-m_p\bar{\sigma}^2\Big(L_0+2L_1\cos\varphi+L_2\cos 2\varphi+\frac{2}{3}L_3\cos 3\varphi\\
&+\frac{1}{2}L_4\cos 4\varphi+\frac{2}{5}L_5\cos 5\varphi\\
&+\frac{1}{3}L_6\cos 6\varphi+\ldots\Big)\Big\}.
\end{aligned}\right\}\quad (18\,\text{a})
$$

Hierbei sind die Größen E_ν die bereits bei den Untersuchungen über die erregenden Massendrehkräfte aufgetretenen bekannten Abkürzungen

$$
\left.\begin{aligned}
E_0&=\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{8}+\frac{\lambda^4}{16}+\frac{5}{128}\lambda^6+\ldots,\\
E_1&=\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda^3}{16}+\frac{15}{512}\lambda^5+\ldots,\\
E_2&=-\frac{1}{2}-\frac{\lambda^4}{32}-\frac{\lambda^6}{32}-\ldots,\\
E_3&=-\frac{3}{4}\lambda-\frac{9}{32}\lambda^3-\frac{81}{512}\lambda^5-\ldots,\\
E_4&=-\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^4}{8}-\frac{\lambda^6}{16}-\ldots,\\
E_5&=\frac{5}{32}\lambda^3+\frac{75}{512}\lambda^5+\ldots,\\
E_6&=\frac{3}{32}\lambda^4+\frac{3}{32}\lambda^6+\ldots,\\
E_7&=-\frac{21}{512}\lambda^5-\ldots,\\
E_8&=-\frac{\lambda^6}{32}-\ldots,\\
&\vdots
\end{aligned}\right\}\quad\ldots (19)
$$

die ein für allemal zahlenmäßig berechnet worden sind und — ebenso wie die Beiwerte A_ν (9) und C_ν (13) — für jedes praktisch vorkommende Stangenverhältnis λ aus fertigen Tafeln entnommen werden können[5]). Ferner ist

$$
\left.\begin{aligned}
K_1&=\frac{1}{\lambda}C_1,\ K_2=1+E_2,\ K_3=\frac{1}{\lambda}C_3,\ K_4=E_4,\\
K_5&=\frac{1}{\lambda}C_5,\ K_6=E_6,\ K_7=\frac{1}{\lambda}C_7,\ K_8=E_8,\ldots
\end{aligned}\right\}\quad (20)
$$

sowie

$$
\left.\begin{aligned}
L_0&=E_0,\ L_1=\frac{1}{2\lambda}C_1,\ L_2=1+E_2,\ L_3=\frac{1}{2\lambda}C_3,\ L_4=E_4,\\
L_5&=\frac{1}{2\lambda}C_5,\ L_6=E_6,\ L_7=\frac{1}{2\lambda}C_7,\ L_8=E_8,\ldots,
\end{aligned}\right\}\quad (21)
$$

das heißt, die Beiwerte K_ν und L_ν mit ungeradem Fußzeichen hängen sehr eng mit den Beiwerten C_ν (13) und die Beiwerte K_ν und L_ν mit geradem Fußzeichen sehr eng mit den Beiwerten E_ν (19) zusammen.

Der mit ω^2 behaftete Teil des Moments in (18) werde in Anlehnung an die in der Lehre des Massenausgleichs übliche Bezeichnungsweise als »stationäres Moment« und der mit $\dot{\omega}$ behaftete als »Schwankungsmoment« bezeichnet.

Beim Massenrückdrehmoment treten somit bei den stationären Momenten und bei den Schwankungsmomenten sowohl Glieder ungerader als auch solche gerader Ordnung auf. Die Größen ω^2 und $\dot{\omega}$ sind aber, wie sich etwa durch die bekannten Untersuchungen über die Ungleichförmigkeit des Gangs ergibt[6]), mit dem Kurbelwinkel φ veränderlich und können selbst wieder durch Fourierreihen in Funktion des Kurbelwinkels dargestellt werden, in denen bei Viertaktmotoren auch Glieder halbzahliger Ordnung (bezogen auf eine Kurbelwellenumdrehung) auftreten. Um nun die wirklichen, bei einer bestimmten gemessenen mittleren Drehschnelle auf die Aufhängung wirkenden Massenrückdrehmomente verschiedener Ordnung zahlenmäßig auszurechnen, hat man die Fourierreihen für ω^2 und $\dot{\omega}$ zu ermitteln und mit den zugehörigen Reihen in (18) bzw. (18a) zu multiplizieren, wobei eine einzige endgültige Fourierreihe entsteht, welche neben Gliedern 1., 2., 3. und höherer ganzer Ordnung grundsätzlich auch Glieder halbzahliger Ordnung enthält, die aber praktisch unbedeutend sind.

In der Regel treten aber — insbesondere bei Flugmotoren — die Schwankungsmomente gegenüber den stationären Momenten weit zurück. Man kann sich daher meist auf die stationären Momente in (18) bzw. (18a) beschränken, wobei für ω mit ausreichender Näherung die mittlere Drehschnelle gesetzt werden darf; man erhält damit als praktisch ausreichende und handliche Näherung für das Massenrückdrehmoment

$$
\left.\begin{aligned}
M_r=r^2\omega^2\{&-m_h(E_1\sin\varphi+E_2\sin 2\varphi+E_3\sin 3\varphi\\
&+E_4\sin 4\varphi+\ldots)+m_p\bar{\sigma}^2(K_1\sin\varphi+K_2\sin 2\varphi\\
&+K_3\sin 3\varphi+K_4\sin 4\varphi+\ldots)\}
\end{aligned}\right\}\quad (22)
$$

mit den Abkürzungen m_h (17), $\bar{\sigma}^2$ (16), E_ν (19) und K_ν (20).

Ersetzt man, wie vielfach üblich, das Pleuel lediglich entsprechend der Lage seines Schwerpunkts durch je eine punktförmige Masse im Hubzapfen und im Kolbenbolzen, d. h. vernachlässigt man in (22) die mit der Größe $m_p\bar{\sigma}^2$ behafteten Glieder ebenfalls noch, dann erhält man als weiter vereinfachten Ausdruck für das Massenrückdrehmoment

$$
\begin{aligned}
M_r^{V} = -r^2\omega^2 m_h(&E_1\sin\varphi+E_2\sin 2\varphi\\
&+E_3\sin 3\varphi+E_4\sin 4\varphi+\ldots)\quad\ldots (23)
\end{aligned}
$$

Zahlenmäßige Untersuchungen über die Güte der Näherung (23) zeigen, daß bei dem überwiegenden Glied zweiter Ordnung sowie bei dem ebenfalls noch bedeutenden Glied dritter Ordnung die Fehler in erträglichen Grenzen bleiben. Dagegen wird besonders bei dem Glied erster Ordnung der Fehler unzulässig groß. Die Näherung (23) eignet sich daher nicht zur Ermittlung der für die Schwingungserregung wesentlichen einzelnen Harmonischen; dagegen gibt sie den Verlauf des gesamten Massenrückdrehmoments in der Regel befriedigend wieder.

Will man noch das gesamte auf die Motoraufhängung wirkende Rückdrehmoment ermitteln, so hat man das negative Moment der Gasdrehkraft[7]) (Gasrückdrehmoment) und das Massenrückdrehmoment zu addieren.

c) Beseitigung des Massenrückdrehmoments.

Das auf die Motoraufhängung wirkende Massenrückdrehmoment läßt sich nach (18) bzw. (18a) dadurch vollständig beseitigen, daß man sowohl die hin- und hergehende Masse m_h als auch die Größe $m_p\bar{\sigma}^2$ zu Null macht.

Nach (17) würde die erste Bedingung $m_h = 0$ besagen, daß σ' und damit der Schwerpunktsabstand s' negativ sein müßten, d. h. der Schwerpunkt des Pleuels müßte auf der Pleuelachse jenseits des Hubzapfens liegen, und zwar so, daß der Schwerpunkt von Kolben und Pleuel zusammen in die Hubzapfenachse fiele, so daß man die Masse von Kolben und Pleuel zusammen als rein umlaufend betrachten könnte. Diese Maßnahme kann jedoch aus baulichen Gründen nicht verwirklicht werden.

Die zweite Bedingung $m_p\bar{\sigma}^2 = 0$ würde nach (16) für das Pleuel die Beziehung $k_p^2 = s's''$ erfordern[8]), die in praktischen Fällen meist schon ohne weiteres verhältnismäßig gut erfüllt ist und durch einfache konstruktive Maßnahmen am Pleuel vollends ganz erfüllt werden könnte.

Die Erfüllung der zweiten Bedingung ist aber weniger wichtig als die der ersten, da die mit $m_p\bar{\sigma}^2$ behafteten Glieder in (18) bzw. (18a) gegenüber den mit m_h behafteten weit zurücktreten. Durch die — auch in der Lehre des Massenausgleichs zur Beseitigung des Massenumlaufmoments vorgeschlagene — Bedingung $k_p^2 = s's''$ allein wird daher das auf die Motoraufhängung wirkende Massenrückdrehmoment nur wenig beeinflußt.

[5]) A. Kimmel, a. a. O., S. 233.
[6]) Vgl. z. B. C. B. Biezeno und R. Grammel, a. a. O., S. 924.
[7]) Vgl. A. Kimmel, a. a. O., S. 231.
[8]) Physikalisch bedeutet diese Bedingung, daß die reduzierte Pendellänge des Pleuels gleich l sein muß, und zwar sowohl, wenn man es um den Hubzapfen, als auch wenn man es um den Kolbenbolzen schwingen läßt.

Einzelne Ordnungen des Massenrückdrehmoments ließen sich zwar in bekannter Weise durch geeignet angeordnete und mit dem entsprechenden Vielfachen der Motordrehzahl umlaufende Ausgleichsmassen beseitigen[9]). Derartige Einrichtungen bedingen jedoch einen bei Flugmotoren untragbaren zusätzlichen Bauaufwand. Außerdem wirkt dann immer noch das Gasrückdrehmoment der betreffenden Ordnung auf die Motoraufhängung.

Das Massenrückdrehmoment kann somit beim Einzylindermotor mit baulich brauchbaren Mitteln nicht beseitigt werden.

8. Zusammenhang des Massenrückdrehmoments mit der erregenden Massendrehkraft.

Nach den Betrachtungen bei der Drehschwingungserregung wird das Moment der Massendrehkraft[10])

$$M_t = r\,T_K + r\,T_P = -m_K \frac{\dot x \ddot x}{\omega} - \frac{m_P}{\omega}\left(\dot\xi\,\ddot\xi + \dot\eta\,\ddot\eta + k_P^2\,\dot\psi\,\ddot\psi\right), \quad \ldots (24)$$

wo noch T_K die Massendrehkraft des Kolbens und T_P die des Pleuels sowie ξ und η die Koordinaten des Pleuelschwerpunkts S_P bedeuten. Berücksichtigt man auch hier die Ungleichförmigkeit des Gangs und entwickelt die zeitlichen Ableitungen der Größen x, ξ, η und ψ ganz entsprechend wie in (6), so geht M_t (24) über in

$$\left.\begin{aligned} M_t = &-\omega^2\left\{m_K\,x'\,x'' + m_P\left(\xi'\,\xi'' + \eta'\,\eta'' + k_P^2\,\psi'\,\psi''\right)\right\} \\ &-\dot\omega\,\left\{m_K\,x'^2 + m_P\left(\xi'^2 + \eta'^2 + k_P^2\,\psi'^2\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Es ist zweckmäßig, diesen Ausdruck, der durch Betrachtung der Bewegung des wirklichen Pleuels gewonnen wurde, dadurch umzuformen, daß das Pleuel wie bei der Herleitung von (7) durch je eine mit Eigenträgheit behaftete Ersatzmasse im Kolbenbolzen und im Hubzapfen so ersetzt wird, daß Gesamtmasse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment des Pleuels erhalten bleiben. Zu dieser Umformung beachtet man noch, daß der im Beiwert von $\dot\omega$ stehende Ausdruck $m_P(\xi'^2 + \eta'^2 + k_P^2\,\psi'^2)$, noch mit ω^2 multipliziert, die doppelte Bewegungsenergie des Pleuels darstellt. Dies läßt sich auch durch die Ersatzmassen ausdrücken, und zwar ist

$$m_P\,\omega^2\left(\xi'^2 + \eta'^2 + k_P^2\,\psi'^2\right) = \frac{s'}{l}\,m_P\,\dot x^2 + \frac{s''}{l}\,m_P\,r^2\,\omega^2 + \left(\frac{s''}{l}\,m_P\,k_1^2 + \frac{s'}{l}\,m_P\,k_2^2\right)\dot\psi^2.$$

Nach Umformung mit Hilfe von (2) sowie nach Division mit ω^2 folgt hieraus

$$m_P\left(\xi'^2 + \eta'^2 + k_P^2\,\psi'^2\right) = m_P\left[\frac{s'}{l}\,x'^2 + \frac{s''}{l}\,r^2 - \left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi'^2\right] \quad \ldots (26)$$

und durch Ableitung nach φ sofort die weitere Beziehung

$$m_P\left(\xi'\,\xi'' + \eta'\,\eta'' + k_P^2\,\psi'\,\psi''\right) = m_P\left[\frac{s'}{l}\,x'\,x'' - \left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi'\,\psi''\right]. \quad \ldots (27)$$

Mit (26) und (27) erhält man somit aus (25) für das Moment der Massendrehkraft, wenn das Pleuel durch Ersatzmassen dargestellt wird,

$$\begin{aligned} M_t = &-\omega^2\left\{m_K\,x'\,x'' + m_P\left[\frac{s'}{l}\,x'\,x'' - \left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi'\,\psi''\right]\right\} \\ &-\dot\omega\left\{m_K\,x'^2 + m_P\left[\frac{s'}{l}\,x'^2 + \frac{s''}{l}\,r^2 - \left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi'^2\right]\right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Wie zu erwarten war, stimmen das Massenrückdrehmoment M_r (7) und das negative Moment der Massendrehkraft $-M_t$ (28) nicht miteinander überein. Es muß aber offensichtlich eine enge Beziehung zwischen den beiden Momenten bestehen: Da zwischen dem Hubzapfen, an dem die Massendrehkraft wirkt, und der Motoraufhängung als weiteres, eine Drehbewegung ausführendes Teil das Pleuel liegt, so muß das Massenrückdrehmoment gerade um das Trägheitsdrehmoment des Pleuels in bezug auf die Kurbelwellenachse O von dem negativen Moment der Massendrehkraft verschieden sein.

Durch Vergleich von (7) und (28) läßt sich nun zeigen, daß zwischen dem Massenrückdrehmoment M_r und dem Moment M_t der Massendrehkraft die Beziehung

$$M_r = -M_t - m_P\left\{\omega^2\left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi'' + \dot\omega\left[\left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi' + \frac{s''}{l}\,r^2\right]\right\} \quad \ldots (29)$$

besteht, die sich mit Hilfe der schon mehrfach verwendeten Entwicklung $\ddot\psi = \psi''\,\omega^2 + \psi'\,\dot\omega$ auf die Form

$$M_r = -M_t + m_P\left[\left(k_P^2 - s'\,s''\right)\ddot\psi - \frac{s''}{l}\,r^2\,\dot\omega\right] \ldots (29a)$$

bringen läßt. Hieraus ersieht man mit (1) und (2) sowie unter Beachtung der Vorzeichenfestsetzungen für die Winkel φ und ψ (vgl. Bild 1), daß der zweite Posten auf der rechten Seite tatsächlich das Trägheitsdrehmoment des Pleuels in bezug auf die Kurbelwellenachse ist. Bezeichnet man dieses vorübergehend mit M_P, wo also

$$\begin{aligned} M_P &= -m_P\left\{\omega^2\left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi'' + \dot\omega\left[\left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi' + \frac{s''}{l}\,r^2\right]\right\} \\ &= m_P\left[\left(k_P^2 - s'\,s''\right)\ddot\psi - \frac{s''}{l}\,r^2\,\dot\omega\right] \quad \ldots\ldots\ldots (30) \end{aligned}$$

ist, dann kann (29) und (29a) auch in der Form

$$M_r = -M_t + M_P \quad \ldots\ldots (29b)$$

geschrieben werden.

Das auf die Aufhängung wirkende Massenrückdrehmoment unterscheidet sich also grundsätzlich von dem negativen Moment der Massendrehkraft um das Trägheitsdrehmoment des Pleuels bezüglich der Kurbelwellenachse. Würde man sowohl beim Massenrückdrehmoment als auch bei der Massendrehkraft die Drehträgheit des Pleuels außer acht lassen, so erhielte man für beide Momente denselben Ausdruck. Inwieweit diese Vernachlässigung zulässig ist, soll später gezeigt werden.

4. Zusammenhang des Massenrückdrehmoments mit dem Massenumlaufmoment.

Nach den Betrachtungen beim Massenausgleich ist das Massenumlaufmoment[11]), also das auf das gesamte Fundament, d. h. alle Befestigungsstellen zwischen Motor und Umwelt, ausgeübte Massenmoment

$$M_z = -\overline{R}\,\dot\omega - R\,\frac{\ddot\psi}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

mit den Abkürzungen

$$R = m_P\,\lambda\left(s'\,s'' - k_P^2\right), \qquad \overline{R} = \Theta_W + m_P\,r^2\,\frac{s''}{l}, \quad (32)$$

wo Θ_W das Massenträgheitsmoment der Luftschraube einschließlich der leeren Kurbelwelle bedeutet.

Bildet man die zeitlichen Ableitungen der Größe ψ entsprechend wie in (6) und trennt sofort die Glieder mit ω und $\dot\omega$, dann geht (31) über in

$$\begin{aligned} M_z = &-m_P\left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi''\,\omega^2 \\ &-\left\{\Theta_W + m_P\left[\frac{s''}{l}\,r^2 + \left(s'\,s'' - k_P^2\right)\psi'\right]\right\}\dot\omega \quad \ldots (33) \end{aligned}$$

Die Entwicklung dieses Ausdrucks in Fourierreihen liefert[11])

$$\begin{aligned} M_z = &\ \omega^2\,R\left(C_1\sin\varphi + C_3\sin 3\varphi + C_5\sin 5\varphi + \ldots\right) \\ &-\dot\omega\,\overline{R} - \dot\omega\,R\left(C_1\cos\varphi + \frac{C_3}{3}\cos 3\varphi + \frac{C_5}{5}\cos 5\varphi + \ldots\right) \quad \ldots (34) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $\overline{R}$, R (32) und C_ν (13).

[9]) Siehe z. B. C. B. Biezeno und R. Grammel, a. a. O., S. 873 oder H. Schrön, Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine (Heft 8, II. Teil, der Sammlung »Die Verbrennungskraftmaschine«, herausgegeben von H. List), Wien 1942, S. 43.

[10]) Vgl. A. Kimmel, a. a. O., Gl. (16) und (20).

[11]) Vgl. C. B. Biezeno und R. Grammel, a. a. O., S. 846.

Die Schwankungsglieder in (33) dürfen nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Rechnet man nämlich mit (über einer Motorumdrehung) unveränderlicher Drehschnelle ω, setzt man also $\dot{\omega} = 0$, so muß zwangsweise auch $\Theta_W = \infty$ gesetzt werden, da bei den wirklich vorkommenden Indikatordiagrammen vollkommen gleichförmiger Gang theoretisch nur mit einem unendlich großen Schwungrad möglich ist. Damit nimmt aber das in (33) bzw. (34) bei den Schwankungsgliedern auftretende Produkt $\Theta_W\, \dot{\omega}$ den Wert $\infty \cdot 0$ an, d. h. der Wert von M_z wird unbestimmt. Daher dürfen in (33) und (34) nur die nicht mit dem großen Beiwert Θ_W behafteten Schwankungsglieder vernachlässigt werden, wogegen das Produkt $\Theta_W\, \dot{\omega}$ auf jeden Fall mitgeführt werden muß. Hierzu muß der Verlauf von $\dot{\omega}$ etwa mit Hilfe der bekannten Verfahren des Leistungsausgleichs sehr genau bestimmt werden, damit die Fehler bei dem Produkt $\Theta_W\, \dot{\omega}$ in zulässigen Grenzen bleiben.

Der Ausdruck M_z (33) bzw. (34) stellt, da er mit Hilfe des Schwungsatzes gewonnen wurde, das Trägheitsdrehmoment des Pleuels und der Luftschraube (einschließlich der leeren Kurbelwelle) bezüglich der Kurbelwellenachse dar. Mit M_p (30) erhält man somit die Beziehung

$$M_z = M_P - \Theta_W\, \dot{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Bedeutet $\overline{M}$ das auf die Aufhängung wirkende Gesamtrückdrehmoment und M_a das von der Luftschraube auf die umgebende Luft ausgeübte, im Sinne der Kurbelwellendrehung positiv gezählte Arbeitsdrehmoment der Luftschraube, so verteilt sich das Umlaufmoment M_z auf die eigentliche Motoraufhängung und die die Schraube umgebende Luft nach der Beziehung (Bild 2)

$$M_z = \overline{M} + M_a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

woraus sofort das auf die eigentliche Aufhängung wirkende Gesamtrückdrehmoment

$$\overline{M} = M_z - M_a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

folgt. Das auf die Aufhängung wirkende Massenrückdrehmoment wird dann schließlich, wenn man noch die Vorzeichenfestsetzung der vom Motor auf die Aufhängung rückwirkenden Gasdrehkraft beachtet,

$$M_r = \overline{M} + r\, T_G = M_z - M_a + r\, T_G \quad \ldots \quad (38)$$

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs könnte das Massenrückdrehmoment auf dem Umweg über das Umlaufmoment, das Arbeitsdrehmoment und die Gasdrehkraft ebenfalls berechnet werden. Hierbei dürfen aber wieder die Schwankungsglieder, wie schon im Anschluß an (34) auseinandergesetzt, nicht ohne weiteres vernachlässigt werden, so daß sich die Beziehung (38) für Näherungsrechnungen nicht eignet.

Durch Elimination von M_p aus (29b) und (35) erhält man folgende weitere Beziehung zwischen dem Massenrückdrehmoment M_r, dem Moment M_t der Massendrehkraft, dem Umlaufmoment M_z und dem Trägheitsdrehmoment der Luftschraube:

$$M_r = -M_t + M_z + \Theta_W\, \dot{\omega}, \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

die sich ebenfalls zur Berechnung des Massenrückdrehmoments eignen würde. Setzt man M_z (34) sowie die zuvor in eine Fourierreihe entwickelte Größe M_t (28) ein, so entsteht tatsächlich derselbe Ausdruck wie der auf unmittelbarem Weg mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen gefundene Ausdruck M_r (18) bzw. (18a).

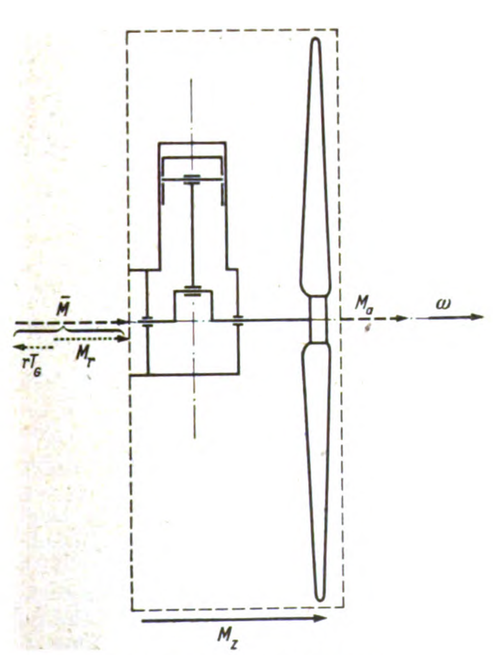


Bild 2. Motor mit Luftschraube.

5. Beispiele.

Beispiel A. Als erstes Beispiel soll ein ohne Verdichtung und Dehnung des Zylinderinhalts leerlaufender Einzylindermotor betrachtet werden, der mit einer vollkommen glatten Schwungscheibe ohne Luft- und Arbeitswiderstand versehen sei, Bild 3. Er sei auf eine bestimmte (mittlere) Drehzahl gebracht worden, die er, da auch keine inneren Widerstände vorhanden sein sollen, dauernd beibehält.

Der Ablauf der Bewegung läßt sich für dieses Beispiel in geschlossener Form etwa mit Hilfe der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen darstellen. Für die vorliegende Anordnung mit einem Freiheitsgrad lautet die Lagrangesche Gleichung

$$Q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

wo Q die auf die allgemeine Koordinate q bezogene Kraft ist. Die Bewegungsenergie L der Anordnung wird, wenn man sofort nach (6) $\dot{x} = x'\omega$ sowie $\dot{\psi} = \psi'\omega$ setzt,

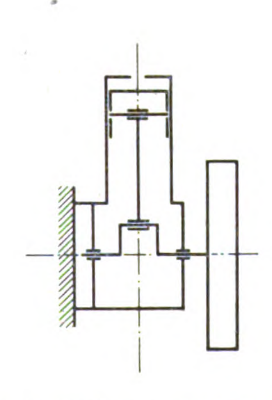
$$L = \frac{1}{2}\Theta_W\, \omega^2 + \frac{1}{2} m_K\, x'^2\, \omega^2 + \frac{1}{2} m_P\, (\xi'^2 + \eta'^2 + k_P^2\, \psi'^2)\, \omega^2. \quad \ldots \quad (41\text{a})$$

Wählt man als Koordinate q den Kurbelwinkel φ, so wird $\dot{q} = \omega$ und damit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \Theta_W\, \omega + m_K\, x'^2\, \omega + m_P\, (\xi'^2 + \eta'^2 + k_P^2\, \psi'^2)\, \omega, \quad (41\text{b})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \Theta_W\, \dot{\omega} + 2\, m_K\, x'\, x''\, \omega^2 + m_K\, x'^2\, \dot{\omega} + 2\, m_P\, (\xi'\, \xi'' + \eta'\, \eta'' + k_P^2\, \psi'\, \psi'')\, \omega^2 + m_P\, (\xi'^2 + \eta'^2 + k_P^2\, \psi'^2)\, \dot{\omega}, \quad \ldots\ldots \quad (41\text{c})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = m_K\, x'\, x''\, \omega^2 + m_P\, (\xi'\, \xi'' + \eta'\, \eta'' + k_P^2\, \psi'\, \psi'')\, \omega^2. \quad (41\text{d})$$


Bild 3. Leerlaufender Motor mit glatter Schwungscheibe.

Hiermit erhält man, wenn voraussetzungsgemäß die äußere Kraft $Q = 0$ gesetzt wird, aus (40) nach kurzer Umformung die Bewegungsgleichung

$$\dot{\omega}\,\{m_K\,x'^2 + m_p\,(\xi'^2 + \eta'^2 + k_p^2\,\psi'^2) + \Theta_H\}$$
$$+\,\omega^2\,\{m_K\,x'\,x'' + m_p\,(\xi'\,\xi'' + \eta'\,\eta'' + k_p^2\,\psi'\,\psi'')\} = 0 \quad \ldots \quad (42)$$

oder, wenn man mit Hilfe der Beziehungen (1) und (2) von der Darstellung in Schwerpunktskoordinaten zur Ersatzmassendarstellung übergeht, die gleichwertige Form

$$\dot{\omega}\,\left\{m_K\,x'^2 + m_p\left[\frac{s'}{l}\,x'^2 + \frac{s''}{l}\,r^2 - (s'\,s'' - k_p^2)\,\psi'^2\right] + \Theta_H\right\}$$
$$+\,\omega^2\left\{m_K\,x'\,x'' + m_p\left[\frac{s'}{l}\,x'\,x'' - (s'\,s'' - k_p^2)\,\psi'\,\psi''\right]\right\} = 0 \quad (42\,\mathrm{a})$$

Beachtet man, daß der Beiwert von ω^2 die Hälfte der Ableitung nach φ des Beiwerts von $\dot{\omega}$ darstellt, und berücksichtigt, daß $\psi'_{\varphi=0} = \lambda$ und $x'_{\varphi=0} = 0$ ist, so findet man — wie man auch durch Ableiten nach φ sofort bestätigt findet — als Lösung (in der Ersatzmassendarstellung)

$$\omega^2 = \omega_0^2\,\frac{1 + \dfrac{m_p}{\Theta_H}\left[\dfrac{s''}{l}\,r^2 - \lambda^2(s'\,s'' - k_p^2)\right]}{1 + \dfrac{m_K}{\Theta_H}\,x'^2 + \dfrac{m_p}{\Theta_H}\left[\dfrac{s'}{l}\,x'^2 + \dfrac{s''}{l}\,r^2 - (s'\,s'' - k_p^2)\,\psi'^2\right]}\,, \quad (43)$$

wo ω_0 die Bezugsdrehschnelle beim Kurbelwinkel $\varphi = 0$ ist. Damit ist nach (42a) auch der Verlauf von $\dot{\omega}$ bestimmt. Auf die Umformung der Ausdrücke ω (43) und $\dot{\omega}$ (42a) in Fourierreihen sei verzichtet.

Da bei dem vorliegenden Beispiel an der Schwungscheibe keine Momente abgenommen werden, müssen das Massenrückdrehmoment M_r (7) und das Umlaufmoment M_z (33) miteinander übereinstimmen. Dies kann mit Hilfe der Beziehung (42a) bestätigt werden.

Der als Beispiel gewählte Einzylindermotor hat folgende Kenngrößen:

- Kurbelhalbmesser $r = 7{,}0$ cm,
- Pleuellänge $l = 22{,}0$ cm,
- Schwerpunktsabstände $s' = 5{,}3$ cm und $s'' = 16{,}7$ cm,
- Stangenverhältnis $\lambda = 0{,}3182$,
- Bezugsdrehschnelle $\omega_0 = 200$ 1/s,
- Masse des Kolbens $m_K = 0{,}00114$ kgs²/cm,
- Masse des Pleuels $m_p = 0{,}001265$ kgs²/cm,
- Trägheitshalbmesser des Pleuels, bezogen auf den Schwerpunkt, $k_p = 8{,}6$ cm,
- Massenträgheitsmoment der Schwungscheibe einschließlich der leeren Kurbelkröpfung $\Theta_H = 5{,}0$ cmkgs².

Der nach (43) mit x' (10), x'' (11), ψ' (14) sowie ψ'' (15) berechnete Verlauf der Drehschnelle ω ist in Bild 4 in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel φ wiedergegeben. Die Drehbeschleunigung $\dot{\omega}$ wurde nach (42a) mit Hilfe des eben berechneten Werts ω (43) ermittelt und in Bild 5 dargestellt. In Wirklichkeit sind die Drehzahlschwankungen bei Flugmotoren wesentlich kleiner, da hier eine verhältnismäßig kleine Schwungscheibe angenommen wurde, um die kennzeichnenden Ergebnisse ohne allzu großen Rechenaufwand deutlich hervortreten zu lassen.

Der nach (7) berechnete Verlauf des Massenrückdrehmoments M_r ist in Bild 6 wiedergegeben, wo Schaulinie a den Verlauf des vollständigen Ausdrucks M_r (7) angibt. Beschränkt man sich auf die stationären Glieder und setzt hierbei für die Drehschnelle den festen Wert $\omega_0 = 200$ 1/s, so erhält man den Verlauf nach Schaulinie b, deren Ordinatenwerte im Mittel nur um 1% von denen der Schaulinie a abweichen; die Näherung ist also ausreichend genau[12]). Sodann zeigt Schaulinie c noch den Beitrag des mit

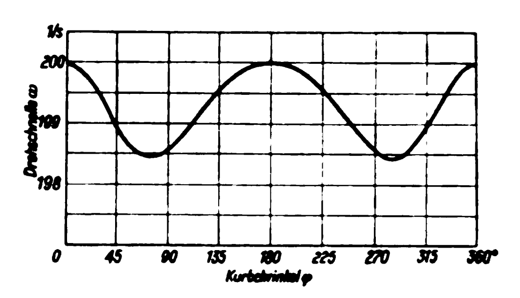


Bild 4. Verlauf der Drehschnelle beim leerlaufenden Motor.

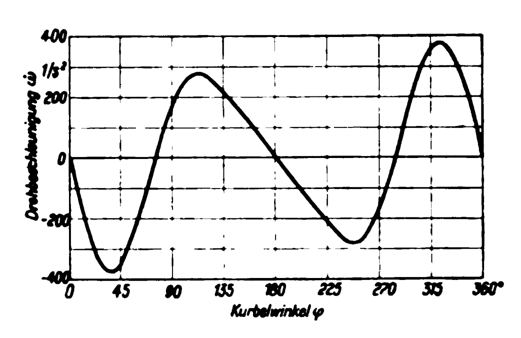


Bild 5. Verlauf der Drehbeschleunigung beim leerlaufenden Motor.

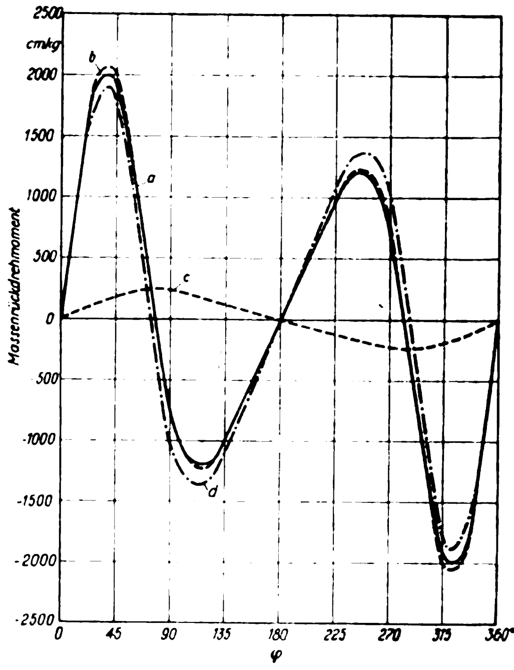


Bild 6. Verlauf des Massenrückdrehmoments beim leerlaufenden Motor.
a vollständiger Ausdruck M_r (7),
b stationäres Massenrückdrehmoment,
c Beitrag des mit der Größe $(s's'' - k_p^2)$ behafteten stationären Gliedes zum Massenrückdrehmoment,
d stationäres Massenrückdrehmoment bei Erfüllung der Bedingung $k_p^2 = s's''$.

der Größe $(s'\,s'' - k_p^2)$ behafteten, von der Drehträgheit des Pleuels herrührenden stationären Gliedes zum Massenrückdrehmoment, der, wie bereits oben auseinandergesetzt, verhältnismäßig klein ist, so daß das Massenrückdrehmoment durch die Erfüllung der Bedingung $k_p^2 = s'\,s''$ nur wenig beeinflußt wird, wie auch Schaulinie d bestätigt.

Den durch (29) bzw. (29b) gegebenen Zusammenhang zwischen dem Massenrückdrehmoment M_r und dem negativen Moment $-M_t$ der Massendrehkraft veranschaulicht

[12]) In praktischen Fällen ist die Näherung noch besser, da die Bezugsdrehschnelle ω_0 abweicht von der — etwa durch eine Drehzahlmessung erhaltenen — mittleren Drehschnelle, die bei kleinen Drehzahlschwankungen ungefähr gleich dem algebraischen Mittelwert aus dem Höchstwert ω_o und dem Kleinstwert ω_u von ω in Bild 4 ist. Bei der Lösung (43) der Differentialgleichung (42 a) wurde nämlich als willkürliche Konstante nicht die mittlere Drehschnelle gewählt, was eine sehr verwickelte Rechnung erfordert hätte, sondern die Drehschnelle beim Kurbelwinkel $\varphi = 0$, die sich übrigens bei näherer Betrachtung als die höchste Drehschnelle während eines Motorumlaufs ergibt. Auf die vorliegenden grundsätzlichen Untersuchungen ist dies jedoch ohne Einfluß, zumal sich in praktischen Fällen die mittlere und die höchste Drehschnelle nur wenig unterscheiden.



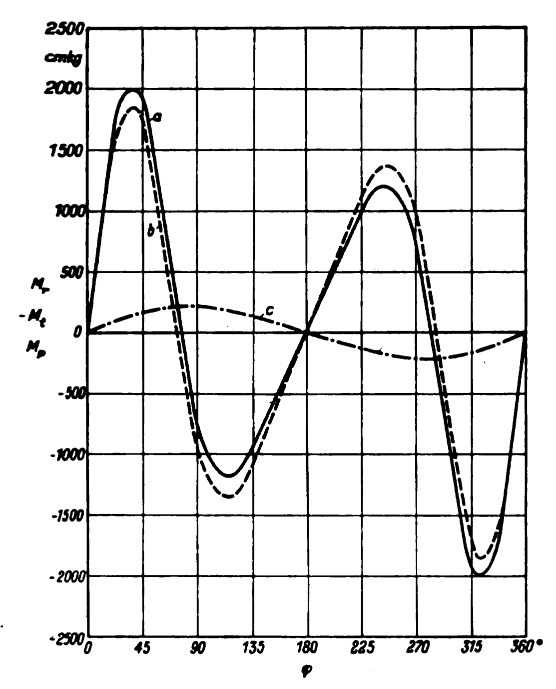


Bild 7. Zusammenhang zwischen Massenrückdrehmoment und Massendrehkraft.
a Massenrückdrehmoment M_r,
b negatives Moment — M_t der Massendrehkraft,
c Trägheitsdrehmoment des Pleuels M_p.

Bild 7. Es bestätigt sich, daß der Verlauf und die Größe des gesamten Massenrückdrehmoments in roher Annäherung durch das negative Moment der Massendrehkraft wiedergegeben wird. Da aber der Ausdruck M_p ungefähr wie eine Sinuswelle über eine Kurbelwellenumdrehung verläuft, können bei dem Moment erster Ordnung große Abweichungen entstehen.

Der nach (33) ermittelte Verlauf des Massenumlaufmoments M_z stimmt für dieses Beispiel, wie es sein muß, mit dem in Bild 6 dargestellten Verlauf des Massenrückdrehmoments überein; auf die Wiedergabe wurde daher verzichtet.

Zur Erläuterung der Fourierdarstellung wurden schließlich noch die Fourierbeiwerte des Massenrückdrehmoments berechnet und in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Hierbei wurden zur Durchführung eines einwandfreien Vergleichs für das Zahlenbeispiel die Größen ω^2 und $\dot{\omega}$ ebenfalls in Fourierreihen entwickelt und nach den schon mehrfach erwähnten Multiplikationsformeln mit den entsprechenden, in den geschweiften Klammern von (18) bzw. (18a) stehenden Fourierreihen multipliziert. Spalte 2 von Zahlentafel 1 zeigt die Fourierbeiwerte des so behandelten vollständigen Ausdrucks M_r (18) bzw. (18a) für das Massenrückdrehmoment; den Anteil des stationären Moments zeigt Spalte 3, den des Schwankungsmoments Spalte 4. Es bestätigt sich, daß die Schwankungsglieder bei den ins Gewicht fallenden Ordnungen nur einen unbedeutenden Beitrag zum Gesamtmoment liefern. Das überwiegende Glied ist das Moment zweiter Ordnung, wie auch schon aus dem Verlauf nach Bild 6 zu vermuten war. Außerdem fällt noch das Moment dritter Ordnung stark ins Gewicht, während die weiteren Ordnungen bedeutungslos sind.

Zahlentafel 1. Die Fourierbeiwerte des Massenrückdrehmoments beim leerlaufenden Motor.

1	2	3	4	5	6
	Vollständige Rechnung			Näherungsrechnungen	
Beiwerte von	Gesamtes Massenrückdrehmoment M_r (18) cmkg	Anteil des stationären Moments (Glieder mit ω^2) cmkg	Anteil des Schwankungsmoments (Glieder mit $\dot{\omega}$) cmkg	Stationäres Massenrückdrehmoment M_r (22) mit $\omega_0 = 200$ 1/s cmkg	Stationäres Massenrückdrehmoment M_r (N) (23) mit $\omega_0 = 200$ 1/s bei Ersatz des Pleuels durch zwei punktförmige Massen cmkg
sin φ	7,72	5,24	2,48	6,12	−231,28
sin 2φ	1433,13	1442,99	−9,86	1454,44	1417,20
sin 3φ	680,43	686,80	−6,37	693,76	703,20
sin 4φ	81,32	77,38	3,94	73,52	75,52
sin 5φ	−7,38	−11,28	3,90	−15,44	−15,75
sin 6φ	−0,44	−1,65	1,21	−2,88	-3,00
sin 7φ	0,83	0,61	0,22	0,48	0,45
sin 8φ	0,13	0,11	0,02	0,12	0,11

Die Fourierbeiwerte der Näherung M_r (22), die sich auf die stationären Glieder beschränkt, wobei für die Drehschnelle der feste Wert $\omega_0 = 200$ 1/s gesetzt wird, sind in Spalte 5 von Zahlentafel 1 dargestellt. Diese Werte stellen, wie der Vergleich mit den in Spalte 2 stehenden Fourierbeiwerten des vollständigen Ausdrucks zeigt, praktisch durchaus zureichende Näherungen dar. Der Vergleich der Fourierbeiwerte von Spalte 5 mit denen der stationären Glieder von Spalte 3, bei denen der wirkliche Verlauf von ω zugrunde gelegt wurde, ergibt befriedigende Übereinstimmung.

Die Fourierbeiwerte der Näherung $M_r^{(N)}$ (23), die sich auf die stationären Glieder beschränkt, wobei für die Drehschnelle der feste Wert ω_0 gesetzt und außerdem das Pleuel durch zwei punktförmige Massen ersetzt wird, sind in Spalte 6 von Zahlentafel 1 wiedergegeben. Die Näherung ist für die ins Gewicht fallenden Fourierbeiwerte ausreichend, ausgenommen für das Moment erster Ordnung, das durch die Näherung stark verfälscht wiedergegeben wird. Die bei den höheren Ordnungen auftretenden Abweichungen sind belanglos, da die absolute Größe dieser Werte unbedeutend ist.

Beispiel B. Als zweites Beispiel soll noch kurz ein Viertaktmotor mit denselben Kenngrößen wie im ersten Beispiel, der jedoch auf eine wirkliche Luftschraube arbeitet, betrachtet werden. Die Luftschraube, deren Arbeitsdrehmoment dem Quadrat der Drehschnelle verhältig ist, sei so bemessen, daß bei der Bezugsdrehschnelle $\omega_0 = 200$ 1/s im Zylinder der mittlere Innendruck $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm² herrscht, wobei ein an einem Flugmotor aufgenommenes wirkliches Indikatordiagramm zugrunde gelegt ist. Der Zylinderdurchmesser sei $d = 12{,}0$ cm. Von Reibungsverlusten und sonstigen inneren Triebwerksverlusten soll abgesehen werden.

Der nach den bekannten Verfahren des Leistungsausgleichs[13]) ermittelte Verlauf der Drehschnelle ω sowie der Drehbeschleunigung $\dot{\omega}$ ist in Bild 8 und 9 wiedergegeben.

Das auf die Motoraufhängung wirkende Massenrückdrehmoment M_r sowie das unter Zuhilfenahme des Gasrückdrehmoments $-rT_G$ nach (38) gewonnene Gesamtrückdrehmoment $\overline{M}$ sind in Bild 10 dargestellt. Man sieht, daß bei dem als Beispiel gewählten verhältnismäßig langsam laufenden Motor das Gasrückdrehmoment den größten Beitrag zum gesamten Rückdrehmoment liefert. Bei größeren Drehzahlen tritt aber das dem Quadrat der Drehzahl verhältige Massenrückdrehmoment wesentlich stärker in Erscheinung.

Die durch (36) gegebene Aufteilung des Umlaufmoments M_z in das auf die eigentliche Motoraufhängung wirkende Gesamtrückdrehmoment $\overline{M}$ und das von der Luftschraube auf die umgebende Luft ausgeübte Arbeitsdrehmoment M_a, das dem Gesetz $M_a = C\omega^2$ gehorcht, ist in Bild 11 erläutert. Hierbei wurde beim Umlaufmoment der vollständige Ausdruck M_z (34) unter Einschluß der Schwankungsglieder zugrunde gelegt.

Sodann sind noch das Moment M_t der Massendrehkraft und die Größe $\Theta_{II}\cdot\dot{\omega}$ in Bild 12 aufgetragen. Die Darstellung bestätigt, daß die Größe $\Theta_{II}\cdot\dot{\omega}$ — deren Verlauf übrigens bis auf einen Maßstabsbeiwert dem Verlauf von $\dot{\omega}$ in Bild 9 entspricht — sehr große Werte annimmt. Der durch (39)

[13]) Vgl. etwa C. B. Biezeno und R. Grammel, a. a. O., S. 931.

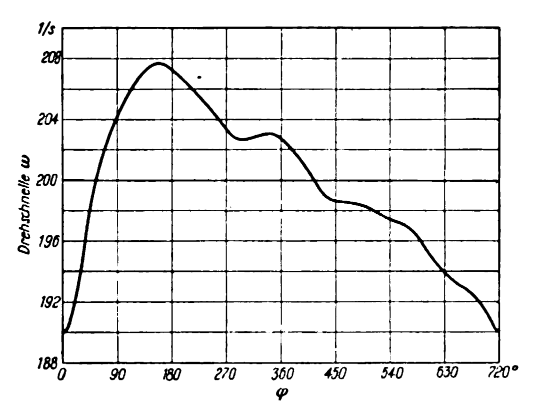


Bild 8. Verlauf der Drehschnelle beim Motor mit Luftschraube.

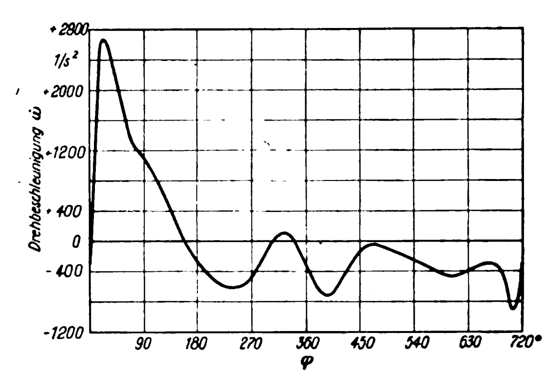


Bild 9. Verlauf der Drehbeschleunigung beim Motor mit Luftschraube.

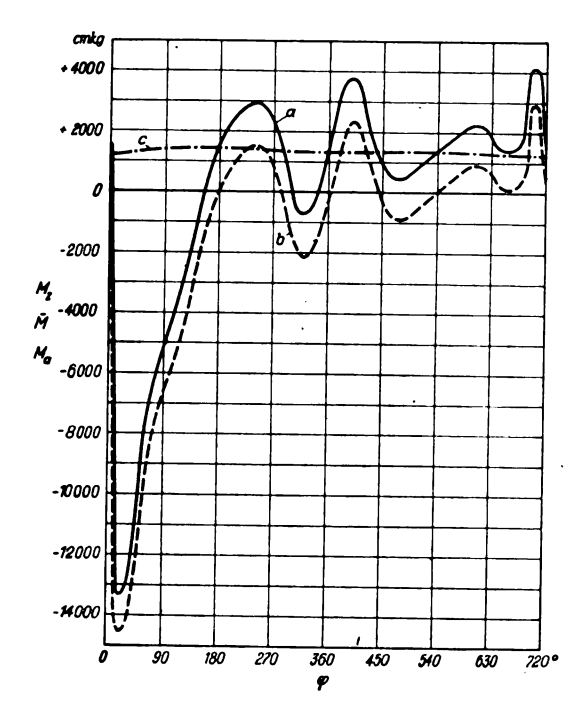


Bild 10. Die auf die Motoraufhängung wirkenden Rückdrehmomente.
a Massenrückdrehmoment M_r,
b Gasrückdrehmoment $-r\, T_G$,
c Gesamtrückdrehmoment $\bar{M}$.

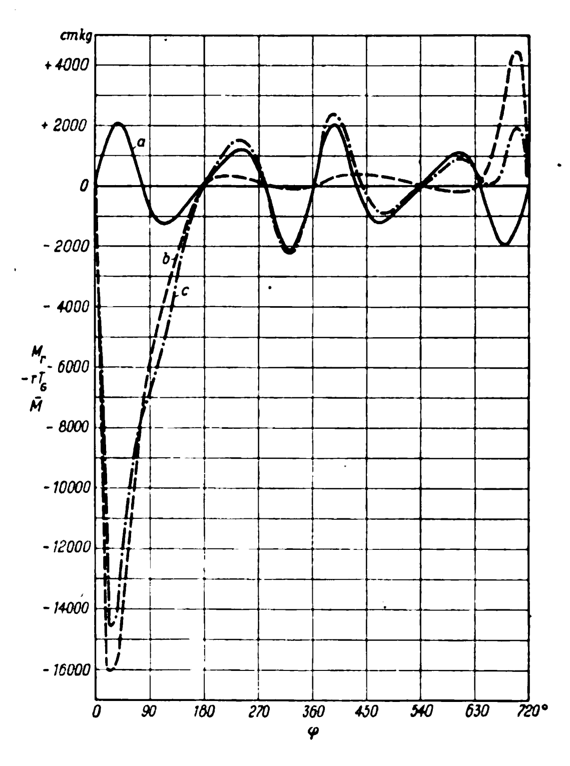


Bild 11. Aufteilung des Umlaufmoments beim Motor mit Luftschraube.
a Umlaufmoment M_z,
b Gesamtrückdrehmoment $\bar{M}$,
c Arbeitsdrehmoment M_a.

gegebene Zusammenhang zwischen dem Massenrückdrehmoment, der Massendrehkraft, dem Umlaufmoment und dem Trägheitsdrehmoment der Luftschraube kann leicht mit Hilfe von Bild 10 bis 12 bestätigt werden.

Um noch die einfache Handhabung der in dieser Arbeit hergeleiteten Gleichungen für das Massenrückdrehmoment zu zeigen, sollen die (etwa zur Untersuchung des Drehschwingungsverhaltens der Anordnung Motor—Motorvorbau erforderlichen) Harmonischen des auf die Motoraufhängung wirkenden Gesamtrückdrehmoments ermittelt werden. Die Harmonischen des Massenrückdrehmoments folgen mit durchweg ausreichender Genauigkeit sofort aus (22) fast ohne Rechenarbeit; sie sind in Zahlentafel 2, Spalte 2, für die Bezugsdrehschnelle $\omega_0 = 200$ 1/s wiedergegeben. Für die Harmonischen des auf die Aufhängung wirkenden Gasrückdrehmoments findet man in bekannter Weise aus dem Indikatordiagramm nach anschließender harmonischer Analyse die in Spalte 3 angegebenen Werte; wenn keine allzu große Genauigkeit gefordert wird, können hierfür auch die für übliche Ottomotoren fertig vorliegenden Werte verwendet werden[14]). Durch Addition der zusammengehörigen Werte von Spalte 2 und 3 ergeben sich sofort die in Spalte 4 wiedergegebenen gesuchten Harmonischen des gesamten auf die Motoraufhängung wirkenden Rückdrehmoments.

[14]) Vgl. etwa A. Stieglitz, Drehschwingungen in Reihenmotoren. Luftf.-Forschg. Bd. 4 (1929), S. 133, oder A. Kimmel, a. a. O., S. 234.

6. Zusammenfassung.

Das infolge der Massenwirkung der bewegten Kurbeltriebteile vom Flugmotor auf die Motoraufhängung ausgeübte, um die Kurbelwellenachse wirkende Massenrückdrehmoment wurde — zunächst für den Einzylindermotor mit unmittelbarem Antrieb der Luftschraube — untersucht und in einer für die praktische Anwendung geeigneten handlichen Form dargestellt. Außerdem wurde der Zusammenhang dieses Massenrückdrehmoments mit der bei Drehschwingungsuntersuchungen auftretenden erregenden Massendrehkraft sowie dem bei den Untersuchungen des Massenausgleichs eingeführten Massenumlaufmoment gezeigt. Die allgemeinen Untersuchungen wurden an zwei Zahlenbeispielen eingehend erläutert. Über die Erweiterung auf Reihen- und Sternmotoren soll später gesondert berichtet werden.



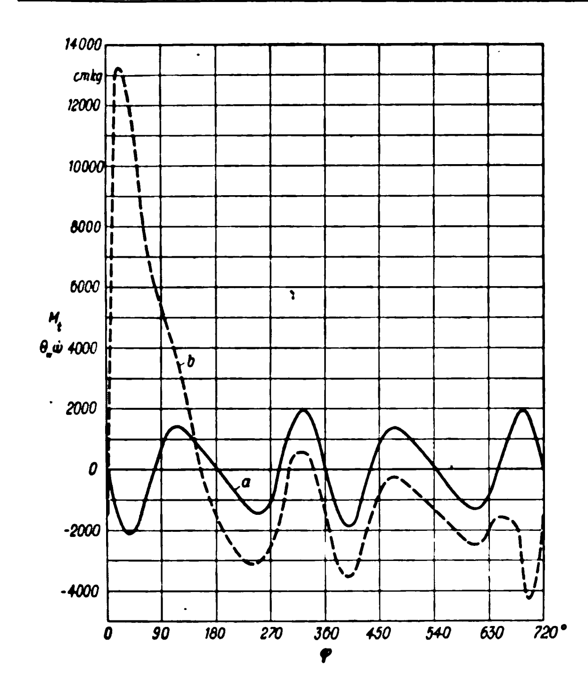


Bild 12. Verlauf des Moments der Massendrehkraft und des Ausdrucks $\Theta_n \dot{\omega}$.
a Moment M_t der Massendrehkraft,
b Ausdruck $\Theta_n \dot{\omega}$.

Zahlentafel 2. Die Harmonischen des Rückdrehmoments beim Motor mit Luftschraube.

1	2	3		4		
Beiwerte von	Massenrückdrehmoment sin-Beiwerte	Gasrückdrehmoment		Gesamtrückdrehmoment		
		cos-Beiwerte	sin-Beiwerte	cos-Beiwerte a_h	sin-Beiwerte b_h	Scheitelwerte $\sqrt{a_h^2 + b_h^2}$
$h\,\varphi/2$	cmkg	cmkg	cmkg	cmkg	cmkg	cmkg
0	0	-1359,4		-1359,4		1359,4
$\varphi/2$	—	-2500,0	-1633,5	-2500,0	-1633,5	2986,4
$2\,\varphi/2$	6,1	-1228,3	-2450,7	-1228,3	-2444,6	2735,8
$3\,\varphi/2$	—	- 36,3	-2564,7	- 36,3	-2564,7	2565,0
$4\,\varphi/2$	1454,3	290,6	-1965,9	290,6	- 511,6	588,4
$5\,\varphi/2$	—	389,6	-1633,9	389,6	-1633,9	1679,7
$6\,\varphi/2$	693,6	419,1	-1385,9	419,1	- 692,3	809,3
$7\,\varphi/2$	—	500,7	-1112,3	500,7	-1112,3	1219,8
$8\,\varphi/2$	73,5	498,0	- 866,1	498,0	- 792,6	936,1
$9\,\varphi/2$	—	486,7	- 639,2	486,7	- 639,2	803,4
$10\,\varphi/2$	— 15,2	436,6	- 487,7	436,6	- 502,9	666,0
$11\,\varphi/2$	—	408,0	- 355,3	408,0	- 355,3	541,0
$12\,\varphi/2$	— 2,9	352,8	- 270,1	352,8	- 273,0	446,1
$13\,\varphi/2$	—	317,1	- 193,9	317,1	- 193,9	371,7
$14\,\varphi/2$	0,4	266,5	- 131,9	266,5	- 131,5	297,2
$15\,\varphi/2$	—	220,9	- 75,6	220,9	- 75,6	233,5
$16\,\varphi/2$	0,1	187,2	- 28,4	187,2	- 28,3	189,3
$17\,\varphi/2$	—	143,7	23,1	143,7	23,1	145,6
$18\,\varphi/2$		112,3	37,5	112,3	37,5	118,4
$19\,\varphi/2$		97,5	57,6	97,5	57,6	113,2
$20\,\varphi/2$		85,1	69,9	85,1	69,9	110,1

Neues Berechnungsverfahren für Pleuelrollenlager*).

Von W. Hampp.

Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Zur Berechnung von Rollenlagern, insbesondere von Pleuelrollenlagern für Flugmotoren, wurde ein Verfahren entwickelt, bei dem neben wechselnder Größe der Lagerdrücke auch deren wechselnde Richtung bei der Herleitung der Lebensdauergleichung herangezogen wird. Das Berechnungsverfahren stützt sich dazu unmittelbar auf die zur Werkstoffermüdung führende Wechselbeanspruchung der Laufbahnen, wie sie als Folge des fortwährenden Überrollungsvorgangs durch die belasteten Wälzkörper auftritt. Die praktische Anwendung des Verfahrens, im besonderen zur Pleuellagerberechnung, wurde durch weitgehende Vertafelung von Hilfsgrößen erleichtert. Ferner wurden Berechnungsbeispiele beigefügt.

Gliederung.

1. Einleitung.

Bei gewöhnlichen Anforderungen an Raumbedarf und Gewicht sind für Wälzlagerungen nach Möglichkeit handelsübliche Lager zu verwenden. Diese vereinigen infolge der Wirtschaftlichkeit und hohen Güte, die heute in der Massenanfertigung erreicht wird, den Vorteil niedrigster Anschaffungskosten mit großer Betriebssicherheit und Zuverlässigkeit, solange die zugelassenen Beanspruchungsgrenzen eingehalten werden. Handelsübliche Lager sind ferner austauschbar und leicht zu ersetzen. Ihre Auswahl erfolgt nach Listen der Wälzlagerhersteller, in denen Tragfähigkeitszahlen und Verfahren zur Lagerberechnung für die häufigsten Belastungsfälle angegeben werden. In neuartigen oder zweifelhaften Fällen wird empfohlen, mit den Herstellern in Verbindung zu treten.

Dem Konstrukteur stehen aber für die Bemessung der Wälzlager dann keine ausreichenden Unterlagen zur Verfügung, wenn aus irgendwelchen Gründen von der Bauart, den Abmessungen und den den Tragfähigkeitszahlen zugrunde liegenden Beanspruchungen der handelsüblichen Lager abgewichen werden muß. Hierzu zwingen vielfach, ganz besonders bei Flugmotoren, die gesamten Gestaltungsgrundsätze, wie z. B. äußerste Werkstoffausnützung, sowie besondere Einbauverhältnisse und Betriebsbedingungen. Mit dem in solchen Fällen meistens unumgänglichen Selbstbau von Wälzlagern entsteht aber das Bedürfnis, Lager mit beliebigen Abmessungen berechnen zu können, und zwar beim Motor für einen verwickelten Belastungsverlauf und nach Möglichkeit unter Zugrundelegung höherer Beanspruchungen als bei den handelsüblichen Lagern. Da für die höchstbelasteten Kurbelwellen- und Pleuellager im Flugmotor, sofern Wälzlagerung angewendet wird, ausschließlich die fertigungsmäßig günstigen sowie für hohe wechselnde und stoßartige Belastungen besonders geeigneten Zylinderrollenlager in Frage kommen, beschränkt sich die vorliegende Arbeit auf diese Lagerart.

*) K 33 7.

2. Bekannte Berechnungsverfahren.

Eine Berechnung von Wälzlagern in der bei anderen Maschinenteilen üblichen Weise stößt auf große mathematische Schwierigkeiten. Schon in der Frage der beim Abwälzvorgang maßgebenden, d. h. zur Ermüdung führenden Beanspruchungsart bestehen verschiedene Auffassungen. Die aus den Hertzschen Ableitungen errechneten Werkstoffbeanspruchungen sind für die Praxis als Berechnungsgrundlage nicht brauchbar, weil mehrere ihrer Voraussetzungen in Wirklichkeit nicht zutreffen. Daher wurden bisher nach Möglichkeit die Rollenlager für Pleuel- und Kurbelwellenlagerungen von Verbrennungskraftmaschinen in Anlehnung an erprobte Ausführungen, die unter ähnlichen Bretriebsbedingungen befriedigend arbeiteten, entworfen. Verschiedentlich werden auch empirisch entwickelte Formeln bei der Wahl der Abmessungen benutzt.

Zu einer ersten, aber nur ganz rohen Abschätzung der Rollenabmessungen wird vielfach der in Anlehnung an die Gleitlagerberechnung als spezifische Belastung bezeichnete Wert

$$k = \frac{P_0}{d_R\, l} \qquad (2.01)$$

benutzt. Hierbei bedeutet (v. Bild 1)

d_R den Rollendurchmesser in mm,
l die Rollenlänge in mm,
P_0 den höchsten Rollendruck in kg;

k kann 8 bis 10 kg/mm² betragen.

Für den höchsten Rollendruck P_0 im Belastungsscheitel gilt nach dem theoretischen Verteilungsgesetz [1] der Rollendrücke, s. Bild 2, die Beziehung

$$P_0 = \frac{4{,}01}{z}\, Q_0,$$

wobei Q_0 die Lagerbelastung und z die Rollenzahl ist.

Die höchste Lagerbelastung Q_0 innerhalb des periodischen Verlaufs der Lagerkräfte kann sowohl auf graphischem Wege [2], beispielsweise durch Aufzeichnen des Polardiagramms der Lagerkräfte, als auch durch abgekürzte Rechnungsverfahren [3] ermittelt werden.

Für die praktische Rechnung empfiehlt es sich, für den höchsten Rollendruck den etwas höheren Wert

$$P_0 = \frac{4{,}6}{z}\, Q_0$$

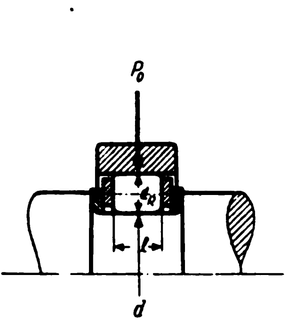


Bild 1. Bezeichnung von Hauptkennwerten eines Zylinderrollenlagers.

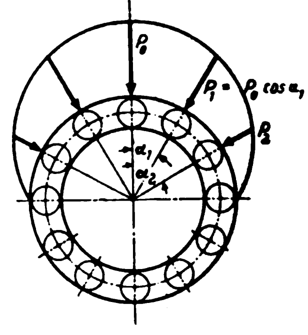


Bild 2. Theoretische Belastungsverteilung bei einem spielfreien Rollenlager.

zu benutzen, wodurch eine 15proz. Erhöhung des höchsten Rollendrucks durch Abweichungen von der theoretischen Belastungsverteilung berücksichtigt wird. Solche Abweichungen treten, wie durch Versuche nachgewiesen wurde, durch Lagerspiel und Verformungen, insbesondere bei Pleueln in Leichtbauweise, auf.

Die Berechnungsart auf Grund der spezifischen Belastung k hat den Mangel, daß die lediglich als »ausreichend« bezeichnete Lebensdauer nicht näher definiert ist und daß weder die Schmiegungsverhältnisse zwischen Rollen und Laufbahnen, noch die Veränderlichkeit der Lagerbelastung sowie die verhältnismäßige Häufigkeit der verschiedenen Belastungsstufen in Erscheinung treten oder zu dem allein zugrunde gelegten Höchstwert des Rollendrucks in Beziehung gebracht werden.

Eine von Nallinger [4] angegebene Formel ist vor allem als Vergleichsgrundlage für verschiedene Lagerbauarten und -größen unter Voraussetzung gleicher Motorbauweise, z. B. von V-Motoren, gedacht und geeignet.

Die Vereinigte Kugellagerfabriken A.G. (VKF) gibt ein Berechnungsverfahren an, das auf die allgemeine Lebensdauergleichung [5]

$$L = \left(\frac{T}{P}\right)^3 \quad \text{. . . . . (2.02)}$$

zurückgeht, wobei

L Lebensdauer in Millionen Umdrehungen,
T Tragzahl oder Lagerbelastung zur Erreichung einer Million Umdrehungen,
P wirkliche Lagerbelastung.

Demgemäß wird z. B. die Lebensdauer bei einer Belastung, die die Hälfte der Tragzahl beträgt, auf $8 \cdot 10^6$ Umdrehungen erhöht. Nach dem Verfahren der VKF werden die beim Motor in Wirklichkeit wechselnden Kräfte in eine der Wirkung nach gleichwertige ruhende Belastung umgewandelt. Zu diesem Zweck wird das Polardiagramm für zwei Kurbelwellenumdrehungen beim Viertaktmotor bzw. für eine Kurbelwellenumdrehung beim Zweitaktmotor entwickelt. Aus dem Verlauf der dritten Potenzen der resultierenden Lagerkräfte wird der Mittelwert gebildet. Die dritte Wurzel aus diesem Mittelwert wird als diejenige gleichbleibende Kraft angesehen, die das Lager in gleicher Weise beansprucht, wie die in Wirklichkeit veränderlichen Kräfte, so daß das in der Einleitung erwähnte allgemeine Lebensdauerberechnungsverfahren für handelsübliche Lager anwendbar ist.

Dieses Verfahren berücksichtigt also die Veränderlichkeit der Lagerdrücke, jedoch noch nicht die beim Motor wechselnde Richtung. Das Verfahren ist ferner an die Tragfähigkeitszahlen und damit an die Bauart, die Kennwerte und die Beanspruchungen der handelsüblichen Lager gebunden.

3. Aufbau des neuen Berechnungsverfahrens.

Das hier entwickelte Berechnungsverfahren wurde unmittelbar auf der zur Ermüdung führenden Wechselbeanspruchung der am höchsten beanspruchten Faser einer der beiden Laufbahnen durch die fortgesetzten Überrollungen der einzelnen Wälzkörper aufgebaut. Dabei soll in den einzelnen Rollendrücken außer der Größe der Lagerkräfte auch die beim Motor veränderliche Richtung wirklichkeitsgetreu zum Ausdruck kommen. Neben freier Wahl der Lager- und Rollenabmessungen gibt das Verfahren die Möglichkeit, die zulässigen Beanspruchungen entweder gleich oder auch abweichend von den Tragfähigkeitszahlen handelsüblicher Lager zu wählen und beispielsweise auf elementare Versuche über die Abhängigkeit zwischen Lebensdauer, Schmiegung, Rollendruck und Werkstoffeigenschaften zurückzuführen. Etwaige Fortschritte, die in dieser Richtung erzielt werden, können leicht nutzbar gemacht werden.

Die durch die endliche Schubstangenlänge verursachte Ungleichförmigkeit der Lagerdrehbewegungen, also der relativen Bewegungen zwischen Innenlaufbahn, Rollen und Außenlaufbahn, ist von Einfluß auf die Lastwechselzahlen, die auf die einzelnen Belastungsstufen entfallen, und wird ebenfalls berücksichtigt.

4. Wesen der Kraftübertragung bei Rollenlagern.

Bei der Übertragung der Kräfte vom Pleuel auf die Welle über ein Rollenlager wird die gesamte Lagerbelastung theoretisch in so viele Teildrücke aufgespalten, wie sich Rollen in der der Lagerbelastung zugekehrten Lagerhälfte befinden, Bild 2. Die einzelnen Rollendrücke sind verschieden groß und nehmen von einem Höchstwert P_0 im Belastungsscheitel bis auf den Wert Null in der Ebene senkrecht zur Belastungsrichtung ab. Unter Vernachlässigung der Reibung sind die Rollendrücke immer radial zur Lagerachse gerichtet. Die Rollen können nur Druckkräfte und keine Zugkräfte übertragen. Sie bewegen sich gegenüber den Laufbahnen mit der halben Umfangsgeschwindigkeit der relativen Bewegung beider Laufbahnen.

Das theoretische Druckverteilungsgesetz setzt Spielfreiheit, genau zylindrische Form und Formsteifigkeit der Lagerringe voraus. Abgesehen vom Spiel ist in Wirklichkeit immer mit herstellungsbedingten Unrundheiten und Verformungen unter Belastung zu rechnen. Durch das Lagerspiel wird das belastete Gebiet unter Erhöhung der höchsten Rollendrücke verkleinert. Unrundheit und Verformungen können sowohl im Sinne einer Vergrößerung als auch einer Verkleinerung der belasteten Zone wirken, je nach dem Spannungszustand, der sich in Abhängigkeit von der Formgebung und Belastungsrichtung ergibt und der eine Anschmiegung der Laufbahnen an eine größere oder kleinere Anzahl Rollen zur Folge hat. Die Einflüsse von Spiel, Unrundheit und Verformung sind von der Belastung abhängig. Ihr Einfluß ist am stärksten bei kleiner Belastung. Wichtiger sind aber mit Rücksicht auf das allgemeine Lebensdauergesetz (vgl. Gl. (2.02)), nach dem die Lebensdauer mit der 3. Potenz der Belastung abnimmt, die Verhältnisse bei hoher Belastung. Dort tritt besonders der Einfluß der Verformungen in den Vordergrund. Dieser Einfluß ist aber nicht nur von der Belastungsgröße, sondern wegen der Verschiedenheit der Querschnitte längs des Umfangs des großen Pleuelauges auch von der Belastungsrichtung zur Pleuellängsachse abhängig.

Ein vollkommen wirklichkeitsgetreues Berechnungsverfahren müßte also mit einem Rollendruckverteilungsgesetz rechnen, das von der Größe und Richtung der Belastung sowie von der jeweiligen Pleuelform und vom Lagerspiel abhängt. Dies würde aber die Lösung der Aufgabe ungeheuer erschweren oder praktisch unmöglich machen, erscheint aber auch auf Grund früherer Untersuchungen über die Belastungsverteilung nicht notwendig. Es hat sich nämlich gezeigt, daß die theoretische Belastungsverteilung einen mittleren Zustand zwischen den Belastungsverteilungen bei guter und bei schlechter Anschmiegung, wie sie besonders ausgeprägt bei entgegengesetzten Belastungsrichtungen in der Pleuellängsachse auftreten, darstellt.

Wir benützen daher zur Berechnung des Rollendruckverlaufs das theoretische Druckverteilungsgesetz [1] für Rollenlager.

5. Herleitung der Lebensdauergleichung.

Wir gehen von einem als bekannt vorausgesetzten Gesetz über den Zusammenhang zwischen dem Rollendruck P und der beim Überrollen unter diesem Druck bis zum Eintreten der Ermüdung erreichbaren Lastwechselzahl L einer Faser der Laufbahnoberfläche aus, das sich in ganz allgemeiner Form durch die Gleichung

$$L = C \cdot f(P) \quad \text{. . . . . (5.01)}$$

ausdrücken lasse. Hierbei sei C nur von den Werkstoffeigenschaften und von den Schmiegungsverhältnissen abhängig. Die wahrscheinlichste Annahme über die Lebensdauer bei veränderlicher Belastung stellt die sog. »Verbrauchstheorie« [6] dar, die aussagt, daß eine bestimmte Zahl l von Überrollungen unter gleicher Belastung die gesamte Lebensdauer L_0 in dem Verhältnis der Zahl der stattgefundenen Lastwechsel zu der bei derselben Belastung zur Ermüdung führenden Lastwechselzahl L abgebaut hat, auch dann, wenn die weiteren Überrollungen unter anderen Drücken vor sich gehen. Faßt man also jeweils die unter gleicher Belastung



erfolgenden Lastwechsel zusammen, so lassen sich deren Anteile an der gesamten Lebensdauer berechnen. Die Zusammenfassung aller Anteile muß den Wert 1 ergeben, d. h. es ist

$$1 = \frac{l_1}{L_1} + \frac{l_2}{L_2} + \frac{l_3}{L_3} + \ldots \frac{l_n}{L_n} \quad . . . (5.02)$$

Wird beispielsweise bei zwei Einzelbelastungen die eine Lebensdauer L_1 zu einem Drittel ausgenützt, d. h. ist $\frac{l_1}{L_1} = \frac{1}{3}$, so kann die zweite Lebensdauer L_2 noch zu $\frac{l_2}{L_2} = \frac{2}{3}$ abgebaut werden. Die gesamte Lastwechselzahl ist dann

$$L_0 = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n.$$

Mit L_1, L_2 usw. nach Gl. (5.01) erhält man

$$1 = \frac{1}{C}\left[\frac{l_1}{f(P_1)} + \frac{l_2}{f(P_2)} + \frac{l_3}{f(P_3)} + \ldots \frac{l_n}{f(P_n)}\right] \quad (5.03)$$

Bei Wälzlagern setzt sich die Beanspruchung irgendeiner Faser der Laufringe aus einzelnen Lastwechseln zusammen, deren zeitliche Folge sich aus dem geometrischen Abstand der Wälzkörper und den Geschwindigkeitsverhältnissen ergibt. Der Reihenfolge nach betrachtet, ändern sich dabei die Rollendrücke nicht stetig, sondern stufenweise, Bild 3.

Ist im einfachsten Fall ein Lager mit feststehendem Außenring durch eine gleichbleibende Kraft belastet, so wird eine Faser des Innenrings beim Eintritt einer Rolle in die Belastungszone z. B. vom Rollendruck Null belastet (vgl. Punkt 1 in Bild 3). Beim Vorbeigang an der nächsten Rolle wird diese Faser entsprechend dem Verteilungsgesetz der Rollendrücke [1]

$$P = P_0 \cos \alpha$$

beansprucht und sinngemäß bei den weiteren druckbelasteten Rollen (2 und 3 in Bild 3).

Der Winkelabstand zwischen zwei Überrollungen einer Faser des Innenrings ist mit D als Außenlaufbahn- und d als Innenlaufbahndurchmesser

$$\alpha_0 = \frac{360^0}{z} \frac{D + d}{D}.$$

Die Bedingungen dafür, daß die Berührungslinie einer Rolle mit dem Kurbelzapfen in derselben Kurbelstellung von der gleichen oder einer der übrigen Rollen wieder erreicht wird, lauten

$$\frac{i-1}{z} + n_2 k' = n_1; \quad (i = 1, 2, 3 \ldots z).$$

n_1 und n_2 müssen ganze Zahlen sein. Beim Viertaktmotor ist außerdem n_2, das die Anzahl der Wellenumdrehungen bedeutet, eine gerade Zahl. In Zahlentafel 1 ist n_2 für die Berührung ein und derselben Rolle berechnet.

Würde man, da die »Verbrauchstheorie«, vgl. Gl. (5.02), keine bestimmte Reihenfolge der Lastwechsel voraussetzt, sämtliche für eine Faser vorkommenden Belastungen in den ersten Belastungsverlauf in Bild 3 eintragen (Punkte 4 bis 9), so würde dieser dadurch weitgehend abgetastet werden, wie

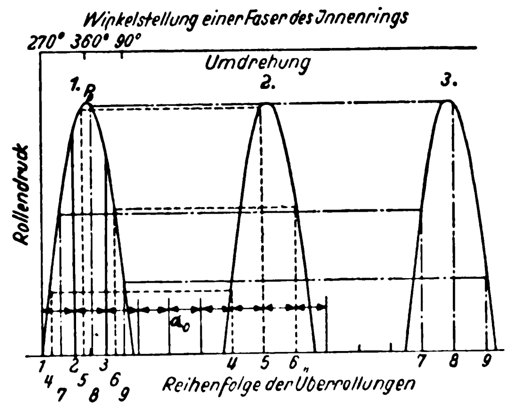


Bild 3. Auf den Innenring übertragene Rollendrücke in unmittelbar aufeinanderfolgenden Wellenumdrehungen eines ruhend belasteten Lagers mit stillstehendem Außenring.

Zahlentafel 1. Verhältnis zwischen Käfigdrehzahl und Wellendrehzahl $k' = \frac{D}{D+d}$ und Abstand der Berührung ein und derselben Rolle mit einer bestimmten Faser des Innenrings bei verschiedenen Lagerabmessungen.

Durchmesser der			$k' = \frac{D}{D+d}$	Zahl n_2 der Wellenumdrehungen bis zur Beanspruchung einer Faser des Innenrings durch dieselbe Rolle	
Innenlaufbahn d mm	Rollen 2ϱ mm	Außenlaufbahn D mm		Viertaktmotor	Zweitaktmotor
60	7	74	$\frac{37}{67}$	134	67
60	8	76	$\frac{19}{34}$	34	34
70	8	86	$\frac{43}{78}$	78	78
70	9	88	$\frac{44}{79}$	158	79
70	10	90	$\frac{9}{16}$	16	16
85	10	105	$\frac{21}{38}$	38	38

schon aus den wenigen in Bild 3 eingezeichneten Umdrehungen zu erkennen ist. Da sich theoretisch die Rollendrücke für eine Faser nach einer bestimmten Anzahl von Umdrehungen wiederholen und die Lebensdauer des Lagers sich aus sehr vielen Umdrehungen zusammensetzt, so ist zunächst jede einzelne Belastung mit einer größeren Zahl von Lastwechseln behaftet. Durch Abweichungen der wirklichen Maße von den Nennmaßen sowie durch Verformungen und Schlupf — vor allem beim geschleuderten Pleuellager [7] — entstehen, abgesehen von den geometrisch bedingten, zusätzliche und unregelmäßige Verschiebungen zwischen Rollenstellung und Belastungsgröße, die die genaue Wiederholung der Rollendrücke auch nach Ablauf von n_2 Umdrehungen nicht wieder eintreten lassen. Deshalb ist mit großer Wahrscheinlichkeit damit zu rechnen, daß eine weit größere Zahl voneinander verschiedener Einzeldrücke aus dem stetigen Rollendruckverlauf herausgegriffen wird als sich aus der geometrisch bedingten Wiederholung nach n_2 Umdrehungen ergibt.

Im Grenzfall kann sich jeder vorkommende Lastwechsel hinsichtlich der Belastungsgröße von den anderen unterscheiden, so daß anders betrachtet jede Belastung nur einmal vorkommt. Bei der dann sich ergebenden äußerst dichten Abtastung des stetigen Rollendruckverlaufs liegt es nahe, den mathematischen Schritt zur Annahme unendlich vieler, dem stetigen Belastungsverlauf folgender Lasten zu vollziehen. Auf die Einzellast entfällt dann nur ein Bruchteil eines Lastwechsels derart, daß die Summe der Lebensdaueranteile, den jeder dieser Bruchteile in Verbindung mit seiner zugehörigen Belastungsgröße darstellt, den Wert 1 gemäß (5.02), d. h. die volle Lebensdauer ergibt. Diese Auffassung der Zusammensetzung der Lebensdauer aus kleinsten Anteilen ermöglicht die Anwendung der Integration unter Zugrundelegung des stetigen Rollendruckverlaufs.

Das stetige Verteilungsgesetz der Rollendrücke entsteht, wenn man annimmt, daß eine bestimmte Faser des Laufrings sich in jeder Winkelstellung in Berührung mit einer Rolle befinde.

Pleuellager sind periodisch wechselnden Kräften unterworfen, die sich beim Viertaktverfahren nach 720° KW und beim Zweitaktverfahren nach 360° KW wiederholen.

Eine bestimmte Faser des Innenrings befindet sich nach jeweils 360° Kurbelwinkel in derselben Stellung. Der stetige Rollendruckverlauf, der in jeder Stellung der Faser eine Druckübertragung nach dem Verteilungsgesetz der Rollendrücke annimmt, wiederholt sich daher nach 720° Kurbel-

winkel beim Viertaktmotor und nach 360° KW beim Zweitaktmotor.

Wie schon in Abschnitt 3 angedeutet wurde, wirkt sich beim Pleuellager die Ungleichförmigkeit der relativen Lagerbewegung auf die Verteilung der Lastwechselzahlen aus. Eine bestimmte Faser des Kurbelzapfens wird nämlich in solchen Gebieten von den Rollen relativ öfter überrollt, in denen der Außenring sich schneller dreht, und weniger oft, wenn der Außenring sich langsamer bewegt. Dadurch entfallen auf die einzelnen Abschnitte des in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel dargestellten Rollendruckverlaufs verschiedene Lastwechselzahlen, wenn man alle Lastwechsel, die im Laufe sämtlicher Umdrehungen auf diese Abschnitte entfallen, zusammenzählt.

Bei einer Drehung der Kurbelwelle um den Winkel $d\varphi$ dreht sich das Pleuellager nach [7] relativ zur Kurbelwelle um den Winkel $d\psi$. Das Verhältnis beider Werte ist

$$\varkappa = \frac{d\psi}{d\varphi} = 1 + \frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}.$$

Der Abstand der Überrollungen ist zu $\frac{1}{\varkappa}$, die Häufigkeit in einem bestimmten Abschnitt zu $\varkappa$ verhältig. Rechnet man in kleinen Bereichen des Kurbelwinkels mit mittleren Werten des Rollendrucks, so folgt aus Gl. (5.03)

$$1 = \frac{1}{C}\left[\frac{l\left(1+\frac{\lambda\cos\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi_1}}\right)}{f(P_1)} + \frac{l\left(1+\frac{\lambda\cos\varphi_2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi_2}}\right)}{f(P_2)} + \cdots\right],$$

wobei l die Lastwechselzahl ist, die bei gleichförmiger Lagerdrehung auf gleiche Abschnitte im Laufe sämtlicher Umdrehungen bis zur Ermüdung entfallen würde.

Die letzte Gleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden

$$1 = \frac{l}{C}\sum_{\varphi_i=0}^{\varphi_i=2\pi m}\left(1+\frac{\lambda\cos\varphi_i}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi_i}}\right)\frac{1}{f(P_i)} \qquad (5.04)$$

Fur Viertakt ist $m = 2$ und für Zweitakt $m = 1$.

Praktisch wird nach den vorangegangenen Ausführungen eine bestimmte Faser des Kurbelzapfens im Verlaufe der Lebensdauer so belastet, wie wenn sie in jeder Kurbelstellung durch eine Rolle belastet werden würde. Geht man daher von endlichen Werten l auf sehr kleine in einem ebenfalls sehr kleinen Winkelabschnitt $d\varphi$ stattfindende Lastwechselzahlen dl über, so ist, da die Summe aller dl über die ganze Belastungsperiode die gesamte Lebensdauer L_0 ergeben muß,

$$dl = \frac{L_0}{2\pi m}\,d\varphi.$$

Damit wird aus Gl. (5.04)

$$L_0 = \frac{2\pi m C}{\int\limits_0^{2\pi m}\left(1+\frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)\frac{d\varphi}{f(P)}} \quad . . (5.05)$$

Bezieht man den Rollendruck unter der neuen Bezeichnung p auf 1 mm tragende Rollenlänge und ersetzt man den seitherigen Lagerfestwert C durch den auf p bezogenen Wert c, so kann Gl. (5.05) wie folgt umgeformt werden

$$L_0 = \frac{2\pi m c}{\int\limits_0^{2\pi m}\left(1+\frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)\frac{d\varphi}{f(p)}} \quad . . (5.06)$$

Die Rollendrücke sind von den Stangen- und Massenkräften, dem Verteilungsgesetz der Rollendrücke über dem Lagerumfang und damit von der Rollenstellung bezüglich der jeweiligen Belastungsrichtung abhängig. Sie sind unter Vernachlässigung der Reibung immer radial zur Lagermitte gerichtet und lassen sich am übersichtlichsten aus den an der Kurbelwelle angreifenden Dreh- und Biegekräften berechnen, da sich deren Richtung bezüglich des Kurbelzapfens, also auch bezüglich einer bestimmten Faser der Innenlaufbahn nicht ändert, Bild 4 und 5.

Wie die Erfahrung bestätigt, besteht bei Zylinderrollenlagern die größte Ermüdungsgefahr wegen der ungünstigeren Schmiegungsverhältnisse an der Innenlaufbahn bzw. am Kurbelzapfen. Längs seines Umfangs ist der Kurbelzapfen durch den Rollendruckverlauf sehr verschieden beansprucht. Maßgebend für die Lebensdauer ist nur die Stelle der größten Beanspruchung. Dabei ist zu beachten, daß die zur kleinsten Lebensdauer führende Beanspruchung aus dem Rollendruckverlauf erst in Verbindung mit dem allgemeinen Lebensdauergesetz ermittelt werden kann. Der höchste Rollendruck oder der mittlere Rollendruck allein sind z. B. nicht entscheidend, wie noch näher gezeigt wird.

Unter der nach Abschnitt 4 zulässigen, vereinfachenden Annahme, daß das Rollendruckverteilungsgesetz unabhängig von der auf die Pleuellängsachse bezogenen Richtung der resultierenden Lagerbelastung sein soll, der Rollendruckanteil daher bei gleichen Lagerkennwerten nur vom Abstand der Wälzkörper von der Wirkungslinie der Belastung abhängt, also durch eine Funktion $f(\alpha)$ ausgedrückt werden kann, ergibt sich der Rollendruck auf eine bestimmte, von der Wirkungslinie der Biegekräfte um α^0 entfernte Faser des Kurbelzapfens zu

$$p = \frac{1}{l_t}\left[f(\alpha)\,R(\varphi) + f(90-\alpha)\,T(\varphi)\right] \quad . . (5.07)$$

Hierbei bedeutet p den auf 1 mm tragende Länge bezogenen Rollendruck, $R(\varphi)$ die Biegekraft und $T(\varphi)$ die Drehkraft an der Kurbelwelle. Für das spielfrei und starr gedachte Lager ist nach Stellrecht [1]

$$f(\alpha) = \frac{4{,}01}{z}\cos\alpha \quad . . . . (5.08)$$

Mit diesem Wert ergibt Gl. (5.07)

$$p = \frac{4{,}01}{z\cdot l_t}\left[R(\varphi)\cos\alpha + T(\varphi)\sin\alpha\right] \quad . . (5.09)$$

Das allgemeine Lebensdauergesetz in der von Palmgren aufgestellten Form lautet

$$L = \frac{C}{Q^3} \quad . . . . (5.10)$$

Es beruht auf Versuchen mit ruhend belasteten Kugellagern, wird jedoch auch für Rollenlager benützt, obwohl theoretisch die höchste Normalbeanspruchung bei Linienberührung anderen Gesetzen folgt als bei Punktberührung [5]. Es läßt sich auch beweisen, daß das Gesetz in derselben Form wie für ganze Lager auf einzelne Rollendrücke übertragbar ist, und daß sich dann nur die Konstante C ändert. Der der

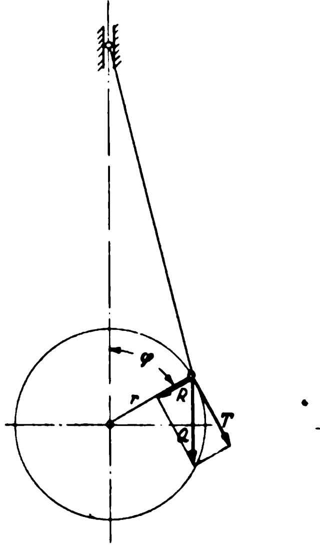


Bild 4. Darstellung der Pleuellagerbelastung in Biege- und Drehkraftanteilen.

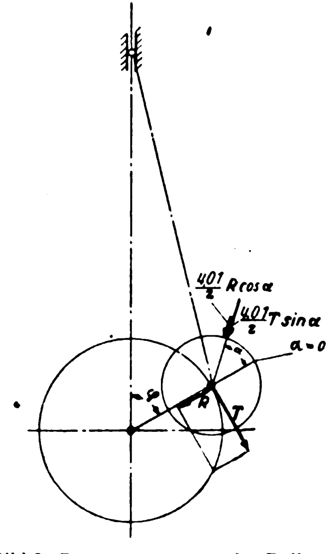


Bild 5. Zusammensetzung des Rollendruckes an einer beliebigen, durch den Winkel α gekennzeichneten Stelle des Kurbelzapfens.

Gl. (5.05) entsprechende Ansatz für ruhende Belastung und gleichförmige Drehung des Innenrings lautet nämlich

$$L_0 = \frac{2\pi C_1}{\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{f(P)}}.$$

Unter der vorläufigen und noch zu beweisenden Annahme, daß $f(P)$ auch auf einzelne Rollendrücke bezogen die Palmgrensche Form nach Gl. (5.10) hat, ist

$$f(p) = \frac{1}{p^3}$$

und damit

$$L_0 = \frac{2\pi c_1}{\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p^3\, d\alpha}.$$

Nun ist mit $p = \frac{P}{l_t}$ sowie mit (5.08) in der Grundgleichung für die Belastungsverteilung $P = f(\alpha)\cdot Q$

$$p = \frac{4{,}01}{z\cdot l_t}\, Q \cos\alpha.$$

Damit ist

$$L_0 = \frac{2\pi c_1 \left(\frac{z\cdot l_t}{4{,}01\, Q}\right)^3}{\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha\, d\alpha} \quad \ldots\ldots (5.11)$$

Durch Vergleich mit (5.10) folgt hieraus unmittelbar

$$c_1 = \frac{C}{2\pi}\left(\frac{4{,}01}{z\cdot l_t}\right)^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3\pi}\left(\frac{4{,}01}{z\cdot l_t}\right)^3 C \quad (5.12)$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der Konstante C, die sich auf ganze Lager und die gesamte Lagerbelastung bezieht und der Konstante c_1, bezogen auf die einzelnen Rollendrücke, hergestellt. Da c_1 nach Gl. (5.12) von p unabhängig ist, ist der funktionsmäßige Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Druck beim ganzen Lager und bei den einzelnen Rollen derselbe, d. h. in beiden Fällen verhalten sich die Lebensdauern umgekehrt wie die 3. Potenzen der Belastungen.

Setzt man $f(p) = \frac{1}{p^3}$ in Gl. (5.06) ein, so erhält man

$$L_0 = \frac{2\pi m c}{\int\limits_0^{2\pi m}\left(1 + \frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right) p^3\, d\varphi}.$$

Mit Gl. (5.09) wird

$$L_0 = \frac{2\pi\left(\frac{z\cdot l_t}{4{,}01}\right)^3 c}{\frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi m}\left(1 + \frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)[R(\varphi)\cos\alpha + T(\varphi)\sin\alpha]^3\, d\varphi} \quad \ldots (5.13)$$

Der Nenner von Gl. (5.13) kennzeichnet die Lagerbeanspruchungen und werde daher im folgenden abgekürzt als Beanspruchungskennzahl K bezeichnet. Die Größe c ist vom Lagerwerkstoff und von den Schmiegungsverhältnissen abhängig und werde Lagerkennzahl genannt.

Führt man die Abkürzung

$$K = \frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi m}\left(1 + \frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)[R(\varphi)\cos\alpha + T(\varphi)\sin\alpha]^3\, d\varphi$$

in Gl. (5.13) ein, so ergibt sich

$$L_0 = \frac{2\pi\left(\frac{z\cdot l_t}{4{,}01}\right)^3 c}{K} \quad \ldots\ldots (5.14)$$

6. Durchführung der Lebensdauerberechnung.

a) Beanspruchungskennzahl K.

Zur zahlenmäßigen Berechnung der Lebensdauer aus Gl. (5.14) ist K zu berechnen. Hierzu sind zunächst die Biege- und Drehkräfte zu ermitteln. Wenn näherungsweise die Pleuelmasse in einen im Kolbenbolzen vereinigt gedachten Anteil, der zu den hin- und hergehenden Massen hinzugezählt wird, und in einen mit dem Hubzapfen umlaufend gedachten Anteil zerlegt wird, ergibt sich die Biegekraft zu

$$R = R_G + R_M - U$$

und die Drehkraft zu

$$T = T_G + T_M,$$

wobei sich der Zeiger G auf die Gaskräfte und der Zeiger M auf die Massenkräfte bezieht; U ist die von den umlaufenden Massen herrührende Radialkraft.

Die Biege- und Drehkraftanteile lassen sich am leichtesten mit Hilfe von Fourierreihen berechnen, wobei für die vorliegenden Genauigkeitsanforderungen wenige Glieder genügen.

Auf Grund einer besonderen Untersuchung über die Fehlergrenzen können mit Fehlern von weniger als 0,5% folgende Ausdrücke benützt werden:

$$\begin{aligned}
R_G &= P\,(F_0 + \cos\varphi + F_2\cos 2\varphi),\\
T_G &= P\left(\sin\varphi + \frac{A_2}{2}\sin 2\varphi\right),\\
R_M &= (m_K + m_0)\, r\,\omega^2\,(G_0 + G_1\cos\varphi\\
&\qquad + G_2\cos 2\varphi + G_3\cos 3\varphi + G_4\cos 4\varphi),\\
T_M &= (m_K + m_0)\, r\,\omega^2\,(E_1\sin\varphi\\
&\qquad + E_2\sin 2\varphi + E_3\sin 3\varphi + E_4\sin 4\varphi),\\
U &= m_u\, r\,\omega^2.
\end{aligned}$$

m_K bedeutet hierbei die Kolbenmasse, m_0 die hin- und hergehende und m_u die umlaufende Masse des Pleuels. P ist der Kolbendruck, der sich aus dem von der Kurbelstellung abhängigen spezifischen Gasdruck $p_G(\varphi)$ und der Kolbenfläche f ergibt. Die Größen A_i, E_i, F_i, G_i sind Funktionen des Lenkstangenverhältnisses $\lambda = r/l$. Mit folgenden Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\varphi + \frac{A_2}{2}\sin 2\varphi = A(\varphi),\\
&E\sin\varphi + E_2\sin 2\varphi + E_3\sin 3\varphi + E_4\sin 4\varphi = E(\varphi),\\
&F_0 + \cos\varphi + F_2\cos 2\varphi = F(\varphi),\\
&G_0 + G_1\cos\varphi + G_2\cos 2\varphi + G_3\cos 3\varphi + G_4\cos 4\varphi = G(\varphi)
\end{aligned}\right\} (6.01)$$

sowie

$$\frac{m_u}{m_K + m_0} = \varepsilon \text{ und } \frac{m_K + m_0}{f} = a$$

erhält man

$$\begin{aligned}
R(\varphi)\cos\alpha + T(\varphi)\sin\alpha &=\\
&= f\,[p_G(\varphi)\, F(\varphi) + a\, r\,\omega^2\,(G(\varphi) - \varepsilon)]\cos\alpha\\
&\quad + f\,[p_G(\varphi)\, A(\varphi) + a\, r\,\omega^2 + E(\varphi)]\sin\alpha \quad \ldots (6.02)
\end{aligned}$$

Die Größe a der hin- und hergehenden Massen, bezogen auf die Einheit der Kolbenfläche ist in Bild 6 für verschiedene Motoren über der Kolbenfläche f aufgetragen. Der Wert von a bewegt sich zwischen 1,4 und $2{,}0\cdot 10^{-5}$ kgs²/cm³. Man erhält unter Benützung von (6.02)

$$\begin{aligned}
K' = \frac{K}{f^3} &= \frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi m}\left(1 + \frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)\\
&\quad \big\{[p_G(\varphi)\, F(\varphi) + a\, r\,\omega^2\,(G(\varphi) - \varepsilon)]\cos\alpha +\\
&\quad + [p_G(\varphi)\, A(\varphi) + a\, r\,\omega^2\, E(\varphi)]\sin\alpha\big\}^3\, d\varphi \quad \ldots (6.03)
\end{aligned}$$

Im Einzelfall bereitet die Berechnung von K' Schwierigkeiten dadurch, daß der Gasdruckverlauf $p_G(\varphi)$ nicht analytisch gegeben ist. Mit Hilfe der harmonischen Analyse

läßt sich der Gasdruckverlauf nach besonderem Verfahren in eine Fourierreihe entwickeln, womit sich die Integration unter Beschränkung der Genauigkeitsanforderungen vollständig rechnerisch durchführen läßt. So vorzugehen, ist jedoch wegen des äußerst großen Aufwands an Rechenarbeit nicht empfehlenswert. Als weit zuverlässiger hat sich die graphische Integration erwiesen. Das Aufzeichnen mindestens von Teilen des Rollendruckverlaufs ist ohnehin nicht zu umgehen, da auch bei der analytischen Integration die Integrationsgrenzen auf graphischem Weg bestimmt werden müssen. Die Integration erstreckt sich nämlich nur über die positiven Rollendrücke, da alle negativen Werte gleich Null zu setzen sind, weil die Rollen keine Zugkräfte übertragen können. Die Genauigkeit der graphischen Integration kann als ausreichend angesehen werden unter Berücksichtigung der Genauigkeit, mit der die Gasdrücke zu erfassen sind sowie im Hinblick auf die anderen Unregelmäßigkeiten im Motorbetrieb.

Die der graphischen Integration vorangehenden rechnerischen Arbeiten sind aber noch so umfangreich, daß der Zeitaufwand der Praxis nicht zugemutet werden kann. Es handelt sich darum, die unter dem Integralzeichen stehenden Werte bei festem Winkel α für sämtliche Kurbelwinkel zwischen 0 und $2\,m\pi$ in Schritten von möglichst nicht mehr als 10° zu berechnen. Zur Erleichterung und Abkürzung der Rechnung wurden daher zunächst die unter (6.01) zusammengestellten sowie die übrigen von φ abhängigen und in Verbindung mit den Gasdrücken (Zahlentafel 2) stehenden Hilfsgrößen für 3 Werte von λ vertafelt, vgl. Zahlentafel 3, 4,

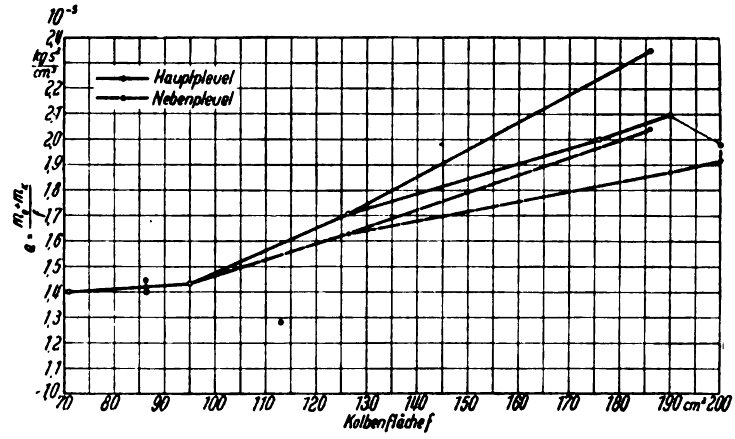


Bild 6. Auf die Kolbenfläche bezogene hin- und hergehende Massenanteile bei verschiedenen Zylinderabmessungen, an Hand neuzeitlicher Flugmotorenmuster.

5 und 6 im Anhang, und darüber hinaus für verschiedene bauliche Verhältnisse und Betriebsbedingungen die Integration vollständig durchgeführt. Infolge der Vielzahl der Veränderlichen mußte dabei eine gewisse Beschränkung, z. B. bezüglich des Stangenverhältnisses und der Motorbelastung, d. h. des zugrunde gelegten Gasdruckverlaufs, stattfinden.

Die Umrechnung von L_0 in Betriebsstunden bei der Drehzahl $n\,[\text{min}^{-1}]$ erfolgt auf Grund der Beziehung

$$h = \frac{(D+d)}{60\,D\,z\,n} \cdot L_0 \cdot 10^6 \quad \ldots \ldots \quad (6.04)$$

(L_0 in Millionen Lastwechseln).

Die Gl. (5.14), (6.03) und (6.04) können zusammengefaßt werden und man erhält

Zahlentafel 2. Gasdrücke in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel entsprechend den pV-Diagrammen nach Bild 7 und 8 (Mittelwerte aus 4 Umdrehungen).

φ	p_G beim Viertaktmotor		p_G beim Zweitaktmotor
	1. Umlauf	2. Umlauf	
	kg/cm²		kg/cm²
0 (360)	28,5	0,3	22,11
10 (370)	57,3	0,35	42,05
20 (380)	63,3	0,4	58,15
30 (390)	51,6	0,4	61,45
40 (400)	38,5	0,4	53,35
50 (410)	29,3	0,4	42,59
60 (420)	23	0,4	31,11
70 (430)	18,6	0,4	24,19
80 (440)	15,6	0,4	18,69
90 (450)	13,5	0,4	15,42
100 (460)	11,7	0,4	11,91
110 (470)	10,3	0,4	5,92
120 (480)	9,2	0,4	1,52
130 (490)	8.2	0,4	0,73
140 (500)	7,5	0,4	0,59
150 (510)	6,8	0,4	0,61
160 (520)	6,1	0,4	0,64
170 (530)	5,3	0,4	0,67
180 (540)	4,5	0,4	0,69
190 (550)	3,8	0,4	0,70
200 (560)	3,2	0,4	0,71
210 (570)	2,6	0,45	0,71
220 (580)	2	0,55	0,71
230 (590)	1,5	0,7	0,69
240 (600)	1	0,9	0,66
250 (610)	0,6	1,25	0,67
260 (620)	0,3	1,7	0,83
270 (630)	0,2	2,3	1,15
280 (640)	0,2	2,8	1,60
290 (650)	0,2	3,9	2,25
300 (660)	0,2	4,9	3,20
310 (670)	0,2	6,2	4,55
320 (680)	0,2	7,9	5,73
330 (690)	0,2	10	7,56
340 (700)	0,2	12,9	10,05
350 (710)	0,25	17,1	13,80
360 (720)	0,3	28,5	22,11

Zahlentafel 3a. Allgemeine Hilfsgrößen zur näherungsweisen Berechnung der Biege- und Drehkraftanteile für ein Schubstangenverhältnis von $\lambda = 0,25$.

φ	$F(\varphi)$	$G(\varphi)$	$A(\varphi)$	$E(\varphi)$
0	1,0000	— 1,2500	0,0000	0,0000
10	0,9773	— 1,1945	0,2164	— 0,2666
20	0,9103	— 1,0315	0,4227	— 0,4820
30	0,8031	— 0,7964	0,6091	— 0,6074
40	0,6614	— 0,5358	0,7675	— 0,6235
50	0,4934	— 0,2965	0,8915	— 0,5344
60	0,3080	— 0,1172	0,9769	— 0,3640
70	0,1150	— 0,0136	1,0223	— 0,1500
80	— 0,0764	— 0,0069	1,0289	0,0680
90	— 0,2582	— 0,0662	1,0000	0,2556
100	— 0,4238	— 0,1739	0,9407	0,3896
110	— 0,5690	— 0,3032	0,8570	0,4612
120	— 0,6920	— 0,4316	0,7552	0,4740
130	— 0,7922	— 0,5421	0,6406	0,4396
140	— 0,8706	— 0,6276	0,5181	0,3725
150	— 0,9290	— 0,6864	0,3909	0,2866
160	— 0,9691	— 0,7231	0,2614	0,1928
170	— 0,9923	— 0,7423	0,1309	0,0966
180	1,0000	— 0,7500	0,0000	0,0000
190	— 0,9923	— 0,7423	— 0,1309	— 0,0966
200	— 0,9691	— 0,7231	— 0,2614	— 0,1928
210	— 0,9290	— 0,6864	— 0,3909	— 0,2866
220	— 0,8706	— 0,6276	— 0,5181	— 0,3725
230	— 0,7922	— 0,5421	— 0,6406	— 0,4396
240	— 0,6920	— 0,4316	— 0,7552	— 0,4740
250	— 0,5690	— 0,3032	— 0,8570	— 0,4612
260	— 0,4238	— 0,1739	— 0,9407	— 0,3896
270	— 0,2582	— 0,0662	— 1,0000	— 0,2556
280	— 0,0764	— 0,0069	— 1,0289	— 0,0680
290	0,1150	— 0,0136	— 1,0223	0,1500
300	0,3080	— 0,1172	— 0,9769	0,3640
310	0,4934	— 0,2965	— 0,8915	0,5344
320	0,6614	— 0,5358	— 0,7675	0,6235
330	0,8031	— 0,7964	— 0,6091	0,6074
340	0,9103	— 1,0315	— 0,4227	0,4820
350	0,9773	— 1,1945	— 0,2164	0,2666
360	1,0000	— 1,2500	0,0000	0,0000

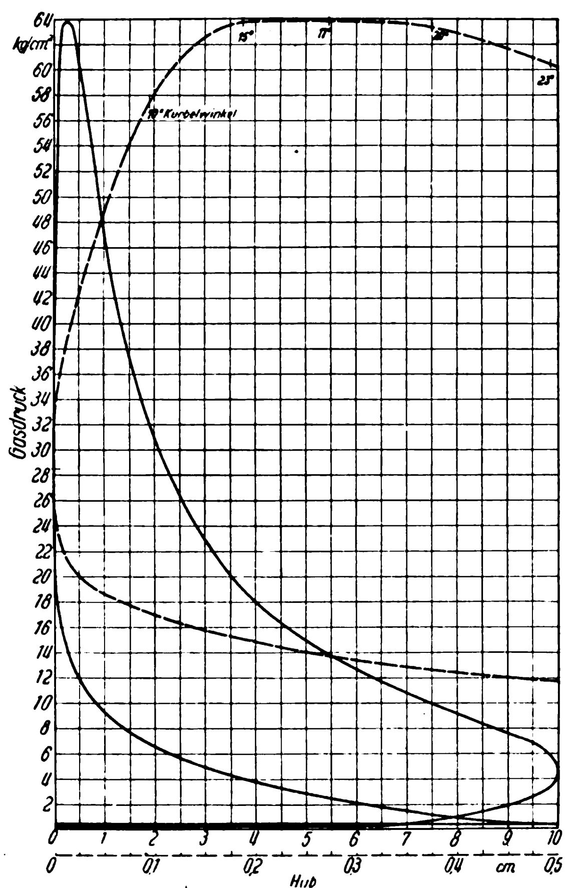


Bild 7. Indikatordiagramm eines Viertakt-Flugmotors, Verdichtung 7,0, Überladung 0,5 atü, p_{mi} = 16,6 kg/cm². Die gestrichelte Linie stellt den Abschnitt 0 bis 0,5 cm Hub 20fach gestreckt dar.

Zahlentafel 3 b. Allgemeine Hilfsgrößen zur näherungsweisen Berechnung der Biege- und Drehkraftanteile für $\lambda = 0{,}2875$.

φ	$F(\varphi)$	$G(\varphi)$	$A(\varphi)$	$E(\varphi)$
0	1,0000	— 1,2875	0,0000	0,0000
10	0,9760	— 1,2285	0,2229	— 0,2837
20	0,9059	— 1,0527	0,4348	— 0,5104
30	0,7933	— 0,8018	0,6257	— 0,6380
40	0,6451	— 0,5266	0,7869	— 0,6455
50	0,4699	— 0,2797	0,9111	— 0,5401
60	0,2773	— 0,1014	0,9945	— 0,3511
70	0,0782	— 0,0135	1,0357	— 0,1200
80	— 0,1172	— 0,0153	1,0360	0,1077
90	— 0,3002	— 0,0892	1,0000	0,2960
100	— 0,4644	— 0,2077	0,9336	0,4225
110	— 0,6058	— 0,3407	0,8437	0,4806
120	— 0,7227	— 0,4638	0,7375	0,4783
130	— 0,8157	— 0,5627	0,6209	0,4301
140	— 0,8869	— 0,6322	0,4987	0,3543
150	— 0,9387	— 0,6746	0,3743	0,2662
160	— 0,9735	— 0,6967	0,2492	0,1750
170	— 0,9936	— 0,7065	0,1245	0,0867
180	— 1,0000	— 0,7125	0,0000	0,0000
190	— 0,9936	— 0,7065	— 0,1245	— 0,0867
200	— 0,9735	— 0,6967	— 0,2492	— 0,1750
210	— 0,9387	— 0,6746	— 0,3743	— 0,2662
220	— 0,8869	— 0,6322	— 0,4987	— 0,3543
230	— 0,8157	— 0,5627	— 0,6209	— 0,4301
240	— 0,7227	— 0,4638	— 0,7375	— 0,4783
250	— 0,6058	— 0,3407	— 0,8437	— 0,4806
260	— 0,4644	— 0,2077	— 0,9336	— 0,4225
270	— 0,3002	— 0,0892	— 1,0000	— 0,2960
280	— 0,1172	— 0,0153	— 1,0360	— 0,1077
290	0,0782	— 0,0135	— 1,0357	0,1200
300	0,2773	— 0,1014	— 0,9945	0,3511
310	0,4699	— 0,2797	— 0,9111	0,5401
320	0,6451	— 0,5266	— 0,7869	0,6455
330	0,7933	— 0,8018	— 0,6257	0,6380
340	0,9059	— 1,0527	— 0,4348	0,5104
350	0,9760	— 1,2285	— 0,2229	0,2837
360	1,0000	— 1,2875	0,0000	0,0000

$$h = 1624 \frac{(D+d)\, z^2\, l_t^3}{D\, n\, f^3} \cdot \frac{c}{K'}, \quad \ldots \quad (6.05)$$

wobei

- D Durchmesser der äußeren Rollenlaufbahn,
- d Durchmesser der inneren Rollenlaufbahn,
- z Rollenzahl einer Rollenreihe,
- l_t tragende Länge einer Rolle in mm, multipliziert mit der Zahl der Rollenreihen,
- f Kolbenfläche in cm²,
- K' relative Beanspruchungskennzahl nach Gl. (6.03),
- c Lagerkennzahl, vgl. Abschnitt 6 d.

b) Zahlenmäßige Berechnung von K'.

Nach Berechnungsbeispielen befinden sich die an größten Werten von K' erkennbaren Stellen höchster Beanspruchung am Innenring je nach den Betriebsbedingungen in verschiedenen Zonen, Zahlentafel 7.

Als Verbrennungsdruckverlauf wurde für den Viertaktmotor das in Bild 7 wiedergegebene pV-Diagramm für hohe Leistung zugrunde gelegt. Im Falle des Zweitaktmotors wurden Mittelwerte aus den vier in Bild 8 dargestellten Arbeitsspielen gebildet. Diese bei den Berechnungen benützten Mittelwerte der Gasdrücke sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt.

Die höchste Beanspruchung tritt an der Innenlaufbahn dann auf dem äußeren Teil des Kurbelzapfens, und zwar nach Bild 4 bei $\alpha = 30°$ (Viertaktmotor) bzw. $\alpha = 45°$ (Zweitaktmotor) auf, wenn, wie bei niederen Drehzahlen oder verhältnismäßig kleinen bewegten Massen, die Gasdrücke überwiegen. Sind dagegen bei hohen Drehzahlen die Massenkräfte ausschlaggebend, so geht die höchste Beanspruchung auf die innere Seite des Kurbelzapfens $\alpha = 180°$ über. Es

Zahlentafel 3 c. Allgemeine Hilfsgrößen zur näherungsweisen Berechnung der Biege- und Drehkraftanteile für $\lambda = 0{,}3$.

φ	$F(\varphi)$	$G(\varphi)$	$A(\varphi)$	$E(\varphi)$
0	1,0000	— 1,3000	0,0000	0,0000
10	0,9773	— 1,2401	0,2261	— 0,2895
15	0,9470	— 1,1625	0,3358	— 0,4156
20	0,9048	— 1,0603	0,4408	— 0,5207
25	0,8520	— 0,9513	0,5402	— 0,5980
30	0,7893	— 0,8036	0,6331	— 0,6481
40	0,6380	— 0,5236	0,7941	— 0,6530
50	0,4602	— 0,2741	0,9173	— 0,5421
60	0,2661	— 0,0965	0,9989	— 0,3462
70	0,0663	— 0,0115	1,0385	— 0,1101
80	— 0,1295	— 0,0189	1,0374	0,1215
90	— 0,3125	— 0,0978	1,0000	0,3098
100	— 0,4767	— 0,2199	0,9322	0,4333
110	— 0,6177	— 0,3533	0,8409	0,4873
120	— 0,7339	— 0,4749	0,7329	0,4792
130	— 0,8254	— 0,5695	0,6147	0,4267
140	— 0,8940	— 0,6336	0,4915	0,3482
150	— 0,9427	— 0,6706	0,3670	0,2589
160	— 0,9746	— 0,6885	0,2432	0,1695
170	— 0,9923	— 0,6947	0,1211	0,0831
180	— 1,0000	— 0,7000	0,0000	0,0000
190	— 0,9923	— 0,6947	— 0,1211	— 0,0831
200	— 0,9746	— 0,6885	— 0,2432	— 0,1695
210	— 0,9427	— 0,6706	— 0,3670	— 0,2589
220	— 0,8940	— 0,6336	— 0,4915	— 0,3482
230	— 0,8254	— 0,5695	— 0,6147	— 0,4267
240	— 0,7339	— 0,4749	— 0,7329	— 0,4792
250	— 0,6177	— 0,3533	— 0,8409	— 0,4873
260	— 0,4767	— 0,2199	— 0,9322	— 0,4333
270	— 0,3125	— 0,0978	— 1,0000	— 0,3098
280	— 0,1295	— 0,0189	— 1,0374	— 0,1215
290	0,0663	— 0,0115	— 1,0385	0,1101
300	0,2661	— 0,0965	— 0,9989	0,3462
310	0,4602	— 0,2741	— 0,9173	0,5421
320	0,6380	— 0,5236	— 0,7941	0,6530
330	0,7893	— 0,8036	— 0,6331	0,6481
340	0,9048	— 1,0603	— 0,4408	0,5207
350	0,9773	— 1,2401	— 0,2261	0,2895
360	1,0000	— 1,3000	0,0000	0,0000

Zahlentafel 4a. Teilglied $(G[\varphi] - \varepsilon)$ in Gleichung (6.03) in Abhängigkeit von ε für $\lambda = 0.25$.

φ	$\varepsilon = 0,2$	$\varepsilon = 0,4$	$\varepsilon = 0,6$	$\varepsilon = 0,8$	$\varepsilon = 1,0$	$\varepsilon = 1,2$	$\varepsilon = 1,4$	$\varepsilon = 1,6$	$\varepsilon = 1,8$	$\varepsilon = 2,0$
0	— 1,450	— 1,650	— 1,850	— 2,050	— 2,250	— 2,450	— 2,650	— 2,850	— 3,050	— 3,250
10	— 1,394	— 1,594	— 1,794	— 1,994	— 2,194	— 2,394	— 2,594	— 2,794	— 2,994	— 3,194
20	— 1,231	— 1,431	— 1,631	— 1,831	— 2,031	— 2,231	— 2,431	— 2,631	— 2,831	— 3,031
30	— 0,996	— 1,196	— 1,396	— 1,596	— 1,796	— 1,996	— 2,196	— 2,396	— 2,596	— 2,796
40	— 0,736	— 0,936	— 1,136	— 1,336	— 1,536	— 1,736	— 1,936	— 2,136	— 2,336	— 2,536
50	— 0,496	— 0,696	— 0,896	— 1,096	— 1,296	— 1,496	— 1,696	— 1,896	— 2,096	— 2,296
60	— 0,317	— 0,517	— 0,717	— 0,917	— 1,117	— 1,317	— 1,517	— 1,717	— 1,917	— 2,117
70	— 0,214	— 0,414	— 0,614	— 0,814	— 1,014	— 1,214	— 1,414	— 1,614	— 1,814	— 2,014
80	— 0,207	— 0,407	— 0,607	— 0,807	— 1,007	— 1,207	— 1,407	— 1,607	— 1,807	— 2,007
90	— 0,266	— 0,466	— 0,666	— 0,866	— 1,066	— 1,266	— 1,466	— 1,666	— 1,866	— 2,066
100	— 0,374	— 0,574	— 0,774	— 0,974	— 1,174	— 1,374	— 1,574	— 1,774	— 1,974	— 2,174
110	— 0,503	— 0,703	— 0,903	— 1,103	— 1,303	— 1,503	— 1,703	— 1,903	— 2,103	— 2,303
120	— 0,632	— 0,832	— 1,032	— 1,232	— 1,432	— 1,632	— 1,832	— 2,032	— 2,232	— 2,432
130	— 0,742	— 0,942	— 1,142	— 1,342	— 1,542	— 1,742	— 1,942	— 2,142	— 2,342	— 2,542
140	— 0,828	— 1,028	— 1,228	— 1,428	— 1,628	— 1,828	— 2,028	— 2,228	— 2,428	— 2,628
150	— 0,886	— 1,086	— 1,286	— 1,486	— 1,686	— 1,886	— 2,086	— 2,286	— 2,486	— 2,686
160	— 0,923	— 1,123	— 1,323	— 1,523	— 1,723	— 1,923	— 2,123	— 2,323	— 2,523	— 2,723
170	— 0,942	— 1,142	— 1,342	— 1,542	— 1,742	— 1,942	— 2,142	— 2,342	— 2,542	— 2,742
180	— 0,950	— 1,150	— 1,350	— 1,550	— 1,750	— 1,950	— 2,150	— 2,350	— 2,550	— 2,750
190	— 0,942	— 1,142	— 1,342	— 1,542	— 1,742	— 1,942	— 2,142	— 2,342	— 2,542	— 2,742
200	— 0,923	— 1,123	— 1,323	— 1,523	— 1,723	— 1,923	— 2,123	— 2,323	— 2,523	— 2,723
210	— 0,886	— 1,086	— 1,286	— 1,486	— 1,686	— 1,886	— 2,086	— 2,286	— 2,486	— 2,686
220	— 0,828	— 1,028	— 1,228	— 1,428	— 1,628	— 1,828	— 2,028	— 2,228	— 2,428	— 2,628
230	— 0,742	— 0,942	— 1,142	— 1,342	— 1,542	— 1,742	— 1,942	— 2,142	— 2,342	— 2,542
240	— 0,632	— 0,832	— 1,032	— 1,232	— 1,432	— 1,632	— 1,832	— 2,032	— 2,232	— 2,432
250	— 0,503	— 0,703	— 0,903	— 1,103	— 1,303	— 1,503	— 1,703	— 1,903	— 2,103	— 2,303
260	— 0,374	— 0,574	— 0,774	— 0,974	— 1,174	— 1,374	— 1,574	— 1,774	— 1,974	— 2,174
270	— 0,266	— 0,466	— 0,666	— 0,866	— 1,066	— 1,266	— 1,466	— 1,666	— 1,866	— 2,066
280	— 0,207	— 0,407	— 0,607	— 0,807	— 1,007	— 1,207	— 1,407	— 1,607	— 1,807	— 2,007
290	— 0,214	— 0,414	— 0,614	— 0,814	— 1,014	— 1,214	— 1,414	— 1,614	— 1,814	— 2,014
300	— 0,317	— 0,517	— 0,717	— 0,917	— 1,117	— 1,317	— 1,517	— 1,717	— 1,917	— 2,117
310	— 0,496	— 0,696	— 0,896	— 1,096	— 1,296	— 1,496	— 1,696	— 1,896	— 2,096	— 2,296
320	— 0,736	— 0,936	— 1,136	— 1,336	— 1,536	— 1,736	— 1,936	— 2,136	— 2,336	— 2,536
330	— 0,996	— 1,196	— 1,396	— 1,596	— 1,796	— 1,996	— 2,196	— 2,396	— 2,596	— 2,796
340	— 1,231	— 1,431	— 1,631	— 1,831	— 2,031	— 2,231	— 2,431	— 2,631	— 2,831	— 3,031
350	— 1,394	— 1,594	— 1,794	— 1,994	— 2,194	— 2,394	— 2,594	— 2,794	— 2,994	— 3,194
360	— 1,450	— 1,650	— 1,850	— 2,050	— 2,250	— 2,450	— 2,650	— 2,850	— 3,050	— 3,250

Zahlentafel 4b. Teilglied $(G[\varphi] - \varepsilon]$ in Gleichung (6.03) in Abhängigkeit von ε für $\lambda = 0,2875$.

φ	$\varepsilon = 0,2$	$\varepsilon = 0,4$	$\varepsilon = 0,6$	$\varepsilon = 0,8$	$\varepsilon = 1,0$	$\varepsilon = 1,2$	$\varepsilon = 1,4$	$\varepsilon = 1,6$	$\varepsilon = 1,8$	$\varepsilon = 2,0$
0	— 1,487	— 1,687	— 1,887	— 2,087	— 2,287	— 2,487	— 2,687	— 2,887	— 3,087	— 3,287
10	— 1,428	— 1,628	— 1,828	— 2,028	— 2,228	— 2,428	— 2,628	— 2,828	— 3,028	— 3,228
20	— 1,253	— 1,453	— 1,653	— 1,853	— 2,053	— 2,253	— 2,453	— 2,653	— 2,853	— 3,053
30	— 1,002	— 1,202	— 1,402	— 1,602	— 1,802	— 2,002	— 2,202	— 2,402	— 2,602	— 2,802
40	— 0,727	— 0,927	— 1,127	— 1,327	— 1,527	— 1,727	— 1,927	— 2,127	— 2,327	— 2,527
50	— 0,480	— 0,680	— 0,880	— 1,080	— 1,280	— 1,480	— 1,680	— 1,880	— 2,080	— 2,280
60	— 0,301	— 0,501	— 0,701	— 0,901	— 1,101	— 1,301	— 1,501	— 1,701	— 1,901	— 2,101
70	— 0,213	— 0,413	— 0,613	— 0,813	— 1,013	— 1,213	— 1,413	— 1,613	— 1,813	— 2,013
80	— 0,215	— 0,415	— 0,615	— 0,815	— 1,015	— 1,215	— 1,415	— 1,615	— 1,815	— 2,015
90	— 0,289	— 0,489	— 0,689	— 0,889	— 1,089	— 1,289	— 1,489	— 1,689	— 1,889	— 2,089
100	— 0,408	— 0,608	— 0,808	— 1,008	— 1,208	— 1,408	— 1,608	— 1,808	— 2,008	— 2,208
110	— 0,541	— 0,741	— 0,941	— 1,141	— 1,341	— 1,541	— 1,741	— 1,941	— 2,141	— 2,341
120	— 0,664	— 0,864	— 1,064	— 1,264	— 1,464	— 1,664	— 1,864	— 2,064	— 2,264	— 2,464
130	— 0,763	— 0,963	— 1,163	— 1,363	— 1,563	— 1,763	— 1,963	— 2,163	— 2,363	— 2,563
140	— 0,832	— 1,032	— 1,232	— 1,432	— 1,632	— 1,832	— 2,032	— 2,232	— 2,432	— 2,632
150	— 0,875	— 1,075	— 1,275	— 1,475	— 1,675	— 1,875	— 2,075	— 2,275	— 2,475	— 2,675
160	— 0,897	— 1,097	— 1,297	— 1,497	— 1,697	— 1,897	— 2,097	— 2,297	— 2,497	— 2,697
170	— 0,906	— 1,106	— 1,306	— 1,506	— 1,706	— 1,906	— 2,106	— 2,306	— 2,506	— 2,706
180	— 0,912	— 1,112	— 1,312	— 1,512	— 1,712	— 1,912	— 2,112	— 2,312	— 2,512	— 2,712
190	— 0,906	— 1,106	— 1,306	— 1,506	— 1,706	— 1,906	— 2,106	— 2,306	— 2,506	— 2,706
200	— 0,897	— 1,097	— 1,297	— 1,497	— 1,697	— 1,897	— 2,097	— 2,297	— 2,497	— 2,697
210	— 0,875	— 1,075	— 1,275	— 1,475	— 1,675	— 1,875	— 2,075	— 2,275	— 2,475	— 2,675
220	— 0,832	— 1,032	— 1,232	— 1,432	— 1,632	— 1,832	— 2,032	— 2,232	— 2,432	— 2,632
230	— 0,763	— 0,963	— 1,163	— 1,363	— 1,563	— 1,763	— 1,963	— 2,163	— 2,363	— 2,563
240	— 0,664	— 0,864	— 1,064	— 1,264	— 1,464	— 1,664	— 1,864	— 2,064	— 2,264	— 2,464
250	— 0,541	— 0,741	— 0,941	— 1,141	— 1,341	— 1,541	— 1,741	— 1,941	— 2,141	— 2,341
260	— 0,408	— 0,608	— 0,808	— 1,008	— 1,208	— 1,408	— 1,608	— 1,808	— 2,008	— 2,208
270	— 0,289	— 0,489	— 0,689	— 0,889	— 1,089	— 1,289	— 1,489	— 1,689	— 1,889	— 2,089
280	— 0,215	— 0,415	— 0,615	— 0,815	— 1,015	— 1,215	— 1,415	— 1,615	— 1,815	— 2,015
290	— 0,213	— 0,413	— 0,613	— 0,813	— 1,013	— 1,213	— 1,413	— 1,613	— 1,813	— 2,013
300	— 0,301	— 0,501	— 0,701	— 0,901	— 1,101	— 1,301	— 1,501	— 1,701	— 1,901	— 2,101
310	— 0,480	— 0,680	— 0,880	— 1,080	— 1,280	— 1,480	— 1,680	— 1,880	— 2,080	— 2,280
320	— 0,727	— 0,927	— 1,127	— 1,327	— 1,527	— 1,727	— 1,927	— 2,127	— 2,327	— 2,527
330	— 1,002	— 1,202	— 1,402	— 1,602	— 1,802	— 2,002	— 2,202	— 2,402	— 2,602	— 2,802
340	— 1,253	— 1,453	— 1,653	— 1,853	— 2,053	— 2,253	— 2,453	— 2,653	— 2,853	— 3,053
350	— 1,428	— 1,628	— 1,828	— 2,028	— 2,228	— 2,428	— 2,628	— 2,828	— 3,028	— 3,228
360	— 1,487	— 1,687	— 1,887	— 2,087	— 2,287	— 2,487	— 2,687	— 2,887	— 3,087	— 3,287

Zahlentafel 4c. Teilglied $(G[\varphi] - \varepsilon)$ in Gleichung (6.03) in Abhängigkeit von ε für $\lambda = 0,3$.

φ	$\varepsilon = 0,2$	$\varepsilon = 0,4$	$\varepsilon = 0,6$	$\varepsilon = 0,8$	$\varepsilon = 1,0$	$\varepsilon = 1,2$	$\varepsilon = 1,4$	$\varepsilon = 1,6$	$\varepsilon = 1,8$	$\varepsilon = 2,0$
0	—1,500	—1,700	—1,900	—2,100	—2,300	—2,500	—2,700	—2,900	—3,100	—3,300
10	—1,440	—1,640	—1,840	—2,040	—2,240	—2,440	—2,640	—2,840	—3,040	—3,240
15	—1,303				—2,103			—2,763		
20	—1,260	—1,460	—1,660	—1,860	—2,060	—2,260	—2,460	—2,660	—2,860	—3,060
30	—1,004	—1,204	—1,404	—1,604	—1,804	—2,004	—2,204	—2,404	—2,604	—2,804
40	—0,724	—0,924	—1,124	—1,324	—1,524	—1,724	—1,924	—2,124	—2,324	—2,524
50	—0,474	—0,674	—0,874	—1,074	—1,274	—1,474	—1,674	—1,874	—2,074	—2,274
60	—0,296	—0,496	—0,696	—0,896	—1,096	—1,296	—1,496	—1,696	—1,896	—2,096
70	—0,211	—0,411	—0,611	—0,811	—1,011	—1,211	—1,411	—1,611	—1,811	—2,011
80	—0,219	—0,419	—0,619	—0,819	—1,019	—1,219	—1,419	—1,619	—1,819	—2,019
90	—0,298	—0,498	—0,698	—0,898	—1,098	—1,298	—1,498	—1,698	—1,898	—2,098
100	—0,420	—0,620	—0,820	—1,020	—1,220	—1,420	—1,620	—1,820	—2,020	—2,220
110	—0,553	—0,753	—0,953	—1,153	—1,353	—1,553	—1,753	—1,953	—2,153	—2,353
120	—0,675	—0,875	—1,075	—1,275	—1,475	—1,675	—1,875	—2,075	—2,275	—2,475
130	—0,770	—0,970	—1,170	—1,370	—1,570	—1,770	—1,970	—2,170	—2,370	—2,570
140	—0,834	—1,034	—1,234	—1,434	—1,634	—1,834	—2,034	—2,234	—2,434	—2,634
150	—0,871	—1,071	—1,271	—1,471	—1,671	—1,871	—2,071	—2,271	—2,471	—2,671
160	—0,888	—1,088	—1,288	—1,488	—1,688	—1,888	—2,088	—2,288	—2,488	—2,688
170	—0,895	—1,095	—1,295	—1,495	—1,695	—1,895	—2,095	—2,295	—2,495	—2,695
180	—0,900	—1,100	—1,300	—1,500	—1,700	—1,900	—2,100	—2,300	—2,500	—2,700
190	—0,895	—1,095	—1,295	—1,495	—1,695	—1,895	—2,095	—2,295	—2,495	—2,695
200	—0,888	—1,088	—1,288	—1,488	—1,688	—1,888	—2,088	—2,288	—2,488	—2,688
210	—0,871	—1,071	—1,271	—1,471	—1,671	—1,871	—2,071	—2,271	—2,471	—2,671
220	—0,834	—1,034	—1,234	—1,434	—1,634	—1,834	—2,034	—2,234	—2,434	—2,634
230	—0,770	—0,970	—1,170	—1,370	—1,570	—1,770	—1,970	—2,170	—2,370	—2,570
240	—0,675	—0,875	—1,075	—1,275	—1,475	—1,675	—1,875	—2,075	—2,275	—2,475
250	—0,553	—0,753	—0,953	—1,153	—1,353	—1,553	—1,753	—1,953	—2,153	—2,353
260	—0,420	—0,620	—0,820	—1,020	—1,220	—1,420	—1,620	—1,820	—2,020	—2,220
270	—0,298	—0,498	—0,698	—0,898	—1,098	—1,298	—1,498	—1,698	—1,898	—2,098
280	—0,219	—0,419	—0,619	—0,819	—1,019	—1,219	—1,419	—1,619	—1,819	—2,019
290	—0,211	—0,411	—0,611	—0,811	—1,011	—1,211	—1,411	—1,611	—1,811	—2,011
300	—0,296	—0,496	—0,696	—0,896	—1,096	—1,296	—1,496	—1,696	—1,896	—2,096
310	—0,474	—0,674	—0,874	—1,074	—1,274	—1,474	—1,674	—1,874	—2,074	—2,274
320	—0,724	—0,924	—1,124	—1,324	—1,524	—1,724	—1,924	—2,124	—2,324	—2,524
330	—1,004	—1,204	—1,404	—1,604	—1,804	—2,004	—2,204	—2,404	—2,604	—2,804
340	—1,260	—1,460	—1,660	—1,860	—2,060	—2,260	—2,460	—2,660	—2,860	—3,060
350	—1,440	—1,640	—1,840	—2,040	—2,240	—2,440	—2,640	—2,840	—3,040	—3,240
360	—1,500	—1,700	—1,900	—2,100	—2,300	—2,500	—2,700	—2,900	—3,100	—3,300

Zahlentafel 5a. Gaskraftanteile beim Viertaktmotor für $\lambda = 0,25$.

φ	$p_G\,F(\varphi)$	$p_G\,A(\varphi)$	φ	$p_G\,F(\varphi)$	$p_G\,A(\varphi)$
0	28,5	0,00	360	0,300	0,00
10	56,0	12,40	370	0,342	0,076
20	57,6	26,75	380	0,364	0,169
30	41,4	31,45	390	0,321	0,244
40	25,5	29,55	400	0,264	0,307
50	14,5	26,1	410	0,197	0,356
60	7,08	22,48	420	0,123	0,391
70	2,14	19,03	430	0,046	0,409
80	—1,19	16,05	440	—0,031	0,412
90	—3,44	13,5	450	—0,103	0,400
100	—4,96	11,0	460	—0,170	0,376
110	—5,86	8,83	470	—0,228	0,343
120	—6,37	6,94	480	—0,277	0,302
130	—6,49	5,25	490	—0,317	0,256
140	—6,53	3,89	500	—0,348	0,207
150	—6,32	2,66	510	—0,372	0,156
160	—5,92	1,595	520	—0,388	0,105
170	—5,26	0,694	530	—0,397	0,052
180	—4,50	0,00	540	—0,400	0,000
190	—3,77	—0,497	550	—0,397	—0,052
200	—3,10	—0,836	560	—0,388	—0,105
210	—2,42	—1,016	570	—0,420	—0,176
220	—1,74	—1,036	580	—0,48	—0,285
230	—1,19	—0,961	590	—0,56	—0,448
240	—0,692	—0,755	600	—0,62	—0,679
250	—0,342	—0,514	610	—0,71	—1,072
260	—0,127	—0,282	620	—0,2	—1,598
270	—0,052	—0,2	630	—0,59	—2,300
280	—0,015	—0,206	640	—0,21	—2,88
290	0,023	—0,204	650	0,45	—3,99
300	0,062	—0,185	660	1,51	—4,79
310	0,099	—0,178	670	3,06	—5,52
320	0,123	—0,154	680	4,86	—6,07
330	0,161	—0,122	690	8,03	—6,09
340	0,182	—0,084	700	11,74	—5,46
350	0,244	—0,054	710	16,70	—3,70
360	0,300	0,000	720	28,50	0,00

Zahlentafel 5b. Gaskraftanteile beim Viertaktmotor für $\lambda = 0,2875$.

φ	$p_G\,F(\varphi)$	$p_G\,A(\varphi)$	φ	$p_G\,F(\varphi)$	$p_G\,A(\varphi)$
0	28,5	0,00	360	0,300	0,000
10	56,4	12,88	370	0,351	0,0802
20	57,2	27,48	380	0,362	0,1740
30	40,3	31,75	390	0,317	0,2503
40	24,5	29,85	400	0,258	0,3148
50	13,6	26,32	410	0,188	0,3645
60	6,27	22,48	420	0,111	0,3978
70	1,42	18,86	430	0,031	0,4144
80	—1,8	15,91	440	—0,047	0,4145
90	—3,98	13,25	450	—0,12	0,4
100	—5,36	10,78	460	—0,186	0,373
110	—6,17	8,59	470	—0,242	0,3374
120	—6,54	6,68	480	—0,289	0,2952
130	—6,63	5,04	490	—0,326	0,2284
140	—6,56	3,692	500	—0,355	0,1996
150	—6,38	2,546	510	—0,375	0,1497
160	—5,94	1,521	520	—0,389	0,0997
170	—5,22	0,654	530	—0,397	0,0498
180	—4,60	0,000	540	—0,4	0,0000
190	—3,78	—0,473	550	—0,397	—0,0498
200	—3,14	—0,802	560	—0,409	—0,1047
210	—2,44	—0,973	570	—0,432	—0,1722
220	—1,85	—1,038	580	—0,461	—0,2594
230	—1,24	—0,943	590	—0,546	—0,416
240	—0,781	—0,797	600	—0,636	—0,649
250	—0,406	—0,565	610	—0,738	—1,029
260	—0,167	—0,336	620	—0,776	—1,558
270	—0,072	—0,24	630	—0,675	—2,250
280	—0,023	—0,207	640	—0,342	—3,025
290	0,016	—0,2072	650	0,30	—3,935
300	0,055	—0,199	660	1,32	—4,725
310	0,094	—0,182	670	2,85	—5,515
320	0,129	—0,157	680	5,00	—6,10
330	0,159	—0,125	690	7,84	—6,18
340	0,181	—0,0870	700	11,4	—5,48
350	0,234	—0,053	710	16,6	—3,78
360	0,3	0,00	720	28,5	0,00

Zahlentafel 5c. Gaskraftanteile beim Viertaktmotor für $\lambda = 0{,}3$.

φ	$p_G\,F(\varphi)$	$p_G\,A(\varphi)$	φ	$p_G\,F(\varphi)$	$p_G\,A(\varphi)$
0	28,5	0,00	360	0,300	0,000
10	56,0	12,95	370	0,342	0,079
15	60,5	21,4	380	0,362	0,176
20	57,2	27,94	390	0,316	0,253
30	40,7	32,65	400	0,255	0,318
40	24,6	30,58	410	0,184	0,367
50	13,49	26,87	420	0,106	0,399
60	6,12	22,99	430	0,026	0,415
70	1,23	19,30	440	—0,052	0,414
80	—2,02	16,18	450	—0,125	0,400
90	—4,22	13,50	460	—0,190	0,373
100	—5,575	10,90	470	—0,246	0,336
110	—6,36	8,66	480	—0,294	0,293
120	—6,75	6,74	490	—0,330	0,246
130	—6,76	5,04	500	—0,357	0,196
140	—6,71	3,68	510	—0,377	0,147
150	—6,41	2,50	520	—0,389	0,097
160	—5,94	1,48	530	—0,397	0,048
170	—5,26	0,64	540	—0,400	0,000
180	—4,50	0,000	550	—0,397	—0,048
190	—3,78	—0,460	560	—0,389	—0,097
200	—3,12	—0,778	570	—0,424	—0,165
210	—2,45	—0,954	580	—0,490	—0,270
220	—1,79	—0,983	590	—0,580	—0,430
230	—1,24	—0,923	600	—0,66	—0,660
240	—0,73	—0,733	610	—0,77	—1,050
250	—0,37	—0,504	620	—0,81	—1,584
260	—0,143	—0,280	630	—0,72	—2,300
270	—0,062	—0,200	640	—0,36	—2,910
280	—0,026	—0,207	650	0,26	—4,045
290	0,012	—0,204	660	1,30	—4,899
300	0,053	—0,199	670	2,86	—5,680
310	0,092	—0,183	680	5,04	—6,270
320	0,128	—0,159	690	7,89	—6,331
330	0,158	—0,126	700	11,13	—5,68
340	0,181	—0,088	710	16,70	—3,86
350	0,244	—0,056	720	28,5	0,000
360	0,300	—0,000			

Zahlentafel 6. Gaskraftanteile beim Zweitaktmotor für $\lambda = 0{,}3$.

φ	$p_G\,A(\varphi)$	$p_G\,F(\varphi)$	φ	$p_G\,A(\varphi)$	$p_G\,F(\varphi)$
0	0,00	+22,11	180	0	—0,69
10	9,50	41,09	190	—0,08	—0,69
20	25,63	52,61	200	—0,17	—0,69
25	32,36	51,04	210	—0,26	—0,67
30	38,90	48,50	220	—0,35	—0,63
35	42,52	42,51	230	—0,42	—0,57
40	42,36	34,03	240	—0,48	—0,48
50	39,06	19,59	250	—0,56	—0,41
60	31,07	8,36	260	—0,77	—0,40
70	25,12	+1,60	270	—1,15	—0,36
80	19,38	—2,42	280	—1,66	—0,21
90	15,42	—4,81	290	—2,34	+0,15
100	11,10	—5,68	300	—3,20	0,85
110	4,98	—3,66	310	—4,17	2,09
120	1,11	—1,12	320	—4,55	3,65
130	0,45	—0,60	330	—4,78	5,96
140	0,29	—0,53	340	—4,43	9,09
150	0,22	—0,58	350	—3,12	10,48
160	0,16	—0,62	360	0	22,11
170	0,08	—0,66			

Zahlentafel 7. Lage der höchstbeanspruchten Faser des Innenrings bei verschiedenen Motorbauarten.

Bauart und Betriebsweise		Ort höchster Beanspruchung durch K'_{max} bestimmt
Viertaktmotor, einreihig und 60° V-Anordnung mit zentrisch angelenkten Nebenpleueln	Gasdruckverlauf nach Bild 7	$\alpha_1 = 30°$ $\alpha_2 = 180°$
Zweitaktmotor	Gasdruckverlauf nach Bild 8	$\alpha_1 = 45°$ $\alpha_2 = 180°$
Keine Gasdrücke (z. B. Schleuderprüfstände mit Fremdantrieb)	Belastung nur durch Massenkräfte	$\alpha = 180°$

gibt dabei einen Übergangszustand, in dem beide Zonen gleich hoch beansprucht sind. Da für die Lebensdauer des Lagers immer die höchste Beanspruchung maßgebend ist, setzt sich der Verlauf von K' aus einem für $\alpha = 30°$ bzw. $45°$ und einem für $\alpha = 180°$ ermittelten Zweig zusammen, Bild 9 und 10.

K' ist nach Gl. (6.03) vom Verhältnis $a r \omega^2$ der Massenkräfte zur Kolbenfläche und vom Verhältnis ε der umlaufenden zu den hin- und hergehenden Massen abhängig. Die Vertafelung von K' wurde in den Grenzen $a r \omega^2 = 3{,}5$ bis 20 und $\varepsilon = 0{,}2$ bis $3{,}0$ durchgeführt, Zahlentafel 8 und 9. Zeichnet man diese Werte auf, Bild 9 und 10, so sieht man, daß K' für $\alpha = 30°$ bzw. $45°$ mit wachsendem $a r \omega^2$ sowie mit größerem ε abnimmt, d. h. bei gleichem Zylinderdurchmesser nehmen die Beanspruchungen mit wachsenden Massenkräften, also vor allem bei Drehzahlsteigerung ab, weil die Massenkräfte den Gaskräften entgegenwirken. Sobald die höchste Beanspruchung auf den inneren Teil des Kurbelzapfens bei $\alpha = 180°$ übergeht, nimmt K' mit wachsendem $a r \omega^2$ und ε nach Parabeln höherer Ordnung zu. Der Einfluß von $a r \omega^2$ tritt stärker in Erscheinung als der von ε. Da größere Werte von ε eine Vergrößerung der umlaufenden Massen bedeuten, vollzieht sich auch der Übergang der höchsten Beanspruchung auf $\alpha = 180°$ mit wachsendem ε schon bei kleinerem $a r \omega^2$. Da $a r \omega^2$ beliebig aus hin- und hergehender Masse, Hub, Drehzahl und Kolbenfläche zusammengesetzt sein kann, erfolgt mit wachsendem ε der Beanspruchungswechsel auf 180° im einzelnen schon bei kleineren hin- und hergehenden Massen, kleinerem Hub, niedrigerer Drehzahl oder größerer Kolbenfläche als bei kleinem ε.

Die Beanspruchungen sind erst durch die Größe $K = f^3 K'$ völlig gekennzeichnet. Bei gleichen Werten $a r \omega^2$ und ε ist K' konstant und K ändert sich dann mit der dritten Potenz von f. Gleichbleibende Werte von ε und $a r \omega^2$ ergeben sich an verschieden großen Zylindern bei geometrisch ähnlicher Massenverteilung und bei Drehzahlen, die im umgekehrten Verhältnis der Durchmesser stehen.

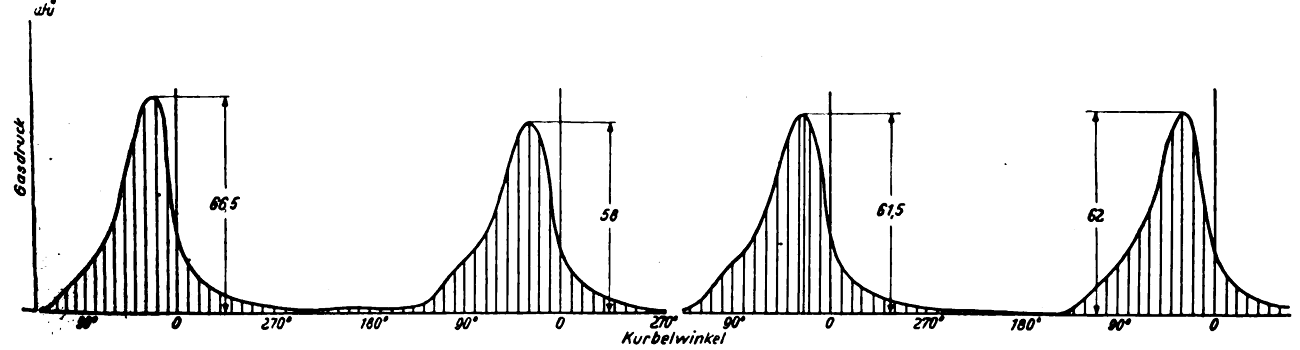


Bild 8. Indikatordiagramm eines Zweitaktmotors für vier aufeinanderfolgende Umdrehungen.

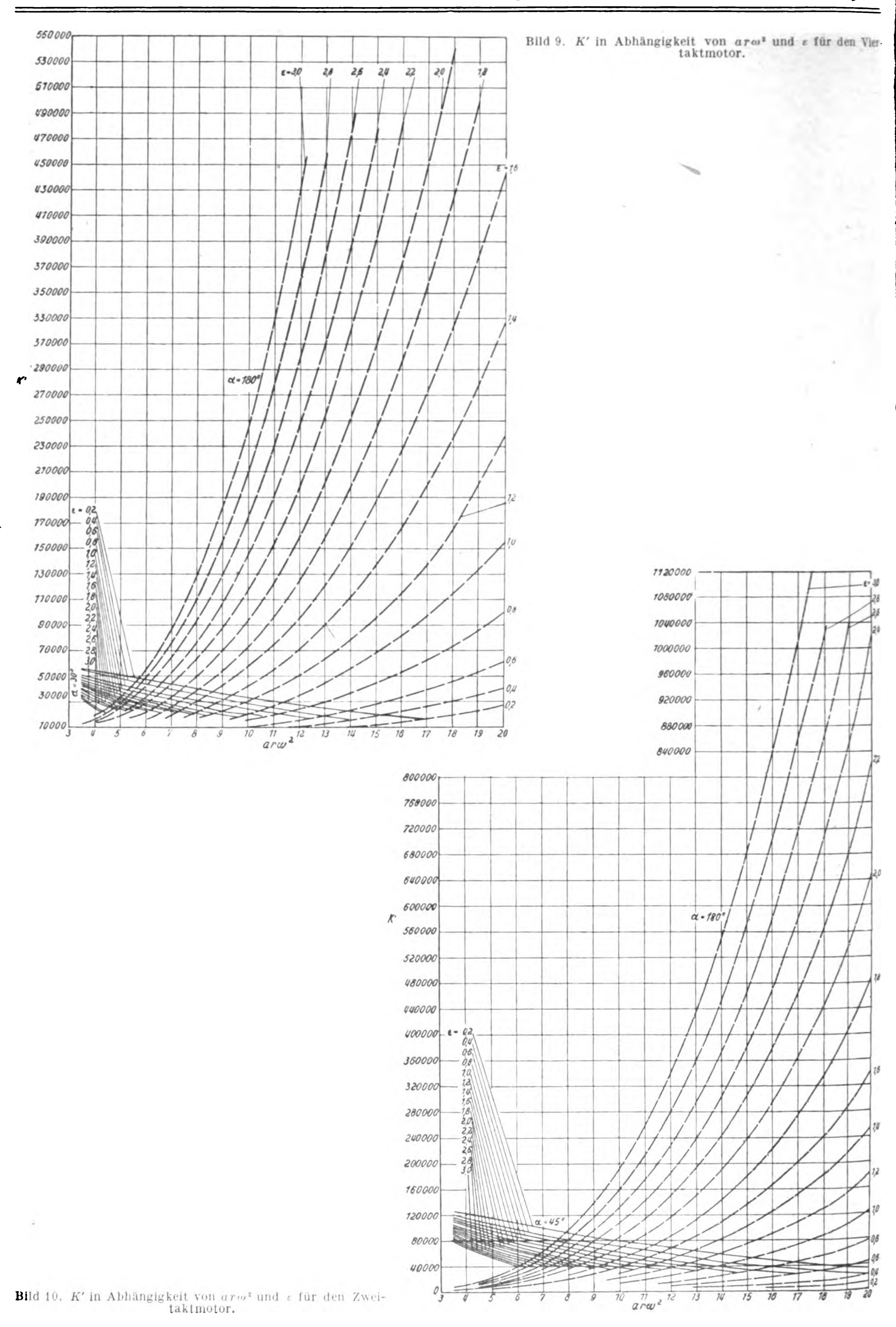


Bild 9. K' in Abhängigkeit von $a r \omega^2$ und ε für den Viertaktmotor.

Bild 10. K' in Abhängigkeit von $a r \omega^2$ und ε für den Zweitaktmotor.

Zahlentafel 8. K' in Abhängigkeit von $a r \omega^2$ und ε beim Viertaktmotor mit $\lambda = 0{,}3$ und Gasdruckverlauf nach Bild 7 bzw. Zahlentafel 2.

Verhältnis der umlaufenden zu den hin- und hergehenden Massen $\varepsilon = \frac{m_u}{m_h + m_o}$.

$a r \omega^2$	$\varepsilon = 0{,}2$	0,21*	0,25	0,30	0,36	0,4	0,41	0,46	0,49	0,54	0,6	0,64	0,70	0,76	0,8	0,85	0,91	1,0	1,001	1,05	1,12	1,2	1,4	1,44	1,6
3,5	56 150					54 100					52 050				50 100			48 050				46 300	44 750		43 154
4,0	52 974					49 974					47 614				45 908			44 134				42 449	40 994		39 649
4,5	51 655					47 695					44 929				42 975			40 740				39 029	37 474		36 050
5,0	50 023					45 720					42 620				40 129			38 015				36 150	34 485		32 950
5,5	48 390					44 322					41 334				38 298			35 864				33 833	31 900		30 095
6,0	46 725					42 972					39 367				36 078			32 665				31 430	29 250		27 495
6,5	45 035					41 289					37 400				33 948			31 164				29 098	27 136		24 964
7,0	43 100					38 429					35 135				31 853			29 231				26 858	24 821		22 628
7,5	41 570					37 502					33 464				29 853			26 564				24 748	22 250	21 883	24 989
8,0	39 807					35 943					31 497				27 156			24 664				22 698	23 036		31 139
8,5	38 060					33 943					29 529				25 983			22 814			21 485	25 304	27 177		35 659
9,0	36 100					31 399					26 915				23 074			20 765		20 038		28 233	31 835		42 034
9,5	34 354					29 560					25 715				21 950			19 264	19 249			31 507	37 041		49 159
10,0	32 526					28 449					23 627				20 471		18 947	21 972				35 144	42 824		59 086
10,5	31 200					26 173					22 500				19 405	18 721		23 572				38 826	49 216		65 823
11,0	29 600					25 100					20 866			18 238	19 111			28 084				42 971	55 800		74 835
11,5	28 350					23 943					19 640		18 080		21 571			31 915				47 876	63 945		85 984
12,0	27 228					22 543					18 500	17 797			24 109			35 877				52 796	72 344		97 479
12,5	26 850		$\alpha = 30^0$			21 943					17 650	16 939			26 866			40 176				58 526	81 473		109 973
13,0	25 500					20 443				17 564	19 276				29 854			44 834				64 861	91 363		123 509
13,5	24 100					18 943			17 317		21 198				33 080			49 865				71 856	102 042		138 126
14,0	22 345					18 193		17 211			23 274				36 594			55 700				79 584	113 584		153 927
14,5	21 350					16 943	16 731				25 493				40 286			61 100				87 946	125 896		170 774
15,0	20 350				16 733	17 569					27 875				44 284			67 334				97 066	139 131		188 888
15,5	19 250			16 863		19 154					30 422				48 558			73 998				106 981	153 277		208 250
16,0	18 247		16 932			20 879					33 139				53 117			81 232				117 756	168 367		228 903
16,5	17 350	17 060*)				21 139					36 030				57 969			88 671				132 081	184 429		250 887
17,0	18 166					24 796					39 103				63 125			96 710				141 931	201 496		274 247
17,5	19 624		$\alpha = 180^0$			26 909					42 361				68 593			105 235				155 456	219 597		299 020
18,0	21 132					29 244					45 811				74 476			114 466				170 031	237 714		323 676
18,5	22 689					31 734					49 459				80 503			123 806				185 631	259 021		352 980
19,0	24 277					34 404					53 308				86 964			133 879				202 306	280 407		382 249
19,5	25 914					37 229					57 366				93 773			144 496				219 981	302 947		413 100
20,0	27 680					40 264					61 638				100 941			155 672				238 931	326 674		445 575

*) Die treppenförmige Linie bedeutet die Grenze zwischen den bei Überwiegen der Gasdrücke ($\alpha = 30^\circ$) und den bei Überwiegen der Massenkräfte ($\alpha = 180^\circ$) hervorgerufenen Beanspruchungen.

$a r \omega^2$	Verhältnis der umlaufenden zu den hin- und hergehenden Massen $\varepsilon = \frac{m_u}{m_h + m_o}$ 1,6	1,64	1,8	1,82	2,0	2,01	2,2	2,21	2,4	2,51	2,6	2,8	2,90	3,0
3,5	43 154		42 100		41 000		39 765		37 700		35 740	33 725		31 500
4,0	39 649		38 011		36 302		34 729		32 677		30 762	28 792		26 766
4,5	36 050		34 170		32 300		30 360		28 530		26 643	24 796	23 809	25 373
5,0	32 950		30 565		28 845		27 065		24 990	23 973	25 562	29 544		33 877
5,5	30 095		27 765		25 770		23 965	23 817	32 574		33 382	38 638		44 261
6,0	27 495		25 215		23 115	23 009	28 862		35 353		42 673	44 322		56 718
6,5	24 964		22 415	22 247	28 132		35 664		43 536		52 761	61 851		71 432
7,0	22 628	22 023	26 585		34 594		43 586		53 582		65 029	76 883		88 595
7,5	24 989		32 319		41 752		52 723		65 592		79 103	94 567		108 392
8,0	31 139		39 949		50 089		63 164		79 174		94 614	113 562		131 014
8,5	35 659		46 296		59 535		74 995		93 430		112 194	134 517		156 646
9,0	42 034		54 648		70 162		88 304		109 468		131 960	158 090		185 481
9,5	49 159		63 980		82 036		103 176		127 388		154 053	184 432		217 702
10,0	59 086		74 349		95 641		119 699		147 299		178 599	213 699		253 491
10,5	65 823		85 808		109 809		138 459		169 303		205 726	246 043		293 065
11,0	74 835		97 613		124 829		156 771		191 971		233 671	279 363		333 822
11,5	85 984		112 216		143 409		180 042		220 013		268 241	320 582		384 241
12,0	97 479		127 275		162 569		204 088		248 928		303 888	363 085		436 230
12,5	109 973		143 641		183 393		230 118		280 355		342 631	409 279		492 735
13,0	123 509		161 371		205 952		258 372		314 400		384 603	459 324		553 949
13,5	138 126		181 172		230 313		288 883		351 167		429 929	513 367		620 055
14,0	153 927		201 184		255 847		321 734		390 434		478 734	571 568		677 855
14,5	170 774		223 284		284 727		357 032		433 287		531 167	634 076		767 706
15,0	188 888		247 012		314 917		394 843		478 849		587 337	701 049		847 125
15,5	208 250		272 375		347 187		435 259		527 552		647 377	772 637		937 194
16,0	228 903		299 428		381 609		478 371		579 501		711 420	848 998		1 030 598
16,5	250 887		328 226		418 250		524 261		634 799		779 593	925 282		1 130 024
17,0	274 247		358 824		457 182		573 020		693 554		852 027	1 016 647		1 235 665
17,5	299 020		391 275		498 471		624 732		755 867		928 847	1 108 242		1 347 704
18,0	323 676		427 414		542 189		691 964		821 964		1 040 416	1 247 714		1 466 334
18,5	352 980		461 958		588 404		737 367		891 593		1 096 171	1 307 748		1 591 739
19,0	382 249		500 299		637 187		798 464		965 216		1 186 933	1 415 966		1 724 111
19,5	413 100		540 710		688 605		862 862		1 042 815		1 282 598	1 530 031		1 863 635
20,0	445 575		583 249		746 686		930 649		1 124 499		1 354 023	1 650 099		2 027 981

In den Zahlentafeln 8 und 9 ist die Grenze zwischen dem vorwiegend durch Gas- bzw. dem durch Massenkräfte bestimmten Beanspruchungsfeld besonders gekennzeichnet. Sie verläuft beim Zweitaktmotor längs größerer Werte ε und $a r \omega^2$, also bei absolut höheren Massenkräften. Beim Zweitaktmotor sind außerdem die Beanspruchungen im Bereich der überwiegenden Gasdrücke größer als beim Viertaktmotor. In dem für beide Bauarten gemeinsam von den Massenkräften bestimmten Gebiet sind die Lagerbeanspruchungen des Viertaktmotors größer als die des Zweitaktmotors.

Für praktische Berechnungen kann für Zwischenwerte von ε und $a r \omega^2$, die in den Zahlentafeln 8 und 9 nicht enthalten sind, mit genügender Genauigkeit zwischen den vier nächstliegenden Werten linear interpoliert werden.

Geringere Füllung und Belastung des Motors bedeutet Senkung der Drücke im pV-Diagramm und immer weitergehendes Überwiegen der Massenkräfte. Als Grenzfall, wie er bei fremdangetriebenen Schleuderprüfständen und annähernd bei starker Drosselung des Motors eintritt, wurden die allein durch Massenkräfte hervorgerufenen Beanspruchungen unter Wegfall der Gaskräfte untersucht. Die größte Beanspruchung tritt hierbei für $\alpha = 180^0$ ein. Setzt man in Gl. (6.03) für alle Kurbelwinkel

$$p_G(\varphi) = 0,$$

so erhält man

$$K' = -\int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\lambda \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}}\right) [a r \omega^2 (G(\varphi) - \varepsilon)]^3 \, d\varphi \quad (6.06)$$

Mit $\lambda = 0{,}3$ ergibt sich

$$K' = 2\pi (a r \omega^2)^3 [0.404 + 1{,}318\,\varepsilon + 1{,}584\,\varepsilon^2 + \varepsilon^3] \quad (6.07)$$

In Zahlentafel 10 werden einige nach Gl. (6.07) ausgerechnete Werte mit den für die Vollastdiagramme des Zweitakt- und Viertaktmotors berechneten Beanspruchungswerten verglichen.

Man sieht, daß bei Wegfall der Gasdrücke die Pleuellagerbeanspruchungen — wie zu erwarten — dann größer sind als unter Mitwirkung des motorischen Gasdruckverlaufs, wenn der Einfluß der Massenkräfte überwiegt. Wo dagegen die Gasdrücke ausschlaggebend sind, sind die Lagerbeanspruchungen ohne Gasdrücke kleiner. Je größer die Massenkräfte gegenüber den Gasdrücken dann werden, also bei

Zahlentafel 9. K' in Abhängigkeit von $a r \omega^2$ und ε für Zweitaktmotoren mit $\lambda = 0{,}3$ und Gasdruckverlauf nach Bild 8 bzw. Zahlentafel 2.

Verhältnis der umlaufenden zu den hin- und hergehenden Massen $\varepsilon = \frac{m_u}{m_h + m_o}$.

$a r \omega^2$	$\varepsilon = 0{,}2$	0,4	0,404*)	0,42	0,45	0,48	0,52	0,55	0,59	0,6	0,63	0,67	0,71	0,76	0,8	0,81	0,87	0,93	1,0	1,01	1,08	1,16	1,2	1,24	1,34	1,4	1,42	1,53	1,6	1,65	1,79	1,8
3,5	126 709	122 361								118 277					114 460				110 424				107 347			104 227			100 704			97 517
4,0	121 739	116 673								111 724					107 470				103 554				99 546			95 600			92 000			89 080
4,5	117 529	111 375								105 774					101 070				97 124				93 106			88 500			84 800			81 880
5,0	113 519	106 410								100 574					95 670				91 154				86 550			82 500			78 400			75 075
5,5	109 699	101 840								95 320					90 600				85 524				80 550			76 500			72 700			69 150
6,0	106 019	97 473								91 120					86 160				81 024				76 040			71 200			66 800			63 500
6,5	102 479	93 373								87 275					81 670				77 024				72 040			67 100			62 500			58 680
7,0	98 609	90 305								83 725					77 710				72 870				67 375			62 585			58 118			53 955
7,5	95 739	86 293								79 175					73 770				68 524				63 550			58 400			53 700			49 680
8,0	92 529	82 113								75 722					69 770				64 654				58 850			54 200			49 400			46 080
8,5	89 429	78 873								71 824					65 870				60 120				55 040			50 100			45 800			42 080
9,0	86 369	75 373								68 575					62 570				56 574				51 550			46 500			42 400		38 488	38 745
9,5	83 399	72 193								65 225					58 860				53 000				47 940			43 300			38 600	37 713		46 587
10,0	80 488	69 098								61 784					55 458				49 741				44 858			39 368		36 657	40 170			53 222
10,5	77 650	66 143								58 525					52 360				47 424				41 550			36 800	36 207		46 441			60 674
11,0	74 870	63 213								55 625					49 465				44 374				39 550		36 306	39 865			53 402			69 113
11,5	72 170	60 440								52 470					46 665				41 424				36 550	35 519		45 661			61 071			78 618
12,0	69 500	57 740								49 575					43 970				38 524			34 863	37 444			52 020			69 533			89 260
12,5	66 870	55 045								46 974					41 370				36 074		34 175		42 501			58 977			78 751			101 130
13,0	64 330	52 443								44 874					38 970				33 874	33 556			47 975			66 557			88 824			114 298
13,5	61 800	49 913								41 874					36 370			32 684	36 806				53 915			74 792			99 809			128 863
14,0	59 300	47 440								39 424					33 770		31 830		41 201				60 335			83 713			111 694			144 911
14,5	56 850	45 015								37 124					31 170	30 746			45 950				67 255			93 044			124 614			162 522
15,0	54 453	42 663								34 783				29 938	32 578				51 094				74 708			103 757			138 440			181 795
15,5	52 190	40 560								32 670			29 424		36 017				56 451				82 667			114 852			153 324			202 799
16,0	50 020	38 650								31 050		28 981			39 709				62 275				91 204			126 796			169 294			225 669
16,5	47 820	36 740								29 340	28 431				43 642				68 501				100 315			139 562			186 494			250 469
17,0	45 670	34 910							27 840	28 095					47 831				75 077				110 035			153 202			204 674			277 329
17,5	43 570	33 160						27 627		30 655					52 279				82 105				120 365			167 722			224 154			306 323
18,0	41 500	31 420					27 236			33 362					58 993				89 598				131 335			183 152			245 054			337 549
18,5	39 440	29 530				26 745				36 224					63 987				97 494				142 965			199 552			267 084			371 139
19,0	37 470	27 950			26 183					39 241					67 263				105 859				155 275			216 912			290 524			407 174
19,5	35 500	26 319		25 481						42 421					72 831				114 612				168 285			235 292			315 104			445 769
20,0	33 510	24 971	24 852*)							45 769					78 705				124 174				182 419			254 669			341 497			486 907

$\alpha = 45^0$ (↑) $\alpha = 180^0$ (↓)

*) Die treppenförmige Linie bedeutet die Grenze zwischen den bei Überwiegen der Gasdrücke ($\alpha = 45°$) und den bei Überwiegen der Massenkräfte ($\alpha = 180°$) hervorgerufenen Beanspruchungen.



Verhältnis der umlaufenden zu den hin- und hergehenden Massen $\varepsilon = \frac{m_u}{m_h + m_o}$.

$a r \omega^2$	$\varepsilon = 1{,}8$	1,94	2,0	2,11	2,2	2,31	2,4	2,59	2,6	2,72	2,8	3,0
3,5	97 517		94 397		91 105		88 327		85 374		82 467	79 586
4,0	89 080		85 561		82 220		79 001		75 606		72 315	69 193
4,5	81 880		77 960		74 620		71 001		67 306		63 815	60 533
5,0	75 075		71 560		67 620		63 900		60 156		56 515	53 133
5,5	69 150		65 160		61 620		57 650		53 856		50 165	46 763
6,0	63 500		59 660		56 120		52 500		48 256		44 595	41 193
6,5	58 680		54 560		54 020		47 000		43 256	40 780	43 044	51 443
7,0	53 955		49 945		46 513		42 355	40 577	44 755		53 951	64 483
7,5	49 680		45 660		42 220	40 335	45 058		55 241		66 648	79 691
8,0	46 080		41 660	39 816	44 128		54 890		67 474		81 283	97 189
8,5	42 080	39 228	41 927		53 108		66 116		81 112		98 002	117 192
9,0	38 745		49 908		63 272		80 719		96 732		116 950	139 882
9,5	46 587		58 878		74 701		94 057		114 300		139 280	165 477
10,0	53 222		68 902		87 476		109 137		133 972		162 152	194 010
10,5	60 674		78 795		100 162		125 232		155 800		188 690	226 017
11,0	69 113		91 164		114 482		143 392		176 797		215 945	261 267
11,5	78 618		102 646		130 652		163 822		202 217		247 518	300 137
12,0	89 260		116 811		148 782		186 632		230 542		282 445	342 857
12,5	101 130		132 620		168 956		212 022		261 992		320 935	389 457
13,0	114 298		150 180		193 103		240 142		296 732		363 175	440 087
13,5	128 863		169 610		216 202		271 172		334 987		409 380	495 281
14,0	144 911		191 440		243 552		305 312		376 972		459 775	555 127
14,5	162 522		214 565		273 302		342 702		422 862		514 515	619 307
15,0	181 795		240 311		306 478		383 561		472 861		573 861	689 064
15,5	202 799		268 440		342 502		428 005		527 232		637 045	763 870
16,0	225 669		299 060		381 652		476 324		586 162		707 068	844 305
16,5	250 469		332 280		424 252		528 635		649 862		781 391	930 930
17,0	277 329		368 280		470 052		585 202		718 626		861 202	1 022 520
17,5	306 323		407 180		519 752		646 178		792 602		946 635	1 120 620
18,0	337 549		449 080		573 552		711 754		872 032		1 037 915	1 226 020
18,5	371 139		494 180		631 252		782 202		957 212		1 135 365	1 336 870
19,0	407 174		542 580		693 250		857 658		1 048 322		1 239 115	1 454 875
19,5	445 769		594 475		759 152		938 393		1 145 622		1 349 415	1 578 660
20,0	486 907		648 897		827 828		1 023 707		1 249 000		1 466 595	1 711 839

großem $a r \omega^2$ und ε, desto mehr gleichen sich die Beanspruchungen mit und ohne Gasdrücke einander an.

c) Sonderfälle.

α) *Ruhend belastete Lager.*

Mit

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha \, d\alpha = \left| \left(\frac{1}{3} \cos^2 \alpha + \frac{2}{3} \right) \sin \alpha \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3},$$

erhält man aus Gl. (5.11)

$$L_0 = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{z \cdot l_l}{4{,}01\, Q} \right)^3 c_1 \quad \ldots \ldots \quad (6.08)$$

Vergleicht man Gl. (6.08) mit Gl. (5.14), so muß für ruhend belastete Lager

$$K = \frac{4}{3} Q^3$$

gesetzt werden.

Zahlentafel 10. K' bei reiner Massenkraftbelastung im Vergleich zu den entsprechenden Werten von Zwei- und Viertaktmotoren im Vollastbetrieb. Es bedeutet $p = 0$ Betrieb ohne Gasdrücke, 4 T Viertaktmotor, 2 T Zweitaktmotor.

$a r \omega^2$	K' für $\varepsilon = 0{,}2$			$\varepsilon = 1{,}0$			$\varepsilon = 2{,}0$			$\varepsilon = 3{,}0$		
	$p = 0$	4 T	2 T	$p = 0$	4 T	2 T	$p = 0$	4 T	2 T	$p = 0$	4 T	2 T
3,5	199	56 150	126 709	1 160	48 050	110 424	5 680	41 000	94 397	12 300	31 500	79 586
7	1 590	43 100	98 609	9 260	29 231	72 870	45 300	34 593	49 945	98 000	88 595	64 483
10	4 645	32 525	80 488	27 054	21 971	49 741	132 012	95 641	68 902	286 575	253 490	194 010
15	15 620	20 350	54 453	91 100	77 334	51 094	446 000	314 916	240 311	967 000	847 125	689 064
20	37 100	27 680	33 510	216 000	155 171	124 174	1 057 000	746 685	648 897	2 290 000	2 027 980	1 711 839

β) Gabelpleuel mit zentrisch angelenktem Nebenpleuel.

Die Lager- und Rollendrücke des Hauptpleuellagers setzen sich aus den unmittelbar vom Hauptpleuel herrührenden Kräften und den vom Nebenpleuel übertragenen Kolben- und Massenkräften zusammen. Der Verlauf der Nebenpleuelkräfte ist gegenüber dem der Hauptpleuelkräfte um den Zündabstand verschoben. Zündet der Nebenzylinder nach dem Hauptzylinder, so ist der Rollendruck, ausgedrückt in den Dreh- und Biegekraftanteilen,

$$p = \frac{4{,}01}{z \cdot l_t} \left[(R_H \langle\varphi\rangle + R_N \langle\varphi - x\rangle \cos\alpha + (T_H \langle\varphi\rangle + T_N \langle\varphi - x\rangle) \sin\alpha \right]$$

und

$$K = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi m} \left(1 + \frac{\lambda \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}}\right) \left[(R_H \langle\varphi\rangle + R_N \langle\varphi - x\rangle) \cos\alpha + (T_H \langle\varphi\rangle + T_N \langle\varphi - x\rangle) \sin\alpha \right]^3 d\varphi.$$

Mit den Beiwerten a_H und ε_H für das Hauptpleuel sowie a_N und ε_N für das Nebenpleuel ist

$$K' = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi m} \left(1 + \frac{\lambda \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}}\right) \Big\{ \left[p_G(\varphi) F(\varphi) + p_G (\varphi - x) F(\varphi - x) + a_H r \omega^2 (G_\varphi - \varepsilon_H) + a_N r \omega^2 (G \langle\varphi - x\rangle - \varepsilon_N) \right] \cos\alpha + \left[p_G (\varphi) A (\varphi) + p_G \langle\varphi - x\rangle A \langle\varphi - x\rangle + a_H r \omega^2 E (\varphi) + a_N r \omega^2 E (\varphi - x) \right] \sin\alpha \Big\}^3 d\varphi.$$

Für den 60°-V-Motor ist beispielsweise $x = 300°$. Die Stelle α der größten Beanspruchung auf dem Innenring war für Gabelpleuel neu festzulegen. Sie ergab sich aber gleich wie bei einreihigen Motoren, vgl. Zahlentafel 7. Da bei zentrischer Anlenkung gewöhnlich aus Gründen des Massenausgleiches das Kolbengewicht und die Schubstangenlänge für Haupt- und Nebenzylinder gleich sind und die zu den hin- und hergehenden Massen gerechneten Anteile von Haupt- und Nebenpleuel sich verhältnismäßig wenig unterscheiden, wurde bei der Durchrechnung von Beispielen die Vereinfachung $a_H = a_N$ getroffen.

In Zahlentafel 11 sind die Kennzahlen K' für die Hauptpleuelbeanspruchungen beim Viertakt-V-Motor für die Summe der Massenverhältnisse von Haupt- und Nebenpleuel $\varepsilon_H + \varepsilon_N$ angegeben. Der Wert $\varepsilon_H + \varepsilon_N$ bedeutet bei $a_H = a_N$ das Verhältnis der gesamten umlaufenden Massen zu der hin- und hergehenden Masse des Haupt- oder des Nebengetriebes. Gewöhnlich ist bei gleicher Zylinderleistung der Anteil der umlaufenden Massen und damit ε_H für das Gabelpleuel allein mindestens so hoch wie bei den Pleueln einreihiger Motoren. Dazu kommt der Anteil ε_N des Nebenpleuels, der kleiner ist als der des Hauptpleuels.

Der Vergleich zwischen einreihigem und V-Motor erfolgt daher zweckmäßig auf Grund der Massenverhältnisse des Hauptpleuels. In Zahlentafel 12 ist dementsprechend das Verhältnis der Beanspruchungszahlen K' für Pleuellager von V-Motoren und einreihigen Motoren angegeben, wobei für $\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_H}$ ein Spielraum zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{3}$ gelassen ist. Man sieht, daß die Beanspruchungen des Hauptpleuellagers bei Überwiegen der Gaskräfte verhältnismäßig wenig (bis etwa 80%) höher liegen als beim einreihigen Motor. Im Übergangsgebiet, wo beim einreihigen Motor noch die Gaskräfte, beim V-Motor aber schon die Massenkräfte ausschlaggebend sind, kann das Hauptpleuellager des V-Motors sogar weniger beansprucht sein als das Pleuellager des einreihigen Motors. Im Gebiet der vorherrschenden Massenkräfte sind die Beanspruchungen der Hauptpleuellager von V-Motoren etwa 3- bis 6mal so groß wie die Beanspruchungen bei einreihigen Motoren entsprechender Abmessungen. Die Beanspruchungen der V-Motoren-Hauptpleuel nehmen mit größerem Anteil der umlaufenden Massen des Hauptpleuels etwas ab.

d) Lagerkennzahl c.

Die Lagerkennzahl c entspricht der Konstanten C in der allgemeinen Lebensdauergleichung Gl. (5.10) mit dem Unterschied, daß sich c auf den Rollendruck p je 1 mm tragende Rollenlänge bezieht.

Die Zahl c hängt von den Schmiegungsverhältnissen und von den Werkstoffeigenschaften ab. Zahlenmäßig kann c bis jetzt nur aus Versuchsergebnissen bestimmt werden, da noch keine volle Klarheit darüber besteht, welche rechnerisch erfaßbare Werkstoffbeanspruchungsart bei Abwälzvorgängen für die Ermüdung maßgebend ist. Die seitherigen theoretischen Untersuchungsergebnisse lassen auch mehr oder weniger die Frage der Zeitfestigkeit und Lebensdauer offen und stimmen in verschiedenen Punkten nicht mit den praktischen Erfahrungen überein.

Auf breiter Grundlage können die c-Werte aus den Tragfähigkeitszahlen für die handelsüblichen Lager gewonnen werden. Hierbei wird allerdings auch die gleiche Beanspruchung und Ausnützung des Werkstoffs übernommen, die vom Standpunkt des Leichtbaus aus noch weiter gesteigert werden sollten. Es sei auch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Herleitung der c-Werte aus den Tragfähigkeitszahlen nur eine vorläufige Lösung darstellen soll und für Flugmotorenlager nur solange als berechtigt angesehen wird, als Versuchsunterlagen zur unmittelbaren Bestimmung fehlen.

Zur Bestimmung von c aus den Tragfähigkeitszahlen faßt man die Gl. (5.10) und (5.12) zusammen. Er ergibt sich dann mit Gl. (6.04)

$$L = \frac{60}{10^6} \frac{D z h n}{D + d} \text{ Mill. Lastwechsel} \quad . \; . \; (6.04)$$

Zahlentafel 11. K' in Abhängigkeit von $a r \omega^2$ und ε bei Hauptpleueln von Viertakt-V-Motoren mit 60° Zylinderwinkel. $\lambda = 0{,}3$, Gasdruckverlauf nach Bild 7 und Tafel 2.

$a r \omega^2$	K' für $\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_N$			
	0,2	1,0	2,6	5,0
3,5	102 170	84 632	63 256	35 249
10	15 317	52 350	265 374	1 180 318
12	22 713	81 865	433 632	1 989 300
13	—	—	565 031	—
14	—	—	727 665	—
15	41 827	—	800 955	—
20	90 391	369 067	2 083 530	9 894 150

Zahlentafel 12. Verhältnis der Beanspruchungskennzahlen K' für Hauptpleuellager von V-Motoren und einreihigen Motoren. Die Zahlen ohne Hinweis gelten im Gebiet überwiegender Gaskräfte, die Zahlen mit + setzen sich aus einem ins Massenkraftgebiet fallenden K' Wert für V-Motoren und einem ins Gebiet der Gaskräfte fallenden K' Wert für einreihige Motoren zusammen. Die fett gedruckten Verhältniszahlen sind aus K' Werten gebildet, die bei beiden Motorbauarten im Gebiet überwiegender Massenkräfte liegen.

$a r \omega^2$	$\varepsilon_H + \varepsilon_N = 0{,}2$			$\varepsilon_H + \varepsilon_N = 1{,}0$			$\varepsilon_H + \varepsilon_N = 2{,}6$			$\varepsilon_H + \varepsilon_N = 5{,}0$		
	$\varepsilon_H = 0{,}12$	0,133	0,143	0,6	0,666	0,71	1,56	1,74	1,86	3,0	3,33	3,57
3,5	1,79	1,80	1,81	1,62	1,63	1,64	1,46	1,49	1,52	1,12	1,27	1,40
10	0,448 +	0,45 +	0,454 +	2,22 +	2,32 +	2,33 +	**4,76**	**4,42**	**3,3**	**4,66**	**3,7**	**3,21**
12	0,78 +	0,79 +	0,796 +	**4,42**	**4,40**	**3,98**	**4,69**	**3,67**	**3,15**	**4,56**	**3,58**	**3,09**
13	—	—	—	—	—	—	**4,83**	**3,77**	**3,25**	—	—	—
15	1,94 +	1,87 +	1,82 +	—	—	—	**4,47**	**3,49**	**3,0**	—	—	—
20	**4,0**	**3,86**	**3,75**	**6,0**	**5,28**	**4,73**	**4,95**	**3,84**	**3,29**	**4,87**	**3,73**	**3,19**

$$c = \frac{820\, h\, n\, D\, Q^3}{(D+d)\, z^2\, l_t^3} \cdot 10^{-6}.$$

Greift man z. B. die Tragfähigkeitszahlen für $n = 3000$ U/min und eine Betriebsstundenzahl von $h = 500$ h heraus, so errechnet sich damit

$$c = \frac{1230\, D\, Q^3}{(D+d)\, z^2\, l_t^3},$$

wobei

Q zulässige ruhende Lagerbelastung für eine Betriebszeit von 500 h bei $n = 3000$ U/min,
D Durchmesser der äußeren Rollenlaufbahn,
d Durchmesser der inneren Rollenlaufbahn,
z Rollenzahl,
l_t tragende Rollenlänge.

Zahlentafel 13 enthält c-Werte für die Lagerbohrungen zwischen 17 und 100 mm sowie für verschiedene Lagerbaumuster.

Die Zahl c ist stark von der aus Laufbahnhalbmesser r_1 und Rollenhalbmesser r_2 gebildeten Bezugskrümmung $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}$ abhängig, Bild 11. Das Vorzeichen von r_1 ist positiv für die Berührungsverhältnisse am Innenring und negativ für den Außenring. Mit wachsendem $\frac{1}{r}$, d. h. schlechterer Anschmiegung, nimmt c ab. Die Lager der leichten und der mittelschweren Reihen (NL und NM) liegen dicht beieinander, während die schwere, schmale Reihe (NS) höhere c-Werte hat. Die breiten Lager WL und WM mit größerer Rollenlänge haben, bezogen auf 1 mm tragende Rollenlänge, eine geringere Tragfähigkeit als die schmalen Lager. Da die benutzten Tragfähigkeitszahlen auf Versuchen mit ganzen Lagern beruhen, ist die Ausnützung der größeren Rollenlänge bei den breiten Lagern infolge der Empfindlichkeit längerer Rollen in bezug auf Kantenbelastung und Schränken geringer.

Im Stuttgarter Forschungsinstitut wurde versucht, c-Werte unmittelbar zu bestimmen, und zwar an einzelnen Rollen, die unter Druck auf ebenen oder gekrümmten Laufflächen aus gehärtetem Kugellagerstahl abrollten. Mit ebenen Laufbahnen sind aus diesen Versuchen die in Zahlentafel 14 zusammengestellten Werte hervorgegangen. Sie sind wesentlich höher als die aus den Tragfähigkeitszahlen der listenmäßigen Lager berechneten Werte. Dies rührt daher, daß bei den Versuchen mit einzelnen Rollen und ebenen Laufbahnen die im wirklichen Betrieb auftretenden Störungen, wie Schränken und Kantenbelastung, größtenteils ver-

Zahlentafel 13. Lagerkennzahl c, berechnet aus den Tragfähigkeitszahlen der handelsüblichen Lager.

Lagerdurchmesser (Bohrung)	Lagermuster NL			Lagermuster NM			Lagermuster NS		
	Rollendurchmesser	Schmiegung am Innenring $\frac{1}{\text{cm}}$	Lagerkennzahl $\frac{c}{10^6}$	Rollendurchmesser	Schmiegung am Innenring $\frac{1}{\text{cm}}$	Lagerkennzahl $\frac{c}{10^6}$	Rollendurchmesser	Schmiegung am Innenring $\frac{1}{\text{cm}}$	Lagerkennzahl $\frac{c}{10^6}$
mm	mm			mm			mm		
17	5,5	4,509	0,2983						
20	6,5	3,82	0,5494	8	3,2	1,0289			
25	6,5	3,704	0,6277	9	2,7	1,3568	12	2,18	3,487
30	7,5	3,19	0,8695	10	2,4	1,6999	14	1,862	5,0524
35	9	2,679	1,2849	11	2,2	1,8523	15	1,712	5,7097
40	10	2,4	1,7058	12	2,02	2,3764	17	1,522	9,2887
45	10	2,364	1,6799	14	1,76	3,6981	18	1,422	10,6672
50	10	2,331	1,6100	15	1,64	5,2573	20	1,282	13,4809
55	11	2,12	2,8827	17	1,46	6,7489	20	1,258	13,4809
60	12	1,939	3,4347	18	1,36	7,7612	22	1,151	16,5792
65	13	1,789	3,9686	19	1,28	8,7952	23	1,094	15,7643
70	13	1,776	3,9408	20	1,22	10,0028	26	0,97	29,8333
75	14	1,65	4,22	22	1,14	13,8711	28	0,905	35,45
80	15	1,542	5,60	22	1,10	13,4591	30	0,848	42,65
85	16	1,446	6,37	24	1,02	16,9061	32	0,802	49,4508
90	18	1,297	9,91	25	0,96	20,1148	34	0,75	64,6409
95	19	1,228	11,26	26	0,93	23,0369	34	0,738	66,7779
100	20	1,66	12,28	28	0,86	26,8664	36	0,699	70,3158

Zahlentafel 13 (Fortsetzung).

Lagerdurchmesser (Bohrung)	Lagermuster WL			Lagermuster WM		
	Rollendurchmesser	Schmiegung am Innenring $\frac{1}{\text{cm}}$	Lagerkennzahl $\frac{c}{10^6}$	Rollendurchmesser	Schmiegung am Innenring $\frac{1}{\text{cm}}$	Lagerkennzahl $\frac{c}{10^6}$
mm	mm			mm		
17	5,5	4,509	0,125			
20	6,5	3,818	0,295	8	3,20	0,4265
25	6,5	3,706	0,242	9	2,793	0,5465
30	7,5	3,186	0,341	10	2,48	0,758
35	9	2,67	0,538	11	2,25	1,161
40	10	2,40	0,733	12	2,04	1,331
45	10	2,36	0,709	14	1,772	2,053
50	10	2,33	0,720	15	1,64	2,76
55	11	2,119	1,137	17	1,46	3,775
60	12	1,94	1,247	18	1,38	4,45
65	13	1,79	1,530	19	1,30	5,06
70	13	1,774	1,512	20	1,22	5,615
75	14	1,655	1,99	22	1,12	7,34
80	15	1,543	2,298	22	0,103	7,28
85	16	1,446	2,699	24	1,02	9,19
90	18	1,297	4,203	25	0,974	11,53
95	19	1,23	4,745	26	0,934	12,45
100	20	1,166	5,48	28	0,87	15,14

mieden werden konnten. Besondere Versuche über den Einfluß von Kantenbelastung auf die Lebensdauer ergaben, daß schon durch die innerhalb des Führungsspiels der Rollen mögliche Schrägstellung der Rollenachse zur Achse der Laufringe die Lebensdauer bis auf 10% und weniger derjenigen bei vollkommen gleichmäßiger Rollenberührung herabgesetzt werden kann. Da Kantenbelastungen nie ganz zu vermeiden sind, empfiehlt es sich für praktische Berechnungen die mit einem Sicherheitsfaktor $\eta = 0{,}1$ verkleinerten Werte $\eta \cdot c$ nach Zahlentafel 14 zu benutzen.

Weitere Versuche mit Einzelrollen und Laufringen ergaben folgende Werte:

	Laufbahndurchmesser mm	Rollendurchmesser mm	Bezugskrümmung $\frac{1}{\text{cm}}$	Belastung je 1 mm tragende Rollenlänge kg/mm	L_e 10^6	c 10^6
Einzelrollen und Laufringe	88,5	8	2,726	166 150 145	1,43 2,34 3,22	6,5 7,85 9,8
				Lagerbelastung kg	Betriebsstunden	
Zum Vergleich: ganzes Lager bei hoher Drehzahl (30000 U/min)	38,5	7,5	3,19	400	100	0,98

Der letzte, an einem ganzen Rollenlager *NL* ermittelte c-Wert stimmt mit den aus den Tragfähigkeitszahlen errechneten Werten überein, vgl. Bild 11. Dagegen liegen die mit Einzelrollen an Laufringen, also bei gekrümmter Laufbahn erhaltenen c-Werte, in denen die Möglichkeit des Schränkens und von Kantenbelastungen wenigstens in gewissem Umfang enthalten ist, noch wesentlich über den aus den Tragfähigkeitszahlen der handelsüblichen Lager berechneten Lagerkennzahlen. Man sieht aus der großen Verschiedenheit der Versuchswerte, daß die endgültige Festlegung der c-Werte noch weitere Versuchsunterlagen erfordert. Bis diese vorliegen, empfiehlt es sich, sicherheitshalber die c-Werte Bild 11 zu entnehmen.

e) Berechnungsbeispiele.

α) Ein Viertakt-Flugmotor mit 110 mm Zylinderbohrung und 115 mm Hub besitze Kolben von 1100 g und Pleuel von 670 g Gewicht. Der Schwerpunktsabstand des Pleuels, vom kleinen Auge aus gemessen, betrage 129 mm bei einer gesamten Pleuellänge zwischen den Augenmitten von 200 mm. Die Lebensdauer des Pleuellagers soll für Dauerbetrieb bei 0,5 at Überladung, Verdichtung 1:7,0, $p_{mi} = 16{,}6$ kg/cm² und $p_{max} = 63{,}8$ kg/cm², vgl. pV-Diagramm Bild 7, Drehzahl 4000 U/min, mindestens 200 h betragen.

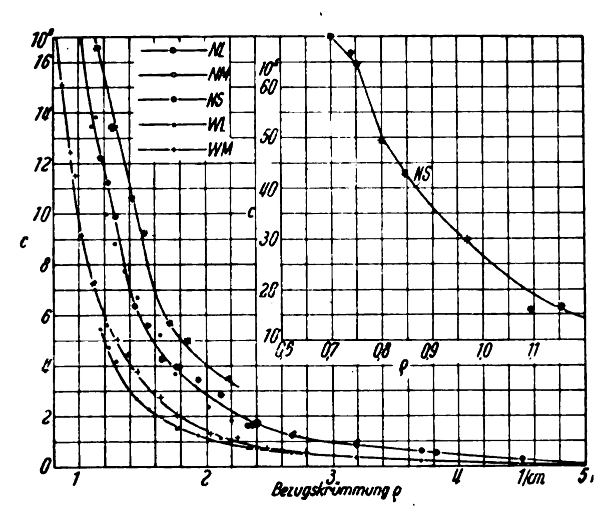


Bild 11. Lagerkennzahl c in Abhängigkeit von den Schmiegungsverhältnissen, ermittelt aus den Tragfähigkeitszahlen der handelsüblichen Lager.

Das Schubstangenverhältnis ist $\lambda = \frac{r}{l} = 0{,}2875$. Wir benützen ohne großen Fehler die in den Zahlentafeln enthaltenen Unterlagen für $\lambda = 0{,}3$.

Die umlaufenden Massen ergeben sich zu $m_u = 0{,}441 \cdot 10^{-3}$ kg s²/cm, die hin- und hergehenden zu $m_o + m_k = 1{,}365 \cdot 10^{-3}$ kg s²/cm.

Damit ergibt sich $\varepsilon = \frac{m_u}{m_0 + m_K} = 0{,}323$.

Bei einer Kolbenfläche $f = 95$ cm² ist $a = \frac{m_K + m_0}{f} = 1{,}438 \cdot 10^{-}$ kg/s²/cm² und $a r \omega^2 = 14{,}5$ kg/cm². Interpoliert man in Zahlentafel 8 zwischen den K'-Werten für

$$\varepsilon = 0{,}2 \text{ und } \varepsilon = 0{,}4,$$

so erhält man für $\varepsilon = 0{,}323{:}\, K' = 19658$.

Bei einem Zapfendurchmesser von 70 mm werde die Rollengröße 10 × 10 mm mit 9 mm tragender Länge gewählt. Die Bezugskrümmung beträgt hierbei $\frac{1}{r} = 2{,}286$. Nach Bild 11 ergibt sich aus der Kurve $NL: c = 2{,}0 \cdot 10^6$. Mit drei Reihen von je $z = 20$ Rollen erhält man nach Gl. (6.05)

$$h = 670 \text{ Stunden.}$$

β) Der Motor von Beispiel α werde unter Beibehaltung der Hauptkennwerte als V-Motor mit 60° Zylinderwinkel gebaut. Es ist die Lebensdauer des Hauptpleuels zu bestimmen, wobei der als umlaufend betrachtete Massenanteil des Hauptpleuels mit $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg s²/cm etwas höher, beim Nebenpleuel mit $0{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg s²/cm niedriger als beim einreihigen Motor sei; $a r \omega^2$ betrage wieder 14,5. Hiermit ist

$$\varepsilon_H = 0{,}366$$
$$\varepsilon_N = 0{,}22$$

und

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_N = 0{,}586.$$

Hierfür ist nach Zahlentafel 11 $K' \simeq 80000$ und damit die Lebensdauer desselben Lagers gemäß Gl. (6.05) $h = 164$ h. Die Lagerung muß also in diesem Fall verstärkt werden. Durch Vergrößerung des Rollendurchmessers auf 11 mm bei 10 mm tragender Länge ist mit $c = 2{,}5 \cdot 10^6$ für $\frac{1}{r} = 2{,}1$

$$h = 280 \text{ Stunden.}$$

7. Zusammenfassung.

Ausgehend von den Beanspruchungen der Laufbahnen durch die unter wechselnden Drücken über sie hinwegrollenden Wälzkörper wurde ein Berechnungsverfahren entwickelt, das auch unter den verwickelten Belastungs- und Bewegungsverhältnissen von Pleuelrollenlagern anwendbar ist. Durch weitgehende Vertafelung von Hilfsgrößen wurde das Verfahren für die praktische Berechnung von Pleuelrollenlagern stark vereinfacht. Mit Rücksicht auf diese Vereinfachung wurde zunächst für jedes Arbeitsverfahren nur ein Verbrennungsdruckverlauf, und zwar etwa dem Vollastbetrieb neuzeitlicher Flugmotoren entsprechend, in die Hilfstafeln aufgenommen.

Die vereinfachte Gleichung für die Lebensdauer eines Rollenlagers in Betriebsstunden lautet dann

Zahlentafel 14. Lagerkennzahl c aus Versuchen mit einzelnen Rollen. (Das negative Vorzeichen bei den Laufbahndurchmessern bedeutet Krümmungsmittelpunkt außerhalb des Körpers, d. h. Anschmiegung an die Rolle.)

Laufbahndurchmesser mm	Rollendurchmesser mm	Bezugskrümmung $\frac{1}{cm}$	Belastung je 1 mm tragende Rollenlänge kg/mm	L_e 10^6 Lastwechsel	c 10^6	$\eta \cdot c$ 10^6	Härte der Laufbahn RC
∞	10	2,0	180	min 32 mittel 90 max > 160	186,5 524 > 933	52	63 bis 64
— 25	20	0,2	250	min 85,8 mittel 213 max 322,4	1340 3330 5060	333	62 bis 63
— 40	20	0,5	250	min 96 mittel 126 max 168,1	1500 1970 2620	197	62 bis 63
— 40	20	0,5	350	min 38 mittel 48 max 58	1630 2060 2480	206	62 bis 63
— 100	20	0,8	250	min 78,6 mittel 91,8 max 105	1230 1435 1640	143	62 bis 63

$$h = 1624 \frac{(D + d)\, z^2\, l_t^3}{D\, n} \cdot \frac{c}{K} \text{ Stunden.}$$

Hierbei bedeutet:

D [mm] Durchmesser der äußeren Rollenlaufbahn,
d [mm] Durchmesser der inneren Rollenlaufbahn,
z Rollenzahl einer Rollenreihe,
l_t [mm] tragende Rollenlänge sämtlicher Rollenreihen zusammen,
n [U/min] Drehzahl der Kurbelwelle,
c von den Schmiegungsverhältnissen abhängige Lagerkennzahl nach Bild 11,
$K = f^3 K'$, wobei f Kolbenfläche in cm², K' aus Zahlentafel 8 für Hauptpleuel einreihiger Viertaktmotoren und Nebenpleuel sämtlicher Bauarten, Zahlentafel 9 für einreihige Zweitaktmotoren, Zahlentafel 11 für Hauptpleuel von V-Motoren mit 60° Zylinderwinkel. Bei Wegfall der Gaskräfte, d. h. bei reiner Massenkraftbelastung, ist für
$\lambda = 0{,}3$,
$K' = 2\,\pi\, a^3\, r^3\, \omega^6\, (0{,}404 + 1{,}318\, \varepsilon + 1{,}584\, \varepsilon^2 + \varepsilon^3)$,
$\varepsilon = \frac{m_u}{m_K + m_0}$ ist das Verhältnis der umlaufenden zu den hin- und herlaufenden Massen,
$a = \frac{m_0 + m_K}{f}$ [kg s²/cm³] ist der auf die Kolbenfläche bezogene Anteil der hin- und hergehenden Massen,
r [cm] ist der Kurbelhalbmesser.

Für ruhend belastete, nicht geschleuderte Lager mit sich drehendem Innenring ist

$K = \frac{4}{3} Q^3$, wobei Q die ruhende Lagerbelastung ist.

Je nach den Einbau- und Betriebsverhältnissen überwiegt der Einfluß der Gasdrücke oder der Einfluß der Massenkräfte auf die höchsten Beanspruchungen. Dementsprechend ist die Ermüdung der Rollenlaufbahn am äußeren Teil des Kurbelzapfens oder auf der Innenseite zu erwarten. Herrscht der Einfluß der Gasdrücke vor, so ist die Reihenfolge der einzelnen Arbeitsverfahren nach der Größe der Pleuelbeanspruchungen geordnet und beginnend bei dem höchstbeanspruchten Fall folgendermaßen:

Zweitaktmotor—Viertaktmotor—Triebwerk ohne Gaskräfte.

Wenn die Massenkräfte vorherrschen, ist die Reihenfolge umgekehrt:

Triebwerk ohne Gaskräfte—Viertaktmotor—Zweitaktmotor.

Während alle die Einflüsse auf die Lagerbeanspruchungen, die von der Bauart und den Betriebsbedingungen des Motors herrühren, durch die Beanspruchungskennzahl K eindeutig zu erfassen sind, läßt sich die durch die Größe c ausgedrückte Aufnahmefähigkeit von Rollenlagern für diese Beanspruchungen nur in sehr weiten Grenzen angeben. Dies liegt hauptsächlich in der bekannten großen Streuung der Lebensdauer von Wälzlagern begründet, die wieder teils auf Werkstoffeinflüsse bei der hohen Beanspruchung sehr kleiner Bezirke und teils auf die große Empfindlichkeit insbesondere von Zylinderrollenlagern gegenüber unvermeidlichen Abweichungen von den idealen Berührungs- und Abwälzverhältnissen zurückzuführen ist. Da allein wegen der Notwendigkeit eines Führungsspiels immer mit Verkürzungen der Berührungsfläche zwischen Rollen und Laufbahnen im wirklichen Lagerbetrieb gerechnet werden muß, ist man bis heute noch gezwungen, mit den Beanspruchungen weit unterhalb der bei vollkommen gleichmäßiger Rollenberührung erzielbaren Werte zu bleiben. Verminderung der Streuung und bessere Ausnutzung der verfügbaren Rollenlänge sind daher zur Steigerung der Tragfähigkeit, Lebensdauer und Betriebssicherheit von Rollenlagern für Flugmotoren unerläßlich.

8. Schrifttum.

[1] H. Stellrecht, Die Belastbarkeit der Wälzlager. Diss. T.H. Stuttgart 1928, S. 87.

[2] G. H. Neugebauer, Kräfte in den Triebwerken schnelllaufender Kolbenkraftmaschinen. Konstruktionsbücher Bd. 2, Berlin 1939.

[3] R. Janeway, Rapid calculation of bearing loads can be made with simplified forms. Autom. Ind. Bd. 64 (1931), Nr. 22/23, S. 831/837, 875/879.

[4] F. Nallinger, Einfluß moderner Flugmotorenkonstruktionen in Reihenbauart auf die Lagerausbildung. Luftwissen Bd. 3 (1936), S. 301.

[5] W. Jürgensmeyer, Die Wälzlager. Berlin 1937, S. 165 und 169.

[6] Die Tragfähigkeit von Wälzlagern bei hohen Belastungen oder niedrigen Drehzahlen. Z. Das Kugellager Bd. 15 (1940), H. 4, S. 50.

[7] W. Hampp, Bewegungsverhältnisse in Rollenlagern. Ing. Arch. Bd. 12 (1941), S. 6.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 16. Juni 1943 Lfg. 5

Wilhelm Hoff.



Am 7. Mai 1943 vollendete Wilhelm Hoff sein 60. Lebensjahr. Es bietet sich damit eine willkommene Gelegenheit, der großen Verdienste dieses Mannes um die deutsche Luftfahrtforschung hier zu gedenken; eine willkommene Gelegenheit besonders auch deshalb, weil Verdienste, wie Hoff sie aufzuweisen hat, leicht übersehen und für unbedeutend erachtet werden.

Als Wilhelm Hoff sich nach Abschluß seines Studiums im Jahre 1909 der Flugtechnik zuwandte, lag diese — besonders in Deutschland — noch in den allerersten Anfängen. Sie übte offenbar nur auf wenige Ingenieure einen stärkeren Anreiz aus, während die große Masse der Ingenieure uninteressiert oder sogar verächtlich auf dieses neue Gebiet herabsah, mit dem sich damals naturgemäß auch viele Laien und »Erfinder« mit mehr oder weniger guten Ingenieurkenntnissen und daher meist ohne Erfolg befaßten. Es gehörte sicherlich einiger Mut dazu, sich gerade dieses Fach als Arbeitsgebiet auszuwählen; nicht etwa nur deshalb, weil damals jeder Flugzeugkonstrukteur auch selbst Flieger war und sein mußte, sondern hauptsächlich, weil die Flugtechnik im Ansehen der übrigen Welt nicht gerade sehr hoch stand.

Wilhelm Hoff arbeitete zunächst in der Motorluftschiff-Studiengesellschaft in Berlin und bei Major v. Parseval, dem bekannten Erbauer von Pralluftschiffen. In diese Zeit fällt auch seine Ausbildung zum Freiballon- und Flugzeugführer (Flugzeugführerschein Nr. 41). Im Jahre 1911 übernahm Hoff eine Assistentenstelle an der Technischen Hochschule Aachen und führte als einer der ersten Deutschen wissenschaftliche Messungen am fliegenden Flugzeug durch, die in seiner Dr.-Ing.-Arbeit »Versuche an Doppeldeckern zur Bestimmung ihrer Eigengeschwindigkeit und Flugwinkel« niedergelegt sind (Jb. der WGL 1912/13).

Wer es persönlich erlebt hat, welche großen Schwierigkeiten noch im Jahre 1924 selbst die einfachsten Flugmessungen bereiteten, kann einigermaßen ermessen, wie groß diese Schwierigkeiten mehr als 10 Jahre früher gewesen sein müssen; die jungen Ingenieure von heute, denen viele schöne Flugmeßgeräte zur Auswahl angeboten werden und die über jederzeit startbereite Flugzeuge verfügen, können dies kaum noch verstehen.

Am 1. April 1913 wurde Wilhelm Hoff die Leitung der Flugzeug-Abteilung in der 1912 gegründeten Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Berlin-Adlershof anvertraut. Er widmete dieser Anstalt dann, nur unterbrochen durch die Teilnahme am ersten Weltkrieg, seine ganze Arbeitskraft bis zum Jahre 1936.

Bei Beginn des ersten Weltkrieges eilten Hoff und mit ihm alle jungen Jahrgänge zu den Waffen. Die Folge war, daß die Arbeiten der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (ebenso wie diejenigen der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen) praktisch eingestellt wurden. Das wäre nicht schlimm gewesen, wenn sich die Hoffnungen auf ein schnelles Kriegsende erfüllt hätten; als die Aussichten darauf mehr und mehr schwanden und die Notwendigkeit weiterer Forschungsarbeit, gerade auf dem Gebiete des Flugwesens, klar erkannt wurde, war wertvolle Zeit verloren und leider auch mancher fähige Mitarbeiter der Luftfahrtforschung vor dem Feind gefallen. Es ist erfreulich, feststellen zu können, daß dieser Fehler bei Beginn des zweiten Weltkrieges nicht wiederholt wurde.

Nachdem Hoff im ersten Kriegsjahre als Werftoffizier bei Fliegerabteilungen und an verschiedenen technischen Stellen des westlichen Kriegsschauplatzes sich betätigt hatte, kam er 1915 wieder nach Adlershof, und zwar zunächst als Leiter der Flugzeugabteilung der Prüfanstalt und Werft der Fliegertruppen, dann als technischer Offizier im Stabe der Flugzeugmeisterei und im letzten Kriegsjahr als Führer der Flugzeugversuchsabteilung der Flugzeugmeisterei. Erst im Jahre 1919 konnte Hoff zur DVL zurückkehren, deren Leitung ihm dann 1920 übertragen wurde.

Die Leitung einer Luftfahrtversuchsanstalt war in dieser unglücklichen Zeit, wo alles, was nur mit Luftfahrt oder gar Luftwaffe zu tun hatte, zerschlagen werden mußte, sicherlich keine leichte Aufgabe. Das Personal und die Haushaltsmittel waren auf ein Minimum zusammengeschrumpft, mit dem kaum nennenswerte Arbeit geleistet werden konnte. Es kam damals nur darauf an, die Tradition nicht ganz abreißen zu lassen und das Gelände und die Baulichkeiten in Adlershof fest in der Hand zu behalten, bis bessere Zeiten kamen. Diese konnten aber erst nach Überwindung der Inflation erwartet werden.

In den Jahren 1924 bis 1928 erfolgte nun eine ansehnliche Entwicklung der DVL, die in erster Linie Wilhem Hoff und seiner weitsichtigen Planung zu danken ist. Das Hauptverdienst sehe ich dabei darin, daß er eine große Zahl tüchtiger Ingenieure und Wissenschaftler in der DVL vereinigte und ihnen Anregungen zu wichtigen Arbeiten gab oder sie nach eigenem Ermessen forschen ließ. Daß diese Anregungen

bei dem ständig wachsenden Umfang der Anstalt und der damit für den Leiter verbundenen Arbeitslast immer spärlicher werden mußten, hat niemand mehr bedauert als Hoff selbst. Mit dem Verzicht auf eigene wissenschaftliche Arbeit wird von manchem Leiter eines großen Institutes ein schwer zu ertragendes Opfer gefordert, das nur von wenigen erkannt und gewürdigt wird und nur ganz selten Dank und Anerkennung einbringt.

Wer sich einmal die Mühe macht, festzustellen, wie viele der heute in wichtigen Stellungen der Industrie, der Hochschulen und der Forschungsanstalten sitzenden Persönlichkeiten in den Jahren 1924 bis 1933 durch die DVL gegangen sind, wird über die große Zahl erstaunt sein. Bei vielen von ihnen kann Wilhelm Hoff sich das Verdienst zuschreiben, sie für die Luftfahrt und die Luftfahrtforschung gewonnen zu haben. Es muß in diesem Zusammenhang auch erwähnt werden, daß die DVL ihren Personalbestand in der wirtschaftlich schwierigen Zeit von 1928 bis 1933 kaum zu verringern brauchte und daß sie bei dem gewaltigen Ausbau nach 1933 trotz eigenen großen Bedarfs eine beträchtliche Zahl von Mitarbeitern anderen Luftfahrtstellen überlassen konnte. Es ist sicherlich keine Übertreibung, wenn ich hier feststelle, daß der Neuaufbau der deutschen Luftfahrtindustrie und die Schaffung der neuen deutschen Luftwaffe der vorausschauenden Arbeit und Planung der DVL in den Jahren 1924 bis 1933 sehr viel verdankt. Der Vorteil, daß es damals in Deutschland viele Arbeitslose gab und infolgedessen tüchtige Arbeitskräfte ohne besondere Mühe zu finden waren, wird reichlich aufgewogen durch die Schwierigkeiten der allgemeinen Wirtschaftslage und diejenigen des parlamentarischen Systems. Wir können es uns heute kaum noch vorstellen, daß aus allen Fraktionen des Reichstages zusammengesetzte, fachlich keineswegs sachkundige Kommissionen über den Haushalt der DVL und ihre Neubaupläne zu beschließen hatten und deshalb durch geschickte Verhandlungen, Besichtigungen und dergleichen bei guter Laune erhalten werden mußten. Daß die DVL diese Zeit so standhaft überdauerte und den großen Anforderungen nach 1933 sich gewachsen zeigte, ist zu einem großen Teil das Verdienst von Wilhelm Hoff.

Neben seiner starken Beanspruchung durch die DVL hat sich Wilhelm Hoff, der im Jahre 1923 auf den neugeschaffenen Lehrstuhl für Luftfahrtwesen an der Technischen Hochschule Berlin berufen wurde, noch dem Unterricht der Luftfahrt-Studierenden mit viel Erfolg gewidmet. Auch bei dieser Arbeit handelte es sich darum, Neuland zu bestellen, da es ein richtiges Luftfahrt-Studium damals ja noch nicht gab. Die Schwierigkeiten waren recht groß, namentlich auch wegen der geringen zur Verfügung stehenden Mittel, die den Bau eines besonderen Luftfahrtinstitutes für Lehrzwecke nicht zuließen. Als Hoff sich im Jahre 1936 entschloß, seine Tätigkeit in der DVL jüngeren Kräften zu überlassen, und sich ganz der Hochschultätigkeit zuwandte, sollten die lange gehegten Pläne eines Luftfahrt-Institutes für die Berliner Hochschule endlich verwirklicht werden. Durch die Einbeziehung dieses Planes in den gewaltigen Bauplan der Berliner Hochschulstadt wurde der Baubeginn leider bis zum Kriegsausbruch verzögert und der Bau dann ganz zurückgestellt, eine für die Berliner Hochschule und für Wilhelm Hoff gleichermaßen bedauerliche Auswirkung des gegenwärtigen Krieges.

Wenn Wilhelm Hoff jetzt das 6. Jahrzehnt seines Lebens vollendet, so vereinigen sich alle diejenigen, die unter seiner Leitung in der DVL gearbeitet haben — als deren Sprecher ich mich fühle —, mit den vielen Ingenieuren, die seine Vorlesungen und Übungen an der TH Berlin gehört haben, in dem Wunsche, daß er den Aufbau und die Vollendung des neuen Hochschulinstitutes und den Beginn neuer Arbeit darin nach siegreichem Abschluß dieses Krieges noch tätig miterleben möge. Sie alle geben zugleich ihrer Dankbarkeit Ausdruck für die vielfältige Anleitung und Betreuung bei der Arbeit und nicht zuletzt auch für die stets warmherzige menschliche Anteilnahme, auf die man bei Hoff in allen Anliegen persönlicher Art immer rechnen konnte. H. Blenk.

Messungen an kleinen schwingenden Flächen.

Von E. v. Holst, Universität Göttingen.

Es wird ein Verfahren entwickelt, das an kleinen schwingenden Flächen (Größenordnung des Insektenflügels) Richtung und Größe der auftretenden Luftkräfte sowie die jeweils benötigten Leistungen zu messen gestattet. Die Messungen werden (an einem elliptischen, leicht gewölbten Flügel mit scharfer Vorderkante) unter Variierung der Amplitude der (mit der Schlagschwingung kombinierten) Drehschwingung, der mittleren Einstellung des Flügels innerhalb der Schlagebene, der Stellung der Schlagebene zur Anströmrichtung, des Fortschrittgrades u. a. durchgeführt. Die Meßergebnisse werden nach für Luftschraubenmessungen üblichen Verfahren ausgewertet sowie Wirkungsgrade und »Standschub«gütegrade angegeben. Dabei treten u. a. die grundsätzlichen Besonderheiten des Schwingenfluges (Vereinigung von Vor- und Auftriebsorgan) gegenüber den üblichen Flugverfahren (Trennung von Vor- und Auftriebsorgan) trotz der geringen Re-Zahlen deutlich zutage.

Gliederung.

A. Problemlage.

Das umfangreiche, auch gegenwärtig immer ansteigende Schrifttum über den Schwingenflug enthält neben mannigfachen Spekulationen, Projekten, Thesen und theoretischen Ansätzen nur wenig Versuchsangaben, die mehr erkennen lassen als oft sehr hoch gespannte Wünsche und Erwartungen ihrer Verfasser. Eine systematische Prüfung der auftretenden Luftkräfte und der erreichbaren Wirkungsgrade bei Flächen, die eine kombinierte Schlag- und Drehschwingung ausführen, eine genaue Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Parameter, wie der Drehschwingungsamplitude, des Winkels zwischen Anströmung und Schlagebene, zwischen Schlagebene und mittlerer Flächenstellung usw., fehlen offenbar völlig. Das hat wohl kaum seinen Grund in mangelndem Interesse, sondern eher in den erheblichen technischen Hindernissen, die sich hier der Gewinnung exakter Ergebnisse entgegenstellen.

Der vorliegende Beitrag möchte als ein erster Schritt zur Beseitigung der Kenntnislücke auf diesem bemerkenswerten Gebiet gewertet sein, das auch zum heutigen Motorflug verschiedene Berührungspunkte bietet. Er geht von biologischen und aerodynamischen Betrachtungen aus, die der Verf. gemeinsam mit D. Küchemann an anderer Stelle mitgeteilt hat[1], sowie von Untersuchungen an frei fliegenden Schwingenflugmodellen und an zahlreichen Überzeitlupenfilmen fliegender Insekten. Diese Experimente führten zum Ergebnis, daß zwar die bloße Nachahmung des tierischen Schwingenfluges — mindestens heutigentags — kein erstrebenswertes Ziel sein kann, seine Erforschung im einzelnen aber, neben der rein theoretischen Bedeutung, doch unerwartete aerodynamische und technische Anregungen zu geben vermag, die auch für die heutige Flugtechnik Gewicht erlangen können. (Über solche Ergebnisse ist an anderer Stelle berichtet worden.)

Um nun zu einem tieferen Verständnis der tierischen Flugverfahren zu gelangen, erwies es sich als notwendig, die biologischen Beobachtungen und Versuche durch exakte Messungen an schwingenden Flügeln nachzuprüfen und zu erweitern. Aus diesem Grunde sind die vorliegenden Messungen zunächst, in Anpassung an die Verhältnisse bei den Insekten, mit sehr kleinen Flächen und bei niedrigen *Re*-Zahlen ausgeführt worden. Von einer näheren Bezugnahme auf für die Schwingenbewegung entwickelte theoretische Vorstellungen ist in dieser Mitteilung, die rein experimentellen Charakter hat, abgesehen worden.

B. Methode.

In Vorversuchen mit verschiedenen Meßanordnungen erwies sich das folgende Verfahren als geeignet (Bild 1a und b): Der zu untersuchende Flügel *1* sitzt mit einem kleinen hohlen Stiel fest auf einem Hebel *2*, der senkrecht zu seiner Längsachse schwenkbar (Schlagschwingung) und zugleich um seine Längsachse drehbar ist (Drehschwingung, Anstellwinkelschwingung). Schwenkung und Drehung werden durch zwei Schubstangen *3*, *4* gesteuert, die an ihrem anderen Ende einer umlaufenden Welle *5* exzentrisch aufsitzen, und zwar so, daß Dreh- und Schlagbewegung gegeneinander um 90° phasenverschoben sind. Die Welle ist in ihrem Lager vor- und zurückschiebbar und so geformt, daß sich durch diese Verschiebung die Amplitude der Drehschwingung zwischen 0 und 150° beliebig verstellen läßt, während die Schlagschwingung unverändert ihre Größe (68°) beibehält. Das ganze Getriebe (mit Ausnahme der dickeren umlaufenden Welle) ist aus 0,2 mm Stahldraht unter der Lupe hergestellt. Nähere Einzelheiten sind aus Bild 2 zu entnehmen. Das Getriebe wird von einem langen Hebelarm (Bild 1, 6) getragen, der, an seinem unteren Ende durch Gegengewicht *7* ausbalanziert und mit Öldämpfung *8* versehen, an einem straff gespannten 0,1 mm-Stahlfaden *9* reibungsfrei schwingbar aufgehängt ist. Der Flügel wird durch eine lange elastische Welle *10* (0,2-mm-Stahldraht), über die Welle *5* und die beiden Schubstangen *3*, *4* in Bewegung versetzt. Diejenige Komponente der entstehenden Luftkraft, die senkrecht auf der durch den langen Hebelarm und die Aufhängefäden gebildeten Ebene steht, bewirkt ein Herausschwenken des Hebelarms *6* aus seiner 0-Lage (Betrachtung des Zeigers *11* vor dem Spiegel *12*), durch entgegengesetzte Anspannung einer geeichten Feder *13* wird die 0-Stellung wieder hergestellt und die Kraft gemessen. Da das ganze obere Getriebe (mitsamt Flügel) um die umlaufende Achse herum schwenkbar ist (Drehung des Schwenkkopfes *14*), so können nacheinander Vortrieb und Auftrieb mit der gleichen Meßfeder festgestellt werden.

Zur Ermittlung des jeweils erforderlichen Drehmomentes ist zwischen das mit dem antreibenden Motor fest gekoppelte Laufrad *15* und die elastische Welle *10* eine Flüssigkeit mit höherer innerer Reibung (Öl), die zur Kraftmessung ausgenutzt wird, eingeschaltet. Der Achse *16*, die das Laufrad trägt, sitzt ein mit Öl gefülltes Glasrohr *17* auf, in dessen

[1] v. Holst und Küchemann, Naturwissenschaften (1941), S. 348—362; Küchemann und v. Holst, Luftwissen Bd. 8 (1941), Nr. 9, S. 1—6.

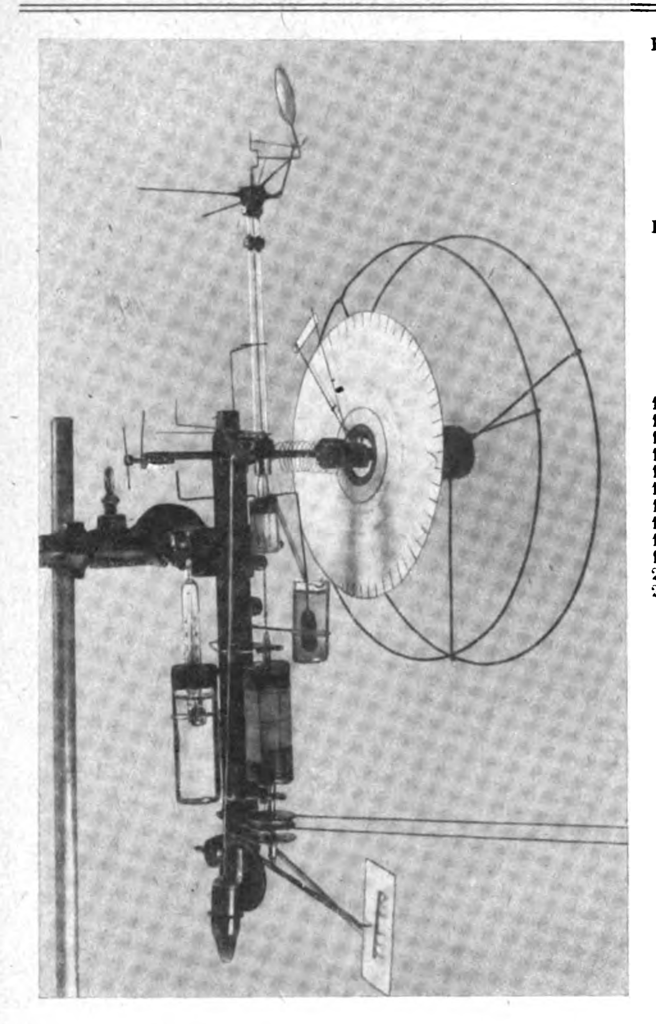


Bild 1a (links). Versuchsanordnung.

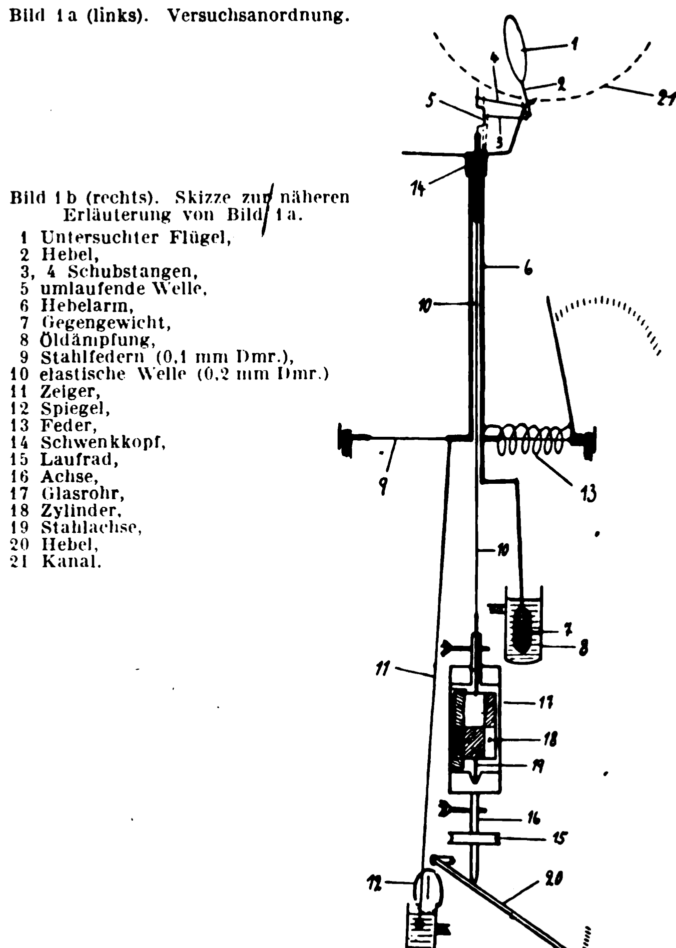


Bild 1b (rechts). Skizze zur näheren Erläuterung von Bild 1a.

1 Untersuchter Flügel,
2 Hebel,
3, 4 Schubstangen,
5 umlaufende Welle,
6 Hebelarm,
7 Gegengewicht,
8 Öldämpfung,
9 Stahlfedern (0,1 mm Dmr.),
10 elastische Welle (0,2 mm Dmr.)
11 Zeiger,
12 Spiegel,
13 Feder,
14 Schwenkkopf,
15 Laufrad,
16 Achse,
17 Glasrohr,
18 Zylinder,
19 Stahlachse,
20 Hebel,
21 Kanal.

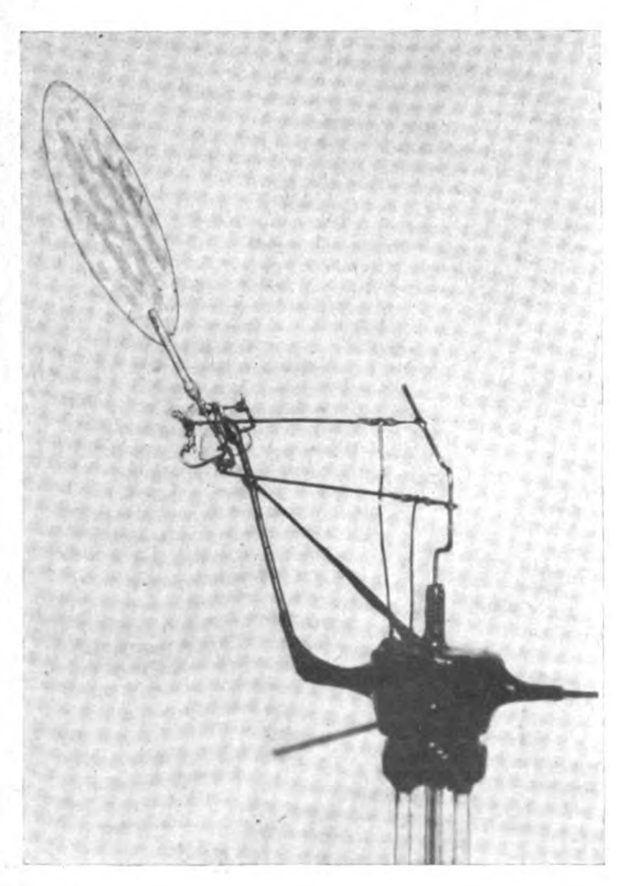


Bild 2a (links). Getriebe und Flügel.

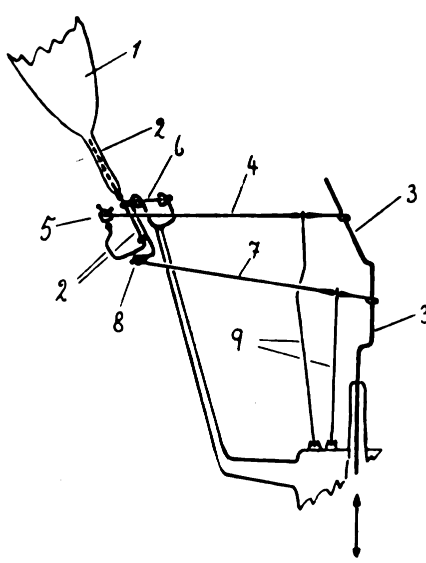


Bild 2b. Skizze zur Erläuterung von Bild 2a.
Der Flügel 1 sitzt auf einem um seine Längsachse drehbar gelagerten Hebel 2. Die Drehung wird von der rotierenden Kurbel 3 durch die Schubstange 4 über das Kardangelenk 5 übertragen. Das Lager des Hebels 2 ist selbst ein um die Achse 6 schwenkbarer Hebelarm 8, dessen Bewegung von der Kurbel 3 über die Schubstange 7 vermittelt wird. Die an ihren Enden gelenkig befestigten Haltestangen 9 verhindern ein Auf- und Abgleiten der Schubstangen 4 und 7 auf der Kurbel 3. Diese ist selbst in ihrem Lager im Sinne des Pfeiles verschiebbar.

Innerem sich ein kleiner, genau zentrierter Zylinder *18* befindet, dessen Außenwand von der Innenwand des Glasrohres einen Abstand von ungefähr 1,5 mm hat. Der Zylinder sitzt fest auf einer Stahlachse *19*, die unten, spitz zulaufend, in einem Glaslager, oben, am Ausgang des Glasrohres, in einem ebenfalls gläsernen Achsenlager liegt. Die Zylinderachse setzt sich nach oben in die elastische Welle fort.

Diese »visköse Koppelung« zwischen Glasrohr und Zylinder bewirkt, daß letzterer mit Ansteigen des benötigten Drehmomentes in der Bewegung zunehmend gegen ersteres zurückbleibt. Die Beziehung zwischen Drehmoment und Relativgeschwindigkeit des Zylinders im Rohr wird durch eine Eichmessung ermittelt; die Eichtemperatur wird auch in allen Meßreihen beibehalten, da die innere Reibung des Öles temperaturabhängig ist.

Um eine leichte Ablesung der Relativgeschwindigkeit und damit des Drehmomentes zu ermöglichen, während das ganze System umläuft, ist das Glasrohr nur bis zur Hälfte seines Gesamtumfanges durchsichtig gelassen, auf der anderen Hälfte mit blauer Deckfarbe gestrichen, während der Zylinder in seiner oberen Hälfte auf der einen Seite blau, auf der anderen gelb und in seiner unteren Hälfte auf der oben blauen Seite gelb und auf der anderen blau angemalt ist. Die Wirkung dieser Bemalung ist, wie leicht einzusehen, ein Farbspiel: wenn beide, das Glasrohr und der Zylinder, umlaufen und zwischen ihnen außerdem eine Relativbewegung stattfindet, dann erscheint das Glasrohr (je nach der jeweiligen Stellung des Zylinders in ihm) abwechselnd in seiner oberen Hälfte blau, in seiner unteren weiß und umgekehrt. Zweimaliger Wechsel der Farben (mit der Stoppuhr leicht meßbar) bedeutet einmaligen Umlauf des Zylinders im Rohr um 360°.

Die Achse, die Laufrad und Glasrohr und damit Zylinder, elastische Welle und feste Welle trägt, liegt unten einem Hebel *20* auf, dessen Bewegung das ganze System anhebt und senkt, wodurch die Einstellung einer beliebigen Drehschwingungsamplitude möglich ist, während der Flügel schwingt.

Zur übrigen Methodik ist noch kurz zu sagen: Antrieb durch Elektromotor über ein mittels elastischer Welle angekoppeltes Schwungrad, das kleine Frequenzschwankungen ausgleicht; Frequenzeinstellung und -kontrolle mittels Stroboskop. Anströmung durch kleines Windgebläse von 6 cm Dmr.; der Stiel des schwingenden Flügels tritt nahe dem Drehpunkt durch ein Loch des Kanales *21* nach außen, Getriebe und Meßgerät befinden sich außerhalb des Strahles. Regelung der Windgeschwindigkeit durch Zentrifugalregler und vorgeschalteten Schiebewiderstand. Messung der Anströmung mittels Kleindruckwaage (nach Reichardt[2]))

C. Auswertung.

Die mit diesem Meßgerät gewonnenen Vor- und Auftriebswerte (abgelesen in mg) sind von erheblicher Genauigkeit; die mittlere Abweichung verschiedener Ablesungen (bei Konstanz der übrigen Faktoren, vor allem der Frequenz und Anströmung) liegt erheblich unter 1 mg; die gemessenen Werte bewegen sich um im Mittel etwa 20 mg. Eine geringfügige Korrektur ist nur bei den Angaben der Drehschwingungsamplitude erforderlich, die bei hohen Frequenzen (zumal bei kleiner Drehamplitude) infolge einer geringen Elastizität der verwendeten Fläche und einer ebenfalls geringfügigen Nachgiebigkeit der betreffenden Getriebeteile etwas größer ist, als der Eichwert angibt. Die Ermittlung des tatsächlichen Ausmaßes der Drehbewegung ist leicht durchführbar mit Hilfe der Überlegung, daß bei Fehlen von Anblasung und Flächendrehung der Vortrieb immer 0 sein muß; man kann folglich den tatsächlichen 0-Punkt der Drehamplitude finden, indem man die gemessenen Schübe S über der Anstellwinkelschwingung aufträgt und die entstehende Kurve nach $S = 0$ verlängert.

Weniger einfach ist die Auswertung der benötigten Drehmomentendaten (abgelesen in mgcm), da in ihnen außer dem zur Erzeugung der Luftbewegung erforderlichen Anteil noch ein weiterer steckt, der die Reibung in den einzelnen Gliedern des Getriebes zu überwinden hat. Dieser zu eliminierende Reibungsanteil besteht seinerseits aus zwei verschiedenen Komponenten: die erste hängt von der Größe der bewegten Massen — sowohl der Getriebeteile selbst als auch des Flügels — ab, die ja unter ständigem Richtungswechsel beschleunigt werden, was (ohne selbst Arbeit zu erfordern) die Gelenke belastet und Reibungskräfte in ihnen erzeugt. Die zweite Komponente entsteht aus derjenigen Belastung der Getriebeteile, die auch bei völlig »masselos« gedachtem Getriebe und Flügel noch infolge der erzeugten Luftkräfte auftreten müßte. Von diesen zwei Reibungskomponenten läßt sich die erste experimentell ermitteln: Die reine Getriebereibung wird durch »Leerlauf«-Versuche (ohne Flügel) festgestellt, der Einfluß des Flügelgewichts durch Messungen an verschiedenen Flügeln, die sich allein durch ihr Gewicht unterscheiden. Trägt man die dabei gewonnenen Momentenwerte über dem jeweiligen Flügelgewicht auf, so erhält man eine nahezu geradlinige Kurve, deren Extrapolation auf $g = 0$ jenen Momentenwert ergibt, der der Bewegung eines gewichtlosen Flügels entspricht.

Die zweite Reibungskomponente, die auch beim auf diese Weise »masselos« gemachten Getriebe und Flügel noch übrigbleibt und die vom Ausmaß der jeweils erzeugten Luftbewegung abhängt, läßt sich nur abschätzen. Man kann dazu die Überlegung heranziehen, daß etwa die gleiche Getriebereibung entstehen muß, wenn eine bestimmte mittlere Belastung durch eine (statt des Flügels) schwingende Masse oder durch einen »masselosen«, Luftkräfte erzeugenden Flügel verursacht wird. Durch Messungen mit an Stelle des Flügels schwingenden kleinen Gewichten läßt sich deren Einfluß auf die Reibung ermitteln; die hierbei auf den gewichttragenden Hebelarm ausgeübte Kraft ist aus den bekannten Daten (Masse, Hebelarm, Schlagwinkel, Frequenz) zu errechnen. Zwischen der errechneten »Massekraft« und der gemessenen, zur Überwindung der Massenreibung benötigten Kraft ergab sich das (im interessierenden Bereich annähernd frequenzunabhängige) Verhältnis von etwa 3:1. Auf der anderen Seite, im Falle des schwingenden »masselosen« Flügels steckt in der gemessenen aufgewendeten Kraft sowohl der Belastungsanteil (durch erzeugte Luftbewegungen) als auch der hierdurch bedingte Reibungsanteil. Wir können daher folgern, daß auch das Verhältnis dieser beiden Anteile etwa 3:1 betragen wird, die gemessenen Werte folglich noch um $1/4$ zu verkleinern sind. Allerdings wäre eine solche Korrektur deshalb nicht genau, weil die Belastungsmaxima und -minima im Fall der »Massen«- und »Luftkraft«-belastung an verschiedenen Punkten der Schwingungsperiode liegen werden (Phasenverschiebung), weshalb die Reibung in beiden Fällen, auch bei übereinstimmender m i t t l e r e r Getriebebelastung, doch differieren könnte. Aus diesem Grunde ist in den folgenden Angaben die »Luftkraftgetriebereibung« nicht eliminiert; die benötigten Drehmomente sind deshalb überall um etwa $1/4$ zu groß, die Wirkungsgrade um ebensoviel zu klein angegeben.

Die hier mitgeteilten Messungen sind an aus Balsaholz dünn geschliffenen, leicht gewölbten Flügeln von elliptischer Form ausgeführt, Bild 3, da es sich zeigte, daß natürliche Insektenflügel (die ja nach Abtrennung vom lebenden Insekt schnell austrocknen und einen Teil ihrer Elastizität verlieren) bei langen Meßreihen ihre Beschaffenheit ändern und schließlich brüchig werden.

Die verschiedenen durchgemessenen Stellungen des Flügels zur Schlagebene und zur Anströmung sind aus Bild 4 ersichtlich. In jedem Falle wurde mit Windgeschwindigkeit v von 0, 50 und 100 cm/s angeblasen und in jeder dieser drei Meßserien die Schlagfrequenz $n = 10$, 15, 20 und 25 in 1 s, und zwar bei sechs verschiedenen Drehschwingungsamplituden ($\chi = 0$, 14, 35, 70, 100, 140°) und gleichbleibender Schlagamplitude ($\varphi = 68°$) durchgemessen.

Der Bereich der Re-Zahlen ist bei solchen Versuchsbedingungen sehr niedrig: Die $Re = \frac{u \cdot lm}{\nu}$ beträgt z. B.

[2]) Herr Dr. Reichardt, Kaiser-Wilhelms-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, stellte mir eines seiner Instrumente freundlicherweise zur Verfügung.

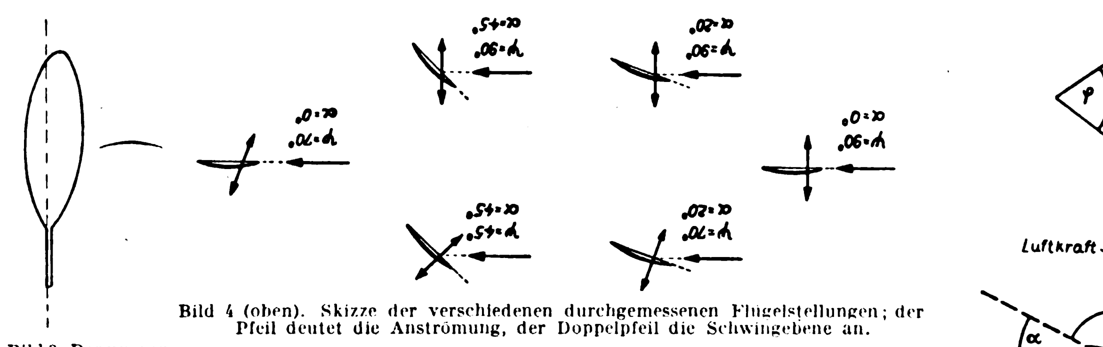


Bild 3. Der verwendete Flügel; gestrichelt die Drehachse, daneben d. »Profil«. Länge 3,2 cm, größte Tiefe 0,8 cm, Gewicht 19 mg.

Bild 4 (oben). Skizze der verschiedenen durchgemessenen Flügelstellungen; der Pfeil deutet die Anströmung, der Doppelpfeil die Schwingebene an.

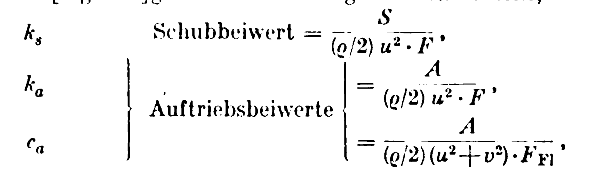
Bild 5a und b (rechts). Skizzen zur Erläuterung der verwendeten Bezeichnungen

bei fehlender Anströmung bis etwa 750, bei einem Fortschrittsgrad von 1 um ungefähr 1000.

Zu den Kurvenbildern ist noch zu bemerken: Die ermittelten Werte sind in der für Luftschrauben üblichen Weise dimensionslos gemacht, wobei im Schubbeiwert $k_s = \frac{S}{(\varrho/2)\, u^2 \cdot F}$ statt der konstanten Umfangsgeschwindigkeit hier die mittlere Umfangsgeschwindigkeit u des hin- und hergehenden Flügels, statt der umstrichenen Kreisfläche die während einer Schwingung überstrichene Fläche F eingesetzt ist. In gleicher Weise ist ein Auftriebsbeiwert $k_a = \frac{A}{(\varrho/2)\, u^2 \cdot F}$ gebildet und analog auch der Leistungsbeiwert $k_l = \frac{m}{(\varrho/2)\, u^3 \cdot F_s}$. Der Schubwirkungsgrad $\eta_s = \frac{k_s}{k_l} \cdot \lambda$ entspricht dem für den Propeller üblichen Wirkungsgrad; für den Standschub (Fehlen einer Anströmung) ist, ebenso wie bei Luftschraubenmessungen üblich, ein Gütegrad $\xi = k_s/(2\, k_l)^{2/3}$ angegeben (Bendemannscher Standgütegrad). Für den Auftrieb läßt sich ein Wirkungsgrad nicht definieren, da in dieser Richtung keine Bewegung erfolgt; man kann aber ein Vergleichsurteil gewinnen, indem man ihn mit dem Vortrieb in Beziehung setzt und eine »Gleitzahl« k_s/k_a definiert.

D. Verwendete Bezeichnungen (vgl. Bild 5a und b).

s [cm]	Flügellänge (Halbspannweite),
φ^0	Schlagwinkel,
F	Während einer Schwingung überstrichene Fläche $= 2\,\pi\, s^2 \cdot (\varphi/2\,\pi)$,
F_{Fl}	Flügelfläche,
ψ^0	Winkel zwischen Schwingebene (Schlagebene) und Anströmrichtung,
α^0	Winkel zwischen mittlerer Flächensehne (Nullstellung) und Anströmung,
τ^0	Winkel zwischen mittlerer Flächensehne und Schwingebene,
ϑ^0	Winkel zwischen erzeugter Luftkraft und Schwingebene,
χ^0	Amplitude der Drehschwingung,
n [1/s]	Schlagfrequenz,
v [cm/s]	Anströmgeschwindigkeit,
u	Umfangsgeschwindigkeit (mittlere Geschwindigkeit der Flügelspitze) $= 4\,\pi \cdot s \cdot \varphi/2\,\pi \cdot n$,
λ	Fortschrittgrad $= v/u$,
S [mg]	gemessener Schub (Vortrieb),
A [mg]	gemessener Auftrieb,
M [mg · cm]	gemessenes benötigtes Drehmoment,



k_s Schubbeiwert $= \frac{S}{(\varrho/2)\, u^2 \cdot F}$,

k_a, c_a Auftriebsbeiwerte $= \frac{A}{(\varrho/2)\, u^2 \cdot F}$, $= \frac{A}{(\varrho/2)\,(u^2+v^2) \cdot F_{Fl}}$,

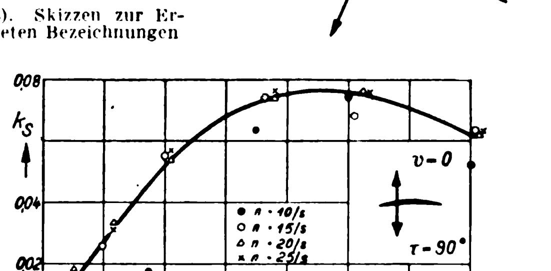


Bild 6. Schubbeiwerte in Abhängigkeit von der Drehschwingung; »Standschub«versuch.

k_l Leistungsbeiwert $= \frac{M}{(\varrho/2)\, u^3 \cdot F_s}$,

η_s Schubwirkungsgrad $= (k_s/k_l) \cdot \lambda$,

ξ Standschubgütegrad $= k_s/(2\, k_l)^{2/3}$.

E. Ergebnisse.

I. Anströmung senkrecht zur Schwingebene und parallel zum Flügel ($\psi = 90^0$, $\alpha = 0^0$).

Wenn man von Luftschraubenmessungen ausgeht, liegt die einfachste Schwingungsform vor, wenn sowohl die Anströmung als auch die Fläche in ihrer mittleren Stellung senkrecht auf der Schlagebene stehen. Denn bei dieser Bewegungsform treten ausschließlich Schübe auf (wenn wir von den geringen, durch die Flächenwölbung verursachten Auftrieben vorerst absehen, die sich nur bei kleinen Drehschwingungen bemerkbar machen).

Bild 6 zeigt zunächst die Schubbeiwerte k_s, aufgetragen über der Drehschwingung, für den Fall des »Standschubes«. Die bei verschiedenen Schlagfrequenzen gewonnenen Daten liegen gut zusammen (nur die kleinste Frequenz streut nach unten). Das Schubmaximum liegt bei der verhältnismäßig niedrigen Drehamplitude von $\chi = 90^0$.

Mit Dazutreten einer Anströmung (Bild 7a und b) ziehen sich die für verschiedene Frequenzen gemessenen Schübe zu getrennten Kurven auseinander, womit sich der Einfluß des Fortschrittsgrades bemerkbar macht. Man sieht ferner, daß die Schubmaxima, wie nicht anders zu erwarten, mit steigender Anblasung und sinkender Frequenz in die Gegend kleinerer Drehschwingungen rücken. Aus Bild 8 geht der Einfluß des Fortschrittsgrades λ noch deutlicher hervor. Die Schubbeiwerte fallen hier um so steiler nach 0 ab, je größer die Drehamplitude χ wird, eine Regel, von der nur die Kurve für kleinste Drehschwingung $\chi = 10^0$ eine gewisse Ausnahme macht (die möglicherweise mit der kleinen *Re*-Zahl in Zusammenhang steht).

Über die Beiwerte der aufzuwendenden Leistungen geben Bild 9a und b Aufschluß. Die nahezu auf einer Geraden liegenden Werte sinken mit steigender Drehamplitude χ um so steiler ab, je größer die Anströmung ist, ein Verhalten, das unmittelbar einleuchtet. Bei Auftragung über dem Fortschrittsgrad λ, Bild 10, erkennt man, daß der Leistungs-

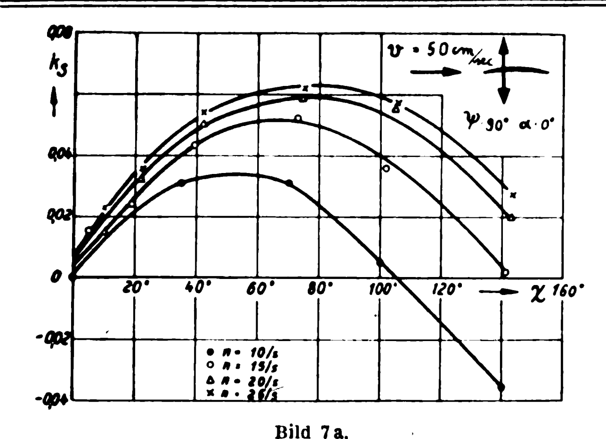


Bild 7 a.

Bild 7 a, b. Schubbeiwerte für verschiedene Frequenzen in Abhängigkeit von der Drehschwingung; Anströmung und Nullstellung des Flügels senkrecht zur Schwingebene.

beiwert k_l für $\chi \sim 50^0$ fortschrittsgradunabhängig ist, während er bei geringerem χ mit λ ansteigt, bei größerem χ dagegen mit λ absinkt.

Die Schubwirkungsgrade η_s, die sich damit ergeben, zeigt Bild 11; sie reichen maximal bis $\eta_s = 0{,}45$. Dazu ist jedoch erstens zu bemerken, daß die Werte bei Eliminierung der »Luftkraftreibung« im Getriebe um rd. ¼ steigen, also über 0,55 reichen würden; zweitens, daß der verwendete Flügel wegen seiner geringen Elastizität vom Ideal einer Schwinge bestimmt noch ziemlich weit entfernt ist. Denn ein solcher Flügel ist einem ebenen, nicht gewölbten und nicht verwundenen Propellerblatt vergleichbar. Erst eine ganz bestimmte, regulierbare Elastizität würde ihm in jeder Bewegungsphase die geeignete Wölbung und Steigung verleihen und damit den Wirkungsgrad wohl noch merklich verbessern. Daß Insekten über derartige Möglichkeiten einer regulierbaren Formgebung ihrer Flügel tatsächlich verfügen, sei an anderer Stelle näher beschrieben.

Bild 11 läßt erkennen, daß die Maxima der Wirkungsgrade bei um so höherem Fortschrittsgrad λ liegen, je geringer die Drehamplitude χ ist. Nur bei sehr kleinen Drehamplituden gehen die Kurvengipfel wieder etwas nach links zurück. Diese Tatsache und ebenso wohl auch das ziemlich steile Absinken der Wirkungsgradmaxima beiderseits von $\chi = 100^0$ mag irgendwie mit dem niedrigen Bereich der *Re*-Zahlen zusammenhängen. Rein theoretisch sind bei viel höheren als den hier gemessenen Fortschrittsgraden für eine Drehschwingung von $\chi = 0^0$ noch beträchtliche Schübe von gutem Wirkungsgrad zu erwarten[3]).

Im ganzen zeigen diese Ergebnisse, wie ähnlich die Verhältnisse hier denen der Luftschraube sind; daß diese Tatsache auch bei so kleinen *Re*-Zahlen noch zum Vorschein kommen würde, war durchaus nicht sicher vorauszusehen. Es wäre eine weitere Aufgabe, festzustellen, ob diese Übereinstimmung daher rührt, daß die Strömungsverhältnisse tatsächlich sehr ähnliche sind, oder ob sie **trotz** wesentlicher Unterschiede (laminare Strömung?) besteht.



[3]) Vgl. Küchemann und v. Holst, Fußnote 1.

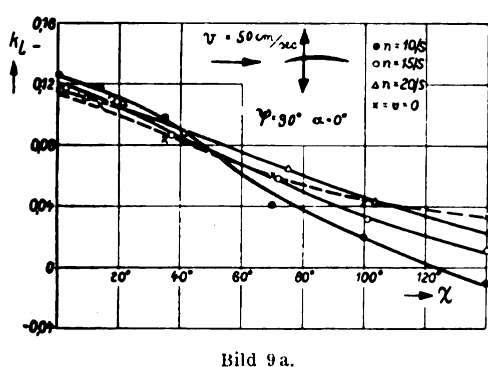


Bild 9 a.

Bild 9 a und b. Leistungsbeiwerte für verschiedene Frequenzen in Abhängigkeit von der Drehschwingung (Anordnung wie in Bild 7 a, b).

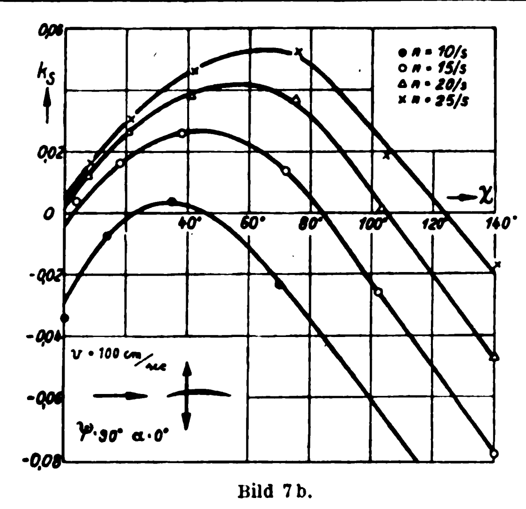


Bild 7 b.

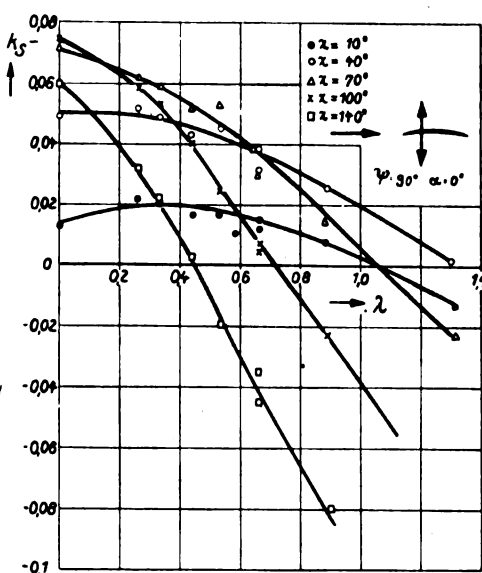


Bild 8. Schubbeiwerte für verschiedene Drehschwingungen in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad (Anordnung wie in Bild 7 a, b).

II. Anströmung schräg gegen die Schwingebene und den Flügel ($\psi < 90^0$, $\alpha > 0^0$).

Die eben besprochene Bewegungsform ist die einzige, bei der kein Auftrieb entsteht. Es genügt, entweder die Stellung des Flügels oder die der Schwingebene oder beides zugleich gegen die Anströmung zu ändern, um Auftriebskräfte zu erhalten, die jedoch in diesen drei Fällen sehr verschieden aussehen. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, daß das schwingende System unverändert bleibt und nur die Anströmung ihre Richtung ändert. Beträgt diese Richtungsänderung 20^0 (also $\psi = 70^0$, $\alpha = 20^0$), dann entsprechen die Schübe, wie nicht anders zu erwarten, noch weitgehend

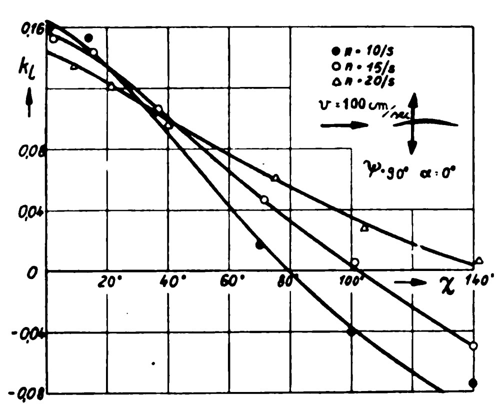


Bild 9 b.

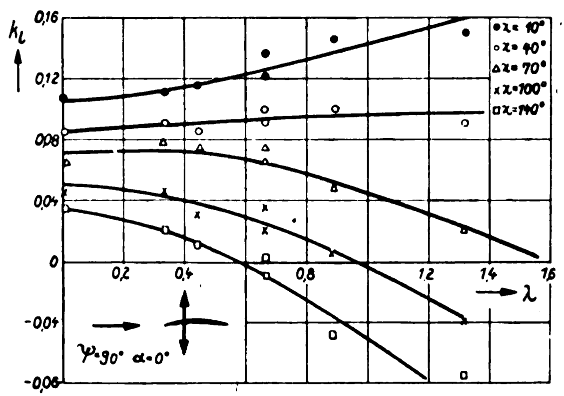


Bild 10. Leistungsbeiwerte für verschiedene Drehschwingungen, abhängig vom Fortschrittsgrad (Anordnung wie in Bild 7 a, b).

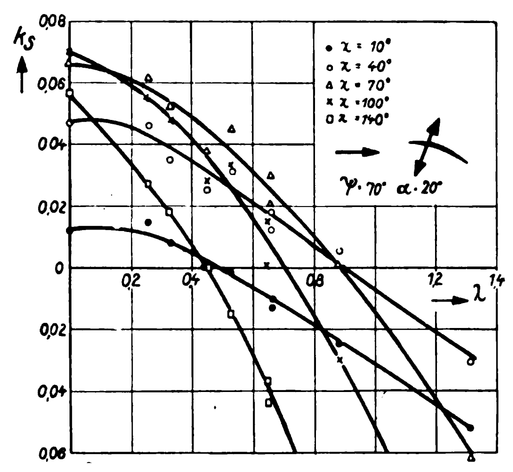


Bild 12. Schubbeiwerte für verschiedene Drehschwingungen, aufgetragen über dem Fortschrittsgrad; Winkel zwischen Anströmung und Schwingebene 70°, zwischen Fläche und Schwingebene 90°.

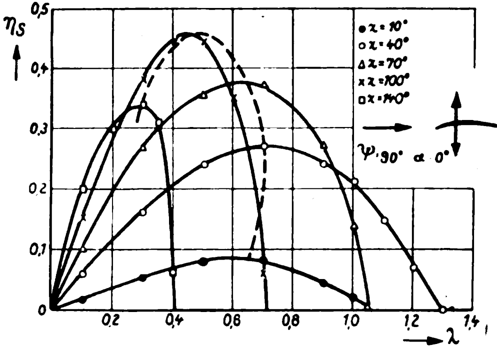


Bild 11. Schubwirkungsgrad für verschiedene Drehamplituden in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad (Anordnung wie in Bild 7 a, b).

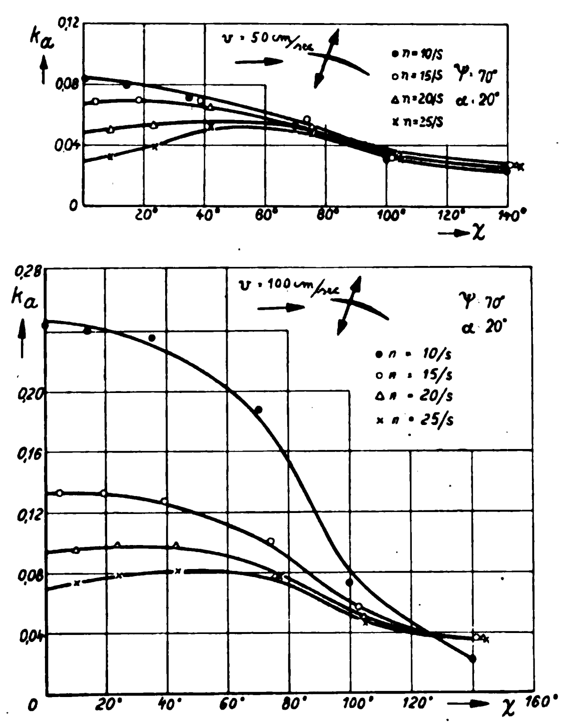


Bild 13a und b. Auftriebsbeiwerte für verschiedene Frequenzen, abhängig von der Drehschwingung (Anordnung wie in Bild 12).

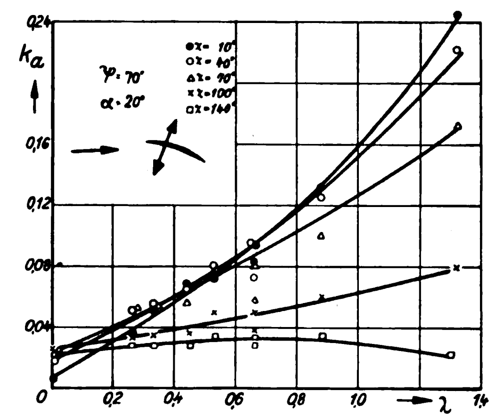


Bild 14. Auftriebsbeiwerte für verschiedene Drehamplituden in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad (Anordnung wie in Bild 12).

denen den besprochenen Ausgangsstellung. Ein Vergleich von Bild 12 mit Bild 8 zeigt, daß die Schubbeiwerte nur bei kleinem χ merklich abweichen, indem die Kurven hier steiler abfallen und schon bei kleinerem Fortschrittsgrad λ in den negativen Bereich sinken.

Von besonderer Bedeutung sind die hier neu dazutretenden Auftriebe. Über der Drehschwingung aufgetragen, Bild 13a und b, ergeben sich für den Auftriebsbeiwert leicht s-förmig geschwungene Linien mit ausgeprägten Maxima, die, umgekehrt wie bei den Schubbeiwerten, Kurvenbündel darstellen, welche in Richtung auf abnehmendes χ auseinanderweichen. Über dem Fortschrittsgerad aufgetragen, Bild 14, entstehen für verschiedene Drehschwingungen Kurven, die mit zunehmendem Fortschrittsgrad um so steiler ansteigen je kleiner χ ist. Das bedeutet, daß eine im Interesse größerer Schuberzeugung (zumal bei kleinem λ) gegebenenfalls anzustrebende höhere Drehschwingungsamplitude mit einem Verlust an Auftrieb erkauft wird, der mit dem Fortschrittsgrad ansteigt.

Die Beziehung zwischen Auftrieb, Vortrieb, Fortschrittsgrad und Drehschwingung zeigt übersichtlich Bild 15[4]). Man erkennt auf den ersten Blick den fundamentalen Unterschied zu einem starrflügeligen Flugapparat, bei dem Auftrieb und Vortrieb durch zwei getrennte Systeme zustande kommen: Die Möglichkeit, erhebliche Luftkräfte in nahezu beliebiger Richtung im Raum zu erzeugen, was in Praxi die Möglichkeit bedeutet, vom Fleck weg zu starten und Punktlandungen auszuführen — eine Fähigkeit, über die fast alle Flugtiere verfügen.

Setzen wir z. B. den Fall, daß das Flugtier (bzw. das Fluggerät) nur sein Gewicht zu tragen hätte, so ist die Verbindungslinie zwischen dem Punkte des Kurvensystems, der dem gewünschten Flugzustand entspricht, und dem 0-Punkt ($k_s = 0$, $k_a = 0$) senkrecht zur Erdoberfläche zu neigen; die Flugbahn verläuft dann auf der Linie $k_a = 0$ in Richtung der steigenden positiven k_s-Werte. Wählen wir etwa den Punkt $\lambda = 0{,}1$, $\chi = 140^0$, dann erfolgt die Bewegung im Winkel von 65^0 nach oben. — Ein völlig senkrechter Aufstieg ist natürlich auch möglich, jedoch unter der (in diesem Kurvenbild nicht verwirklichten) Voraussetzung, daß keine Auftriebe auftreten, also in reiner »Schub-

[4]) Um einen größenordnungsmäßigen Vergleich mit anderen Messungen zu ermöglichen, bei denen als Auftriebsbeiwert $c_a = \frac{A}{(\varrho/2)\,(u^2+v^2)\cdot F_{Fl}}$ angegeben ist, sei erwähnt, daß das c_a hier 0,5 (bei $\lambda = 0{,}4$) bis 0,6 (bei $\lambda = 1{,}2$) erreicht.



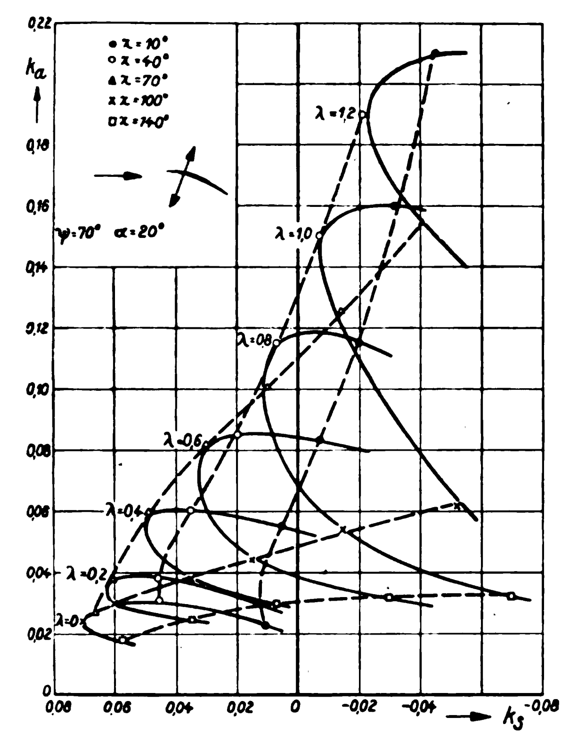


Bild 15. Auftriebsbeiwerte, aufgetragen über den Schubbeiwerten; Punkte gleicher Drehamplitude sind durch unterbrochene, Punkte gleichen Fortschrittsgrades durch ausgezogene Linien verbunden (Anordnung wie in Bild 12).

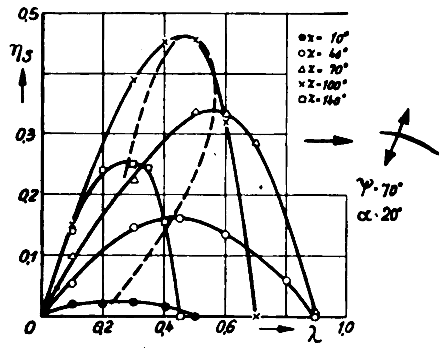


Bild 16. Schubwirkungsgrade für verschiedene Drehschwingungen, abhängig vom Fortschrittsgrad (Anordnung wie in Bild 12).

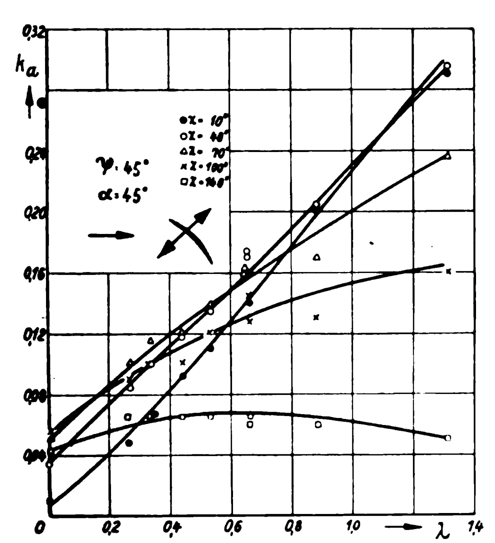


Bild 17. Auftriebsbeiwerte für verschiedene Drehschwingungen in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad; Winkel zwischen Anströmung und Schwingebene sowie zwischen Anströmung und Nullstellung der Fläche 45°.

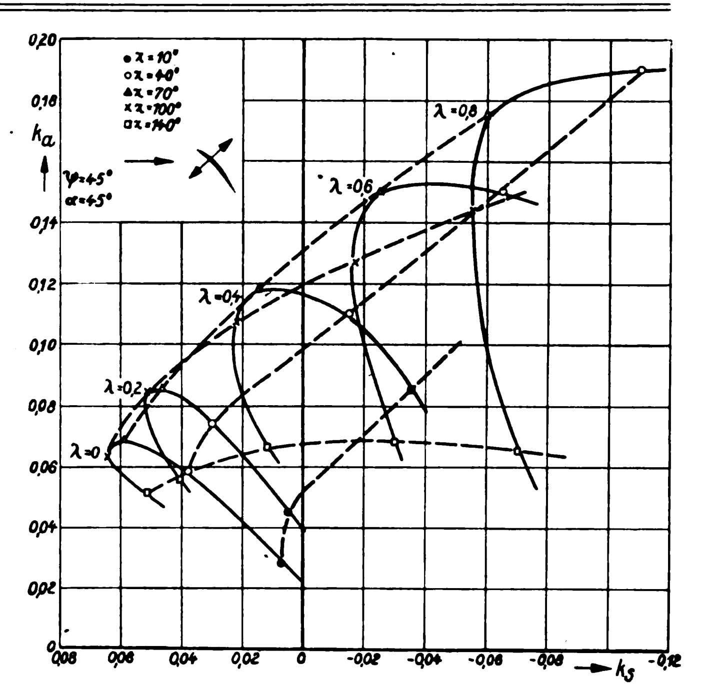


Bild 18. Auftriebsbeiwerte, aufgetragen über den Schubbeiwerten (Anordnung wie in Bild 17, Strichführung wie in Bild 15).

stellung« ($\psi = 90°$, $\alpha = 0°$). Zwischen diesem »Fliegen mit dem Schub« (analog dem Hubschrauber) und dem »Fliegen mit dem Auftrieb« (analog dem Normalflugzeug) gibt es folglich, wie Bild 15 zeigt, alle Übergangsstufen[5]).

Aus Bild 15 läßt sich ferner unter anderem wieder ersehen, daß mit steigendem λ die Auftriebsbeiwerte weitaus am stärksten bei kleinen Drehschwingungsamplituden ansteigen, während die Schubbeiwerte gleichzeitig absinken. Ferner erkennt man, daß es für jeden Fortschrittsgrad λ einen bestimmten Wert von χ gibt, bei dem die Summe von Schub und Auftrieb am größten wird. Diese ausgezeichneten Drehschwingungsamplituden χ sinken mit ansteigendem Fortschrittsgrad ab (z. B. $\lambda = 0$, $\chi = 100°$; $\lambda = 0{,}4$, $\chi = 70°$; $\lambda = 0{,}8$, $\chi = 50°$).

Die benötigten Leistungen zeigen gegenüber denen der Ausgangsstellung kaum merkliche Unterschiede; die **hohen Auftriebe werden also nicht durch zusätzlichen Arbeitsaufwand erkauft.** Es mag darum die Wiedergabe der Vortriebswirkungsgrade genügen. Man erkennt bei dem Vergleich von Bild 16 mit Bild 11, daß die Linie, die die Wirkungsgradmaxima verbindet, hier zwar an derselben Stelle und in gleicher Höhe ihren Gipfelpunkt erreicht, daß sie aber, zumal in Richtung auf kleinere Drehschwingungen χ, noch steiler abfällt als bei der Ausgangsstellung (Bild 11). Am wenigsten von einem Wirkungsgradabfall betroffen werden also die Schwingungsmodi, die auch schon bei der reinen Schubstellung die besten Wirkungsgrade aufweisen.

Wird die Richtung der Anblasung in gleichem Sinne weiter geändert bis auf $\psi = 45°$ und $\alpha = 45°$, dann gehen die Schubbeiwerte stark zurück, während die Auftriebsbeiwerte, wie Bild 17 zeigt, noch erheblich weiter ansteigen. Bild 18 läßt erkennen, daß nur noch bis zu einem Fortschrittsgrad von $\lambda = 0{,}4$ bis 0,5 positive Schübe auftreten. Das ganze Kurvensystem zieht sich mit steigendem λ viel schneller in das Gebiet negativer Schübe hinein als im Falle von Bild 15. Bei kleineren Fortschrittsgraden ($\lambda < 0{,}4$) sind aber z. T. höhere Summen von Vor- und Auftriebsbeiwerten erreichbar als bei der vorbesprochenen Stellung (Bild 15). Dabei liegen diese ausgezeichneten Punkte (mit der größten Summe von k_s und k_a) für jeden Fortschritts-

[5]) Daß dieser entscheidende Vorteil des Schwingenprinzips gegenüber dem üblichen Flugverfahren auch für solche Flugsysteme gilt, bei denen rotierende Flächen (analog der tierischen Schwinge) die Vor- und Auftriebsleistung auf sich vereinen, ist anderenorts von uns näher dargelegt worden.



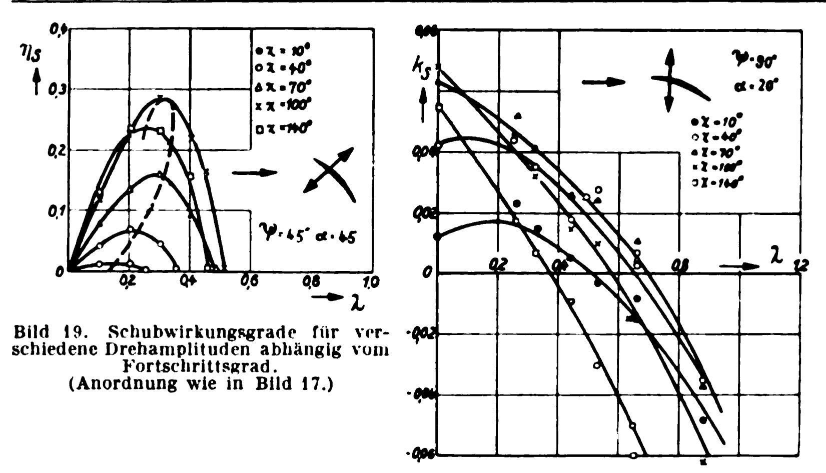


Bild 19. Schubwirkungsgrade für verschiedene Drehamplituden abhängig vom Fortschrittsgrad. (Anordnung wie in Bild 17.)

Bild 20. Schubbeiwerte für verschiedene Drehschwingungen in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad. Anströmung senkrecht gegen die Schwingebene und im Winkel von 20° gegen die Fläche.

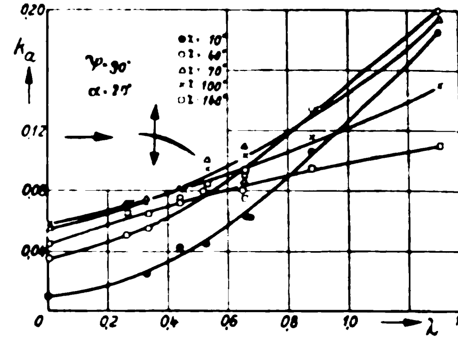


Bild 21. Auftriebsbeiwerte für verschiedene Drehschwingungen in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad (Anordnung wie in Bild 20).

grad wieder bei der gleichen Drehamplitude wie in Bild 15. Die Regel, daß diese letztere mit steigendem Fortschrittsgrad absinkt, ist hier also ebenfalls gültig.

Bild 19 schließlich zeigt, daß die Schubwirkungsgrade hier erwartungsgemäß sehr stark verringert und auf einen viel kleineren Fortschrittsgradbereich zusammengedrängt sind als in der vorherigen Stellung (Bild 16).

III. Anströmung senkrecht zur Schwingebene und schräg gegen den Flügel ($\psi = 90^0$, $\alpha > 0^0$).

Beim zweiten Bewegungsmodus, durch den man Auftrieb erzeugen kann, wird die Schlagebene senkrecht zur Anströmung belassen und nur die Nullage der Flächensehne geändert. Bemerkenswerterweise ist die Wirkung dieser Bewegungsart sehr deutlich von der einer gleichsinnigen Drehung von Fläche und Schlagebene unterschieden. Bild 20 bis 22 geben darüber Aufschluß. Was den Schub anbelangt, so zeigt ein Vergleich von Bild 20 mit Bild 12 eine deutliche Benachteiligung dieser neuen Stellung. Die Schubbeiwerte k_s sinken für alle Drehschwingungen schon bei kleinerem Fortschrittsgrad λ als in Bild 12 unter die 0-Linie ab.

Die Auftriebsbeiwerte k_a dagegen liegen, wie der Vergleich von Bild 21 mit Bild 14 zeigt, bei kleinen Fortschrittsgraden überwiegend höher, für große Drehschwingungen sogar durchweg höher als in der vorher besprochenen Stellung (14). k_a über k_s aufgetragen (Bild 22) zeigt folglich gegenüber Bild 15 ein wesentlich anderes Aussehen. Die Kurvenschar beginnt bei $\lambda = 0$ mit etwa gleichen Schubbeiwerten k_s, aber höheren maximalen Auftriebsbeiwerten k_a und zieht sich dann mit steigendem Fortschrittsgrad λ schneller ins Gebiet negativer Schübe hinein. Der Kurvenverlauf für gleiches λ ist gegen den von Bild 15 weitgehend abgeändert: während man dort mit sinkendem χ zu größeren Auftriebsbeiwerten kommt, so hier umgekehrt mit steigendem χ, bis zu einem k_a-Maximum, das je nach dem Fortschrittsgrad einem verschiedenen χ zugehört. Die schon besprochene Regel, daß die jeweils größte Summe von $k_s + k_a$ mit steigendem Fortschrittsgrad bei sinkender Drehamplitude liegt, ist auch hier wieder, wie in den bisherigen Fällen, gültig.

Auf der Seite der benötigten Leistung ist nichts Besonderes zu bemerken. Die Kurven für k_l verlaufen überwiegend ebenso wie die in Bild 10. Das starke Absinken der Schubbeiwerte mit steigendem Fortschrittsgrad hat aber gleichwohl zur Folge, daß die Schubwirkungsgrade, Bild 23, kaum bis auf die halbe Höhe der Wirkungsgrade von Bild 16 ansteigen. Die gegenseitige Beziehung der Maxima von η_s für verschiedene Drehschwingungen bleibt dabei ziemlich unverändert.

Wird jetzt bei gleichbleibender Schlagebene die Nullstellung der Fläche noch weiter gedreht, dann sinken die Schübe rapide ab. Bei $\alpha = 45^0$ treten nur noch für $\lambda = 0$ z. T. ganz geringe, für $\lambda > 0$ gar keine Schübe mehr auf,

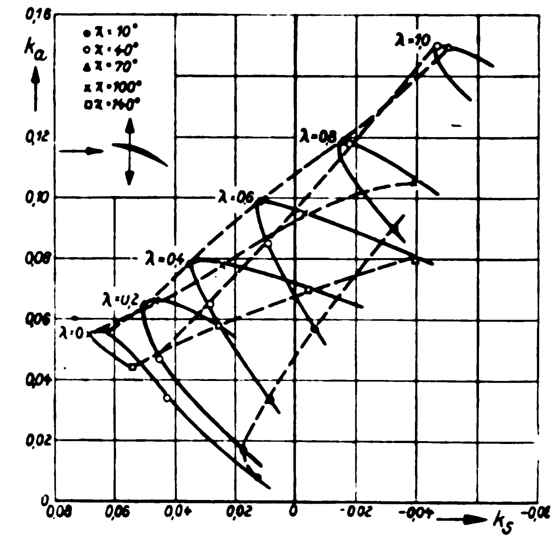


Bild 22. Auftriebsbeiwerte, aufgetragen über den Schubbeiwerten (Anordnung wie in Bild 20, Linienführung wie in Bild 15).

während auch die Auftriebe zum großen Teil kaum höher sind als bei der Stellung $\alpha = 20^0$. Auf Kurvenbeispiele kann folglich hier verzichtet werden.

Es ist nicht ohne weiteres einzusehen, was den Unterschied in der Größe und vor allem in der Richtung der auftretenden Luftkräfte bedingt, der sichtbar wird, wenn man ceteris paribus allein der Schlagebene zur Anströmung eine andere Winkelseintellung gibt. Die folgenden Versuche werden über diese Frage einen gewissen Aufschluß bringen.

IV. Wechselnde Nullstellung der Fläche in der Schlagebene bei fehlender Anströmung ($\tau = 0^0$ und $> 0^0$; $v = 0$).

Der Fall, daß die Fläche in ihrer Nullage senkrecht auf der Schlagebene steht und ohne Anströmung »Standschub« erzeugt, wurde bereits kurz erwähnt, Bild 6. Die Luftkraft steht dabei senkrecht auf der Schwingebene (wenn wir vom geringen Einfluß der Flächenwölbung absehen). Wird das schwingende System als Ganzes gedreht, so dreht sich selbstverständlich die Luftkraft um den gleichen Winkelbetrag. Anders ist es jedoch, wenn allein die Fläche innerhalb der Schwingebene geneigt wird. Bild 24 zeigt, daß dabei die Richtung der Luftkräfte eine Drehung ausführt, die annähernd das Doppelte der Flächendrehung beträgt[6]). Man kann sich diese, auf den ersten Blick merkwürdig erscheinende Tatsache verständlich machen, wenn man an den Fall $\tau = 45^0$, $\chi \sim 90^0$ denkt, Bild 25; hier wird nämlich der

[6]) Es sei betont, daß diese Angabe für den gewölbten Versuchsflügel gilt, nicht für eine ebene Fläche, bei der diese Luftkraftdrehung wohl geringer sein wird, zumal bei kleinem χ.

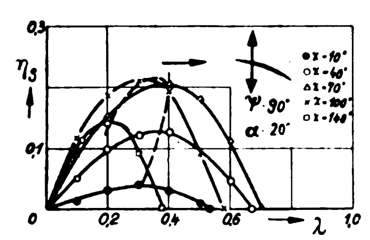


Bild 23. Schubwirkungsgrade für verschiedene Drehschwingungen in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad (Anordnung wie in Bild 20).

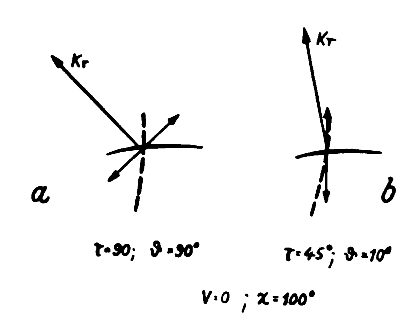


Bild 25. Skizze zur Veranschaulichung des Einflusses einer Änderung der Schwingebene, bei gleichbleibender Flächenstellung, auf die Richtung der resultierenden Luftkraft (K_r). Der Doppelpfeil bezeichnet die Schwingebene. Der Flügel ist in Abschlagstellung (ausgezogen) und in Aufschlagstellung (gestrichelt) angedeutet. *a* Ausnutzung von »Auftriebskräften«, *b* von »Widerstandskräften«.

Flügel etwa quer zur Schlagrichtung herab und etwa parallel zu ihr herauf bewegt. Die Luftkraft wird folglich nicht im Winkel von 45°, sondern annähernd parallel zur Schlagebene stehen (»Fliegen mit dem Widerstand«). Diese Tatsache macht verständlich, wieso in Bild 22 bei $\lambda = 0$ und bei kleinem λ wesentlich höhere Auftriebsbeiwerte stehen als in Bild 15: die alleinige Drehung der schwingenden Fläche bewirkt eine viel größere Aufrichtung der resultierenden Luftkraft als die Drehung von Fläche und Schlagebene.

In Bild 26 ist die Größe der resultierenden Luftkräfte für die drei verschiedenen, ohne Anströmung gemessenen, Flügelstellungen über der Drehschwingung χ aufgetragen. Man bemerkt, von der reinen »Schubstellung« ausgehend, daß der Luftkraftbeiwert k_r bei geringer Flächendrehung zunächst ansteigt (Hinzutreten beträchtlicher Auftriebe) und dann, bei weiterer Drehung, wieder absinkt.

Aus Bild 27 ist zu ersehen, daß die hierzu erforderlichen Leistungsbeiwerte k_l für die drei Flügelstellungen nur im Mittel etwa übereinstimmen, daß sie sich jedoch bei kleinem χ gerade umgekehrt verhalten als bei großem χ. Je stärker die Flügelaufrichtung (je kleiner τ), desto flacher der Kurvenverlauf, d. h. desto geringer der Einfluß der Drehamplitude χ auf den Leistungsaufwand.

Die sich somit ergebenden Gütegrade ξ läßt Bild 28 erkennen: Am besten sind sie für die reine »Schubstellung« ($\tau = 90^0$); eine geringe Flächendrehung ändert daran wenig, eine Drehung um 45° ($\tau = 45^0$) läßt das ξ in der Region des Maximums um fast $^1/_3$ absinken. Damit bestätigt sich auch für die Schwingenbewegung — selbst bei sehr kleinen *Re*-Zahlen — der allgemeine Satz, daß das »Fliegen mit dem Auftrieb« (Kutta-Joukowskysche Luftkräfte) einem »Fliegen mit dem Widerstand« (vgl. Bild 25b) weit überlegen ist. Die kleinen *Re*-Zahlen haben also auch hier wieder nicht den grundsätzlich die Verhältnisse abändernden Einfluß, den man vielleicht hätte erwarten können.

V. Anströmung der Fläche von vorn bei Schräglage der Schwingebene ($\psi < 90^0$, $\alpha = 0^0$).

Die dritte und in ihrer Wirkung am wenigsten vorauszusehende Form einer Auftriebserzeugung kommt zustande, wenn man, von der reinen Schubstellung ausgehend, bei gleichbleibender Stellung des Flügels nur die Schwingebene neigt. Ist diese Neigung gering ($\psi = 70^0$), dann werden die Schübe davon kaum betroffen; gleichzeitig treten jedoch positive und negative Auftriebe von sehr bemerkenswerter Form und Größe auf.

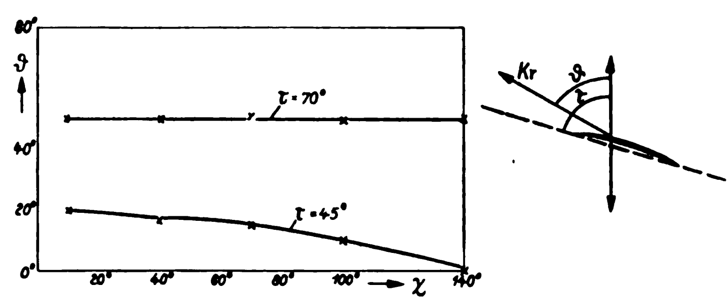


Bild 24. Winkel ϑ der resultierenden Luftkraft gegen die Schwingebene im »Standschub«versuch mit zwei verschiedenen Nullstellungen der Fläche in der Schwingebene ($\tau = 70°$ und 45°), aufgetragen über der Drehamplitude; daneben erläuternde Skizze; (Doppelpfeil bedeutet Schwingebene).

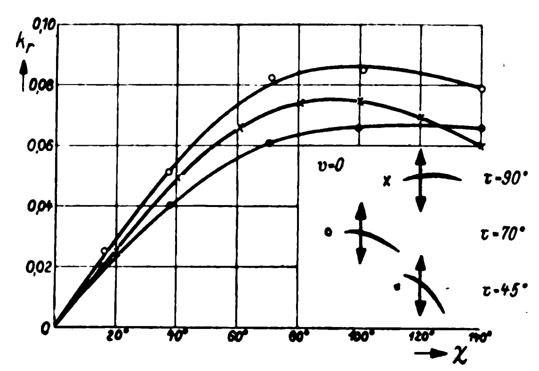


Bild 26. Beiwerte der resultierenden Luftkräfte bei drei verschiedenen Nullstellungen des Flügels in der Schwingebene, abhängig von der Drehamplitude (»Standschub«versuche).

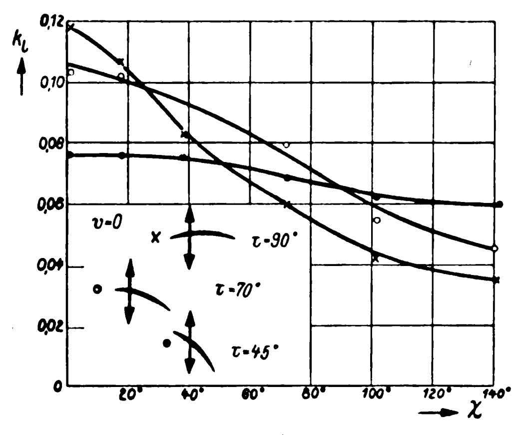


Bild 27. Leistungsbeiwerte der Schwingbewegungen von Bild 26.

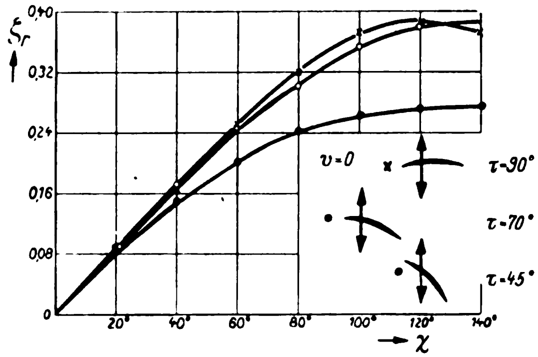


Bild 28. Standschubgütegrade der drei Schwingbewegungen von Bild 26, aufgetragen über der Drehschwingung.

Bild 29 hat, verglichen mit Bild 14, wo Schlagebene und Fläche in gleichem Maß geneigt sind, ein völlig anderes Aussehen. Vor allem erkennt man, daß Richtung und Größe



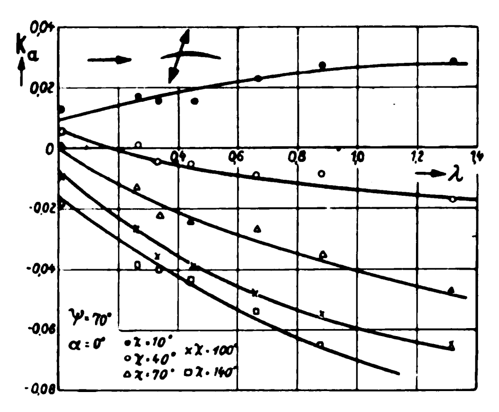


Bild 29. Auftriebsbeiwerte für verschiedene Drehamplituden, abhängig vom Fortschrittsgrad; Anströmung parallel zur Flügelsehne, aber schräg zur Schwingebene.

der senkrecht zur Anströmung auftretenden Kräfte entscheidend durch das Ausmaß der Drehschwingung χ beeinflußt werden. Bei einer Drehschwingung von weniger als 30° treten positive, bei $\chi > 30°$ negative Auftriebe auf. (Wird die Schlagebene nach der anderen Seite geneigt — $\psi = 110°$ —, dann kehrt sich das ganze Kurvenbild, wie auch experimentell geprüft wurde, spiegelbildlich um).

Bei Auftragung der Auftriebsbeiwerte über den Schubbeiwerten ergibt sich dementsprechend ein Kurvenverlauf von ebenfalls ganz abweichendem Aussehen, Bild 30, aus dem man folgendes entnehmen kann: Die mit steigendem Fortschrittsgrad zunächst steil nach oben oder unten von der Kurve für $\lambda = 0$ abzweigenden Linien für verschiedene Werte von χ beschreiben Bögen, aus deren weiterer Extrapolation man entnehmen kann, daß sie bei höheren Fortschrittsgraden nicht oder kaum mehr zu höheren $\pm$-Auftriebsbeiwerten führen werden. Mit anderen Worten: Diese ganzen Kräfte machen sich dann am deutlichsten bemerkbar, wenn die Komponente der Schlagschwingung, die parallel zur Anströmung liegt, gegenüber der Anströmung selbst nicht verschwindend klein wird. Denn eben diese Komponente bewirkt, daß Richtung und Geschwindigkeit der effektiven jeweiligen Anblasung der Fläche während des Auf- und Abschlages verschieden werden und damit überhaupt Kräfte senkrecht zur Anströmung auftreten können. Die schematische Skizze Bild 31 erläutert näher, wieso unter solchen Bedingungen bei kleinerer Drehschwingung χ insgesamt ein positiver, bei größerem χ ein negativer Auftrieb zustande kommen kann.

Unter Hinzuziehung von Bild 30 können wir nun auch den Unterschied zwischen Bild 22 und Bild 15, soweit er nicht schon im Abschnitt IV geklärt wurde, besser verstehen. Denn wenn man, von der reinen Schubstellung ausgehend, zunächst nur die Fläche und danach auch noch die Schlagebene neigt, dann muß bei dieser zweiten Stellungsänderung der Effekt, den Bild 30 in Reinkultur zeigt, mit dazu treten. In der Tat bekommen wir, wenigstens dem Sinne nach, bei Überlagerung von Bild 30 auf Bild 22 eine Annäherung an Bild 15: Die Auftriebsbeiwerte für kleine Drehamplituden liegen auf steiler ansteigender, für größere auf wesentlich flacher verlaufender Kurve. Daß diese Annäherung nicht quantitativ genau sein kann, liegt auf der Hand: denn die Summe der Luftkräfte zweier getrennt untersuchter Bewegungsformen ist etwas anderes als die Luftkraft der Kombination dieser beiden Bewegungen.

F. Zusammenfassung.

Das Gerät, mit dem die vorliegenden Messungen an sehr kleinen schwingenden Flächen (Größenordnung der Insekten) und bei kleinen Reynoldsschen Zahlen ($Re = 1000$ und darunter) ausgeführt sind, besteht im wesentlichen aus einer hochempfindlichen, Getriebe und Flügel tragenden Tor-

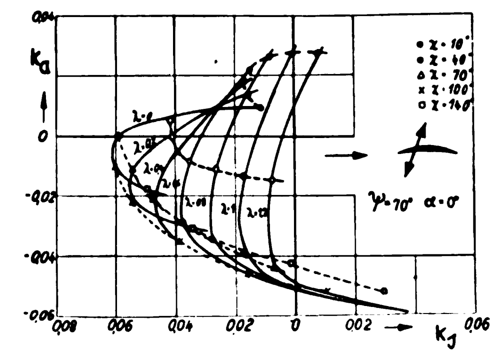


Bild 30. Auftriebsbeiwerte über den Schubbeiwerten für verschiedene Drehamplituden und Fortschrittsgrade (Anordnung wie in Bild 29).

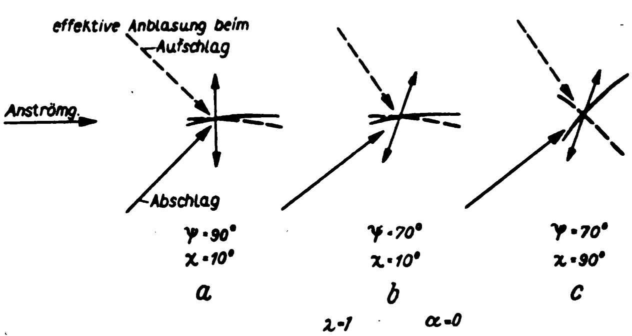


Bild 31. Skizze zur Veranschaulichung der Entstehung von $\pm$ Auftrieb bei Anblasung parallel zur Sehne des Flügels in Nullstellung, bei schräger Lage der Schwingebene. In *a* steht die Schwingebene senkrecht zur Anströmung, die effektive Anströmung ist für Ab- und Aufschlag spiegelbildlich gleich; in *b* und *c* ändern sich Winkel und Geschwindigkeit der effektiven Anströmung; bei kleiner Drehamplitude *b* resultiert dabei positiver, bei großer Drehamplitude *c* negativer Auftrieb. (Flügelstellung und effektive Anströmung beim Abschlag ausgezogen, beim Aufschlag gestrichelt; der Doppelpfeil deutet die Schwingebene an).

sionswaage, die Luftkräfte nach verschiedenen Richtungen (Vor- und Auftrieb) bis auf wesentlich unter 1 mg genau zu messen gestattet (Größenordnung der auftretenden Kräfte um 20 mg), und aus einem viskösen Medium, welches in die das Drehmoment übertragende Achse eingeschaltet ist und die Messung des jeweils benötigten Moments ermöglicht. Die gewonnenen Daten sind nach den bei Propellermessungen üblichen Verfahren ausgewertet und die Vor- und Auftriebsbeiwerte sowie die Leistungsbeiwerte ermittelt.

Die Ergebnisse stimmen bei einer Schwingenbewegung, die der Propellerbewegung entspricht — reine »Schubstellung«: Nullstellung der Fläche und Anströmung senkrecht zur Schwingebene —, mit dem vom Propeller her Bekannten weitgehend überein. Dabei werden Schubwirkungsgrade von 0,5 bis 0,6 erreicht. Bei Neigung entweder der Schwingebene oder der Nullstellung der Fläche oder von beiden zugleich treten Auftriebe von jeweils verschiedenem Umfang hinzu. Die Abhängigkeit der auftretenden Schübe und Auftriebe sowie der benötigten Leistungen von verschiedenen Parametern: von der Amplitude der Drehschwingung, vom Fortschrittsgrad, vom Winkel zwischen Anströmung und Schwingebene, vom Winkel zwischen Anströmung und Nullstellung der Fläche, wird dargestellt.

Als allgemeines Hauptergebnis kann die Feststellung gelten, daß das Schwingenflugverfahren die Erzeugung erheblicher Luftkräfte in beliebigen Richtungen des Raumes ermöglicht (weitest mögliche Geschwindigkeitsspanne, Sprungstart, Punktlandung) — als eine Folge der Vereinigung der Vor- und Auftriebsfunktion in einem Organ.

Versuche ohne Anblasung mit verschiedener Nullstellung der Fläche in der Schlagebene (Standschubversuche) zeigen ferner, daß auch beim Schwingenflug (selbst bei sehr kleinen *Re*-Zahlen) ein Fliegen mit (Kutta-Joukowskyschen) Auftriebskräften einem Fliegen mit Widerstandskräften weit überlegen ist.

Berechnung der zweiten Näherung der kompressiblen Strömung um ein Profil nach Janzen-Rayleigh.

Von E. Krahn.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V., Institut für theoretische Aerodynamik.

Auf Grund einer partikulären Lösung wird eine Methode zur Berechnung der zweiten Näherung nach Janzen-Rayleigh angegeben und die Rechnung für die Umströmung des Kreiszylinders mit Zirkulation durchgeführt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Bei der Berechnung der kompressiblen ebenen adiabatischen Potentialströmung um ein Profil bei Unterschallgeschwindigkeit hat man zur Bestimmung der zweiten Näherung nach Janzen-Rayleigh die Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{M^2}{U^2}\{u^2 u_x + u\,v\,(u_y + v_x) + v^2 v_y\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

zu lösen, wo u und v die Geschwindigkeitskomponenten der inkompressiblen Strömung um das gegebene Profil sind, M die Machsche Zahl der Anströmung und φ das Potential der kompressiblen Strömung ist. Δ ist der Laplacesche Operator, U die Anströmgeschwindigkeit. Die Indizes x und y bezeichnen partielle Ableitungen. Die Funktion φ muß im Außengebiet des Profiles (bis auf den unendlichfernen Punkt) eindeutig und endlich sein, und ihre Ableitungen müssen die Bedingung erfüllen, daß die Strömung am Profil tangential verläuft und in großer Entfernung vom Profil in die Parallelströmung übergeht.

Dieses Problem ist für den Kreis, die Ellipse und für Joukowskiprofile mehrfach gelöst (s. Literaturverzeichnis). Dabei wird immer die Kenntnis der Abbildungsfunktion des Profils auf den Kreis und der Potentialfunktion der inkompressiblen Strömung in der ganzen Ebene benutzt. Da meistens nur die Geschwindigkeitsverteilung am Profil selbst von Bedeutung ist, so liegt es nahe, nach einer Methode zu suchen, die diese Berechnung auf Grund der Kenntnis der Geschwindigkeit der inkompressiblen Strömung und der Abbildungsfunktion des Profils auf den Kreis und ihrer Ableitung nur an der Profilkontur ermöglicht, ohne daß man alle diese Größen im ganzen Außengebiet des Profils zu beherrschen braucht. Im vorliegenden wird solch eine Methode gegeben und für die Umströmung des Kreiszylinders mit Zirkulation gerechnet.

II. Ein partikuläres Integral.

Die Lösung der Poissonschen Gl. (1) soll in der Weise geschehen, daß erst ein partikuläres Integral angegeben wird, dem dann Lösungen der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta\chi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

superponiert werden, um den Randbedingungen zu genügen.

Um eine partikuläre Lösung von (1) zu finden, machen wir für φ den Ansatz

$$\varphi_1 = \frac{M^2}{U^2} J\,K, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wo $J(x, y)$ und $K(x, y)$ einzeln der Laplaceschen Gleichung genügen sollen.

Es wird dann

$$\Delta\varphi_1 = 2\frac{M^2}{U^2}(J_x K_x + J_y K_y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Indem wir berücksichtigen, daß für die inkompressible Strömung

$$u_x = -v_y \quad \text{und} \quad u_y = v_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

ist, können wir die rechte Seite von (1) auch in der Form

$$2\frac{M^2}{U^2}\left\{u\,v\,v_x + \frac{1}{2}(v^2 - u^2)\,v_y\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

schreiben. Nun suchen wir zwei Potentialfunktionen J und K, die der Gleichung

$$J_x K_x + J_y K_y = u\,v\,v_x + \frac{1}{2}(v^2 - u^2)\,v_y \quad . \; . \; . \quad (7)$$

genügen. Das tun z. B. die Funktionen

$$J = \int_{(a,b)}^{(x,y)}\left\{u\,v\,dx + \frac{1}{2}(v^2 - u^2)\,dy\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

und

$$K = v - \text{konst.}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

wobei das Integral J von einem Anfangspunkt mit den Koordinaten (a, b) bis zum Punkte (x, y) zu erstrecken ist.

Da

$$(u\,v)_y = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

ist, so ist J vom Integrationswege unabhängig, solange dieser keinen singulären Punkt umschließt.

Beim Umfahren eines Profils wird J mehrdeutig, falls eine Strömung mit Zirkulation vorliegt. Die Mehrdeutigkeit läßt sich aber durch Addition einer Potentialfunktion beheben, wie später gezeigt wird.

Man überzeugt sich leicht, daß J und K einzeln der Laplaceschen Gleichung genügen

$$\Delta J = 0 \qquad \Delta K = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Wir haben jetzt in

$$\varphi_1 = \frac{M^2}{U^2}(v - \text{konst.})\int_{(a,b)}^{(x,y)}\left\{u\,v\,dx + \frac{1}{2}(v^2 - u^2)\,dy\right\} \quad (12)$$

eine Lösung der inhomogenen Gl. (1), zu der wir noch Lösungen der homogenen Gleichung addieren können, um eine Lösung zu erhalten, die auch allen Randbedingungen genügt.

Auf gleichem Wege wie (12) erkennt man auch

$$\frac{M^2}{U^2}(u-\text{konst.})\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)}\left\{\frac{1}{2}(u^2-v^2)\,dx+u\,v\,dy\right\} \tag{13}$$

als Lösung der Gl. (1).

Wir wollen nun dem Integral J eine andere Form geben. Führen wir auf einer Kurve (auf der die Integration ausgeführt wird) die Bogenlänge s und die Normalenrichtung n ein, wobei das Kurvenelement ds mit dx den Winkel τ und das Normalenelement dn mit dx den Winkel $\frac{\pi}{2}+\tau$ bilden soll, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds\cos\tau - dn\sin\tau \\ dy &= ds\sin\tau + dn\cos\tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{14}$$

Bezeichnen wir den Betrag des Geschwindigkeitsvektors der inkompressiblen Strömung mit w und den Winkel, den dieser Vektor mit der x-Achse bildet, mit γ, so ist

$$\left.\begin{aligned} u &= w\cos\gamma \\ v &= w\sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{15}$$

und das Integral J läßt sich so darstellen

$$J=\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)}\left\{u\,v\,dx+\frac{1}{2}(v^2-u^2)\,dy\right\}$$

$$=\int\limits_{(s_0,n_0)}^{(s,n)}\left\{\frac{w^2}{2}\sin(2\gamma-\tau)\,ds-\frac{w^2}{2}\cos(2\gamma-\tau)\,dn\right\} \quad \ldots \tag{16}$$

Es ist daher

$$\frac{\partial J}{\partial s}=\frac{w^2}{2}\sin(2\gamma-\tau)$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial n}=-\frac{w^2}{2}\cos(2\gamma-\tau) \quad \ldots\ldots \tag{17}$$

Wird die Integration längs der Profilkontur durchgeführt, so ist

$$\gamma=\tau \quad \text{bzw.} \quad \gamma=\tau-\pi$$

und

$$J=\int\limits_0^s\frac{w^2}{2}\sin\tau\,ds \quad \ldots\ldots\ldots \tag{18}$$

$$\frac{\partial J}{\partial s}=\frac{w^2}{2}\sin\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{19}$$

$$\frac{\partial J}{\partial n}=-\frac{w^2}{2}\cos\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{20}$$

Um die Frage der Mehrdeutigkeit von J und φ_1 zu klären, wollen wir im nächsten Paragraphen einen speziellen Fall ausführlich behandeln.

III. Der Kreiszylinder.

Am Beispiel der Umströmung des Kreiszylinders mit Zirkulation soll gezeigt werden, wie die zu addierenden Potentialfunktionen gewählt werden müssen, damit den Randbedingungen genügt wird und die Geschwindigkeit eindeutig wird.

In der xy-Ebene sei der Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius a gegeben, Bild 1. Die Anströmgeschwindigkeit sei U und bilde mit der positiven x-Achse den Winkel α. Das Potential der inkompressiblen Strömung sei

$$\Phi=U\left\{z\,e^{-i\alpha}+\frac{a^2e^{i\alpha}}{z}+2\,i\,a\sin\alpha\ln z\right\}, \quad \ldots \tag{21}$$

wo

$$z=x+i\,y=r\,e^{i\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \tag{22}$$

ist.

Es ist weiter

$$\frac{d\Phi}{dz}=u-i\,v=U\left\{e^{-i\alpha}-\frac{a^2e^{i\alpha}}{z^2}+\frac{2\,i\,a\sin\alpha}{z}\right\} \tag{23}$$

und daher

$$u=U\left\{\cos\alpha+\frac{2\,a\sin\alpha}{r}\sin\Theta-\frac{a^2}{r^2}\cos(2\Theta-\alpha)\right\} \tag{24}$$

und

$$v=U\left\{\sin\alpha-\frac{2\,a\sin\alpha}{r}\cos\Theta-\frac{a^2}{r^2}\sin(2\Theta-\alpha)\right\}. \tag{25}$$

Daraus findet man

$$w^2=U^2\left\{1+\frac{4\,a\sin\alpha}{r}\sin(\Theta-\alpha)+\frac{4\,a^2\sin^2\alpha}{r^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2\,a^2}{r^2}\cos 2(\Theta-\alpha)+\frac{4\,a^3\sin\alpha}{r^3}\sin(\Theta-\alpha)+\frac{a^4}{r^4}\right\} \tag{26}$$

und für $r=a$

$$w=-2\,U\{\sin(\Theta-\alpha)+\sin\alpha\} \quad \ldots\ldots \tag{27}$$

Der Betrag der Zirkulation bei dieser Strömung ist $2a\,U.\sin\alpha$ und die Staupunkte liegen bei $(a, 0)$ und $(-a\cos 2\alpha;\ -a\sin 2\alpha)$. Führt man in dem Integral J durch

$$x=r\cos\Theta \qquad y=r\sin\Theta \quad \ldots\ldots \tag{28}$$

Polarkoordinaten ein und integriert längs des Kreises mit dem Radius r, so wird

$$J=\int\limits_{(r,0)}^{(r,\Theta)}\left\{\frac{1}{2}(v^2-u^2)\cos\Theta-u\,v\sin\Theta\right\}r\,d\Theta$$

$$=\int\limits_{(r,0)}^{(r,\Theta)}U^2\left\{-\frac{1}{2}\cos(\Theta-2\alpha)-\frac{2\,a\sin^2\alpha}{r}\right.$$

$$+\frac{a^2(1+2\sin^2\alpha)}{r^2}\cos\Theta+\frac{2\,a^3\sin\alpha}{r^3}\sin(2\Theta-\alpha)$$

$$\left.-\frac{a^4}{2\,r^4}\cos(3\Theta-2\alpha)\right\}r\,d\Theta$$

$$=U^2\left\{-\frac{r}{2}\sin(\Theta-2\alpha)-2a\sin^2\alpha\cdot\Theta+\frac{a^2(1+2\sin^2\alpha)}{r}\sin\Theta\right.$$

$$\left.-\frac{a^3\sin\alpha}{r^2}\cos(2\Theta-\alpha)-\frac{a^4}{6\,r^3}\sin(3\Theta-2\alpha)\right\}$$

$$-U^2\left\{\frac{r}{2}\sin 2\alpha-\frac{a^3}{2\,r^2}\sin 2\alpha+\frac{a^4}{6\,r^3}\sin 2\alpha\right\} \quad \ldots \tag{29}$$

Bei einmaligem Umlauf auf dem Kreise mit dem Radius r ändert sich J um

$$-4\,\pi\,U^2 a\sin^2\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \tag{30}$$

wobei dieser Wert unabhängig vom Radius r ist.

Um J eindeutig zu machen, müssen wir

$$2\,U^2 a\sin^2\alpha\cdot\Theta \quad \ldots\ldots\ldots \tag{31}$$

addieren. Da wohl

$$\Theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

der Laplaceschen Gleichung genügt, nicht aber $v\,\Theta$, so addieren wir zu φ_1

$$M^2\cdot 2\,a\sin^2\alpha\left[(u-\text{konst.})\ln\frac{r}{a}+(v-\text{konst.})\,\Theta\right]. \tag{32}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck eine Potentialfunktion, die der homogenen Gl. (2) genügt. (Die Konstanten in (32) setzen wir zweckmäßig den Werten von u und v im Unendlichen gleich, ebenso die Konstante in (12). Dadurch wird ein unendliches Anwachsen des Potentials φ_1 verhindert.

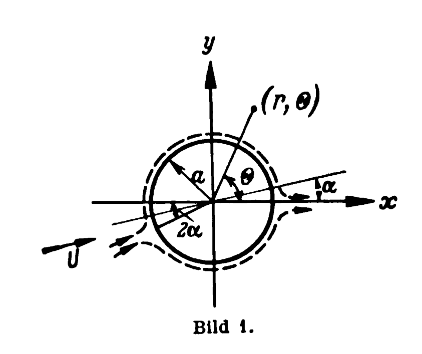


Bild 1.

Als eindeutige Lösung der Gl. (1) haben wir jetzt

$$\varphi_2 = \frac{M^2}{U^2}(v - U\sin\alpha)\cdot J$$
$$+ M^2\, 2a\sin^2\alpha\left[(u - U\cos\alpha)\ln\frac{r}{a} + (v - U\sin\alpha)\cdot\Theta\right] \quad \ldots (33)$$

Zu dieser Lösung müssen wir noch Lösungen der homogenen Gl. (2) addieren, die so gewählt sein müssen, daß in der Summe die radiale Ableitung am Kreise verschwindet und die Staupunkte mit denen der inkompressiblen Strömung übereinstimmen.

Es wird jetzt zunächst das zusätzliche Potential bestimmt, das die radialen Geschwindigkeitskomponenten zum Verschwinden bringt. Führen wir die Integration in J vom hinteren Staupunkt längs der Kreislinie aus und beachten, daß in diesem Falle

$$\tau = \Theta + \frac{\pi}{2}$$

ist, so finden wir aus (18) unter Berücksichtigung von (27)

$$J(a,\Theta) = U^2 a\Big\{(1 + 2\sin^2\alpha)\sin\Theta - \frac{1}{2}\sin(\Theta - 2\alpha)$$
$$- \sin\alpha\cos(2\Theta - \alpha) - \frac{1}{6}\sin(3\Theta - 2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cdot\Theta$$
$$- \frac{1}{6}\sin 2\alpha\Big\} \quad \ldots (34)$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir natürlich, wenn wir in (29) $r = a$ setzen.

Weiter berechnen wir $\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$ und beachten dabei, daß

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial n}$$

ist.

Aus (33) folgt

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = M^2\Big\{v_r\cdot\frac{J}{U^2} + (v - U\sin\alpha)\frac{J_r}{U^2}$$
$$+ 2a\sin^2\alpha\left(\frac{u - U\cos\alpha}{r} + u_r\ln\frac{r}{a} + v_r\cdot\Theta\right)\Big\} \quad \ldots (35)$$

Mit Berücksichtigung von (14) und (5) haben wir

$$\left.\begin{aligned} u_s &= u_x\cos\tau + u_y\sin\tau = -v_y\cos\tau + v_x\sin\tau = -v_n\\ u_n &= -u_x\sin\tau + u_y\cos\tau = v_y\sin\tau + v_x\cos\tau = v_s\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Beachten wir noch den Ausdruck (20), so läßt sich (35) jetzt so darstellen

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = M^2\Big\{u_s\cdot\frac{J}{U^2} + (v - U\sin\alpha)\frac{w^2}{2U^2}\cos\tau$$
$$+ 2a\sin^2\alpha\left(\frac{u - U\cos\alpha}{r} - v_s\ln\frac{r}{a} + u_s\cdot\Theta\right)\Big\} \quad \ldots (37)$$

Hier stehen nur noch Ableitungen nach der Bogenlänge s. Zur Berechnung des Wertes dieser Ableitung an der Profilkontur braucht man folglich die Geschwindigkeitswerte der inkompressiblen Strömung nur am Profil und nicht im Felde außerhalb des Profils.

Rechnet man (37) für $r = a$ aus, so findet man

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = M^2 U\Big\{4\sin^3\alpha\sin\Theta + 2\sin\alpha(1 + 2\sin^2\alpha)\sin 2\Theta$$
$$+ \frac{2}{3}\sin 2\alpha\sin(2\Theta - \alpha) - \frac{2}{3}\sin\alpha\sin 2(\Theta - \alpha)$$
$$- \frac{8}{3}\sin\alpha\sin(4\Theta - 2a) + \frac{5}{3}\sin\alpha\sin 2\alpha\cos\Theta$$
$$+ \frac{13}{12}\cos(\Theta - \alpha) - \frac{1}{4}\cos(\Theta + \alpha) - 2\sin^2\alpha\cos(2\Theta - \alpha)$$
$$+ \frac{1}{4}\cos 3(\Theta - \alpha) - \left(\frac{3}{2} + 6\sin^2\alpha\right)\cos(3\Theta - \alpha)$$
$$+ \frac{5}{12}\cos(5\Theta - 3\alpha)\Big\} \quad \ldots (38)$$

Jetzt muß man eine Potentialfunktion zu φ_2 hinzufügen, die auf dem Kreise $r = a$ die entgegengesetzte radiale Ableitung hat. Als solche Funktion wählen wir

$$\chi = \sum_n c_n\left(\frac{a}{r}\right)^n\sin(n\Theta - \gamma_n) + d_n\left(\frac{a}{r}\right)^n\cos(n\Theta - \delta_n) \quad (39)$$

Ihre Ableitungen sind

$$\chi_r = \sum_n -c_n\frac{n\,a^n}{r^{n+1}}\sin(n\Theta - \gamma_n) - d_n\frac{n\,a^n}{r^{n+1}}\cos(n\Theta - \delta_n) \quad (40)$$

$$\frac{1}{r}\chi_\Theta = \sum_n c_n\frac{n\,a^n}{r^{n+1}}\cos(n\Theta - \gamma_n) - d_n\frac{n\,a^n}{r^{n+1}}\sin(n\Theta - \delta_n) \quad (41)$$

Durch Koeffizientenvergleich und Einsetzen in (41) läßt sich sofort die zusätzliche Geschwindigkeitskomponente am Kreise angeben. Diese ist

$$\frac{1}{r}\chi_\Theta = M^2 U\Big\{4\sin^3\alpha\cos\Theta + 2\sin\alpha(1 + 2\sin^2\alpha)\cos 2\Theta$$
$$+ \frac{2}{3}\sin 2\alpha\cos(2\Theta - \alpha) - \frac{2}{3}\sin\alpha\cos 2(\Theta - \alpha)$$
$$- \frac{8}{3}\sin\alpha\cos(4\Theta - 2\alpha) - \frac{5}{3}\sin\alpha\sin 2\alpha\sin\Theta$$
$$- \frac{13}{12}\sin(\Theta - \alpha) + \frac{1}{4}\sin(\Theta + \alpha) + 2\sin^2\alpha\sin(2\Theta - \alpha)$$
$$- \frac{1}{4}\sin 3(\Theta - \alpha) + \left(\frac{3}{2} + 6\sin^2\alpha\right)\sin(3\Theta - \alpha)$$
$$- \frac{5}{12}\sin(5\Theta - 3\alpha)\Big\} \quad \ldots (42)$$

Rechnet man aus (33) $\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\Theta}$ aus, so hat man für $r = a$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\Theta} = M^2 U\Big\{-2\sin\alpha(1 + 2\sin^2\alpha)\cos 2\Theta$$
$$+ \frac{1}{3}\sin 2\alpha\cos(2\Theta - \alpha) + \frac{4}{3}\sin\alpha\cos 2(\Theta - \alpha)$$
$$+ \frac{8}{3}\sin\alpha\cos(4\Theta - 2\alpha) - \frac{1}{3}\sin\alpha\sin 2\alpha\sin\Theta$$
$$+ \frac{5}{12}\sin(\Theta - \alpha) - \frac{1}{4}\sin(\Theta + \alpha) + \frac{3}{4}\sin 3(\Theta - \alpha)$$
$$- \left(\frac{3}{2} + 6\sin^2\alpha\right)\sin(3\Theta - \alpha) + \frac{5}{12}\sin(5\Theta - 3\alpha)\Big\}$$
$$\ldots (43)$$

(42) und (43) zusammen ergeben die dem Kompressibilitätseinfluß zuzuschreibende Geschwindigkeitskorrektur am Kreise. Bezeichnen wir

$$\varphi = \varphi_2 + \chi,$$

so haben wir die gesuchte Größe

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\Big|_{r=a} = M^2 U\Big\{-\sin(\Theta - \alpha)\left[\frac{2}{3} + 4\sin^2\alpha\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\sin 3(\Theta - \alpha) + \frac{8}{3}\sin\alpha\cos 2(\Theta - \alpha)\Big\} \quad \ldots (44)$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat von Poggi.

Es sei hier noch erwähnt, daß man das Potential φ natürlich auch im ganzen Außengebiet des Kreises nach den hier gebrachten Formeln angeben kann. Dieses ist

$$\varphi = M^2 U a\Big\{\cos(\Theta - \alpha)\left[\frac{13\,a}{12\,r} - \frac{a^3}{2\,r^3} + \frac{a^5}{12\,r^5}\right.$$
$$\left.+ \frac{4\,a}{r}\sin^2\alpha\left(1 + \ln\frac{r}{a}\right)\right] + \cos 3(\Theta - \alpha)\left[-\frac{a}{4\,r} + \frac{a^3}{12\,r^3}\right]$$
$$+ \sin 2(\Theta - \alpha)\sin\alpha\left[\frac{1}{2} + \frac{2\,a^2}{3\,r^2} + \frac{a^4}{6\,r^4} + \frac{2\,a^2}{r^2}\ln\frac{r}{a}\right]\Big\} \quad (45)$$

Durch das Hinzufügen des Ausdruckes (44) zur inkompressiblen Geschwindigkeit verschieben sich die Staupunkte, denn in den Staupunkten der inkompressiblen Strömung wird (44) gleich

$$M^2 U\left\{\frac{11}{6}\sin\alpha + \frac{2}{3}\sin^3\alpha\right\} \quad \ldots (46)$$

Um wieder eine Strömung mit dem ursprünglichen Staupunkt in $(a, 0)$ zu erhalten, müssen wir eine Zirkulation überlagern, die eine (46) entgegengesetzte Geschwindigkeit am Kreise erzeugt. Wir erhalten dann als endgültige Geschwindigkeit w_k am Kreise

$$w_K = -2\,U\{\sin(\Theta-\alpha)+\sin\alpha\} + M^2 U\Big\{-\Big[\frac{2}{3}+4\sin^2\alpha\Big]\sin(\Theta-\alpha)+\frac{1}{2}\sin 3(\Theta-\alpha) + \frac{8}{3}\sin\alpha\cos 2(\Theta-\alpha)-\frac{11}{6}\sin\alpha-\frac{2}{3}\sin^3\alpha\Big\} \quad (47)$$

IV. Strömung um ein beliebiges Profil.

In der $\zeta = \xi + i\,\eta$-Ebene sei ein Profil gegeben, Bild 2, das durch konforme Abbildung des Kreises $r = a$ der z-Ebene mit Hilfe der Funktion

$$\zeta = f(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \quad (48)$$

entstanden zu denken ist. Die Anströmgeschwindigkeit sei wieder U und bilde mit der positiven ξ-Achse den Winkel α. Die Abbildungsfunktion sei so gewählt, daß der hintere Staupunkt der inkompressiblen Strömung um den Kreis in die Hinterkante des Profils übergeht.

Das Potential der inkompressiblen Strömung ist wieder Φ nach Formel (21) und es ist, wenn wir mit u, v, w die auf das Profil bezüglichen Größen bezeichnen und zur Unterscheidung die Größen am Kreise in der z-Ebene mit u_k, v_k und w_k bezeichnen

$$u - i\,v = \frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{d\Phi}{dz} : \frac{d\zeta}{dz} = \frac{u_k - i\,v_k}{f'(z)} \quad (49)$$

Weiter beachten wir noch, daß

$$f'(z) = 1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2\,c_2}{z^3} - \ldots \quad (50)$$

ist und daher

$$\frac{1}{f'(z)} = 1 + \frac{k_1}{z^2} + \frac{k_2}{z^3} + \ldots \quad (51)$$

wo die $k_1, k_2, \ldots$ wieder Konstanten sind.

Betrachten wir nun das Integral (16)

$$J = \int_0^s \frac{w^2}{2}\sin(2\gamma-\tau)\,ds, \quad (52)$$

so sehen wir, daß es wegen

$$u - i\,v = w\,e^{-i\gamma} \quad (53)$$

und

$$d\zeta = e^{i\tau}\,ds, \quad (54)$$

wo τ der Winkel ist, den das Element ds des Integrationsweges mit der ξ-Achse einschließt, gleich dem Imaginärteil des Integrals

$$-\frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{\zeta}(u-i\,v)^2\,d\zeta \quad (55)$$

ist. ζ_0 ist der $s = 0$ entsprechende Punkt.

Dieses Integral läßt sich auch so darstellen

$$-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{(u_k-i\,v_k)^2}{f'(z)}\,dz = -\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}U^2\Big\{e^{-i\alpha}+\frac{2\,i\,a\sin\alpha}{z} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z^2}\Big\}^2\Big\{1+\frac{k_1}{z^2}+\frac{k_2}{z^3}+\ldots\Big\}\,dz \quad (56)$$

Man sieht sofort, daß das einzige Glied, das bei der Integration eine mehrdeutige Funktion ergibt,

$$-U^2\,2\,i\,a\,e^{-i\alpha}\sin\alpha\ln\frac{z}{z_0} \quad (57)$$

ist; der Imaginärteil dieses Gliedes ist gleich

$$-2\,U^2 a\sin^2\alpha\cdot\Theta \quad (58)$$

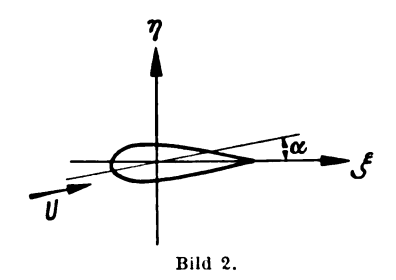


Bild 2.

Die Mehrdeutigkeit von J im Falle eines Profils ist also genau dieselbe wie beim Kreise nach Formel (31), wie man es bei der gleichen Zirkulation in beiden Fällen auch nicht anders erwarten kann.

Um das Potential eindeutig zu machen, müssen wir

$$M^2\,2\,a\sin^2\alpha\Big[(u-U\cos\alpha)\ln\frac{r}{a}+(v-U\sin\alpha)\cdot\Theta\Big] \quad (59)$$

hinzufügen, wobei u und v jetzt als Funktionen von ξ und η in der ζ-Ebene gegeben sind. Man überzeugt sich wieder leicht, daß der Ausdruck (59) der Laplaceschen Gleichung genügt.

Im folgenden wollen wir uns auf die Rechnung an der Kontur des Profils beschränken. Es ist

$$\varphi_2 = \frac{M^2}{U^2}(v-U\sin\alpha)\cdot J + M^2\,2\,a\sin^2\alpha\Big[(u-U\cos\alpha)\ln\frac{r}{a}+(v-U\sin\alpha)\cdot\Theta\Big].$$

Berechnet man $\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$, so hat man

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \frac{M^2}{U^2}\Big\{v_n\cdot J+(v-U\sin\alpha)\,J_n\Big\} + M^2\,2\,a\sin^2\alpha\Big\{u_n\ln\frac{r}{a}+(u-U\cos\alpha)\frac{\partial\ln r}{\partial n} + v_r\cdot\Theta+(v-U\sin\alpha)\cdot\Theta_n\Big\} \quad (60)$$

Da

$$\left.\begin{aligned} u_n &= v_s \\ v_r &= -u_s \\ \frac{\partial\ln r}{\partial n} &= -\Theta_s \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

und am Profil wegen $r = a$

$$\frac{\partial\ln r}{\partial s} = \Theta_n = 0$$

ist, so können wir für (60) auch schreiben

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{M^2}{U^2}\Big\{-u_s\cdot J-(v-U\sin\alpha)\frac{w^2}{2}\cos\tau\Big\} + M^2\,2\,a\sin^2\alpha\{-(u-U\cos\alpha)\cdot\Theta_s-u_s\cdot\Theta\} \quad (62)$$

Man wird zweckmäßigerweise bei der Rechnung u, v, w nicht in den Variablen ξ und η ausdrücken, sondern auf die Variable Θ, den Winkel in der Kreisebene z, umrechnen, desgleichen auch $\sin\tau$, $\cos\tau$ und das Integral

$$J = \int_0^s w^2\sin\tau\,ds = \int_0^\Theta\frac{w_k^2}{|f'(z)|}\sin\tau\cdot a\,d\Theta \quad (63)$$

Die Ableitungen nach s ersetzt man dann durch die Ableitungen nach Θ und beachtet, daß

$$\frac{ds}{a\,d\Theta} = |f'(z)| = \frac{1}{a}\sqrt{\xi_\Theta^2+\eta_\Theta^2} \quad (64)$$

ist. (62) wird dann zu

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \frac{M^2}{U^2}\Big\{-\frac{u_\Theta\cdot J}{\sqrt{\xi_\Theta^2+\eta_\Theta^2}}-(v-U\sin\alpha)\frac{w^2}{2}\cos\tau\Big\} + \frac{M^2\,2\,a\sin^2\alpha}{\sqrt{\xi_\Theta^2+\eta_\Theta^2}}\{-(u-U\cos\alpha)-u_\Theta\cdot\Theta\} \quad (65)$$

Für $\frac{\partial \varphi_2}{\partial s}$ kann man schreiben

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s} = \frac{M^2}{U^2}\left\{\frac{v_\Theta \cdot J}{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}} + (v - U \sin \alpha)\frac{w^2}{2}\sin \tau\right\}$$
$$+ \frac{M^2\, 2a \sin^2\alpha}{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}}\{v_\Theta \cdot \Theta + (v - U\sin\alpha)\} \quad \ldots (66)$$

Nun müssen wir eine Potentialfunktion zu φ_2 hinzufügen, die $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ am Profil zum Verschwinden bringt. Da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}|f'(z)| = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}\cdot\frac{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}}{a} \quad \ldots (67)$$

und

$$\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\cdot\frac{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}}{a} \quad \ldots (68)$$

ist, so multiplizieren wir den Ausdruck (65) mit $\frac{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}}{a}$ und drücken das Produkt, das man im allgemeinen für eine bestimmte Anzahl von Punkten am Profil berechnet, durch harmonische Analyse in Form einer endlichen Summe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_k a_k \sin k\Theta + b_k \cos k\Theta \quad \ldots (69)$$

aus und berechnen

$$\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \sum_k - a_k \cos k\Theta + b_k \sin k\Theta \quad \ldots (70)$$

Um diese am Kreise berechnete tangentielle Geschwindigkeit auf das Profil zu übertragen, multiplizieren wir sie gemäß (68) mit $\frac{a}{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}}$ und addieren den Ausdruck

$$\frac{a}{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}}\sum_k - a_k \cos k\Theta + b_k \sin k\Theta \quad \ldots (71)$$

zu (66). Da die Summe von (66) und (71) für $\Theta = 0$ einen von Null verschiedenen Wert C ergeben wird, der durch die Verlagerung dse Staupunktes hervorgerufen wird, so müssen wir noch eine Lösung der homogenen Gleichung — eine Zirkulation — überlagern, damit der Staupunkt in die Hinterkante des Profils fällt. Diese Zirkulation gibt am Kreise eine konstante Geschwindigkeit, die für das Profil gleich

$$C\,\frac{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}\,/_{\Theta=0}}{\sqrt{\xi_\Theta^2 + \eta_\Theta^2}} \quad \ldots (72)$$

sein wird. Diese Geschwindigkeit muß zur vorher berechneten Summe hinzugefügt werden, um die Kompressibilitätskorrektur nach der zweiten Janzen-Rayleighschen Näherung zu erhalten, die allen Randbedingungen genügt. Die Zirkulation der kompressiblen Strömung ist um den Betrag von (72) größer als die Zirkulation der inkompressiblen Strömung und ergibt daher einen dementsprechend größeren Auftrieb.

V. Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, wie man die zweite Janzen-Rayleighsche Näherung der kompressiblen Strömung für ein beliebiges Profil berechnen kann, wenn man die Abbildungsfunktion des Profils auf den Kreis und ihre Ableitung nur am Profil selbst kennt, indem man die ganze Rechnung nur an der Profilkontur durchführt, ohne in das Feld außerhalb des Profils zu gehen. Im Falle der Umströmung des Kreiszylinders mit Zirkulation wird das Verfahren vorgerechnet.

VI. Schrifttum.

O. Janzen, Beitrag zu einer Theorie der stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten. Phys. Zeitschr. Bd. 14 (1913), S. 639.

Lord Rayleigh, On the flow of compressible fluid past an obstacle. Phil. Mag. 1916, Ser. 6, Bd. 32, 1.

L. Poggi, Campo di velocita in una corrente piana di fluido compressibile. Parte I. L'Aerotecnica Bd. 12 (1932), S. 1579. Parte II. L'Aerotecnica Bd. 14 (1934), S. 532.

C. Kaplan, Compressible flow about symm. Joukowski profils. Nat. Adv. Comm. for Aeron. Rep. 621 1938.

C. Kaplan, Two-dimensional subsonic compressible flow past elliptic cylinders. Nat. Adv. Comm. for Aeron. Rep. 624, 1938.

J. Imai, On the flow of a comp. fl. p. a. circular cylinder. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan Bd. 20 (1938), S. 636; Bd. 23 (1941), S. 180.

E. Pistolesi, Sulla corrente di fl. compressibile att. ad un cilindro circulare. Aerotecnica Bd. 19 (1939), S. 1064.

K. Tamada and Y. Saito, Note on the flow of a compr. fluid past a circular cylinder. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan Bd. 21 (1939), S. 403.

J. Imai and T. Aihara, On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder. Rep. of the Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. University No. 194, Auf. 1940.

S. Tomotika and K. Tamada, Flow of compr. fluid past an elliptic cylinder. Rep. of the Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. University No. 201, Nov. 1940.

S. Tomotika and H. Umemoto, On the subsonic flow of a compr. fluid past a symm. J. aer. Report of the Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ. Bd. 16 (1941), S. 35

Beiträge zur Profilforschung.

Von H. B. Helmbold und F. Keune.

III. Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung in erster Näherung, mit einer Korrektur in der Umgebung der Profilnase*).

Von F. Keune.

Bericht des Entwurfsbüro der Ernst Heinkel Flugzeugwerke, Seestadt Rostock.

Für die einzelnen Dicken- und Wölbungsanteile, aus denen die Profilkontur zusammengesetzt ist, wird eine gute Näherung für die Quell- und Wirbelverteilungen angegeben, und es werden die von diesen auf der Belegungslinie induzierten Geschwindigkeitskomponenten bestimmt. In der Umgebung der Profilnase wird eine besondere Untersuchung durchgeführt.

Gliederung.

1. Einleitung.

Die bisher bekannten Methoden zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung (bzw. Druckverteilung) stützen sich auf die konforme Abbildung des Profiles, etwa auf den Kreis. Die Rechnung ist deshalb nur für einige wenige Profilformen, deren Abbildungsfunktionen einfach sind, mit einem erträglichen Aufwand an Rechenarbeit exakt durchführbar. Für allgemeine Profilformen wird man auf das Näherungsverfahren von Theodorsen zurückgreifen müssen, das ziemlich zeitraubend und für Nichtmathematiker völlig undurchsichtig ist. Die Näherung wird bei allen mit der konformen Abbildung arbeitenden Verfahren um so besser sein, je genauer das untersuchte Profil bei der gewählten Abbildungsfunktion in den Kreis übergeht. Die Genauigkeit ist dabei nur untergeordnet vom Dickenverhältnis $\frac{d}{t} = \delta$ abhängig, so daß sich der Rechenaufwand für normale Profile, deren Dicke und deren Wölbung klein gegenüber der Profiltiefe sind, nicht von dem dicker Profile unterscheidet.

Aber gerade die Tatsache, daß nahezu alle zu untersuchenden Profile nur eine kleine maximale Profildicke δ und eine schwache Wölbung φ_{mx} haben[1]), gibt die Möglichkeit der Entwicklung eines rasch durchführbaren übersichtlichen Näherungsverfahrens, das für dünne Profile genauer wird als für dicke, und das im Grenzwert verschwindender Dicke und Wölbung zu exakten Ergebnissen führt. Eine Verbesserung der Genauigkeit für dicke Profile ist mit größerem Rechenaufwand für eine 2. Näherung (vgl. Beitrag V und VI)[2]) stets durchführbar. Hier soll auf der Profilkontur statt der Gesamtgeschwindigkeit die zur Anblasgeschwindigkeit hinzukommende Zusatzgeschwindigkeit bestimmt werden, die von der Profilform $y = f(x)$ (Tropfen und Wölbung), der Profildicke δ, der Wölbung φ_{mx} und vom Anstellwinkel α^* abhängt. Setzen wir noch kleine Anstellwinkel $\alpha^* \sim \delta$ bei den folgenden Überlegungen voraus, so können wir mit $\alpha^* = \left(\frac{\alpha^*}{\delta}\right)\delta$ und ebenso mit $\varphi_{mx} = \left(\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\right)\delta$ den Anstellwinkel und die Profilwölbung durch das Dickenverhältnis ausdrücken.

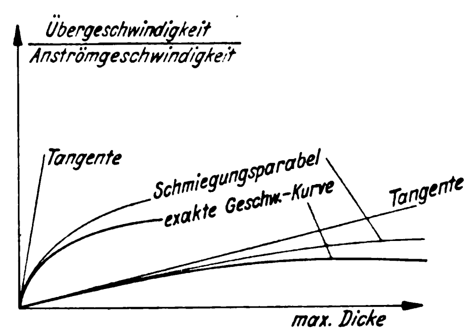


Bild III, 1. Zur Erklärung des Näherungsverfahrens.

Dann sind alle Übergeschwindigkeiten an einer bestimmten Stelle $x = x_1$ der Profilkontur eines bestimmten affinveränderlichen Profiles nur von der Profildicke δ abhängig. Tragen wir sie über δ auf, so erhalten wir für jede Stelle dieses Profiles eine Kurve (Bild III, 1), die für $\delta = 0$ mit einer bestimmten, von der Profilform abhängigen Tangente durch den Wert Null der Geschwindigkeit hindurchgeht. Die Richtung dieser Tangente ist der exakte Grenzwert der Geschwindigkeit:

$$\left(\frac{\text{Übergeschwindigkeit an einer Stelle}}{\text{Dickenverhältnis} \times \text{Anblasgeschwindigkeit}}\right)_{\delta=0} \quad \text{(III, 1)}$$

der für endliche Dicken $\delta > 0$ nur noch eine **1. Näherung** für die Geschwindigkeit angibt. Diese Näherung wird um so besser sein, je kleiner δ ist, oder je besser sich die Geschwindigkeitskurve an diese Tangente anschmiegt. Ist der Unterschied zwischen der Tangente und der Schmiegungsparabel[3]) im Punkte $\delta = 0$ an die Geschwindigkeitskurve (Bild III, 1) sehr klein, etwa proportional δ^m $(m \geq 1)$, so soll nur die Tangentenrichtung multipliziert mit δ in diesem Rechenverfahren die Geschwindigkeit angeben. Weicht jedoch die Schmiegungsparabel für endliche Profildicken stärker von der Tangente ab $(m < 1)$, so werden wir die Geschwindigkeit aus der Schmiegungsparabel berechnen, die bei den hier gewählten Profilformen stets nur Abweichungen von der nächst höheren Schmiegungskurve hat, die proportional δ^m $(m \geq 1)$ sind. Es wird sich später zeigen, daß die Werte der Geschwindigkeit nur in der Nähe der Profilnase und der

*) P 31 13.

[1]) Die Grenze des Anwendungsbereichs liegt etwa bei $\delta \leq 0{,}2$ und $\varphi_{mx} < 0{,}1$.

[2]) Erscheinen demnächst.

[3]) Die Schmiegungsparabel hat in $\delta = 0$ die gleiche Tangente und die gleiche Krümmung wie die exakte Geschwindigkeitskurve, sie gibt also die Änderung der Tangentenrichtung der exakten Geschwindigkeitskurve an der Stelle $\delta = 0$.

Profilhinterkante aus der Schmiegungsparabel entnommen werden müssen, an allen anderen Stellen liefert schon die Tangente genügend genaue (vgl. den Beitrag I) Ergebnisse. Im Sonderfall der Ellipse gibt die Tangente im Dickenmaximum bei symmetrischer Anblasung sogar exakt die Übergeschwindigkeit

$$(u_{m\,x})_K = \left(\frac{u_{m\,x}}{\delta\, U_\infty}\right)_{\delta=0} \cdot \delta = \delta.$$

Die Übergeschwindigkeit an irgendeiner Stelle $x = x_1$ der Profilkontur hängt außerdem wesentlich von der gesamten Profilform ab. Gerade diese Abhängigkeit wird mit Gl. (III, 1) sehr gut erfaßt und kann nach einer kurzen und übersichtlichen Rechnung angegeben werden. Wir werden die Übergeschwindigkeit für jede einzelne der Dicken- und Wölbungsverteilungen bestimmen und erhalten nach ihrer durch die Profilform vorgeschriebenen Addition die gesuchte Übergeschwindigkeit auf die Dicke bezogen. Auf die gleiche Weise ist die Schmiegungsparabel in allen Punkten $x = x_1$, der vorgeschriebenen Profilform leicht abzuschätzen.

Alle Geschwindigkeitsverteilungen bzw. Druckverteilungen werden analytisch gegeben, so daß man für Grenzschichtrechnungen die Ableitung der Geschwindigkeit nicht auf graphischem Wege durchführen muß und die Rechenergebnisse in keinem Fall streuen können. Außerdem liefert das Näherungsverfahren schon ohne Korrektur an der Profilnase in jedem Fall qualitativ richtige Ergebnisse, die quantitativen Abweichungen von der exakten, aber unbekannten Geschwindigkeitsverteilung wachsen nur mit zunehmender Profildicke an und lassen sich im Bedarfsfall mit einer 2. Näherung (vgl. den Beitrag V und VI) abschätzen.

2. Die 1. Näherung der Geschwindigkeitsverteilung.

a) Für ein symmetrisches Profil ohne Anstellwinkel.

Wenn ein symmetrisches Profil von einem parallelen Luftstrom symmetrisch angeblasen wird, so wird der Luftstrom nicht durch den festen Körper des Profiles hindurchtreten, sondern in Richtung der Profiltangente abgedrängt werden müssen. Zerlegen wir die Anströmgeschwindigkeit U_∞ des Luftstroms in irgendeinem Punkt P_1 (Bild III, 2) der Profilkontur in die Komponenten $U_{\infty t}$ und $U_{\infty n}$ parallel der Tangente und der Normalen an das Profil, dann muß die Normalkomponente $U_{\infty n}$ durch eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeitskomponente u_n unwirksam gemacht werden, damit die Strömung nicht in das Profil eintritt. Diese Geschwindigkeitskomponente kann man sich so entstanden denken, daß im Innern des Körpers auch eine Strömung existiert, deren Normalkomponente u_n in jedem Punkte der Profilkontur entgegengesetzt gleich der Normalkomponente $U_{\infty n}$ der Anblasgeschwindigkeit ist. Diese Strömung wird von einer Quellsenkenverteilung auf der x-Achse induziert, die von der Profilnase bis zum Dickenmaximum auf beiden Seiten des Profiles nach außen gerichtete, von dort bis zum Profilende nach innen gerichtete Normalkomponenten u_n hat (Bild III, 2). An der Profilnase werden also Quellen, am Profilende Senken zu finden sein, der Übergang wird etwa im Dickenmaximum ξ_δ erfolgen.

Diese Quellsenkenverteilung induziert außerdem noch eine Geschwindigkeitskomponente u_t parallel der Profiltangente in gleicher Richtung wie $U_{\infty t}$, da die Quellsenkenströmung von den Quellen (Nase) zu den Senken (Hinterkante) verläuft, sie erhöht die Geschwindigkeit auf der Profilkontur. Damit ist die Quellsenkenströmung ein vollwertiger Ersatz des festen Körpers, sie verläuft als selbständige Strömung beim Vorhandensein einer Parallelströmung ganz im Innern des Körpers; ihre äußerste Stromlinie ist die Profilkontur, und sie bedingt im Außenraum des Profiles die notwendige Verdrängungsströmung. Da infolge der Normalenbedingung $U_{\infty n} + u_n = 0$ auch keine Flüssigkeit aus der geschlossenen Profilkontur nach außen strömen kann, muß die ganze von der Quellstrecke abgegebene Flüssigkeit von der Senkenstrecke aufgenommen werden, die Gesamtergiebigkeit der Singularitätenstrecke, die innerhalb des Profiles liegen muß, ist Null.

Die Dichte $\frac{dQ}{dX} = q$ der Quellbelegung wird um so größer sein müssen, je größer die Normalkomponente $U_{\infty n}$ der Anströmgeschwindigkeit ist. Sie wird also von der Größe der Anströmgeschwindigkeit U_∞ und der Neigung der Profilkontur abhängen und ist für genügend dünne Profile von der Größenordnung des Dickenverhältnisses δ.

Solange die Neigung φ der Profilkontur gegenüber der Profilachse — wie wir die x-Achse bezeichnen wollen — sehr klein ist, werden die Normalkomponenten eines dünnen Profiles $U_{\infty n} = U_\infty \sin\varphi$ viel kleiner als die Anblasgeschwindigkeit bleiben ($U_{\infty n} \ll U_\infty$). Eine Ausnahme bildet nur die Umgebung der Profilnase für alle Profile, welche einen Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0$ haben, so daß die Profilnase später besonders zu untersuchen ist. Die Normalkomponente $U_{\infty n}$ soll durch eine auf der Profilachse angebrachte Quellverteilung vernichtet werden, das heißt, die Quellen müssen im Punkt P_1 (Bild III, 2) eine Normalgeschwindigkeit $u_n = -U_{\infty n}$ induzieren, für die ebenfalls $u_n \ll U_\infty$ ist. Die Quelldichte q an einer Stelle $x = x_1$ ist durch den Geschwindigkeitssprung der v-Komponenten

$$q = v_{AS} - v_{AD} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III, 2)}$$

an dieser Stelle x_1 bestimmt (Index A-Achse, S-Saugseite, D-Druckseite). Nehmen wir nun an, daß sich diese v-Komponenten zwischen Achse und Profilkontur nur sehr wenig ändern ($v_A - v_y \sim \delta^2\, U_\infty$), so erhalten wir für dünne Profile ($\delta \to 0$) mit $v_{AS} = v_y$ und $v_{AD} = -v_y$ (Bild III, 2) die

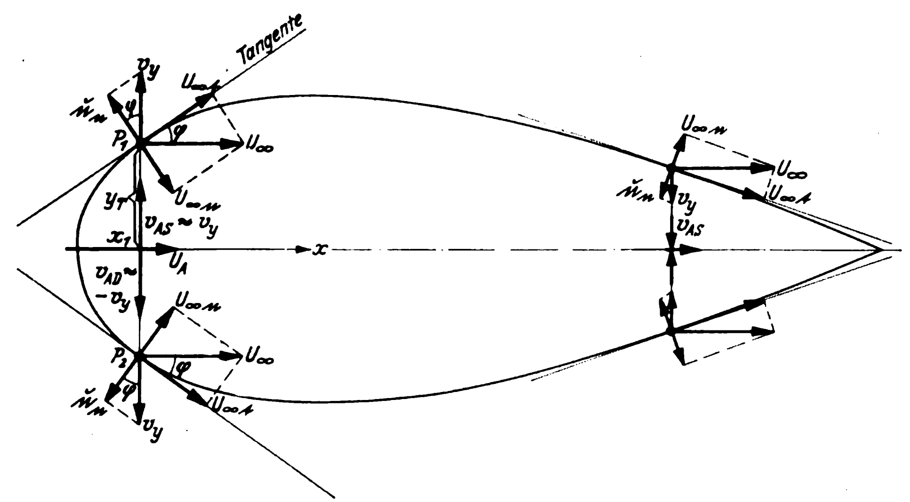


Bild III, 2. Die Zerlegung der Geschwindigkeit auf der Profilkontur zur Bestimmung der Quellverteilungen.

Quelldichte $q = 2\,v_y$. Die Normalkomponente $u_n = v_y \cos\varphi$ der Geschwindigkeit v_y gibt mit dieser Beziehung und $u_n = U_{\infty n} = U_\infty \sin\varphi$ die Quelldichte

$$q = 2\,U_\infty \operatorname{tg}\varphi = 2\,U_\infty \frac{d\,y_T}{d\,x} = 2\,U_\infty\, y'_T. \qquad \text{(III, 3)}$$

Die Quellverteilung ist also für dünne Profile mit der 1. Ableitung der Profilkontur bestimmt. Die von den Quellen induzierte u-Komponente u_A ist gegenüber der Anblasgeschwindigkeit als klein vorausgesetzt ($u_A \ll U_\infty$) und deshalb bei der Berechnung der Quelldichte vernachlässigt worden[4]). Diese Komponente der Zusatzgeschwindigkeit wird aber für die Berechnung der Gesamtgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{(U_\infty + u_y)^2 + v_y^2} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \text{(III, 4)}$$

gebraucht. Da im Rahmen der vorliegenden Näherung $u_y \approx u_A$ und $v_y \approx v_{AS}$ ist und außerdem $u_A \sim \delta\,U_\infty$ und $v_A \sim \delta\,U_\infty$ vorausgesetzt wird, ist die v-Komponente v_A sehr viel kleiner als die u-Komponente $(U_\infty + u_A)$, so daß für kleine Profildicken gilt

$$w_{TI} = U_\infty + u_A \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \text{(III, 5)}$$

(Index T = Tropfen, I = 1. Näherung).

Es bleibt nur noch die Berechnung der Übergeschwindigkeit u_A aus der Quellverteilung q, die durch Gl. (III, 3) mit dem Differentialquotienten y'_T der Profilkontur gegeben ist. Da die Profilkontur und damit auch alle ihre Ableitungen aus der Summe von einzelnen Dickenverteilungen $\frac{y_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}}$ besteht (vgl. Beitrag II), welche mit Dickenkonstanten $\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}$ multipliziert und dann addiert die Profilkontur ergeben, zerfällt auch die Quellverteilung in die gleiche Anzahl von Verteilungen. Zu jeder Dickenverteilung $\frac{y_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}}$ gehört die mit der Anblasgeschwindigkeit dimensionslos gemachte Quellverteilung $\frac{q_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty}$, die mit der gleichen Dickenkonstanten $\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}$ zu multiplizieren ist. Ein Quellelement $q_{\nu\mu}(x')\,dx'$ an der Stelle x' induziert in einem Punkt $P\,(x;\,y_T)$ (Bild III, 4) ein Geschwindigkeitselement $d\,w_{\nu\mu} = \frac{1}{2\pi r} \times q_{\nu\mu}(x')\,dx'$. Die gesuchte u-Komponente $u_{\nu\mu}(y_T)$ im Punkt P finden wir damit ($d\,u_{\nu\mu} = d\,w_{\nu\mu} \cos\tau$) durch Integration über alle zwischen $x' = -1$ und $x' = +1$ angebrachten Quellelemente:

[4]) Die hier vorgenommenen Vernachlässigungen sind von höherer Ordnung klein, und zwar sind sie proportional δ^2 und werden später (in Beitrag V und VI) berücksichtigt werden, vgl. auch unter III, 3

Zu den gleichen Quellverteilungen der 1. Näherung kommt man mit Hilfe einer einfachen Überlegung. Im Innern eines sehr dünnen Profiles sei die Geschwindigkeit überall nahezu konstant (Bild III, 3): $U_\infty + u_A \approx U_\infty$. Dann strömt durch den Querschnitt $2\,y_1$ die Flüssigkeitsmenge $2\,y_1\,U_\infty$ und durch den Querschnitt $2\,y_2$ die Menge $2\,y_2\,U_\infty$, die im Falle ungleicher Querschnitte ($y_1 \lesseqgtr y_2$) von der ersten verschieden ist. Da die Kontinuität gewahrt bleiben muß, wird auf der Strecke $\Delta x = x_2 - x_1$ zwischen den beiden Querschnitten eine (positive oder negative) Quellbelegung $q(x)\,\Delta x$ mit der Quelldichte $q(x)$ anzubringen sein, welche diese zusätzliche Flüssigkeitsmenge erzeugt oder in sich aufnimmt. Es muß also sein

$$2\,U_\infty (y_2 - y_1) = 2\,U_\infty\,\Delta y = q(x)\,\Delta x;$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x \to 0} = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{2}\,\frac{q(x)}{U_\infty}.$$

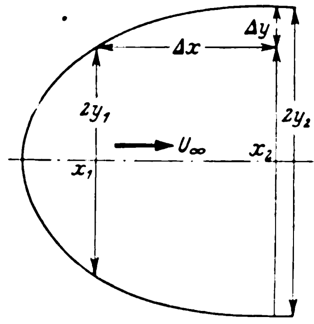


Bild III, 3. Zur Berechnung der Quellverteilung nach Föttinger.

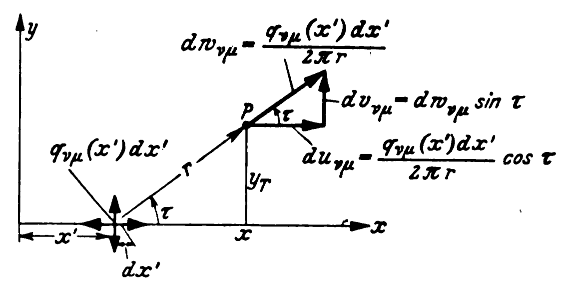


Bild III, 4. Die Komponenten der Geschwindigkeit einer Einzelquelle.

$$\frac{u_{\nu\mu}(y_T)}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{q_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu}\,U_\infty}\,\frac{\cos\tau\,d\,x'}{r}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{y'_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu}}\,\frac{x - x'}{(x - x')^2 + y_T^2}\,d\,x' \qquad \text{(III, 6)}$$

Da in der vorliegenden Näherung nur die Zusatzgeschwindigkeiten auf der Profilachse $y_T = 0$ berücksichtigt werden (Gl. (III, 5)), ist die zur Dickenverteilung $\frac{y_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}}$ gehörende Übergeschwindigkeit

$$\frac{u_{\nu\mu}(0)}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} = \frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{y'_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu}}\,\frac{d\,x'}{x - x'}, \qquad \text{(III, 7)}$$

die v-Komponente ist natürlich die Quelldichte:

$$\frac{v_{\nu\mu}(0)}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} = \frac{v_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} = \frac{1}{2}\,\frac{q_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} \; . \; . \; . \qquad \text{(III, 8)}$$

Diese Zusatzgeschwindigkeiten auf der Profilachse sind für alle Dickenverteilungen berechnet und in Tafel III, 1 zusammengestellt worden. Während die v-Komponenten nur auf der Quellstrecke ($-1 \leq x' \leq +1$) von Null verschieden sind, treten die u-Komponenten längs der ganzen x-Achse auf und klingen erst für $x' = \pm\infty$ auf Null ab. Die Übergeschwindigkeit u_A des ganzen symmetrischen Profiles zwischen $x' = -1$ und $x' = +1$ ist durch die Summe der mit den Dickenkonstanten $\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}$ multiplizierten u-Komponenten bestimmt und wird für den Tropfen mit u_T bezeichnet:

$$\frac{u_A}{U_\infty} = \frac{u_T}{U_\infty} = \delta\left(\frac{d_{12}}{\delta}\,\frac{u_{12}}{d_{12}\,U_\infty} + \frac{d_{a0}}{\delta}\,\frac{u_{a0}}{d_{a0}\,U_\infty} + \ldots\right)$$

$$= \delta\,\Sigma\,\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}\,\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} \; . \; . \qquad \text{(III, 9)}$$

In Tafel III, 1 sind außerdem die Übergeschwindigkeiten

$$\frac{u_\nu}{d_\nu\,U_\infty},\; \frac{v_\nu}{d_\nu\,U_\infty} \text{ und } \frac{u_\sigma}{d_\sigma\,U_\infty},\; \frac{v_\sigma}{d_\sigma\,U_\infty}$$

in allgemeiner Form[5]) angegeben.

Die Zusatzgeschwindigkeiten $\frac{u_T}{\delta\,U_\infty}$ (vgl. Gl. (III, 9)) sind die exakten Grenzwerte für das Dickenverhältnis $\delta = 0$. Die Druckverteilung der 1. Näherung ist mit Gl. (III, 5) und Gl. (III, 9) für symmetrische Profile bei symmetrischer Anströmung ($\alpha^* = 0$)

$$\left(\frac{\Delta p}{q}\right)_{I0} = 1 - \left(\frac{w_{TI}}{U_\infty}\right)^2 = 1 - \left(1 + \frac{u_T}{U_\infty}\right)^2 \qquad \text{(III, 10)}$$

Diese Näherung (Gl. (III, 5), (III, 9) und (III, 10)) führt nur dann auch zu quantitativ richtigen Ergebnissen, wenn die Übergeschwindigkeit $\frac{u_T}{U_\infty}$ dem Betrage nach sehr viel kleiner als Eins ist $\left(\left|\frac{u_T}{U_\infty}\right| \ll 1\right)$. Ausgenommen bleiben demnach die Umgebung des vorderen und hinteren Stau-

[5]) Die Berechnung der allgemeinen Formeln ist von meinem Mitarbeiter F. Kalscheuer durchgeführt worden.

Tafel III, 1. Die von den Quellverteilungen induzierten Übergeschwindigkeiten in der 1. Näherung.
Vgl. Zahlentafel III, 1 bis III, 3. Vgl. auch das zugehörige Bild III, 15.

$$\left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_1 = 1 + \left(\frac{u_T}{\delta U_\infty}\right)_1 \delta \qquad \frac{u_T}{\delta U_\infty} = \frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha} U_\infty} \frac{d_{0\alpha}}{\delta} + \frac{u_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0} U_\infty} \frac{d_{\alpha 0}}{\delta} + \ldots \text{ usw.}$$

$$\frac{q_{\nu\mu}}{\delta U_\infty} = 2 \frac{v_T}{\delta U_\infty} = 2 \left(\frac{v_{0\alpha}}{d_{0\alpha} U_\infty} \frac{d_{0\alpha}}{\delta} + \frac{v_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0} U_\infty} \frac{d_{\alpha 0}}{\delta} + \ldots \text{ usw.}\right)$$

	Dickenordinaten.	Störgeschwindigkeiten des Quellensystems auf der x-Achse.		Bemerkungen.
$\nu\mu$	$\frac{y_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}}$ [1]) (vgl. Tafel II, 1)	$\frac{v_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty} = \pm \frac{1}{2} \frac{q_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty}$ [1])	$\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty}$ [2])	
0α	$\pm (1+x)(1-x)^2$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\mp (1-x)(1+3x)$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\frac{4}{\pi}\left[1-\frac{3}{2}x+\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right) ln \left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert\right]$	
$\alpha 0$	$\pm (1-x)(1+x)^2$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\pm (1+x)(1-3x)$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\frac{4}{\pi}\left[1+\frac{3}{2}x+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right) ln \left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert\right]$	
12	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(1-x)^2$	$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1-x) \times (2+3x)$	$\frac{1}{4}-2x+\frac{3}{2}x^2 \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}(x-1)\left(1+\frac{3}{2}x\right)$	
32	$\pm \sqrt{1-x^2}(1-x)^2(1+x)$	$\mp \sqrt{1-x^2}(1-x) \times (1+4x)$	$\frac{3}{2}-3x(1+x)+4x^3 \pm \sqrt{x^2-1}(1-x) \times (1+4x)$	
42	$\pm \sqrt{1-x^2}(1-x)^2(1+x)^2$	$\mp 5x\sqrt{1-x^2}(1-x) \times (1+x)$	$\frac{15}{8}-\frac{15}{2}x^2+5x^4 \pm 5x\sqrt{x^2-1}(1-x)(1+x)$	Für $\lvert x\rvert \leq 1$ ist $\sqrt{x-1}$ imaginär, dann ist nur der Realteil gültig.
53	$\pm x\sqrt{1-x^2}(1-x)^2(1+x)^2$	$\pm \sqrt{1-x^2}(1-x) \times (1+x)(1-6x^2)$	$\left(\frac{15}{4}-10x^2+6x^4\right)x \mp \sqrt{x^2-1}(1-x) \times (1+x)(1-6x^2)$	
123	$\pm \frac{9}{8}\sqrt{1-x^2}(1-x)^2\left(1+\frac{5}{9}x\right)$	$\mp \frac{13}{8}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1-x) \times \left(1+\frac{37}{13}x+\frac{20}{13}x^2\right)$	$\frac{19}{16}-\frac{31}{8}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{2}x^3+\frac{13}{8}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}(1-x) \times \left(1+\frac{37}{13}x+\frac{20}{13}x^2\right)$	
1	$\pm \sqrt{1-x^2}(1-x)$	$\mp \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1+2x)$	$1-2x+(1+2x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	
ν	$\pm x^{\nu-2}(1-x^2)^{3/2}$	$\pm x^{\nu-3}\sqrt{1-x^2}[\nu-2 - (\nu+1)x^2]$ $-1 \leq x \leq +1)$	$-(\nu+1)x^\nu+\frac{3}{2}(\nu-1)x^{\nu-2} + - \sum_{m=2}^{[\nu/2]}(\nu-2m+1)\frac{3}{8}x^{\nu-2m}\prod_{\mu=0}^{m-3}\frac{2\mu+1}{2\mu+6} + \pm x^{\nu-3}\sqrt{x^2-1}[(\nu+1)x^2+2-\nu]$	$\nu = 2; 3 \ldots, \left[\frac{\nu}{2}\right] \leq \frac{\nu}{2}$ aber ganzzahlig. $\prod_{\mu=0}^{m-3}\frac{2\mu+1}{2\mu+6} = 1$, wenn $m-3<0$. Vgl. auch obige Bemerkg.
σ	$\pm x^\sigma(1-x^2)$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\pm x^{\sigma-1}[\sigma + - (\sigma+2)x^2]$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sigma+2}{2}x^\sigma - \sum_{\mu=1}^{[\sigma/2]}\frac{\sigma-\mu+1}{4\mu^2-1}x^{\sigma-2\mu} - \frac{1}{4}x^{\sigma-1}[\sigma-(\sigma+2)x^2] ln \left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert\right\}$	Es ist $\sigma = 0; 1; 2 \ldots$, wenn entsprechend $\sigma = 0; \alpha; \beta \ldots$ ist. $\left[\frac{\sigma}{2}\right] \leq \frac{\sigma}{2}$, aber ganzzahlig.

[1]) Oberes Vorzeichen für Saug-, unteres für Druckseite, [2]) Oberes Vorzeichen für $x \leq -1$, unteres Vorzeichen für $x \leq +1$.

punktes des Profiles, also die Profilnase und die Hinterkante, die in diesem Beitrag (unter 3) besonders berechnet werden. Für den Grenzwert $\delta = 0$ ist exakt

$$\left(\frac{\Delta p}{\delta q}\right)_{\delta=0} = -2 \frac{u_T}{\delta U_\infty} \ldots \ldots \quad \text{(III, 11)}$$

Verfolgen wir nun noch den Sonderfall der Ellipse (vgl. Gl. (II, 21) bis (II, 23)). Das analytische Schukowski-Profil hat die Übergeschwindigkeit

$$\frac{u_1}{d_1 U_\infty} = 1 - 2x, \ldots \ldots \quad \text{(III, 12a)}$$

das an der y-Achse gespiegelte Profil (Gl. (II, 21b))

$$\frac{u_{-1}}{d_{-1} U_\infty} = 1 + 2x, \ldots \ldots \quad \text{(III, 12b)}$$

so daß für die Ellipse (Beitrag II) mit

$$\frac{d_{-1}}{\delta} = \frac{d_1}{\delta} = \frac{1}{2}\frac{d_e}{\delta}$$

die Übergeschwindigkeit mit dem exakten Grenzwert ($\delta = 0$)

$$\frac{u_e}{\delta U_\infty} = 1 \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III, 13)}$$

gegeben ist. In der 1. Näherung wäre also die Übergeschwindigkeit $\frac{u_e}{U_\infty} = \delta$ eine Konstante über die Profiltiefe. In Profilmitte ist das Ergebnis exakt, nach den Staupunkten hin wird das Ergebnis immer ungenauer, so daß jetzt eine Korrektur an den Profilenden notwendig wird.

b) Für die Skelettform und das gewölbte Profil ohne Anstellwinkel.

Wird die Skelettform eines Profiles von einem Luftstrom unter dem Anstellwinkel $\alpha_{s\,opt}$ des tangentialen Eintritts — von der Skelettsehne (der x-Achse) aus gemessen — angeblasen, so muß wieder wie beim symmetrischen Profil die Normalkomponente $U_{\infty n}$ (Bild III, 5) der Anblasgeschwindigkeit U_∞ von dem festen Körper des Skelettes vernichtet werden. Das geschieht dadurch, daß wir auf der Kurve $y_W(x)$, die zur nicht durchströmten Skelettlinie werden soll,

Zahlentafel III, 1. u-Geschwindigkeitsverteilungen (1. Näherung). (Vgl. Tafel III, 1 und III, 2.)

	Dickenanteile							Wölbungs- und Anstellwinkel-Anteile				
x	$\frac{u_{13}}{d_{13}\,U_\infty}$	$\frac{u_{33}}{d_{33}\,U_\infty}$	$\frac{u_{133}}{d_{133}\,U_\infty}$	$\frac{u_{43}}{d_{43}\,U_\infty}$	$\frac{u_{53}}{d_{53}\,U_\infty}$	$\frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha}\,U_\infty}$	$\frac{u_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}\,U_\infty}$	$\frac{u_1}{s_1\,U_\infty}$	$\frac{u_2}{s_2\,U_\infty}$	$\frac{u_3}{s_3\,U_\infty}$	$\frac{u_{13}}{s_{13}\,U_\infty}$	$\frac{u_R}{V_\infty}$
—1,00	3,750	—2,500	2,188	—0,625	0,250	— ∞	—0,637	0	0	0	0	∞
—0,95	3,504	—1,785	2,387	—0,820	0,376	—1,120	—0,766	0,625	—0,890	1,128	0,815	6,245
—0,90	3,265	—1,146	2,549	—0,915	0,375	—0,035	—0,793	0,872	—1,176	1,411	0,976	4,360
—0,80	2,810	—0,068	2,767	—0,877	0,152	1,038	—0,731	1,200	—1,440	1,536	0,935	3,000
—0,70	2,385	0,758	2,859	—0,599	—0,203	1,572	—0,577	1,428	—1,500	1,400	0,686	2,388
—0,60	1,990	1,356	2,837	—0,177	—0,557	1,854	—0,368	1,600	—1,440	1,152	0,352	2,000
—0,50	1,625	1,750	2,719	0,312	—0,813	1,967	—0,118	1,730	—1,298	0,866	0	1,732
—0,40	1,290	1,964	2,519	0,803	—0,921	1,962	0,153	1,832	—1,101	0,586	—0,330	1,530
—0,30	0,985	2,022	2,249	1,241	—0,870	1,875	0,438	1,906	—0,858	0,343	—0,610	1,365
—0,20	0,710	1,948	1,929	1,583	—0,672	1,718	0,727	1,960	—0,588	0,157	—0,823	1,225
—0,10	0,465	1,766	1,569	1,801	—0,370	1,512	1,008	1,990	—0,297	0,040	—0,955	1,106
0	0,250	1,500	1,188	1,875	0	1,273	1,273	2,000	0	0	—1,000	1,000
0,10	0,065	1,174	0,799	1,801	0,370	1,008	1,512	1,990	0,297	0,040	—0,955	0,905
0,20	—0,090	0,812	0,418	1,583	0,672	0,727	1,718	1,960	0,588	0,157	—0,823	0,818
0,30	—0,215	0,438	0,059	1,241	0,870	0,438	1,875	1,906	0,858	0,343	—0,610	0,730
0,40	—0,310	0,076	—0,264	0,803	0,921	0,153	1,962	1,832	1,101	0,586	—0,330	0,652
0,50	—0,375	—0,250	—0,531	0,312	0,813	—0,118	1,967	1,730	1,298	0,866	0	0,577
0,60	—0,410	—0,516	—0,733	—0,177	0,557	—0,368	1,853	1,600	1,440	1,152	0,352	0,500
0,70	—0,415	—0,698	—0,851	—0,599	0,203	—0,577	1,572	1,428	1,500	1,400	0,686	0,420
0,80	—0,390	—0,772	—0,872	—0,877	—0,152	—0,731	1,038	1,200	1,440	1,536	0,935	0,333
0,90	—0,335	—0,714	—0,781	—0,915	—0,376	—0,793	—0,035	0,872	1,176	1,411	0,976	0,229
1,00	—0,250	—0,500	—0,561	—0,625	—0,250	—0,637	— ∞	0	0	0	0	0

Zahlentafel III, 2. u-Geschwindigkeiten an der Profilnase. (Vgl. Tafel III, 1 und III, 2.)

	Dickenanteile				Wölbungsanteile			
○	○	○	○	○	○	○	○	○
x	$\frac{u_{33}}{d_{33}\cdot U_\infty}$	$\frac{u_{43}}{d_{43}\cdot U_\infty}$	$\frac{u_{53}}{d_{53}\cdot U_\infty}$	$\frac{u_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}\cdot U_\infty}$	$\frac{u_1}{s_1\cdot U_\infty}$	$\frac{u_2}{s_2\cdot U_\infty}$	$\frac{u_3}{s_3\cdot U_\infty}$	$\frac{u_{13}}{s_{13}\cdot U_\infty}$
—1,00	—2,500	—0,625	0,250	—0,637	0	0	0	0
—0,99	—2,350	—0,675	0,290	—0,686	0,282	—0,419	0,552	0,412
—0,98	—2,205	—0,715	0,310	—0,716	0,398	—0,584	0,764	0,565
—0,97	—2,065	—0,760	0,330	—0,734	0,486	—0,707	0,914	0,671
—0,96	—1,925	—0,791	0,360	—0,749	0,560	—0,806	1,033	0,753
—0,95	—1,785	—0,820	0,376	—0,766	0,625	—0,890	1,128	0,815
—0,94	—1,655	—0,848	0,380	—0,775	0,683	—0,961	1,203	0,864
—0,93	—1,521	—0,875	0,382	—0,786	0,735	—1,025	1,271	0,904
—0,92	—1,395	—0,895	0,390	—0,788	0,784	—1,081	1,332	0,935
—0 91	—1,270	—0,905	0,390	—0,791	0,829	—1,130	1,370	0,958
—0,90	—1,146	—0,915	0,375	—0,793	0,872	—1,176	1,411	0,976
—0,85	—0,573	—0,925	0,289	—0,776	1,052	—1,341	1,521	0,995
—0,80	—0,068	—0,877	0,152	—0,731	1,200	—1,440	1,536	0,935
—0,75	0,374	—0,760	—0,014	—0,664	1,322	—1,488	1,489	0,827
—0,70	0,758	—0,599	—0,203	—0,577	1,428	—1,499	1,399	0,686
—0,60	1,356	—0,177	—0,557	—0,368	1,600	—1,440	1,152	0,352
—0,50	1,750	0,312	—0,813	—0,118	1,730	—1,298	0,866	0

eine Singularitätenbelegung anbringen, die auf der Ober- und auf der Unterseite des Skelettes gleichgerichtete Geschwindigkeiten parallel zur Normalen induziert.

Das ist eine Wirbelverteilung, deren u-Komponente gegenüber der Anblasgeschwindigkeit unter der Voraussetzung schwacher Wölbungen ($\varphi_{mx} \to 0$ bzw. $\delta \to 0$ mit $\left.\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\,\delta\right)$ vernachlässigt werden kann:

$$U_\infty + u_A \approx U_\infty \quad \ldots\ldots \quad \text{(III, 14)}$$

Die v-Komponente der Wirbelverteilung muß jetzt so groß gewählt werden, daß ihre Normalkomponente (Bild III, 4) $v \cos\vartheta$ die Normalkomponente $U_\infty \sin(\vartheta - \alpha_{S\,\mathrm{opt}})$ der Anströmgeschwindigkeit zum Verschwinden bringt:

$$v \cos\vartheta - U_\infty \sin(\vartheta - \alpha_{S\,\mathrm{opt}}) = 0, \quad \ldots \quad \text{(III, 15a)}$$

so daß die v-Komponenten der Wirbelverteilungen mit der Tangentenrichtung der Skelettform und dem Anstellwinkel des tangentialen Eintritts ($\alpha_{S\,\mathrm{opt}} \sim \delta$)

$$v = U_\infty(\operatorname{tg}\vartheta \cos\alpha_{S\,\mathrm{opt}} - \sin\alpha_{S\,\mathrm{opt}}) \approx U_\infty\, y'_W - U_\infty\, \alpha_{S\,\mathrm{opt}} \quad \ldots \quad \text{(III, 15b)}$$

gegeben sind. Die Wirbelverteilungen verursachen dann in der Parallelströmung eine Ablenkung der Strömung entlang der Skelettlinie, so daß diese zum festen Körper wird. Die Wirbel werden damit zu gebundenen Wirbeln, die in der vorliegenden stationären Strömung das Profil nicht verlassen können. Sie induzieren auf der Saugseite des Profiles Über- und auf der Druckseite Untergeschwindigkeiten, die nach dem Bernoullischen Satz Druckunterschiede und damit den Auftrieb des Profiles erzeugen.

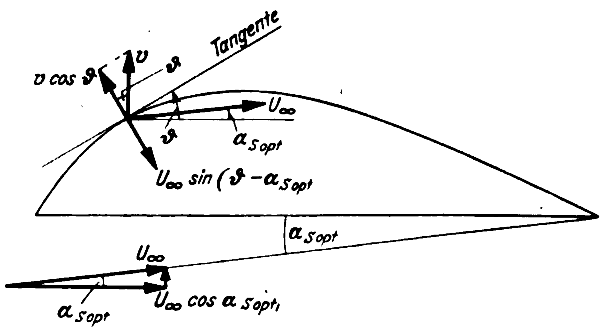


Bild III, 5. Die Zerlegung der Geschwindigkeit auf der Skelettkontur zur Bestimmung der Wirbelverteilungen.

Zahlentafel III, 3. v-Geschwindigkeiten an der Profilnase. (Vgl. Tafel III, 1 und III, 2.)

	Dickenanteile				Wölbungsanteile			
	○	○	○	○	○	○	○	○
x	$\frac{v_{32}}{d_{32}\cdot U_\infty}$	$\frac{v_{42}}{d_{42}\cdot U_\infty}$	$\frac{v_{52}}{d_{52}\cdot U_\infty}$	$\frac{v_{a0}}{d_{a0}\cdot U_\infty}$	$\frac{v_1}{s_1\cdot U_\infty}$	$\frac{v_2}{s_2\cdot U_\infty}$	$\frac{v_3}{s_3\cdot U_\infty}$	$\frac{v_{13}}{s_{13}\cdot U_\infty}$
—1,00	0	0	0	0	2,000	—1,500	2,000	1,000
—0,99	0,835	0,014	—0,014	0,040	1,980	—1,440	1,900	0,910
—0,98	1,156	0,039	—0,038	0,079	1,960	—1,380	1,804	0,824
—0,97	1,379	0,070	—0,067	0,117	1,940	—1,323	1,712	0,742
—0,96	1,552	0,105	—0,099	0,155	1,920	—1,266	1,620	0,660
—0,95	1,705	0,144	—0,134	0,193	1,900	—1,209	1,528	0,578
—0,94	1,827	0,187	—0,171	0,229	1,880	—1,152	1,444	0,504
—0,93	1,929	0,230	—0,208	0,265	1,860	—1,095	1,356	0,426
—0,92	2,015	0,277	—0,246	0,301	1,840	—1,038	1,276	0,356
—0,91	2,090	0,324	—0,284	0,336	1.820	—0,976	1,196	0,286
—0,90	2,150	0,372	—0,319	0,370	1,800	—0,930	1,116	0,216
—0,85	2,330	0,620	—0,488	0,532	1,700	—0,667	0,756	—0,094
—0,80	2,380	0,863	—0,614	0,680	1,600	—0,420	0,448	—0,352
—0,75	2,310	1,083	—0,687	0,813	1,500	—0,188	0,188	—0,562
—0,70	2,190	1,275	—0,706	0,930	1,400	0,030	—0,028	—0,728
—0,60	1,790	1,534	—0,594	1,120	1,200	0,420	—0,336	—0,936
—0,50	1,298	1,620	—0,325	1,250	1,000	0,750	—0,500	—1,000
—0,40	0,770	1,540	0,031	1,320	0,800	1,020	—0,544	—0,944
—0,20	—0,235	0,941	0,715	1,280	0,400	1,380	—0,368	—0,568
0	—1,000	0	1,000	1,000	0	1,500	0	0

$\frac{v_{12}}{d_{12}U_\infty}$; $\frac{v_{123}}{d_{123}U_\infty}$; $\frac{v_{0a}}{d_{0a}U_\infty}$ {für die 1. Näherung: Tafel II, 1 und Zahlentafel II, 2, für das Nasenverhalten: Kurvenblatt 5—7 des Rechenverfahrens.

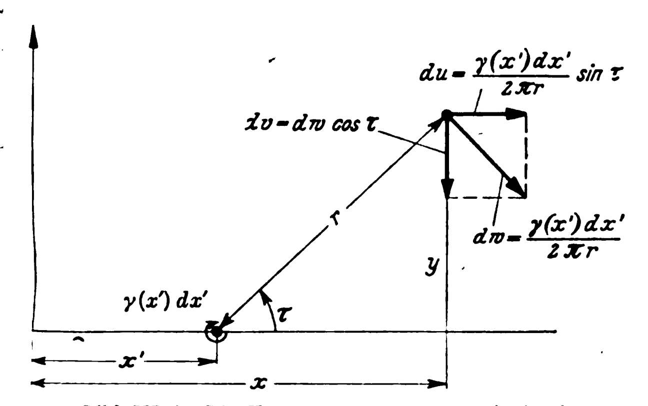


Bild III, 6. Die Komponenten der Geschwindigkeit eines Einzelwirbels.

Die Wirbelverteilungen $\gamma(x')$ sind für alle hier verwendeten Skelettformen (Gl. (II, 43)) schon von W. Birnbaum [1] angegeben worden. Wird nun die Wirbelverteilung näherungsweise auf der x-Achse zwischen $x' = -1$ und $x' = +1$ angenommen, so ist die von den Wirbeln induzierte v-Komponente in einem Punkt $P(x, y)$ (Bild III, 6),

$$\frac{v(y)}{U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma(x')}{U_\infty}\,\frac{x-x'}{(x-x')^2+y^2}\,dx', \quad \text{(III, 16)}$$

so daß die v-Komponente v_A auf der x-Achse, die nahezu mit derjenigen auf der Skelettlinie übereinstimmt ($\delta \to 0$): $v(y) \approx v_A$ ist:

$$\frac{v_A}{U_\infty} = \frac{v(0)}{U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma(x')}{U_\infty}\,\frac{dx'}{x-x'} \quad . . \text{(III, 17)}$$

In diesem Integral ist v mit Gl. (III, 15b) bekannt und die Wirbeldichte $\gamma(x')$ muß berechnet werden. Die Lösung der Integralgleichung ist[6]) mit einem Fourierschen Reihenansatz durchführbar. Ist nach Gl. (III, 15b)

$$y'_W = \alpha_{s\,opt} + \frac{v}{U_\infty} = \alpha_{s\,opt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega, \quad \text{(III, 18a)}$$

wenn $\cos\omega = -x'$ und n eine ganze positive Zahl ist, so erhalten wir für die Wirbelverteilung

$$\frac{\gamma(x')}{U_\infty} = 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega \quad . . . \text{(III, 18b)}$$

Die Konstanten A_n und der Anstellwinkel $\alpha_{s\,opt}$ sind mit der Skelettform y_w gegeben und werden durch harmonische Analyse der differenzierten Skelettform y'_n gefunden:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{s\,opt} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} y'_W(\omega)\,d\omega\\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y'_W(\omega)\cos n\omega\,d\omega\end{aligned}\right\} \quad . . \text{(III, 19)}$$

Der Anstellwinkel $\alpha_{s\,opt}$ des tangentialen Eintritts (Bild II, 3) ist für gerade Zahlen von n (vgl. Tafel III, 2) aus folgendem Grunde von Null verschieden:

Die Wirbelverteilungen $\gamma(x')$, welche nur mit den v-Komponenten $U_\infty y'_w$ der Gl. (III, 15b) berechnet würden, induzieren auf der ganzen Profiltiefe noch eine zusätzliche v-Komponente $-U_\infty \alpha_{s\,opt}$, durch die der Auftrieb des Profiles geändert wird und eine Umströmung der Vorderkante des Skelettes eintritt. Soll aber irgendeine Änderung der Skelettform keine Umströmung der Profilvorderkante hervorrufen, so muß zur Anströmung U_∞ eine dazu senkrechte $U_\infty \alpha_{s\,opt}$ hinzugenommen werden (Gl. (III, 15b)), welche die von den Wirbelverteilungen induzierte Komponente $-U_\infty \alpha_{s\,opt}$ zum Verschwinden bringt. Das entspricht aber der von vornherein berücksichtigten Drehung der Anströmrichtung um den Winkel $\alpha_{s\,opt}$.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit an der Skelettkontur brauchen wir die u-Komponente u_A der von den Wirbeln induzierten Geschwindigkeit, da wir in diese Näherung ($\delta \to 0$) die Unterschiede in den Geschwindigkeiten zwischen Profilachse und Profilkontur vernachlässigen. Es ist

$$u_A = \frac{1}{2}\gamma_A(x') \quad . . . . \text{(III, 20)}$$

und für die hier verwendeten Birnbaum-Skelettformen (Gl. (II, 26), (II, 39) oder (II, 43)) für die einzelne Wölbungsverteilung $\frac{y_n}{s_n}$

$$\frac{u_n}{s_n U_\infty} = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma_n(x')}{s_n U_\infty} \quad . . . . . \text{(III, 21a)}$$

[6]) Vgl. hierzu W. Birnbaum [1] oder auch H. Glauert: Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie, Abschnitt 7, 3.

Tafel III, 2. Die von den Wirbelverteilungen induzierten Übergeschwindigkeiten in der 1. Näherung für Birnbaum-Skelette und Anstellwinkel.

$$\frac{\gamma_W}{\varphi_{mx}\,U_\infty} = 2\,\frac{u_W}{\varphi_{mx}\,U_\infty} = 2\left(\frac{u_1}{s_1\,U_\infty}\,\frac{s_1}{\varphi_{mx}} + \frac{u_2}{s^2\,U_\infty}\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}} + \ldots \text{ usw.}\right)$$

$$\frac{v_W}{\varphi_{mx}\,U_\infty} = \frac{v_1}{s_1\,U_\infty}\,\frac{s_1}{\varphi_{mx}} + \frac{v_2}{s_2\,U_\infty}\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}} + \ldots \text{ usw.}$$

$$\left(\frac{W_S}{U_\infty}\right)_I = 1 + \left(\frac{u_T}{\delta\,U_\infty} + \frac{u_W}{\varphi_{mx}\,U_\infty}\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\right)\cdot\delta + \alpha^*\,\frac{u_{\mathfrak{A}}}{V_\infty}$$

$$\left(\frac{W_D}{U_\infty}\right)_I = 1 + \left(\frac{u_T}{\delta\,U_\infty} - \frac{u_W}{\varphi_{mx}\,U_\infty}\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\right)\cdot\delta - \alpha^*\,\frac{v_{\mathfrak{A}}}{V_\infty}$$

	Wölbungs-ordinaten	Störgeschwindigkeiten des Wirbelsystems auf der x-Achse		Anstellwinkel d. Sehne b. tangent. Eintritt	Auftriebszahl b. tangent. E.	Sturzflugmoment
n	$\frac{y_n}{s_n}$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\frac{v_n}{s_n\,U_\infty}$ [2])	$\frac{u_n}{s_n\,U_\infty} = \pm\frac{1}{2}\,\frac{\gamma_n}{s_n\,U_\infty}$ [1])	$\frac{\alpha_{s\,opt\,n}}{s_n}$	$\frac{c_{a\,W\,n}}{s_n}$	$\frac{c_{mo\,n}}{s_n}$
1	$1 - x^2$	$-2x \pm 2\sqrt{x^2-1}$	$\pm 2\sqrt{1-x^2}$	0	2π	$\frac{\pi}{2}$
2	$x(1 - x^2)$	$\frac{3}{2} - 3x^2 \pm 3x\sqrt{x^2-1}$	$\pm 3x\sqrt{1-x^2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{8}\pi$
13	$\frac{1}{2}(2x^2-1)(1-x^2)$	$x(3-4x^2) \pm (4x^2-1)\sqrt{x^2-1}$	$\pm(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$	0	0	0
3	$x^2(1 - x^2)$	$2x(1-2x^2) \pm 4x^2\sqrt{x^2-1}$	$\pm 4x^2\sqrt{1-x^2}$	0	π	$\frac{\pi}{4}$
$2m$	$x^{2m-1}(1-x^2)$	$\sum\limits_{\omega=0}^{m-1}\prod\limits_{\mu=1}^{\omega}\frac{2\mu-1}{2\mu} \times \frac{u_{n-2\omega}}{d_{n-2\omega}\,U_\infty}$	$-\sum\limits_{\omega=0}^{m-1}\prod\limits_{\mu=1}^{\omega}\frac{2\mu-1}{2\mu} \times \frac{v_{n-2\omega}}{d_{n-2\omega}\,U_\infty}$	$-\prod\limits_{\mu=1}^{m}\frac{2\mu-1}{2\mu}$	0	$\frac{3}{4}\pi\sum\limits_{\omega=0}^{m-1}\prod\limits_{\mu=1}^{\omega}\frac{2\mu-1}{2\mu}\,\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m-\omega-1}\frac{2\mu-1}{2\mu}}{(m-\omega-1)(m-\omega)}$
$2m+1$	$x^{2m}(1-x^2)$	$\sum\limits_{\omega=0}^{m-1}\prod\limits_{\mu=1}^{\omega}\frac{2\mu-1}{2\mu} \times \frac{u_{n-2\omega}}{d_{n-2\omega}\,U_\infty} + \prod\limits_{\mu=1}^{m}\frac{2\mu-1}{2\mu}\,\frac{v_1}{s_1 U_\infty}$	$-\sum\limits_{\omega=1}^{m-1}\prod\limits_{\mu=1}^{\omega}\frac{2\mu-1}{2\mu} \times \frac{v_{n-2\omega}}{d_{n-2\omega}\,U_\infty} + \prod\limits_{\mu=1}^{m}\frac{2\mu-1}{2\mu}\,\frac{u_1}{s_1 U_\infty}$	0	$2\pi\prod\limits_{\mu=1}^{m}\frac{2\mu-1}{2\mu}$	$\frac{\pi}{2}\prod\limits_{\mu=1}^{m}\frac{2\mu-1}{2\mu}$
$\mathfrak{A}$	Anstellwinkel α^*	$\frac{v_{\mathfrak{A}}}{V_\infty} = -1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$\frac{u_{\mathfrak{A}}}{V_\infty} = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	0	$c_{a\,\mathfrak{A}} = 2\pi\alpha^*$	0

$$\frac{\alpha_{s\,opt}}{\varphi_{mx}} = \left(\frac{\alpha_{s\,opt\,1}}{s_1}\,\frac{s_1}{\varphi_{mx}} + \frac{\alpha_{s\,opt\,2}}{s_2}\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}} + \ldots \text{ usw.}\right)$$

$$\frac{c_{a\,W}}{\varphi_{mx}} = \frac{c_{a\,W\,1}}{s_1}\,\frac{s_1}{\varphi_{mx}} + \frac{c_{a\,W\,2}}{s_2}\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}} + \ldots \text{ usw.}$$

$$\frac{c_{mo}}{\varphi_{mx}} = \frac{c_{mo\,1}}{s_1}\,\frac{s_1}{\varphi_{mx}} + \frac{c_{mo\,2}}{s_2}\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}} + \ldots \text{ usw.}$$

[1]) u. [2]) vgl. [1]) u. [2]) v. Tafel III, 1.
Merke:

$$\prod_{\mu=1}^{\omega}\frac{2\mu-1}{2\mu} = \frac{1\cdot3\cdot5\,.\,.\,(2\omega-1)}{2\cdot4\cdot6\,.\,.\,.\,.\,.\,2\,\omega}; \quad \prod_{\mu=1}^{\omega=0}\frac{2\mu-1}{2\mu} = 1.$$

Vgl. Zahlentafel III, 1 bis III, 3 und auch das zugehörige Bild III, 16.

und für die v-Komponente nach Gl. (III, 19b)

$$\frac{v_n}{s_n\,U_\infty} = \frac{y'_W}{s_n} - \frac{\alpha_{s\,opt\,n}}{s_n} \quad \ldots \quad \text{(III, 21b)}$$

(Index W: Wölbung).

Beide Komponenten sind für die gebräuchlichsten Werte von n in Tafel III, 2 zusammen mit der Skelettform und dem Anstellwinkel $\frac{\alpha_{s\,opt\,n}}{s_n}$ angegeben. Ebenso finden sich dort die allgemeinen Formeln[7]) für beliebige Werte n. Für die Kawalki-Skelettformen, die eine enge Kopplung (vgl. II, 3) zwischen den Birnbaum-Gliedern darstellen, ist die gleiche Zusammenstellung in Tafel III, 3 vorgenommen worden.

Die Übergeschwindigkeit am Skelett ist in der ersten Näherung nur von den u-Komponenten abhängig und durch die Summe aller mit den Wölbungskonstanten $\frac{s_n}{\varphi_{mx}}$ multiplizierten Geschwindigkeiten $\frac{u_n}{s_n\,U_\infty}$ bestimmt:

$$\frac{u_W}{U_\infty} = \frac{u_A}{U_\infty} = \varphi_{mx}\left(\frac{s_1}{\varphi_{mx}}\,\frac{u_1}{s_1\,U_\infty} + \frac{s_2}{\varphi_{mx}}\,\frac{u_2}{s_2\,U_\infty} + \ldots\right)$$

$$= \varphi_{mx}\sum_{n=1}^{n}\frac{s_n}{\varphi_{mx}}\,\frac{u_n}{s_n\,U_\infty} \quad \ldots \quad \text{(III, 22)}$$

[7]) Sie wurden von meinem Mitarbeiter, F. Kalscheuer, berechnet.

Tafel III, 3. Die von den Wirbelverteilungen induzierten Übergeschwindigkeiten in der 1. Näherung f. Kawalki-Skelette.

$$\frac{\gamma_W}{\varphi_{mx} U_\infty} = 2 \frac{u_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty}\,; \quad \frac{v_W}{\varphi_{mx} U_\infty} = \frac{v_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty}$$

vgl. Zahlentafel III, 4 und III, 5, sowie Bild III, 17.

	Wölbungsordinaten	Störgeschwindigkeiten des Wirbelsystems auf der x-Achse		Anstellw. d. Sehne bei tang. Eintritt	Auftr.-Zahl b. tang. Eintritt	Sturzfl.-Mom.
K_n	$\frac{y_{Kn}}{\varphi_{mx}}$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\frac{v_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty}$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\frac{u_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty} = \pm\frac{1}{2}\frac{\gamma_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty} = \frac{u_W}{\varphi_{mx} U_\infty}$ $(-1 \leq x \leq +1)$	$\frac{\alpha_{s\,opt}}{\varphi_{mx}}$ für Kn	$\frac{c_{a\,W}}{\varphi_{mx}}$ f. Kn	$\frac{c_{mo}}{\varphi_{mx}}$ f. Kn
$K3$	$2{,}12\,(1-x)\left[1-\frac{1}{8}(1-x)^3\right]$	$-2{,}12\left[1-\frac{1}{2}(1-x)^n\right]$	$3{,}97\,(\sin\Theta + 0{,}4\sin 2\Theta + \frac{1}{15}\sin 3\Theta)$	0,529	12,46	1,87
$K5$	$1{,}718\,(1-x)\left[1-\frac{1}{32}(1-x)^5\right]$	$-1{,}718\left[1-\frac{3}{16}(1-x)^n\right]$	$4{,}23\left(\sin\Theta + \frac{4}{7}\sin 2\Theta + \frac{3}{14}\sin 3\Theta + \frac{1}{21}\sin 4\Theta + \frac{1}{210}\sin 5\Theta\right)$	0,819	18,29	1,423
Kn	$K_n(1-x)\left[1-\frac{1}{2^n}(1-x)^n\right]$	$-K_n\left[1-\frac{n+1}{2^n}(1-x)^n\right]$	$\frac{c_{a\,W}}{\varphi_{mx}}\frac{1}{\pi}\left(\sin\Theta + \frac{n-1}{n+2}\sin 2\Theta + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)}\sin 3\Theta + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\sin 4\Theta\right) + \ldots$ usw.	$K_n[(n+1)\,P_n - 1]$	$n\,K_n\,P_n$	$\frac{3}{4}\frac{c_{a\,W}/\varphi_{mx}}{n+2}$

$$K_n = \frac{n+1}{n(1-\xi_\varphi)}\,; \quad \xi_\varphi = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \qquad P_n = \prod_{\mu=1}^{n} \frac{2\mu-1}{2\mu} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \qquad \cos\Theta = -x$$

Zahlentafel III, 4. Geschwindigkeitskomponente $\frac{u_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty}$ der Kawalki-Skelette (Kn) in der 1. Näherung, auf der x-Achse. (Vgl. Tafel III, 3.)

$$\frac{u_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty} = \frac{1}{2}\frac{\gamma_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty} = 2\,\frac{n+1}{1-\xi_\varphi} \times$$
$$\times \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots\ldots 2n}\left(\sin\Theta + \frac{n-1}{n+2}\sin 2\Theta + \right.$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)}\sin 3\Theta +$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\sin 4\Theta + \ldots\right)$$
$$\xi_\varphi = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \quad \cos\Theta = -x$$

für Kawalki-Skelette Kn ist: $\frac{u_W}{\varphi_{mx} U_\infty} = \frac{u_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty}$

x	$\frac{u_{K3}}{\varphi_{mx} U_\infty}$	$\frac{u_{K4}}{\varphi_{mx} U_\infty}$	$\frac{u_{K5}}{\varphi_{mx} U_\infty}$	$\frac{u_{K6}}{\varphi_{mx} U_\infty}$	$\frac{u_{K7}}{\varphi_{mx} U_\infty}$
ξ_φ	0,370	0,331	0,301	0,277	0,257
−1,00	0	0	0	0	0
−0,95	2,475	3,04	3,71	4,40	5,09
−0,90	3,23	4,03	4,84	5,65	6,42
−0,8	4,15	5,01	5,81	6,56	7,30
−0,7	4,61	5,36	6,04	6,62	7,10
−0,6	4,79	5,40	5,90	6,28	6,56
−0,5	4,81	5,25	5,56	5,78	5,91
−0,4	4,71	4,98	5,15	5,21	5,24
−0,3	4,54	4,65	4,68	4,66	4,61
−0,2	4,30	4,28	4,22	4,14	4,06
−0,1	4,01	3,90	3,76	3.65	3,57
0	3,70	3,51	3,35	3,22	3,14
0,1	3,38	3,14	2,96	2,85	2,77
0,2	3,05	2,78	2.61	2,52	2,46
0,3	2,72	2,45	2,29	2,22	2,16
0,4	2,39	2,14	2,00	1,94	1,90
0,5	2,07	1,83	1,73	1,68	1,65
0,6	1,74	1,56	1,47	1,43	1,42
0,7	1,43	1,29	1,22	1,19	1,19
0,8	1,10	0,998	0,955	0,930	0,937
0,9	0,741	0,675	0,650	0,646	0,640
0,95	0,472	0,466	0,452	0,450	0,441
1,00	0	0	0	0	0

Zahlentafel III, 5. Geschwindgkeitskomponente $\frac{v_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty}$ der Kawalki-Skelette (Kn) (vgl. Tafel III, 3)

$$\frac{\alpha_{s\,opt}}{\varphi_{mx}} + \frac{v_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty} = \frac{y'_{Kn}}{\varphi_{mx}} = \frac{n+1}{n(1-\xi_\varphi)}\left[(n+1)\left(\frac{1-x}{2}\right)^n - 1\right]$$

vgl. Gl. III, 15[b].

$\overline{x}$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
$\varphi_\xi =$	0,370	0.331	0,301	0,277	0,257
−1,00	6,35	7,48	8,58	9,68	10,77
−0,95	5,725	6,58	7,37	8,08	8,77
−0,90	5,135	5,725	6,25	6,68	7,05
−0,80	4,05	4,26	4,36	4,39	4,35
−0,70	3,08	3,01	2,85	2,64	2,375
−0,60	2,24	1,96	1,66	1,344	1,041
−0,50	1,500	1,083	0,723	0,397	0,097
−0,40	0,830	0,374	0,0154	−0,287	−0,526
−0,20	−0,265	−0,663	−0,925	−1,088	−1,192
0	−1,059	−1,288	−1,393	−1,439	−1,442

Für die Skelettform B I (Gl. (II, 26)) ist also

$$\frac{u_W}{U_\infty} = \varphi_{mx}\left(\frac{s_1}{\varphi_{mx}}\frac{u_1}{s_1 U_\infty} + \frac{s_2}{\varphi_{mx}}\frac{u_2}{s_2 U_\infty}\right) \quad \text{(III, 23)}$$

und für B II (Gl. (II, 38)):

$$\frac{u_W}{U_\infty} = \varphi_{mx}\left(\frac{s_1}{\varphi_{mx}}\frac{u_1}{s_1 U_\infty} + \frac{s_2}{\varphi_{mx}}\frac{u_2}{s_2 U_\infty} + \frac{s_{13}}{\varphi_{mx}}\frac{u_{13}}{s_{13} U_\infty}\right), \quad \ldots \text{(III, 24)}$$

während für die Kawalki-Kopplung gilt:

$$\frac{u_W}{\varphi_{mx} U_\infty} = \frac{u_{Kn}}{\varphi_{mx} U_\infty} \quad \ldots\ldots \text{(III, 25)}$$

Die Geschwindigkeit für das Skelett ohne Tropfen wird beim Anstellwinkel des tangentialen Eintritts (Zahlentafel III, 2)

$$\frac{\alpha_{s\,opt}}{\varphi_{mx}} = \frac{s_1}{\varphi_{mx}}\frac{\alpha_{s\,opt\,1}}{s_1} + \frac{s_2}{\varphi_{mx}}\frac{\alpha_{s\,opt\,2}}{s_2} + \ldots$$
$$= \sum_{n=1}^{n} \frac{s_n}{\varphi_{mx}}\frac{\alpha_{s\,opt\,n}}{s_n} \quad \ldots \text{(III, 26)}$$

bestimmt, (bei $\alpha^* = 0$) durch

$$\frac{w_W}{U_\infty} = 1 \pm \frac{u_W}{\varphi_{mx} U_\infty} \varphi_{mx} \quad \ldots \quad \text{(III, 27)}$$

das negative Vorzeichen gilt für die Druckseite des Skelettes[8]).

Ebenso erhalten wir beim gleichen Anstellwinkel $\alpha_{s\,opt}$ die Geschwindigkeit für das gewölbte Profil aus der Summe aller u-Geschwindigkeiten $U_\infty \cos \alpha_{s\,opt} \approx U_\infty$, u_T und u_W, weil wir in dieser Näherung ($\delta \to 0$) alle gegenseitigen Beeinflussungen zwischen Wölbung und Dicke vernachlässigen können. Die Gesamtgeschwindigkeit am gewölbten Profil beim Anstellwinkel $\alpha^* = 0$ ist damit für die Saugseite des Profiles (vgl. auch Gl. (III, 5) und (III, 9))

$$\left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_{l0} = \left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_l + \frac{u_W}{U_\infty} = 1 + \frac{u_T}{U_\infty} + \frac{u_W}{U_\infty} \quad \text{(III, 28a)}$$

und für die Druckseite des Profiles:

$$\left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_{l0} = \left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_l - \frac{u_W}{U_\infty} = 1 + \frac{u_T}{U_\infty} - \frac{u_W}{U_\infty} \quad \text{(III, 28b)}$$

Darin sind $\frac{u_T}{U_\infty}$ und $\frac{u_W}{U_\infty}$ durch Gl. (III, 9) und Gl. (III, 22) gegeben.

Der Druck auf der Profilkontur ist

$$\left(\frac{\Delta p}{q}\right)_{l0} = 1 - \left(\frac{w_{S,D}}{U_\infty}\right)^2_{l0} \quad \ldots \quad \text{(III, 29)}$$

Der Grenzwert ($\delta = 0$) der Übergeschwindigkeit wird für die Saugseite (positives Vorzeichen) und für die Druckseite (negatives Vorzeichen)

$$\left(\frac{w_{S,D} - U_\infty}{\delta U_\infty}\right)_{\delta=0} = \left(\frac{\Delta w_{S,D}}{\delta U_\infty}\right)_{\delta=0} = \frac{u_T}{\delta U_\infty} \pm \frac{\varphi_{mx}}{\delta} \frac{u_W}{\varphi_{mx} U_\infty} \quad \ldots \quad \text{(III, 30a)}$$

c) Für das gewölbte Profil mit Anstellwinkel.

Die Anblasgeschwindigkeit W_∞ eines unter einem beliebigen Anstellwinkel α^* angestellten Profiles zerlegen wir (Bild III, 7) in die Komponente $U_\infty = W_\infty \cos \alpha^*$ parallel der Anblasrichtung $\alpha_{s\,opt}$ des tangentialen Eintritts und in die dazu senkrechte Komponente $V_\infty = W_\infty \sin \alpha^*$. Dann können wir der bereits eingehend untersuchten Anblasung beim Anstellwinkel ($\alpha^* = 0$) $\alpha_{s\,opt}$ eine Queranblasung unter dem Anstellwinkel $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$ überlagern. Diese Überlagerung bringt bei richtiger Größe von V_∞ gegenüber U_∞, ($V_\infty = U_\infty \operatorname{tg} \alpha^*$), die gewünschte Anblasrichtung α^* und die Geschwindigkeit W_∞. Auf der Profilkontur wird die bereits bekannte Geschwindigkeit für $\alpha^* = 0$ mit $\left(\frac{w_{S,D}}{U_\infty}\right)_0$ und für $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$ mit $\frac{w_\mathfrak{K}}{V_\infty}$ angegeben. Da die Richtung der Geschwindigkeit auf der Profilkontur mit der Tangentenrichtung des Profiles zusammenfällt, ist sie vom Anstellwinkel unabhängig. Beide Geschwindigkeitsanteile werden also bei der Überlagerung addiert zur Gesamtgeschwindigkeit (Bild III, 8) beim Anstellwinkel α^*

$$\left(\frac{w_{S,D}}{U_\infty}\right)_{\alpha^*} = \left(\frac{w_{S,D}}{U_\infty}\right)_0 \pm \frac{V_\infty}{U_\infty} \frac{w_\mathfrak{K}}{V_\infty} \quad \ldots \quad \text{(III, 31)}$$

Bei der Queranblasung fallen beide Staupunkte in die Profilhinterkante, deshalb ist die Geschwindigkeit $\frac{w_\mathfrak{K}}{V_\infty}$ auf der Druckseite des Profiles in Richtung auf die Profilnase positiv und muß von der in Richtung auf die Hinterkante positiven Geschwindigkeit $\left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_0$ subtrahiert werden.

Die Übergeschwindigkeit $\frac{w_\mathfrak{K}}{V_\infty}$ auf der Profilkontur wird von den Singularitäten induziert, die in der Queranblasung das Profil zur Stromlinie machen (Bild III, 7). Diese Singularitäten sind gebundene Wirbel und sollen im folgenden berechnet werden. Die Normalkomponente der Quergeschwindigkeit V_∞ ist auf der Saugseite $V_\infty \cos(\vartheta + \varphi - \alpha_{s\,opt})$ und auf der Druckseite $-V_\infty \cos(\vartheta - \varphi - \alpha_{s\,opt})$. Diese Normalkomponenten werden von einer Wirbelverteilung zum Verschwinden gebracht, deren Normalkomponenten $-v_{\mathfrak{K}S} \cos(\vartheta + \varphi)$ bzw. $v_{\mathfrak{K}D} \cos(\vartheta - \varphi)$ sind. Die v-Komponenten der Wirbelverteilung auf der Profilkontur

$$v_{\mathfrak{K}S} = -V_\infty \frac{\cos(\vartheta + \varphi - \alpha_{s\,opt})}{\cos(\vartheta + \varphi)} = -V_\infty \cos \alpha_{s\,opt} (1 + \operatorname{tg} \alpha_{s\,opt} \operatorname{tg}(\vartheta + \varphi))$$

$$v_{\mathfrak{K}D} = -V_\infty \frac{\cos(\vartheta - \varphi - \alpha_{s\,opt})}{\cos(\vartheta - \varphi)} = -V_\infty \cos \alpha_{s\,opt} (1 + \operatorname{tg} \alpha_{s\,opt} \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi))$$

[8]) Genau genommen mußte (Bild III, 5) die Geschwindigkeit w_W aus der Summe (bzw. Differenz) der u-Komponenten $U_\infty \cos \alpha_{s\,opt}$ und u_W gebildet werden: $W_W = U_\infty \cos \alpha_{s\,opt} \pm u_W$, da jedoch für alle schwach gewölbten Profile $\alpha_{s\,opt} \sim \delta$ ist, kann $\cos \alpha_{s\,opt} \approx 1$ gesetzt werden.

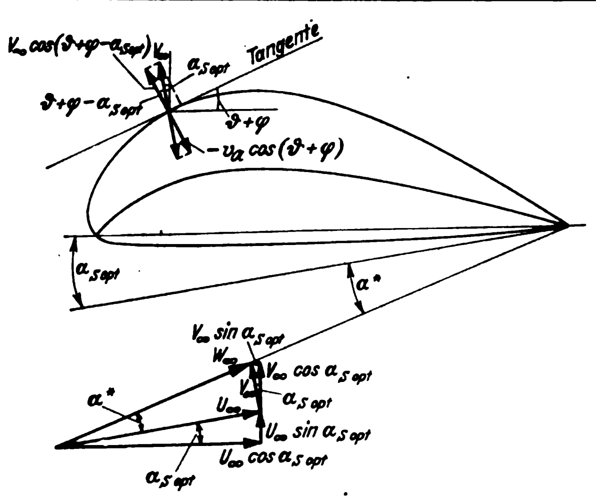


Bild III, 7. Die Zerlegung der Geschwindigkeit auf der Profilkontur bei Queranblasung zur Bestimmung der Wirbelverteilung der Queranblasung.

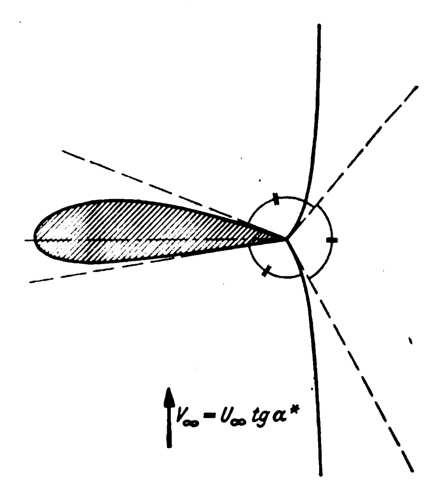


Bild III, 7a. Der Staupunkt bei Queranblasung: Die Staupunkte am Profil fallen bei der Queranblasung beide in die Hinterkante, die drei von der freien Stromlinie gebildeten Winkel müssen gleich groß sein.

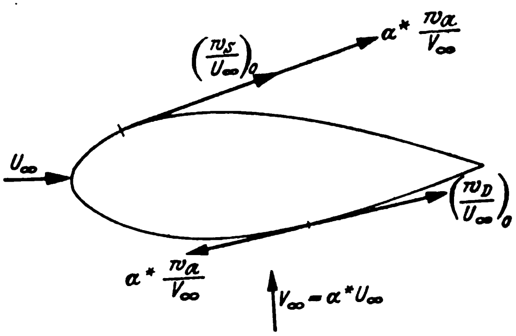


Bild III, 8. Zur Addition der Geschwindigkeitsanteile der beiden zueinander senkrecht stehenden Anblasrichtungen.

können bis auf Glieder, welche in dieser Näherung ($\delta \to 0$) zu streichen sind, gleich den v-Geschwindigkeiten auf der x-Achse gesetzt werden.

$$\frac{v_\text{я}}{V_\infty} = \frac{v_{\text{я} s}}{V_\infty} = \frac{v_{\text{я} p}}{V_\infty} = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 32)$$

Die Wirbelverteilung, die längs der ganzen x-Achse von $x = -1$ bis $x = +1$ die konstante Abwärtsgeschwindigkeit $v_\text{я} = -V_\infty$ induziert, ist die seit W. Birnbaum [1] bekannte Wirbelverteilung der ebenen Platte (siehe auch Zahlentafel III, 2)

$$\gamma_\text{я} = 2\, u_\text{я} = 2\, V_\infty \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 33)$$

In dieser Näherung hat die Wölbung und die Dicke des Profiles keinen Einfluß auf die Wirbelverteilung für die Queranblasung. Berücksichtigen wir nun noch, daß der Winkel $\alpha_{s\,\text{opt}}$ und außerdem der Anstellwinkel α^* klein sein sollen, so wird die Anströmgeschwindigkeit in x-Richtung (Bild III, 8)

$$U_\infty \cos \alpha_{s\,\text{opt}} - V_\infty \sin \alpha_{s\,\text{opt}} \approx U_\infty \quad . \quad . \quad (\text{III}, 34)$$

und die in y-Richtung: $V_\infty \cos \alpha_{s\,\text{opt}} + U_\infty \sin \alpha_{s\,\text{opt}}$. Von dieser ist die v-Komponente $U_\infty \sin \alpha_{s\,\text{opt}} \approx U_\infty\, \alpha_{s\,\text{opt}}$ mit Gl. (III, 15b) für die Berechnung der Wirbelverteilung der Skelettform berücksichtigt worden, so daß allein übrigbleibt

$$V_\infty \cos \alpha_{s\,\text{opt}} = U_\infty \operatorname{tg} \alpha^* \cos \alpha_{s\,\text{opt}} \approx \alpha^*\, U_\infty \quad (\text{III}, 35)$$

Für die Geschwindigkeit beim Anstellwinkel $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$ (der Queranblasung)

$$\frac{w_\text{я}}{V_\infty} = \sqrt{\left(\frac{u_\text{я}}{V_\infty}\right)^2 + \left(1 + \frac{v_\text{я}}{V_\infty}\right)^2} \quad . \quad . \quad (\text{III}, 36)$$

ist mit Gl. (III, 32)

$$\frac{w_\text{я}}{V_\infty} = \frac{u_\text{я}}{V_\infty} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 37)$$

Damit wird die Gesamtgeschwindigkeit auf der Saugseite des gewölbten Profiles beim Anstellwinkel α^* nach Gl. (III, 31) und $V_\infty = \alpha^*\, U_\infty$ (Gl. (III, 35))

$$\left(\frac{w_s}{U_\infty}\right)_{t\alpha^*} = \left(\frac{w_s}{U_\infty}\right)_{t0} + \alpha^* \frac{u_\text{я}}{V_\infty} \quad . \quad . \quad (\text{III}, 38^a)$$

und auf der Druckseite

$$\left(\frac{w_p}{U_\infty}\right)_{t\alpha^*} = \left(\frac{w_p}{U_\infty}\right)_{t0} - \alpha^* \frac{u_\text{я}}{V_\infty} \quad . \quad . \quad (\text{III}, 38^b)$$

Die Geschwindigkeiten $\left(\frac{w_s}{U_\infty}\right)_{t0}$ und $\left(\frac{w_p}{U_\infty}\right)_{t0}$ beim Anstellwinkel $\alpha^* = 0$ sind für ein gewölbtes Profil durch die Gl. (III, 28) und für ein symmetrisches Profil $\left(\frac{u_w}{U_\infty} = 0\right)$ durch die Gl. (III, 5 und 9) bekannt. Der Druck auf die Profilkontur ist jetzt

$$\left(\frac{\Delta p}{q}\right)_{t\alpha^*} = 1 - \left(\frac{w_{s,p}}{U_\infty}\right)^2_{t\alpha^*} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 39)$$

Anhang: Die Luftkräfte am Profil.

Die im Profil auftretenden gebundenen Wirbel nehmen in der Parallelströmung Kräfte auf, die den Auftrieb und das Moment des Profiles geben. Wir berücksichtigen in Übereinstimmung mit der vorliegenden Näherung ($\delta \to 0$) bei der Berechnung nur die linearen Glieder der Wölbungs- und Anstellwinkelkonstanten, so daß die gegenseitige Beeinflussung von Wölbung, Anstellwinkel und Profildicke unberücksichtigt bleibt. Allgemein ist die Auftriebszahl

$$c_a = \frac{2\,\Gamma}{W_\infty\, t} = \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(x)}{W_\infty}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 40)$$

und die Momentenzahl um den Einviertelpunkt ($\xi_1 = 0{,}25$; $x_1 = -0{,}5$)

$$c_{m\,0,25} = \frac{2\,\Gamma(x_\Gamma - x_1)}{W_\infty\, t^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(x)}{W_\infty}\left(x + \frac{1}{2}\right) dx \quad (\text{III}, 41)$$

Die Wirbelverteilungen für die Birnbaumschen Skelettformen sind mit Gl. (III, 18b) oder Tafel III, 2 bekannt, es ist nämlich

$$\frac{\gamma(x)}{\varphi_{m\,x}\, U_\infty} = \sum_{n=1}^{n} \frac{s_n}{\varphi_{m\,x}} \frac{\gamma_n(x)}{s_n\, U_\infty} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 42^a)$$

und deshalb analog für die Auftriebszahl der Wölbungsformen beim Anstellwinkel des tangentialen Eintritts

$$\frac{c_{a\,w}}{\varphi_{m\,x}} = \sum_{n=1}^{n} \frac{s_n}{\varphi_{m\,x}} \frac{c_{a\,n}}{s_n}$$

und die Momentenzahl $\quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 42^b)$

$$\frac{c_{m\,0,25}}{\varphi_{m\,x}} = \sum_{n=1}^{n} \frac{s_n}{\varphi_{m\,x}} \frac{c_{m\,0,25\,n}}{s_n}$$

wobei die Einzelanteile sich mit Gl. (III, 40) bzw. (III, 41) und Tafel III, 2 berechnen lassen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_{a\,n}}{s_n} &= \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n(x)}{s_n\, U_\infty}\, dx \\ \frac{c_{m\,0,25\,n}}{s_n} &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n(x)}{s_n\, U_\infty}\,(2\,x + 1)\, dx \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\text{III}, 43)$$

Sie sind in den Tafeln II, 6 und III, 2 angegeben. Bei Queranblasung erhalten wir einen zusätzlichen Auftrieb mit der Auftriebszahl

$$c_{a\,\text{я}} = \frac{V_\infty}{U_\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_\text{я}(x)}{V_\infty}\, dx = 2\,\pi \frac{V_\infty}{U_\infty} = 2\,\pi\,\alpha^*, \quad (\text{III}, 44)$$

während das Moment um den Einviertelpunkt ungeändert bleibt. Der Gesamtauftrieb des Profiles ist dann

$$c_a = c_{a\,w} + c_{a\,\text{я}} = 2\,\pi\,(\alpha_0 + \alpha_{s\,\text{opt}} + \alpha^*) \quad (\text{III}, 45)$$

worin α_0 die Nullauftriebsrichtung (Bild II, 3) des Skelettes von der Profilsehne (x-Achse) aus gemessen und der Anstellwinkel des tangentialen Eintritts $\alpha_{s\,\text{opt}}$ durch Gl. (III, 19) oder Gl. (III, 26) gegeben ist. Die Nullauftriebsrichtung für $c_a = 0$ ist mit $c_{a\,\text{я}} = -c_{a\,w}$ und

$$\alpha_0 = \frac{c_{a\,w}}{2\,\pi} - \alpha_{s\,\text{opt}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}, 46)$$

bekannt, dabei ist noch $c_{a\,w}$ durch Gl. (III, 42b) bestimmt.

Der Anstellwinkel $\alpha_{s\,\text{opt}}$ des tangentialen Eintritts ist von der Wölbungsform abhängig und gibt die Anblasrichtung an, bei welcher die beiden Staupunkte im vordersten und im hintersten Skelettpunkt liegen. M. M. Munk [7] hat diese Anblasrichtung auf sehr anschauliche Weise bestimmt (Bild III, 9):

Die Profilströmung mit tangentialem Eintritt ist dadurch ausgezeichnet, daß sie umkehrbar ist. Es gibt also eine der gesuchten entgegengesetzte Anblasrichtung, bei der ebenfalls tangentialer Eintritt, diesmal an der zur Anblaskante gewordenen Hinterkante, stattfindet. Und da es sich hierbei um eine einfache Umkehr aller Strömungsrichtungen im Geschwindigkeitsfeld handelt, bleibt der Auftrieb nach Richtung und Größe erhalten. Die Zirkulation wechselt nur ihr Vorzeichen (Umlaufsinn), behält aber ebenfalls ihre Größe. Die Anblasrichtung mit tangentialem Eintritt kann also folgendermaßen gefunden werden. Es seien zwei gleich große Anblasgeschwindigkeiten von vorn $W_{\infty\,v}$ und von hinten $W_{\infty\,h}$ bereits ermittelt, die den gleichen Auftrieb

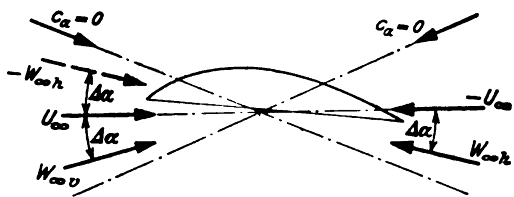


Bild III, 9. Zur Bestimmung des Anblaswinkels bei tangentialem (stoßfreiem) Eintritt (nach Munk).

liefern, aber noch nicht parallel sind. $W_{\infty v}$ ergibt eine Umströmung der Vorderkante, $W_{\infty h}$ eine (entgegengesetzte) Umströmung der Hinterkante. Wir bringen diese Umströmungen beide zum Verschwinden, indem wir die Anblasrichtungen um denselben Winkel $\Delta\alpha$ (im entgegengesetzten Drehsinn) so lange drehen, bis sie entgegengesetzt und parallel sind (U_∞ und $-U_\infty$). Nach der Drehung sind die Auftriebe und Zirkulationen wieder gleich und die Strömung ist umkehrbar geworden. Damit sind die Umströmungen der Vorder- und der Hinterkante beide verschwunden. Zwei Anblasrichtungen der vorher vorausgesetzten Art (mit gleichen Auftrieben bei Anblasung der Vorder- und Hinterkante) sind nun die beiden Nullauftriebsrichtungen. Die gesuchte Anblasrichtung mit tangentialem Eintritt ist also die Winkelhalbierende zwischen den Anblasrichtungen $W_{\infty v}$ und $-W_{\infty h}$ oder zwischen beiden Nullauftriebsrichtungen.

8. Die Korrektur der Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung der Profilnase.

Nachdem wir im vorangegangenen Abschnitt die Singularitätenverteilungen für den Tropfen, die Skelettform und den Anstellwinkel und die von den Singularitäten induzierten Übergeschwindigkeiten gewonnen haben, besteht unsere nächste Aufgabe darin, zu prüfen, ob die Voraussetzungen der 1. Näherung in allen Punkten der Profilkontur erfüllt sind. Es wird sich zeigen, daß an der Profilnase (und entsprechend auch für die praktisch untergeordnete Hinterkante) Korrekturen notwendig sind, ehe auch dort die Näherung richtig angewendet ist.

Bei der Berechnung der 1. Näherung sind wir davon ausgegangen, daß alle praktisch gebräuchlichen Profile dünn und nur schwach gewölbt sind. Das bedeutet aber für den Aufbau des Profiles aus einzelnen Dickenverteilungen $\frac{y_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}}$ und Wölbungsverteilungen $\frac{y_n}{s_n}$, daß auch die Dickenkonstanten $\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}$ und ebenso die $\frac{s_n}{\varphi_{m\,x}}$ $\frac{\varphi_{m\,x}}{\delta}$ klein sein müssen. Die Singularitätenverteilungen $\frac{q_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty}$ (Quellen) und $\frac{\gamma_n}{s_n\,U_\infty}$ (Wirbel) und die von ihnen induzierten Übergeschwindigkeiten sind mit diesen Konstanten zu multiplizieren und zu addieren und geben erst dann in 1. Näherung die Gesamtsingularität und die gesamte Übergeschwindigkeit am Profil. Sie sind bis auf Glieder zweiten oder höheren Grades in den Konstanten solange das gewünschte Ergebnis bei kleinen Profildicken ($\delta\to 0$), als nicht die einzelnen Singularitäten und ihre Übergeschwindigkeiten zu groß werden. Sobald aber die Übergeschwindigkeit einer einzelnen Dickenverteilung, Wölbungsverteilung oder Anstellwinkelverteilung die Größenordnung der Anströmgeschwindigkeit erreicht oder sogar überschreitet, genügt die entwickelte Theorie nicht mehr zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung und die 1. Näherung muß dann richtiggestellt werden, weil sie bisher nur für kleine Übergeschwindigkeiten ($u \ll U_\infty$) gilt.

Alle gebräuchlichen Profile haben an der Profilnase einen Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0$ oder wenigstens einen Vorderkantenwinkel. Vor dem Profil staut sich die Strömung, so daß auf der Profilkontur ein Staupunkt ($w = 0$) entsteht. Beim Hinterkantenwinkel und — bei tangentialem Eintritt — ebenso beim Vorderkantenwinkel muß die Potentialströmung (ohne Ausbildung einer Grenzschicht) im Scheitel des Winkels ebenfalls einen Staupunkt haben, weil sich die Strömungen der Saugseite und der Druckseite nicht mit endlichen Geschwindigkeiten überschneiden können. An diesen Stellen erreichen also die Übergeschwindigkeiten den Wert der Anblasgeschwindigkeit, so daß dort die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung mit den bisherigen Ergebnissen der 1. Näherung nicht möglich ist. Noch stärker wirkt sich die Notwendigkeit der besonderen Beachtung der Strömung an der Profilnase aus, wenn das Profil schräg angeblasen wird (einen Anstellwinkel α^* erhält). Dann drängen sich die Stromlinien an der Nase stark zusammen und es entstehen hohe Übergeschwindigkeiten, die sehr bald die Anblasgeschwindigkeit überschreiten. Die Größe der Übergeschwindigkeit hängt stark von der Größe des Nasenradius ab, sie wächst mit abnehmenden Nasenradien und wird bei einem Vorderkantenwinkel $\left(\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 0,\ \frac{\varepsilon}{\delta} > 0\right)$ unendlich groß.

Es ist einleuchtend, daß diese starken Geschwindigkeitsänderungen, die noch dazu meist in nächster Umgebung des vorderen Staupunktes des Profiles auftreten, nicht mit den bisherigen einfachen Mitteln zu bewältigen sind. Man ist deshalb leicht versucht, von der Geschwindigkeitsberechnung mit Hilfe der Singularitäten abzugehen und die konforme Abbildung zu Hilfe zu nehmen. Da aber die konforme Abbildung unanschaulich ist, insofern sie die einzelnen Einflüsse der Formgebung des Profiles auf die Geschwindigkeitsverteilung verwischt, und außerdem noch die Affinität der Profilkontur für verschiedene Profildicken (besonders an der Nase) sich nur sehr schwerfällig erfüllen läßt, erscheint es doch ratsam, die Mittel des hier entwickelten Singularitätenverfahrens in der 1. Näherung zu verfeinern. Sie soll auch an der Profilnase qualitativ richtige und quantitativ praktisch genügend genaue Ergebnisse in kurzer Zeit ergeben.

Neben einer Zurückziehung der Singularitäten aus der Profilnase um eine sehr kurze Strecke $\left(\Delta x = \frac{\varrho_N}{\delta^2}\,\delta^2\right)$ und der genügend genauen Erfüllung der Profilkrümmung im vorderen Scheitelpunkt des Profiles (ϱ_N) wird noch die Berücksichtigung der Änderung der Geschwindigkeit zwischen Profilachse und Profilkontur, die ebenfalls bisher vernachlässigt werden konnte, genügen, um die 1. Näherung an der Profilnase zu berichtigen.

Alle Singularitäten, die für die hohen Übergeschwindigkeiten verantwortlich sind, haben nach der entwickelten 1. Näherung im vordersten Profilpunkt Singularitäten von unendlicher Dichte (für den Nasenradius verantwortliche und vom Anstellwinkel herrührende Singularitäten) oder aber endliche Dichte (beim Vorderkanten- und Hinterkantenwinkel) mit unendlichen Übergeschwindigkeiten in Richtung der Profilachse, der Anströmrichtung entgegengesetzt. Die Singularitäten mit unendlicher Dichte haben außerdem noch unendlich große v-Komponenten. Diese Ergebnisse weisen auf die besonderen Vorgänge an der Profilnase hin und sind für uns zunächst nur ein erster Anhaltspunkt für die weiteren Berechnungen.

Da die Übergeschwindigkeiten auf der Profilkontur nur in besonderen Einzelfällen (Profile ohne Nasenradius bei Schräganströmung) so hohe Werte annehmen können, wie wir sie auf der Belegungslinie erhalten, kann vor allem die Voraussetzung nicht stimmen, daß sich diese Zusatzgeschwindigkeiten zwischen Belegungslinie und Profilkontur nur wenig ändern. Die Berechnung der von den Quellen und Wirbeln in einem Punkt $P(x;\, y_T)$ der Profilkontur induzierten Geschwindigkeiten ist in Tafel III, 4 angegeben. Die Ergebnisse dieser Integrationen wurden in den Tafeln III, 5 bis III, 7 zusammengestellt und sind ziemlich unübersichtlich. Für kleine Profilordinaten y_T werden die komplizierten Funktionen Ω_1 und Ω_2 (Tafel III, 4) einfach, und es läßt sich mit ihnen in den Tafeln III, 5 bis III, 7 der Einfluß der Ordinate y auf die Geschwindigkeit abschätzen. Dabei stellt sich heraus, daß sich alle diejenigen Übergeschwindigkeiten sehr stark mit der Entfernung von der Belegungslinie ändern, die auf der Belegungslinie unendliche Werte annehmen. Im vordersten Punkt ($x = -1$) der Belegungslinie ändern sich beide Geschwindigkeitskomponenten, die von den zum Nasenradius gehörigen Quellverteilungen (q_{12}, q_{123} oder q_1) und die von der Wirbelverteilung γ_n der Queranblasung induzierten, mit $\sqrt{\frac{1}{y_T}}$; so ist zum Beispiel $\frac{u_{12}(y_T)}{d_{12}\,U_\infty} - \frac{u_{12}^{(0)}}{d_{12}\,U_\infty} \approx -\sqrt{\frac{1}{y_T}}$, so daß die Übergeschwindigkeit $\frac{u_{12}(y_T)}{U_\infty}$

Tafel III, 4. Berechnung der Übergeschwindigkeiten in einem Punkt $P\ (x, y_T)$:

Von den Quellen induziert (Bild III, 4):

$$\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{q_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu} U_\infty} \frac{\cos\tau\, dx'}{r} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{y'_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu}} \frac{(x-x')\,dx'}{(x-x')^2+y^2}$$

$$\frac{v_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{q_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu} U_\infty} \frac{\sin\tau\, dx'}{r} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{y'_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu}} \frac{y\,dx'}{(x-x')^2+y^2}$$

Von den Wirbeln induziert (Bild III, 6):

$$\frac{u_n}{s_n U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n(x')}{s_n U_\infty} \frac{\sin\tau\, dx'}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n(x')}{s_n U_\infty} \frac{y\,dx'}{(x-x')^2+y^2}$$

$$\frac{v_n}{s_n U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n(x')}{s_n U_\infty} \frac{\cos\tau\, dx'}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_n(x')}{s_n U_\infty} \frac{(x-x')\,dx'}{(x-x')^2+y^2}.$$

Die induzierten Geschwindigkeiten $\frac{u_\pi}{V_\infty}$ und $\frac{v_\pi}{V_\infty}$ der Queranblasung werden ebenso gewonnen mit $\frac{\gamma_\pi}{V_\infty}$.

Bei der Integration treten zwei Funktionen Ω_1 und Ω_2 von x und y immer wieder auf (vgl. [3]).

$$\Omega_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}-(1-x^2+y^2)}{2[(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2]}}$$

pos. Vorz. für $x<0$

$$\Omega_2 = \frac{\pm x\sqrt{2}}{\sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}\sqrt{\sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}-(1-x^2+y^2)}}$$

neg. Vorz. für $x>0$.

Näherungswerte von Ω_1 und Ω_2 für kleine Ordinaten y ($y \to 0$).

$x^2<1$	$x^2=1$	$x^2>1$
$\Omega_1 = -\frac{x\,y}{(1-x^2)^{3/2}}$	$\Omega_1 = -\frac{x}{2\sqrt{y}}\left(1-\frac{1}{4}y\right)$	$\Omega_1 = \frac{\pm 1}{(x^2-1)^{1/2}} = -\frac{\operatorname{sign}(x)}{(x^2-1)^{1/2}}$
$\Omega_2 = \frac{-1}{y(1-x^2)^{1/2}} \times \left(1-\frac{1}{2}y^2\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2}\right)$	$\Omega_2 = -\frac{1}{2y^{3/2}}\left(1+\frac{1}{4}y\right)$	$\Omega_2 = \frac{-\lvert x\rvert}{(x^2-1)^{3/2}}$

Zu **Tafel III, 4.** Ω_1.

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
x \ y	0	0,010	0,025	0,050	0,075	0,10	0,15	0,20	
— 1,05	3,13	3,075	2,87	2,42	2,03	1,75	1,39	1,164	
— 1,04	3,50	3,425	3,10	2,48	2,035	1,74	1,37	1,147	
— 1,03	4,06	3,895	3,33	2,51	2,02	1,71	1,35	1,130	
— 1,02	4,98	4,53	3,53	2,49	1,98	1,668	1,32	1,108	
— 1,01	7,06	5,46	3,56	2,39	1,90	1,612	1,28	1,085	
— 1,00	∞	4,985	3,15	2,21	1,78	1,54	1,24	1,060	
— 0,99	0	2,265	2,39	1,96	1,66	1,46	1,20	1,032	
— 0,98	0	1,107	1,698	1,69	1,52	1,375	1,15	1,003	
— 0,97	0	0,633	1,20	1,42	1,36	1,275	1,10	0,970	
— 0,96	0	0,419	0,885	1,193	1,22	1,18	1,05	0,940	
— 0,95	0	0,317	0,671	0,999	1,08	1,08	1,00	0,905	
— 0,94	0	0,224	0,510	0,843	0,97	0,99	0,94	0,870	
— 0,93	0	0,183	0,425	0,717	0,853	0,905	0,89	0,835	
— 0,92	0	0,150	0,359	0,629	0,76	0,822	0,84	0,802	
— 0,91	0	0,126	0,300	0,535	0,68	0,756	0,793	0,769	
— 0,90	0	0,107	0,265	0,470	0,61	0,695	0,75	0,736	
— 0,80	0	0,035	0,090	0,180	0,260	0,326	0,411	0,463	
— 0,70	0	0,019	0,048	0,093	0,140	0,179	0,247	0,297	
— 0,60	0	0,011	0,028	0,058	0,087	0,114	0,1595	0,199	
— 0,50		0,008	0,020	0,040	0,060	0,075	0,1078	0,137	

Zu **Tafel III, 4.** $y\,\Omega_2$.

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
x \ y	0	0,010	0,025	0,050	0,075	0,10	0,15	0,20	
— 1,05	0	— 0,312	— 0,696	— 1,035	— 1,135	— 1,14	— 1,078	— 1,003	
— 1,04	0	— 0,426	— 0,910	— 1,223	— 1,275	— 1,24	— 1,135	— 1,040	
— 1,03	0	— 0,638	— 1,230	— 1,463	— 1,42	— 1,338	— 1,19	— 1,074	
— 1,02	0	— 1,073	— 1,730	— 1,715	— 1,57	— 1,435	— 1,243	— 1,108	
— 1,01	0	— 2,285	— 2,430	— 2,005	— 1,725	— 1,53	— 1,293	— 1,140	
— 1,00	— ∞	— 5,01	— 3,165	— 2,283	— 1,86	— 1,62	— 1,34	— 1,170	
— 0,99	— 7,09	— 5,52	— 3,60	— 2,473	— 1,97	— 1,695	— 1,38	— 1,20	
— 0,98	— 5,025	— 4,625	— 3,595	— 2,55	— 2,05	— 1,755	— 1,42	— 1,225	
— 0,97	— 4,12	— 3,96	— 3,385	— 2,575	— 2,105	— 1,80	— 1,45	— 1,25	
— 0,96	— 3,575	— 3,491	— 3,165	— 2,555	— 2,125	— 1,835	— 1,48	— 1,27	
— 0,95	— 3,205	— 3,157	— 2,965	— 2,49	— 2,125	— 1,845	— 1,495	— 1,29	
— 0,94	— 2,935	— 2,905	— 2,76	— 2,415	— 2,105	— 1,855	— 1,515	— 1,308	
— 0,93	— 2,725	— 2,705	— 2,597	— 2,338	— 2,08	— 1,85	— 1,53	— 1,320	
— 0,92	— 2,55	— 2,536	— 2,47	— 2,265	— 2,035	— 1,835	— 1,535	— 1,330	
— 0,91	— 2,415	— 2,404	— 2,34	— 2,19	— 2,005	— 1,815	— 1,54	— 1,338	
— 0,90	— 2,295	— 2,287	— 2,22	— 2,115	— 1,96	— 1,80	— 1,54	— 1,343	
— 0,80	— 1,669	— 1,664	— 1,650	— 1,618	— 1,582	— 1,538	— 1,435	— 1,320	
— 0,70	— 1,400	— 1,398	— 1,394	— 1,380	— 1,364	— 1,344	— 1,299	— 1,238	
— 0,60	— 1,250	— 1,248	— 1,246	— 1,240	— 1,230	— 1,220	— 1,195	— 1,160	
— 0,50	— 1,156	— 1,154	— 1,152	— 1,150	— 1,145	— 1,138	— 1,124	— 1,100	

Tafel III, 5. Die u-Komponenten der von den Quellverteilungen induzierten Geschwindigkeiten.

$$\frac{u_{12}(y_T)}{d_{12}U_\infty} = \frac{1}{4} - 2x + \frac{3}{2}x^2 - y^2 + \Omega_1\left[(1-x)^2\left(1+\frac{3}{2}x\right) + 2y^2\left(1-\frac{9}{4}x\right)\right] - \frac{1}{2}y^2\Omega_2[(1-x)(1+9x)+3y^2]$$

$$\frac{u_{123}(y_T)}{d_{123}'U_\infty} = \frac{19}{16} - \frac{31}{8}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{8}y^2(1-20x) + \frac{\Omega_1}{8}\left\{(1-x)^2(13+37x+20x^2) + y^2(41+9x-120x^2) + 20y^4\right\} + \frac{y^2}{8}\Omega_2\left\{(1-x)(11-71x-80x^2) + y^2(3-80x)\right\}$$

$$\frac{u_{32}(y_T)}{d_{32}U_\infty} = \frac{3}{2} - 3x(1+x) + 4x^3 + 3y^2(1-4x) + \Omega_1\{(1-x)^2(1+x)(1+4x) + y^2(5+9x-24x^2) + 4y^4\} + y^2\Omega_2\{(1-x)(3-7x-16x^2) + y^2(3-16x)\}$$

$$\frac{u_{42}(y_T)}{d_{42}U_\infty} = \frac{15}{8} - \frac{15}{2}x^2 + 5x^4 + y^2\left(\frac{15}{2} - 30x^2\right) + 5y^4 + x\Omega_1\{5(1-x^2)^2 + y^2(30-50x^2) - 25y^4\} + y^2\Omega_2\{5(1-x^2)(1-5x^2) + y^2(10-50x^2) + 5y^4\}$$

$$\frac{u_{53}(y_T)}{d_{53}U_\infty} = x\left(\frac{15}{4} - 10x^2 + 6x^4\right) + 30xy^2(1-2x^2) + 30xy^4 - \Omega_1\{(1-x^2)^2(1-6x^2) + y^2(8-78x^2+90x^4) - y^4(90x^2-13) + 6y^6\} + 4xy^2\Omega_2\{(1-x^2)(4-9x^2) + y^2(13-30x^2) + 9y^4\}$$

$$\frac{u_{0\alpha}(y_T)}{d_{0\alpha}U_\infty} = +\frac{1}{\pi}\left[4 - 6x + \left(3\frac{x^2-y^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2} - (2-6x)\,y\,\mathrm{arctg}\frac{2y}{x^2-1+y^2}\right]$$

$$\frac{u_{\alpha 0}(y_T)}{d_{\alpha 0}U_\infty} = +\frac{1}{\pi}\left[4 + 6x + \left(3\frac{x^2-y^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2} - (2+6x)\,y\,\mathrm{arctg}\frac{2y}{x^2-1+y^2}\right]$$

$$\frac{u_1(y_T)}{d_1 U_\infty} = -(2x-1) - \Omega_1[(x-1)(1+2x) - 2y^2] - \Omega_2 y^2(4x+1)$$

Ω_1 und Ω_2 vergleiche Tafel III, 4.

Tafel III, 6. Die v-Komponenten der von den Quellverteilungen induzierten Geschwindigkeiten.

$$\frac{v_{12}(y_T)}{d_{12}U_\infty} = y\left\{2 - 3x + \Omega_1\left[(1-x)\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{2}x\right) + \frac{3}{2}y^2\right] + \Omega_2\left[(1-x)^2\left(1+\frac{3}{2}x\right) + 2y^2\left(1-\frac{9}{4}x\right)\right]\right\}$$

$$\frac{v_{123}(y_T)}{d_{123}U_\infty} = \frac{y}{8}\left\{31 + 6x - 60x^2 + 20y^2 - \Omega_1\left[(1-x)(11-71x-80x^2) - 3y^2\left(1-\frac{80}{3}x\right)\right] + \Omega_2\left[(1-x)^2(13+37x+20x^2) + y^2(41+9x-120x^2) + \frac{5}{2}y^4\right]\right\}$$

$$\frac{v_{32}(y_T)}{d_{32}U_\infty} = y\{3(1+2x-4x^2) + 4y^2 - \Omega_1[(1-x)(3-7x-16x^2) + y^2(3-16x)] + \Omega_2[(1-x)^2(1+x)(1+4x) + y^2(5+9x-24x^2) + 4y^4]\}$$

$$\frac{v_{42}(y_T)}{d_{42}U_\infty} = 5y\{x(3-4x^2) + 4xy^2 - \Omega_1[(1-x^2)(1-5x^2) + 2y^2(1-5x^2) + y^4] + x\Omega_2[(1-x^2)^2 + 2y^2(3-5x^2) + 5y^4]\}$$

$$\frac{v_{53}(y_T)}{d_{53}U_\infty} = y\left\{-\frac{15}{4} + 30x^2 - 30x^4 - 10y^2(1-6x^2) - 6y^4 - 4x\Omega_1[(1-x^2)(4-9x^2) + y^2(13-30x^2) + 9y^4] - \Omega_2[(1-x^2)^2(1-6x^2) + y^2(8-78x^2+90x^4) + y^4(13-90x^2) + 6y^6]\right\}$$

$$\frac{v_{0\alpha}(y_T)}{d_{0\alpha}U_\infty} = +\frac{1}{\pi}\left\{6y + y(1-3x)\ln\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2} - [(1-x)(1+3x) + 3y^2]\,\mathrm{arctg}\frac{2y}{x^2-1+y^2}\right\}$$

$$\frac{v_{\alpha 0}(y_T)}{d_{\alpha 0}U_\infty} = -\frac{1}{\pi}\left\{6y + y(1+3x)\ln\frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2} - [(1+x)(1-3x) + 3y^2]\,\mathrm{arctg}\frac{2y}{x^2-1+y^2}\right\}$$

$$\frac{v_1(y_T)}{d_1 U_\infty} = 2y - y\Omega_1(1-4x) + y\Omega_2(1+x-2x^2+2y^2)$$

Ω_1 und Ω_2 vergleiche Tafel III, 4.

$-\frac{u_{12}^{(0)}}{U_\infty} \approx -\frac{d_{12}}{\delta}\frac{\delta}{\sqrt{y_T}}$ und ebenso die erwähnten anderen für endliche Dickenverhältnisse $\delta > 0$ in der 1. Näherung mit dem Grenzwert $y_T = 0$ nicht richtig wiedergegeben werden. Für die u-Komponente, die zur Kantenwinkelverteilung gehört, ist $\frac{u_{0\alpha}(y_T)}{U_\infty}\frac{u_{0\alpha}^{(0)}}{U_\infty} \approx -1{,}273\,\frac{d_{0\alpha}}{\delta}\,\delta\ln\frac{1}{y_T}$ ebenfalls in der 1. Näherung ($\delta > 0$) mit $y_T = 0$ nicht richtig wiedergegeben. Diese Veränderlichkeit mit y_T ist deshalb bei allen diesen Übergeschwindigkeiten unbedingt in der 1. Näherung zu berücksichtigen.

Für die zur Wölbung und zur Dickenverteilung $\frac{y_{32}}{d_{32}}$ gehörenden Zusatzgeschwindigkeiten ist die Änderung in y-Richtung proportional $\sqrt{y_T}$, so daß die Übergeschwindigkeiten $\frac{u_n(y_T)}{U_\infty} - \frac{u_n(0)}{U_\infty}$ usw. proportional $\delta^{3/2}$ sind und in der 1. Näherung gegenüber $\frac{u_n(0)}{U_\infty}$ vernachlässigt werden. Bei allen weiteren Betrachtungen können wir die letztgenannten Zusatzgeschwindigkeiten und Singularitäten stets ungeändert aus der bisherigen Theorie übernehmen, da selbst im Punkt der größten Geschwindigkeitsänderung zwischen Belegungslinie und Profilkontur ($x = -1$) keine Änderung der 1. Näherung notwendig wird und die Übergeschwindigkeiten stets klein gegenüber der Anblasgeschwindigkeit bleiben.

Nach den Tafeln III, 4 bis III, 7 sind für die weiter zu untersuchenden Singularitätenverteilungen (die für den Nasenradius, den Kantenwinkel und den Anstellwinkel) die Übergeschwindigkeiten zahlenmäßig berechnet[9]) und in den Kurvenblättern (III, 2 bis III, 8 für das Rechenverfahren) aufgetragen worden. Dort und in Tafel III, 8 (in der die Tangentenrichtungen der Geschwindigkeitskomponenten als Funktionen von y bei $y_T = 0$ angegeben sind) zeigt sich, daß die Geschwindigkeiten auch dieser Singularitätenverteilungen nur in Nasennähe wesentlich von y_T abhängen, während sie sich etwa von $x = -1/2$ an in 1. Näherung nicht mehr von denen auf der Belegungslinie unterscheiden. Für gewölbte Profile bleibt die Änderung der Geschwindigkeit von der Belegungslinie bis zur Profilkontur nur von der Ordinate y_T des Tropfens abhängig. Die Verlegung der Singularitäten vom Skelett auf die x-Achse gibt in jedem Fall nur sehr kleine Unterschiede (vgl. den Beitrag VI) in den Geschwindigkeiten, die erst in einer höheren Näherung beachtet werden müssen.

Die Quell- und Wirbelverteilungen induzieren auch auf der x-Achse außerhalb der Singularitätenstrecke (für $x < -1$ und $x \geq +1$) Geschwindigkeiten (Bild III, 10), die in den Tafeln III, 1 und III, 2 bereits angegeben sind und über Ω_1 und Ω_2 ($y \to 0$) der Tafel III, 4 aus den Formeln der Tafeln III, 5 bis III, 7 berechnet sind. Außerhalb der Belegungslinie müssen die v-Komponenten der

[9]) Vgl. Zahlentafel III, 1 bis III, 5.

Tafel III, 7. Die Komponenten der von den Wirbeln induzierten Geschwindigkeiten.

u-Komponenten

$\underline{V_\infty = 0}$

$$\frac{u_1(y_T)}{s_1 U_\infty} = -2y\{1 + 2x\Omega_1 + (1 - x^2 + y^2)\Omega_2\}$$

$$\frac{u_2(y_T)}{s_2 U_\infty} = -3y\{2x + \Omega_1(3x^2 - 1 - y^2) + x\Omega_2(1 - x^2 + y^2)\}$$

$$\frac{u_3(y_T)}{s_3 U_\infty} = -4y\Big\{3x^2 - \frac{1}{2} - y^2 + 2x\Omega_1(2x^2 - 1 - 2y^2) + \Omega_2\left[x^2(1 - x^2) + y^2(6x^2 - 1 - y^2)\right]\Big\}$$

$\underline{U_\infty = 0}$

$$\frac{u_{\mathfrak{A}}(y_T)}{V_\infty} = -y\{\Omega_1 + (1 - x)\Omega_2\}$$

v-Komponenten

$\underline{V_\infty = 0}$

$$\frac{v_1(y_T)}{s_1 U_\infty} = -2x + 2\Omega_1(1 - x^2 + y^2) - 4\Omega_2 x y^2$$

$$\frac{v_2(y_T)}{s_2 U_\infty} = +\frac{3}{2} - 3x^2 + 3y^2 + 3x\Omega_1(1 - x^2 + 3y^2) - 3\Omega_2(3x^2 - 1 - y^2)y^2$$

$$\frac{v_3(y_T)}{s_3 U_\infty} = +2x(1 - 2x^2) + 12xy^2 + \Omega_1\left[4x^2(1 - x^2) + 4y^2(6x^2 - 1 - y^2)\right] - 8\Omega_2 x y^2(2x^2 - 1 - 2y^2)$$

$\underline{U_\infty = 0}$

$$\frac{v_{\mathfrak{A}}(y_T)}{V_\infty} = -1 + \Omega_1(1 - x) - \Omega_2 y^2$$

Ω_1 und Ω_2 vergleiche Tafel III, 4.

Quellverteilungen und die *u*-Komponenten der Wirbelverteilungen auf der *x*-Achse Null sein. Die von den Quellen induzierten *u*-Komponenten und die von den Wirbeln induzierten *v*-Komponenten erstrecken sich über die ganze *x*-Achse und klingen im Unendlichen auf Null ab. Die Art des Abklingens wird von der Dichte der Singularitäten auf der Belegungslinie bestimmt. Die *u*-Komponenten der für den Nasenradius verantwortlichen Quellverteilungen klingen viel schwächer (mit der Wurzel aus dem Reziprokwert der Entfernung) ab als die von der Quellverteilung des Kantenwinkels (mit dem Logarithmus der Entfernung) Bild III, 10. Berechnen wir nach der Tafel III, 1 etwa den Staupunkt für das analytische Schukowski-Profil $\frac{y_1}{d_1}$ bei symmetrischer Anblasung, so liegt der Staupunkt $U_\infty + u = 0$, $v = 0$ vor der Profilkontur im Punkt

$$\bar{x} = -1 - 2d_1^2 = -1 - \varrho_N, \quad \ldots \quad \text{(III, 47)}$$

wenn wir von höheren Potenzen in d_1 absehen. Da dieser Staupunkt aber auf der Profilkontur liegen soll, ist die Singularitätenstrecke in der bisher vorliegenden Näherung zu lang geworden und muß deshalb durch Verzerrung verkürzt[10]) werden; der vorderste Punkt der Singularitäten muß so weit innerhalb der Profilkontur liegen, daß der freie Staupunkt (III, 47) der Strömung in die Profilnase ($x = -1$) fällt. Dann beginnt die Singularitätenbelegung im Abstand

$$\Delta_r \bar{x} = x - \bar{x} = \varrho_N = \frac{1}{2} r_N \quad \ldots \quad \text{(III, 48)}$$

hinter der Profilnase, der bei allen für den Nasenradius verantwortlichen Dickenverteilungen mit Gl. (III, 48) bestimmt ist. Die zugehörige Quellverteilung beginnt erst in der Entfernung eines halben Nasenradius hinter dem vorderen Scheitelpunkt bei $x = -1$. An der Profilnase müssen wir also die Profilabszisse *x* von der Singularitätenabszisse

[10]) Vgl. das gleiche Ergebnis in [3].

Tafel III, 8. Das Abklingen der Störgeschwindigkeiten mit der Entfernung *y* von der Belegungslinie.

Näherung für $|x| < 1;\ y \ll (1 - x^2)$

a) des Quellsystems

$\nu\mu$	$\frac{\Delta_T u_{\nu\mu I}}{y_T d_{\nu\mu} U_\infty} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty}\right)\right]_{y=0}$	$\frac{\Delta_T v_{\nu\mu I}}{y_T d_{\nu\mu} U_\infty} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty}\right)\right]_{y=0}$
12	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\frac{1}{2} + 4x + 3x^2}{1+x}$	$2 - 3x$
32	$+3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(4x^2 + 2x - 1)$	$3(1 + 2x - 4x^2)$
42	$5\sqrt{1-x^2}\,(4x^2 - 1)$	$15x\left(1 - \frac{3}{4}x^2\right)$
53	$15x\sqrt{1-x^2}\,(2x^2 - 1)$	$-15\left[2x^2(x^2 - 1) + \frac{1}{4}\right]$
0α	$-2(1 - 3x)$	$\frac{2}{\pi}\left[(1 - 3x)\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + 2\,\frac{2+3x}{1+x}\right]$
α0	$-2(1 + 3x)$	$\frac{2}{\pi}\left[(1 + 3x)\ln\left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert + 2\,\frac{2-3x}{1-x}\right]$
123	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{-11 + 47x + 114x^2 + 60x^3}{1+x}$	$\frac{31}{8} + \frac{3}{4}x - \frac{15}{2}x^2$
1	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{2x(1+x) - 1}{(1-x)(1+x)}$	2

b) des Wirbelsystems

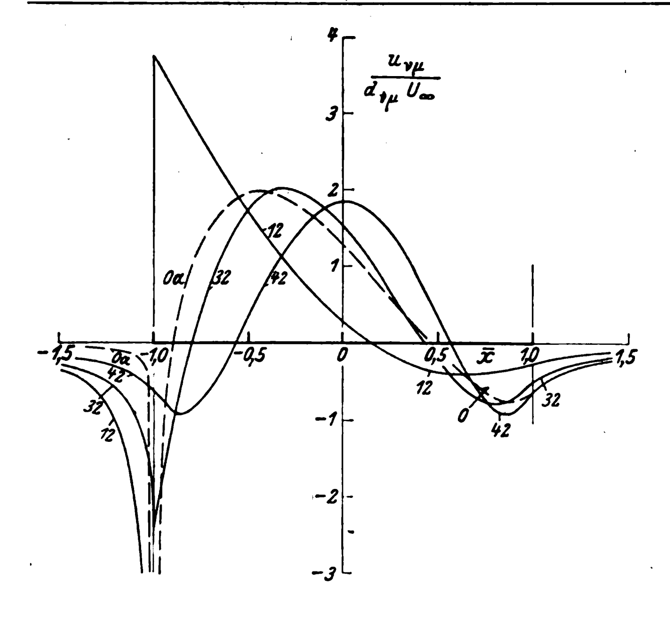
n	$\frac{\Delta_T u_{nI}}{y_T s_n U_\infty}$	$\frac{\Delta_T v_{nI}}{y_T s_n U_\infty}$
1	-2	$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$
2	$-6x$	$\frac{3(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$-4\left(3x^2 - \frac{1}{2}\right)$	$\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}(3x^2 - 2)$
$\mathfrak{A}$	$\frac{\Delta_T u_{\mathfrak{A}}}{y_T V_\infty} = +0$	$\frac{\Delta_T v_{\mathfrak{A}}}{y_T V_\infty} = \frac{+1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

$\bar{x}$ unterscheiden, die Verzerrung der gesamten Singularitätenachse ist

$$\bar{x} = x - \frac{1-x}{2}\Delta\bar{x};\quad x = \bar{x} + \frac{1-\bar{x}}{2}\Delta\bar{x} \quad \text{(III, 49a)}$$

Dabei unterscheidet sich $\Delta\bar{x}$ von $\Delta_r\bar{x}$ um eine Strecke $\Delta_\varepsilon\bar{x}$, um welche sich der vorderste Singularitätenpunkt verschiebt (Kurvenblatt III, 1 des Rechenverfahrens), wenn das Profil einen p o s i t i v e n[11]) Vorderkantentangens $\frac{\varepsilon}{\delta}$ hat (vgl. den Beitrag VI). Hat das Profil einen Nasenradius und einen positiven Vorderkantentangens, so ist die Singularitätenlinie um die Strecke

[11]) Ein negativer Vorderkantentangens tritt nur in Verbindung mit dem Nasenradius ϱ_N auf, sein Einfluß auf die Verzerrung $\Delta\bar{x}$ bleibt daher vernachlässigbar klein.



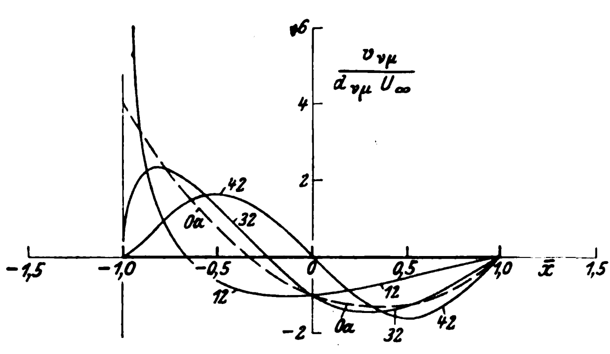


Bild III, 10. Die Geschwindigkeitskomponenten der Quellverteilungen entlang der Profilsehne als Beispiel für die Fernwirkung außerhalb der Belegungslinie.

$$\Delta \bar{x} = \Delta_r \bar{x} + \Delta_\varepsilon \bar{x} = \varrho_N + 0{,}164\, e^{-\frac{0{,}7854}{d_{0a}}}\ ; \ d_{0a} > 0 \quad \text{(III, 49}^{\text{b}}\text{)}$$

zu verzerren.

Diese Verzerrung ist in allen Fällen sehr klein ($\Delta \bar{x} \sim \delta^2$, vgl. den Beitrag VI) und wird deshalb sehr bald hinter der Profilnase bedeutungslos, während sie in der Nase selbst von maßgeblichem Einfluß für die Staupunktslage auf der Profilkontur wird. Bei Schräganblasung ist der vordere Scheitelpunkt nicht mehr Staupunkt, jedoch bleibt $U_\infty + u = 0$, so daß die Richtung der Geschwindigkeit in diesem Punkt $\frac{v}{U_\infty + u} = \frac{d\,y_T}{d\,x} = \infty$ ist. Für gewölbte Profile ist die Profiltangente bei $x = -1$ nicht mehr unendlich, jedoch sind die Unterschiede für die Geschwindigkeiten in dieser Näherung zu vernachlässigen.

Die Verzerrung ändert die Singularitätenbelegung für die Umgebung der Profilnase, und sie ist bedingt durch die Geschwindigkeitsverhältnisse im vorderen Scheitelpunkt, beeinflußt aber auch die Umgebung dieses Punktes. Deshalb wird zur weiteren Korrektur der Quellverteilungen die Krümmung der Stromlinie durch den Scheitelpunkt mit der vorgeschriebenen Nasenkrümmung des Profiles in Übereinstimmung gebracht (nach einem Vorschlag von H. B. Helmbold). Dann wird sich eine Korrektur der Quellverteilungen und der von ihnen induzierten Übergeschwindigkeiten herausstellen. Für die Geschwindigkeitskorrektur wird der Ansatz $\frac{u_{12}}{d_{12}\,U_\infty} f_{12}$ mit dem Faktor $f_{12} = d_{12}\,(1 + n\,d_{12})$ gemacht und entsprechend ebenso für die anderen Geschwindigkeitskomponenten. Dann ergibt sich aus den Bedingungen der übereinstimmenden Krümmung ($\varrho_{\psi} = \varrho_N$ bei $x = -1$) und der senkrechten Tangente ($U_\infty + u = 0$ bei $x = -1$) außer der bekannten Singularitätenverkürzung Gl. (III, 48) nach einiger Rechnung (die im Beitrag VI durchgeführt wird) noch für $f_{12} = d_{12}\,(1 + n\,d_{12})$ oder $f_{123} = d_{123}\,(1 + n\,d_{123})$

$$n\,d_{12} = n\,d_{123} = \frac{9}{4} d_{12} + \frac{35}{16} d_{123} - \frac{5}{2} d_{32} - \frac{5}{8} d_{42} + \frac{1}{4} d_{53} - 0{,}637\, d_{\alpha 0} + \left(\frac{u_{0a}}{d_{0a}\,U_\infty}\right)_{x=-1} d_{0a}, \quad \text{(III, 50)}$$

dabei ist $\left(\frac{u_{0a}}{d_{0a}\,U_\infty}\right)_{x=-1}$ aus Kurvenblatt (III, 1[12]) zu entnehmen. Diese Gleichung berücksichtigt die von den übrigen Singularitäten im Punkt $x = -1$, $y = 0$ induzierten Geschwindigkeiten bei der Erfüllung der Tangentenbedingung ($U_\infty + u = 0$).

An der Profilnase sind die Übergeschwindigkeiten des Profiles nicht mehr vom Dickenverhältnis δ unabhängig, weil die von δ abhängige Profilordinate y_T für ihre Berechnung wesentlich ist. Außerdem beeinflussen die einzelnen Dickenanteile die Geschwindigkeiten jetzt nicht mehr getrennt, denn sowohl durch die Profilordinate y_T als auch durch die Bedingung (III, 50) ist eine gegenseitige Beeinflussung zwischen den Dickenanteilen gegeben. Nur die Wölbung bleibt in dieser Näherung noch von der Dicke und einer gegenseitigen Beeinflussung unabhängig, weil für sie die Änderung der Übergeschwindigkeit zwischen Profilachse und Kontur noch nicht berücksichtigt werden muß.

Es bleibt noch die Untersuchung der Profilnase bei Queranblasung. Die Bedingung der senkrechten oder für gewölbte Profile nahezu senkrechten Profiltangente ($U_\infty + u_\varkappa = 0$) im Punkt $x = -1$ ist bei dieser Anblasrichtung ($U_\infty = 0$) und der Wirbelverteilung $\gamma_\varkappa$ (bei Werten $x < -1 : u_\varkappa = 0$) von selbst erfüllt. Die Übereinstimmung der Stromlinienkrümmung mit dem Nasenradius ist erfüllt, wenn die Wirbelbelegung um die gleiche Strecke $\Delta_r \bar{x}$ (Gl. (III, 48)) wie die Quellbelegung verzerrt wird. Im vorderen Scheitelpunkt ($x = -1$) des Profiles ergibt dann die aus der Anblasgeschwindigkeit V_∞ und die von der Wirbelverteilung $\gamma_\varkappa$ induzierte Geschwindigkeit $v_\varkappa$ nach Tafel III, 1 die Gesamtgeschwindigkeit bei Queranblasung:

$$\left(\frac{w_{S,n}}{U_\infty}\right)_{\alpha^*} = \alpha^* \left(\frac{w_\varkappa}{V_\infty}\right)_N = \alpha^* \left(1 + \frac{v_\varkappa}{V_\infty}\right)_{\substack{\bar{x} = -1-\varrho_N \\ y = 0}} \approx \alpha^* \sqrt{\frac{2}{\varrho_N}} \quad \text{(III, 51)}$$

Da die Wirbelverteilungen der Wölbung nur kleine Geschwindigkeiten im vorderen Scheitelpunkt ($u_W = 0$, $v_W \gtrless 0$) induzieren, ist dort die Geschwindigkeit im wesentlichen nur vom Nasenradius abhängig. Für große Auftriebszahlen ($c_{a\varkappa} = 2\pi\alpha^*$, bei denen die maximale Geschwindigkeit nahezu im Scheitel des Profiles liegt, verhalten sich die maximalen Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Wurzeln der Nasenradien ϱ_N.

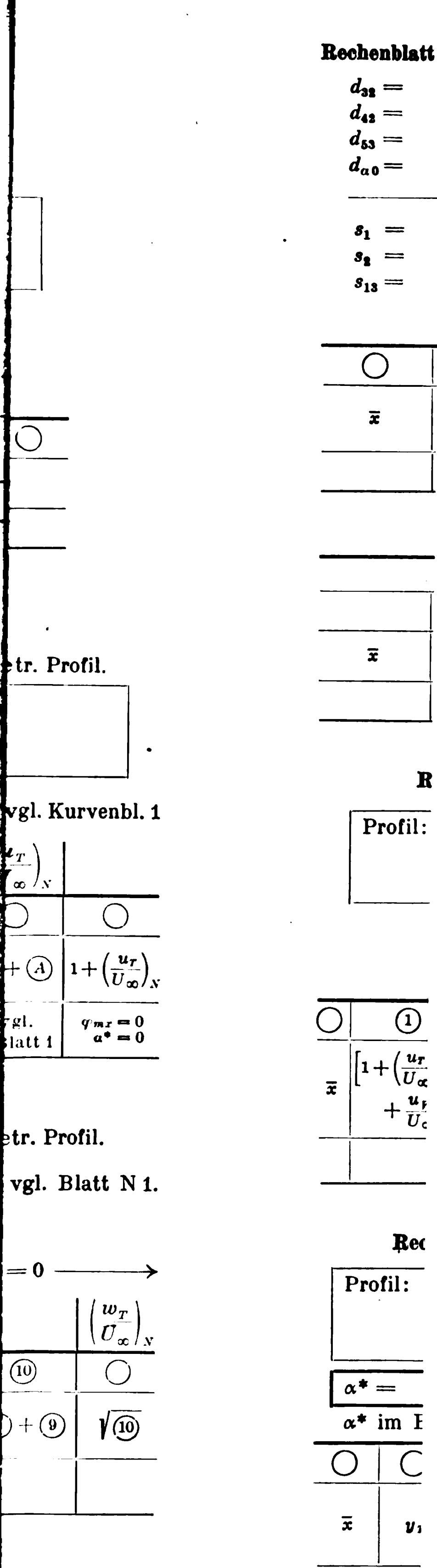
Alle Singularitätenverteilungen, die an der Profilnase hohe Geschwindigkeiten induzieren, müssen nach Gl. (III, 49) verzerrt werden, damit im vorderen Scheitelpunkt Tangente und Krümmung der Stromlinie mit denjenigen des Profiles übereinstimmen. Wenn wir gleichzeitig auch alle anderen Singularitäten um dieselbe kleine Strecke $\Delta \bar{x}$ verzerren[13]), so bleibt das, in der vorliegenden Näherung bedeutungslos.

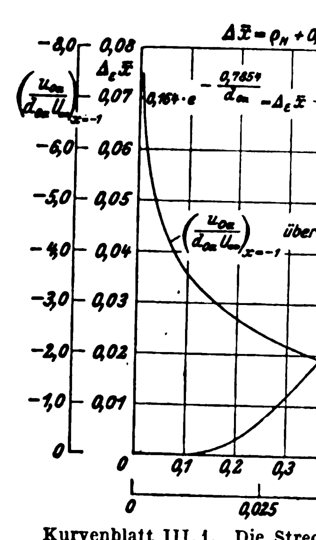
Die Quellverteilung $\frac{q_{0a}}{d_{0a}\,U_\infty}$ des Dickenanteils mit Vorderkantenwinkel hat im vordersten Profilpunkt eine endliche Quelldichte, welche eine kleine Abrundung des Kantenwinkels mit sich bringt. Solange das Profil einen Nasenradius $\varrho_N > 0$ hat, ist diese Ungenauigkeit der Quellverteilung, die genau genommen im vordersten Punkt mit einer unrunden, von ε abhängigen Wurzel nach Null gehen müßte, unbedeutend. Hat das Profil aber nur einen Vorderkantenwinkel ($\varrho_N = 0$, $\varepsilon > 0$), so bringt die Verzerrung der Singularitäten mit $\Delta \bar{x} = \Delta_\varepsilon \bar{x}$ eine Abrundung der Stromlinie

$$\varrho_\varepsilon \approx \Delta_\varepsilon \bar{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III, 52)}$$

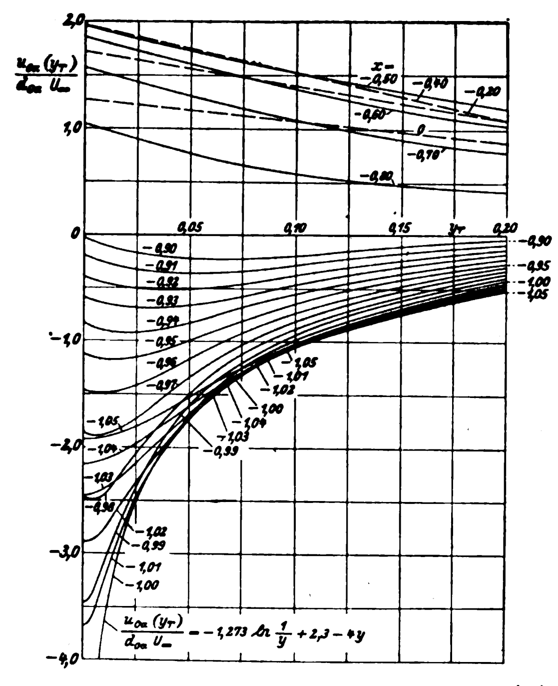
[12]) Kurvenblatt III, 1 des Rechenverfahrens.

[13]) Diese Verzerrung aller Singularitäten erscheint zunächst nur aus praktischen Gründen sinnvoll, jedoch weiß man aus der konformen Abbildung, daß der vordere Verzweigungspunkt der Abbildungsfunktion [3] mit dem vordersten Singularitätenpunkt zusammenfallen muß.

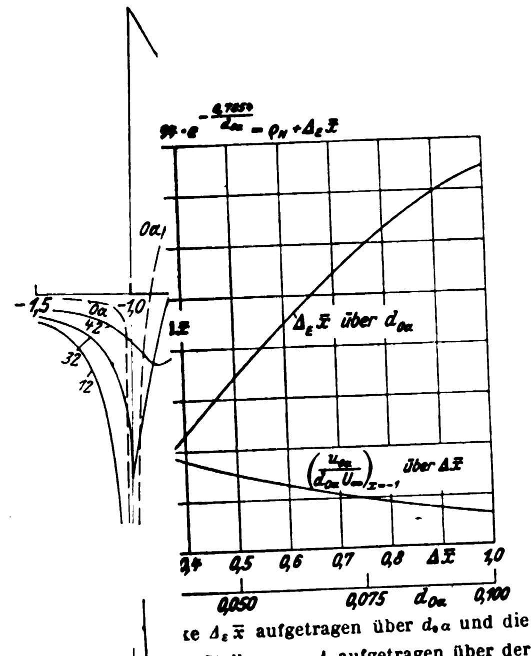




Kurvenblatt III, 1. Die Strec… Geschwindigkeit $\frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha} U_\infty}$ an de… St…



Kurvenblatt III, 2. Die Geschwindigkeitskomponente $\frac{u_{0\alpha}(y_T)}{d_{0\alpha} U_\infty}$ auf… getragen über y_T. Parameter: $\bar{x}$: $-1{,}05 \leq \bar{x} \leq 0$.



ɛe $\Delta_\varepsilon \bar{x}$ aufgetragen über $d_{0\alpha}$ und die
r Stelle $x = -1$ aufgetragen über der
·ecke $\Delta \bar{x}$.

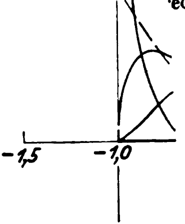


Bild III, 10. Die Ges
entlang der Profilseh

$\Delta \bar{x} = \Delta_r \bar{x} + \Delta_\varepsilon$ …
zu verzerren.
Diese Verzerru
vgl. den Beitrag V
Profilnase bedeut
von maßgeblichem
Profilkontur wird.
Scheitelpunkt nic
$+ u = 0$, so daß
diesem Punkt $\frac{}{U_x}$
Profile ist die Pro
endlich, jedoch sin
keiten in dieser N
Die Verzerrung
Umgebung der Pro
schwindigkeitsverh
einflußt aber auch
wird zur weiteren
Krümmung der Str
vorgeschriebenen N
einstimmung gebra
Helmbold). Dann
teilungen und der v
keiten herausstelle
wird der Ansatz $\frac{u_1}{d_{12} U}$
gemacht und entspr
digkeitskomponente
gen der übereinstim
und der senkrechten
außer der bekannten

Kurvenblatt III, 3. Die Geschwindigkeitskomponente $\frac{u_{12}(y_T)}{d_{12}\, U_\infty}$ aufgetragen über y_T. Parameter $\bar{x}$: $-1{,}05 \leq \bar{x} \leq 0$.

7. Anhang. Zahlentafeln zu

x \ y	0	0,025
−1,05	−1,919	−1,805
−1,04	−2,155	−1,965
−1,03	−2,46	−2,14
−1,02	−2,895	−2,33
−1,01	−3,68	−2,44
−1,00	−∞	−2,50
−0,99	−3,45	−2,36
−0,98	−2,47	−2,05
−0,97	−1,868	−1,727
−0,96	−1,453	−1,415
−0,95	−1,120	−1,150
−0,94	−0,829	−0,914
−0,93	−0,586	−0,690
−0,92	−0,389	−0,500
−0,91	−0,198	−0,322
−0,90	−0,035	−0,166
−0,80	+1,038	+0,886
−0,70	1,572	1,432
−0,60	1,854	1,720
−0,50	1,967	1,846

x \ y	0	0,005
−1,05	−[illegible]	—
−1,04	−[illegible]	—
−1,03	−5.172	—
−1,02	−6.91	—
−1,01	−[illegible]	—
−1,00	−∞	−10,645
−0,99	3.70	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
−0,97	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
−0,94	[illegible]	3.173
−0,93	[illegible]	[illegible]
−0,92	[illegible]	[illegible]
−0,91	[illegible]	3 143
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

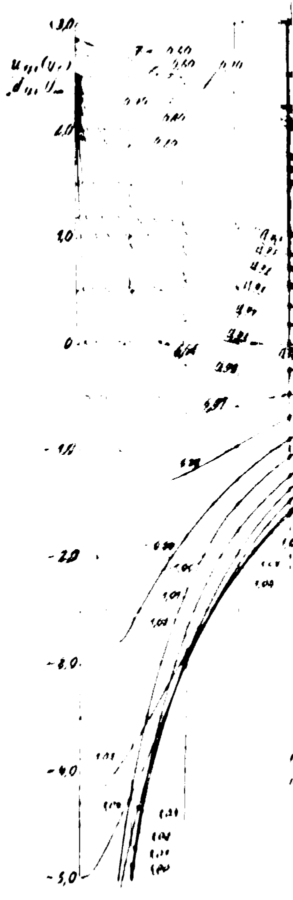
g. Zahlentafeln zum Aufzeichnen der Kurvenblätter 2 bis 8 des Rechenverfahrens.

Kurvenblatt III, 2. $\frac{u_{0a}}{d_{0a} \cdot U_\infty}$.

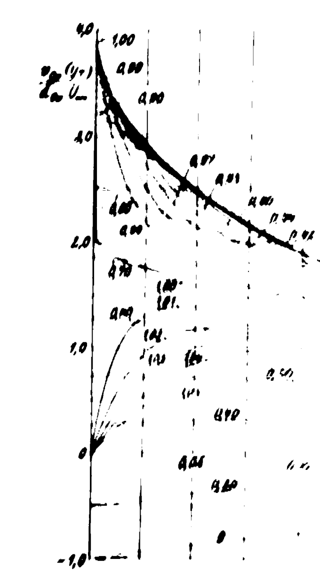
[illegible]	0,025	[illegible]	0,075	0,10	0,15	0,20
919	— 1,805	[illegible]	— 1,255	— 1,049	— 0,750	— 0,515
155	— 1,965	[illegible]	— 1,295	— 1,062	— 0,740	— 0,500
46	— 2,14	[illegible]	— 1,310	— 1,058	— 0,727	— 0,485
895	— 2,33	[illegible]	— 1,310	— 1,043	— 0,706	— 0,464
68	— 2,44	[illegible]	— 1,290	— 1,021	— 0,680	— 0,441
∞	— 2,50	[illegible]	— 1,250	— 0,988	— 0,657	— 0,414
,45	— 2,36	[illegible]	— 1,198	— 0,935	— 0,607	— 0,390
,47	— 2,05	[illegible]	— 1,125	— 0,885	— 0,570	[illegible]
,868	— 1,727	[illegible]	— 1,030	— 0,805	— 0,520	— 0,324
,453	— 1,415	[illegible]	— 0,925	— 0,736	— 0,473	[illegible]
1,120	— 1,150	[illegible]	— 0,810	— 0,645	— 0,420	[illegible]
0,829	— 0,914	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	— 0,217
0,586	— 0,690	[illegible]	— 0,570	[illegible]	[illegible]	— 0,176
0,389	— 0,500	[illegible]	— 0,455	[illegible]	[illegible]	— 0,132
0,198	— 0,322	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	— 0,166	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	+ 0,886	[illegible]	[illegible]	[illegible]	— 0,476	[illegible]
[illegible]	1,432	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	1,720	[illegible]	[illegible]	1,374	[illegible]	[illegible]
[illegible]	1,846	[illegible]	[illegible]	1,522	[illegible]	[illegible]

Kurvenblatt III, 3. [illegible]

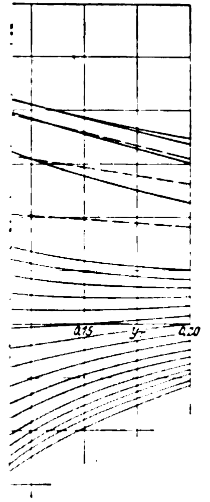
[illegible]	0,005	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,20
[illegible]	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	— 0,645	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0,318	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	2,290	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	2,825	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3,053	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3,110	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3,173	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3,176	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3,161	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3,143	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3,124	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	2,762	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	2,353	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	1,968	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	1,610	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]



Kurvenblatt III, 4. Die Geschwin… getragen über … Parame…



Kurvenblatt III, 5. Die G… getragen über …



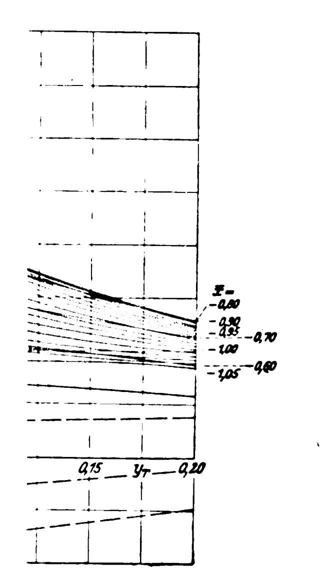
keitskomponente $\frac{u_{123}(y_T)}{d_{123}\, U_\infty}$ auf-
er $\bar{x}$: $-1,05 \leq \bar{x} \leq 0$.

Kurvenblatt III, 4. $\frac{u_{123}}{d_{123} \cdot U_\infty}$.

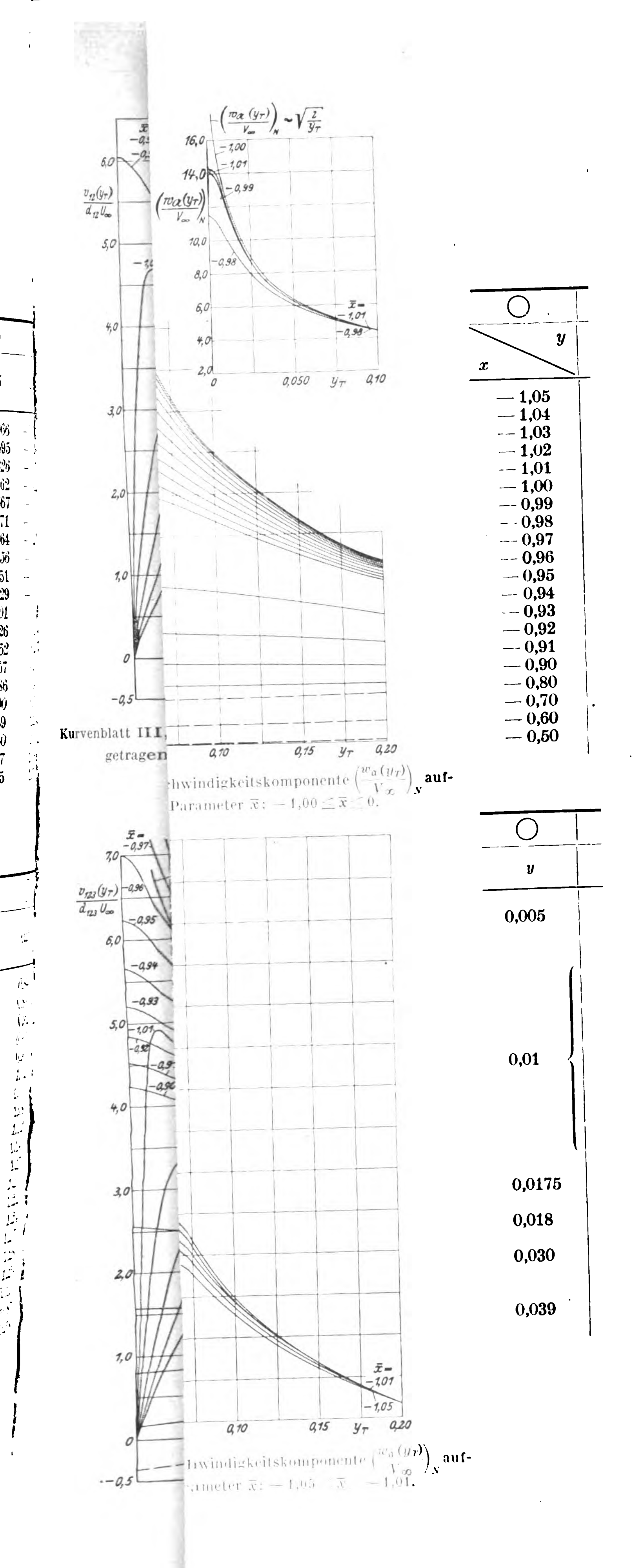
○	○	○	○	○	○	○	○
x \ y	0	0,025	0,05	0,075	0,10	0,15	0,20
— 1,05	— 4,308	— 3,776	— 2,915	— 2,151	— 1,617	— 0,966	— 0,564
— 1,04	— 5,001	— 4,216	— 3,003	— 2,139	— 1,568	— 0,895	— 0,529
— 1,03	— 6,048	— 4,622	— 3,024	— 2,069	— 1,472	— 0,826	— 0,463
— 1,02	— 7,881	— 5,027	— 2,945	— 1,967	— 1,377	— 0,762	— 0,424
— 1,01	— 12,013	— 5,041	— 2,704	— 1,770	— 1,256	— 0,667	— 0,363
— 1,00	— ∞	— 4,167	— 2,342	— 1,505	— 1,080	— 0,571	— 0,300
— 0,99	2,231	— 2,62	— 1,826	— 1,257	— 0,912	— 0,464	— 0,237
— 0,98	2,272	— 1,204	— 1,227	— 0,964	— 0,712	— 0,356	— 0,151
— 0,97	2,31	— 0,208	— 0,655	— 0,603	— 0,483	— 0,251	— 0,080
— 0,96	2,349	0,489	— 0,189	— 0,289	— 0,274	— 0,129	+ 0,004
— 0,95	2,386	0,950	0,234	+ 0,011	— 0,043	— 0,001	0,083
— 0,94	2,423	1,305	0,586	0,263	+ 0,153	+ 0,126	0,165
— 0,93	2,458	1,508	0,867	0,517	0,347	0,252	0,256
— 0,92	2,487	1,672	1,059	0,731	0,528	0,367	0,336
— 0,91	2,518	1,827	1,271	0,911	0,688	0,486	0,418
— 0,90	2,549	1,932	1,434	1,076	0,829	0,590	0,511
— 0,80	2,766	2,470	2,207	1,949	1,663	1,389	1,141
— 0,70	2,859	2,643	2,451	2,259	2,087	1,780	1,511
— 0,60	2,837	2,663	2,503	2,352	2,201	1,927	1,685
— 0,50	2,719	2,573	2,436	2,305	2,177	1,945	1,726

Kurvenblatt III, 5. $\frac{v_{0\alpha}}{d_{0\alpha} \cdot U_\infty}$.

○	○	○	○	○	○	○	○
x \ y	0	0,025	0,05	0,075	0,10	0,15	0,20
— 1,05	0	0,44	0,72	0,84	0,89	0,90	0,84
— 1,04	0	0,55	0,84	0,96	0,98	0,93	0,88
— 1,03	0	0,71	0,99	1,08	1,06	0,97	0,92
— 1,02	0	0,945	1,17	1,205	1,15	1,02	0,95
— 1,01	0	1,30	1,37	1,34	1,25	1,09	0,99
— 1,00	4,00	1,75	1,59	1,46	1,34	1,16	1,02
— 0,99	3,92	2,19	1,80	1,59	1,44	1,21	1,05
— 0,98	3,84	2,51	1,99	1,71	1,52	1,26	1,08
— 0,97	3,77	2,72	2,14	1,82	1,61	1,32	1,12
— 0,96	3,68	2,83	2,27	1,92	1,69	1,37	1,14
— 0,95	3,61	2,89	2,36	2,01	1,75	1,41	1,17
— 0,94	3,53	2,92	2,42	2,07	1,81	1,45	1,20
— 0,93	3,45	2,91	2,46	2,11	1,85	1,49	1,22
— 0,92	3,38	2,90	2,48	2,14	1,89	1,52	1,24
— 0,91	3,30	2,88	2,49	2,15	1,91	1,54	1,27
— 0,90	3,23	2,84	2,48	2,16	1,92	1,56	1,28
— 0,80	2,52	2,34	2,16	1,98	1,82	1,53	1,29
— 0,70	1,87	1,76	1,68	1,58	1,48	1,29	1,13
— 0,60	1,28	1,23	1,18	1,13	1,08	0,97	0,87
— 0,50	0,75	0,74	0,72	0,70	0,68	0,64	0,58



keitskomponente $\frac{v_{0\alpha}(y_T)}{d_{0\alpha}\, U_\infty}$ auf-
er $\bar{x}$: $-1,05 \leq x \leq 0$.



Kurvenblatt III, ... getragen ...hwindigkeitskomponente $\left(\frac{w_a(y_T)}{V_\infty}\right)_N$ auf- Parameter $\bar{x}$: $-1,00 \leq \bar{x} \leq 0$.

...hwindigkeitskomponente $\left(\frac{w_a(y_T)}{V_\infty}\right)_N$ auf- ...ameter $\bar{x}$: $-1,05 \leq \bar{x} \leq -1,01$.

○
x \ y
— 1,05
— 1,04
— 1,03
— 1,02
— 1,01
— 1,00
— 0,99
— 0,98
— 0,97
— 0,96
— 0,95
— 0,94
— 0,93
— 0,92
— 0,91
— 0,90
— 0,80
— 0,70
— 0,60
— 0,50

○
y
0,005
0,01
0,0175
0,018
0,030
0,039

$\ldots y}\left(\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}U_\infty}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}U_\infty}\right)$ bei $y = 0$.

○	○	○	○	○	○
$\ldots{}_{123} \ldots U_\infty)$	$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_{123}}{d_{123}U_\infty}\right)$	$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha}U_\infty}\right)$	$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_{0\alpha}}{d_{0\alpha}U_\infty}\right)$	$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_{\mathfrak{A}}}{V_\infty}\right)$	$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_{\mathfrak{A}}}{V_\infty}\right)$
0	60,8	0	19,5	62,40	0
0	79,8	0	25,35	87,40	0
0	134,3	0	37,80	135,00	0
0	246,8	0	55,60	248,30	0
0	706,6	0	117,5	706,00	0
0	∞	0	+ ∞	∞	0
∞	— 4,38	— 8,00	— ∞	0	∞
9,7	— 4,23	— 7,94	— 137,0	0	709,00
2,4	— 4,06	— 7,88	— 72,5	0	251,25
7,9	— 3,92	— 7,82	— 49,0	0	137,00
2,8	— 3,77	— 7,76	— 37,6	0	86,75
3,4	— 3,61	— 7,70	— 30,6	0	64,10
0,3	— 3,46	— 7,64	— 25,9	0	48.80
3.2	— 3,33	— 7,58	— 22,4	0	38,71
4,2	— 3,28	— 7,52	— 19,72	0	31.87
8,8	— 3,02	— 7,46	— 17,60	0	26.86

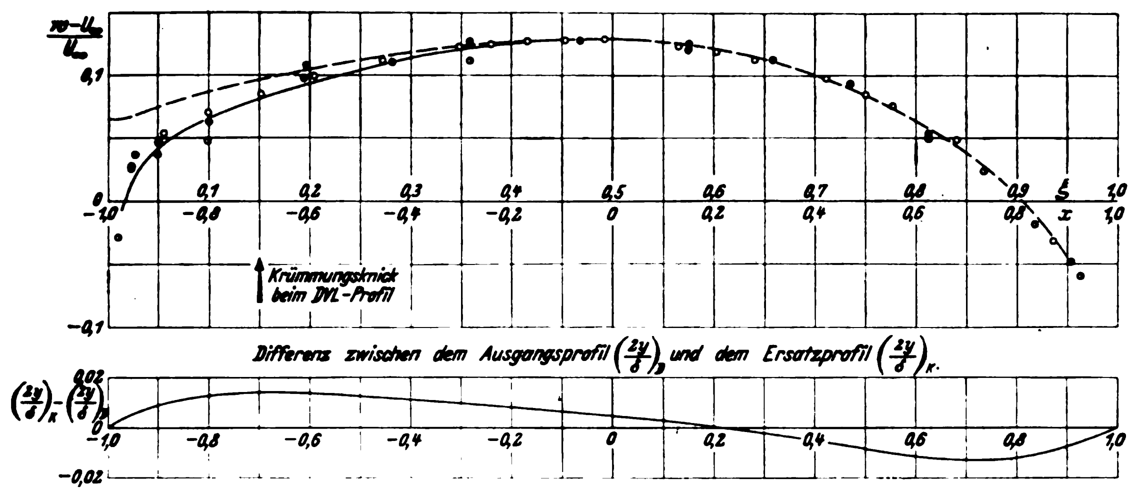
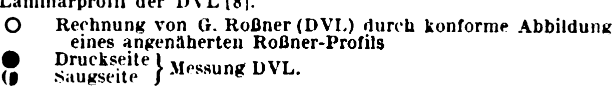


Bild III. 11. Vergleich zwischen Messung und verschiedenen theoretischen Methoden zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung bei tangentialem Eintritt. Profil: Laminarprofil der DVL [8].

— — — 1. Näherung $\frac{w}{U_\infty} \approx 1 + \frac{u_T}{U_\infty}$
——— verbesserte 1. Näherung $\frac{w}{U_\infty} = \sqrt{\left(1 + \frac{u_T}{U_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v_T}{U_\infty}\right)^2}$
} angenähertes Profil (α 0 — 12 — 32 — 42 — 53)



mit sich. Dieses Ergebnis ist mit der Überlegung gewonnen, daß bei Queranblasung die Stromlinie durch den Punkt $\bar{x} = -1 - \Delta_t \bar{x}$ (der mit $x = -1$ zusammenfällt) in diesem Punkt den Krümmungsradius ϱ_t annimmt. Für alle gebräuchlichen Fälle ist ϱ_t sehr klein. Praktisch wird stets $\frac{\varepsilon}{\delta} < 4{,}0$ (Vorderkantenwinkel $< 127^\circ$), $\frac{d_{0\alpha}}{\delta} < 0{,}5$ und für $\delta < 0{,}2$ wird $d_{0\alpha} < 0{,}1$ und mit Gl. (III, 49b) $\varrho_t < 0{,}637 \times 10^{-4}$ sein. Wenn auch solche kleinen Fehler praktisch bedeutungslos bleiben, so ist doch bei einer theoretischen Auswertung der berechneten Geschwindigkeit darauf zu achten, daß wir es hier nicht mit einer mathematisch scharfen Schneide zu tun haben.

Die gleichen Erörterungen gelten für die Profilhinterkante. Da wir im allgemeinen auf abgerundete Hinterkanten schon bei der Auswahl der Profilformen verzichtet haben, würde man für die Profilhinterkante die beschriebene Korrektur der 1. Näherung mit $\varrho_N = 0$ durchführen. Auch hier müssen die Geschwindigkeiten wieder auf der Profilkontur berechnet und eine neue Verzerrung $\Delta_K \bar{x}$, die praktisch bedeutungslos bleibt, berücksichtigt werden, wie es für die Profilnase im Rechenverfahren durchgeführt wurde. Allerdings sind die Geschwindigkeiten der Potentialströmung in nächster Nähe der Hinterkante praktisch nicht interessant, weshalb sie im »Rechenverfahren« nicht verbessert wurden.

Als Beispiel ist die Verteilung der Übergeschwindigkeit bei symmetrischer Anblasung für ein symmetrisches Profil der DVL [8] im Bild III, 11 gegeben. Der Vergleich mit den Messungen der DVL und den Ergebnissen von G. Roßner [9] mittels konformer Abbildung zeigt die gute Übereinstimmung der Rechenverfahren.

4. Das Rechenverfahren zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung.

a) Die erste Näherung.

Hilfsmittel: Rechenschieber, Addiatortafel, Rechenblätter Blatt 1 bis Blatt 4.

Gegeben sind mit der Profilbestimmung (vgl. Tafel II, 2) die sechs Dickenkonstanten $\frac{d_{12}}{\delta}$, $\frac{d_{32}}{\delta}$ $\left(\text{oder } \frac{d_{123}}{\delta} \text{ mit } \frac{d_{32}}{\delta} = 0\right)$, $\frac{d_{42}}{\delta}$, $\frac{d_{53}}{\delta}$, $\frac{d_{0\alpha}}{\delta}$ und $\frac{d_{\alpha 0}}{\delta}$, sowie die Wölbungskonstanten des Birnbaum-Skelettes mit S-Schlag $\frac{s_1}{\varphi_{mx}}$, $\frac{s_2}{\varphi_{mx}}$ $\left(\text{und } \frac{s_{13}}{\varphi_{mx}}\right)$ und das Wölbungsmaß $\frac{\varphi_{mx}}{\delta}$. Von diesen neun

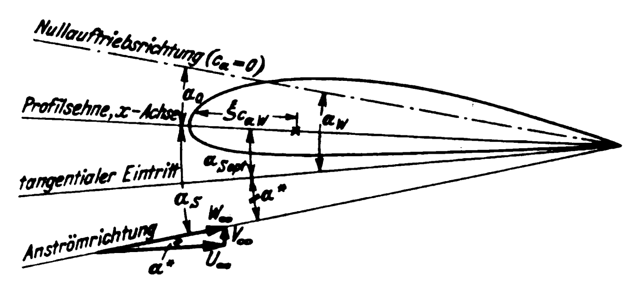


Bild III, 12. Zur Bestimmung der ausgezeichneten Anblasrichtungen am Profil.

(bzw. zehn) Profilkonstanten können eventuell mehrere Null sein. Die Profildicke δ als Affinitätsfaktor kann zuletzt gewählt werden, dann ist auch die maximale Wölbung mit $\varphi_{mx} = \frac{\varphi_{mx}}{\delta} \cdot \delta$ gegeben. — Erwähnt werden soll noch, daß die Profilkontur in dieser Näherung nicht gezeichnet vorliegen muß.

Die von den Quellverteilungen induzierten Übergeschwindigkeiten $\left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_I$ des symmetrischen Profiles (Tropfens) sind nach Blatt 1 und Blatt 2 zu berechnen. Die dazu senkrechten v-Komponenten der Geschwindigkeit werden als klein vernachlässigt, so daß sich in erster Näherung die Gesamtgeschwindigkeit

$$\left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_I = 1 + \left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_I$$

für den Tropfen ohne Anstellwinkel ergibt (Blatt 2). Für das gewölbte Profil tritt eine zusätzliche Übergeschwindigkeit $\frac{u_W}{U_\infty}$ (Blatt 3) auf, die von den Wirbelverteilungen der Skelettform induziert werden und die Gesamtgeschwindigkeit auf der Saugseite erhöhen (Blatt 3)

$$\left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_{I0} = \left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_I + \frac{u_W}{U_\infty} = 1 + \left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_I + \frac{u_W}{U_\infty}$$

und auf der Druckseite erniedrigen (Blatt 3):

$$\left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_{I0} = \left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_I - \frac{u_W}{U_\infty} = 1 + \left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_I - \frac{u_W}{U_\infty}.$$

Die Profile ohne Anstellwinkel ($\alpha^* = 0$) mit der Anblasgeschwindigkeit U_∞ sind so in die Strömung gestellt, daß an der Profil- (bzw. Skelett-)Nase kein Geschwindigkeitssprung auftritt. Der Winkel zwischen Profilsehne (x-Achse) und Anströmrichtung, Bild III, 12, — der Anstellwinkel

$\alpha_{s\,opt}$ des tangentialen Eintritts — ist mit der Konstanten s_2 des S-Schlags gegeben:

$$\alpha_{s\,opt} = -\frac{1}{2} s_2.$$

Gewölbte Profile, die unter diesem Anstellwinkel angeblasen werden, haben einen von der Kreisbogenwölbung s_1 herrührenden Auftrieb

$$c_{a\,w} = 2\pi \frac{s_1}{\varphi_{m\,x}} \varphi_{m\,x} \text{ (oder } c_{a\,w} = 4\pi\varphi \text{ für } s_{13} = 0,$$

wenn φ die mit der Profiltiefe dimensionslos gemachte Skelettwölbung in Profilmitte ist). Das Moment um den Einviertelpunkt ($\xi = 0{,}25$) ist

$$c_{m\,0{,}25} = \frac{\pi}{2} \varphi_{m\,x} \left(\frac{s_1}{\varphi_{m\,x}} + \frac{3}{4} \frac{s_2}{\varphi_{m\,x}} \right).$$

Für gewölbte Profile mit Anstellwinkel ($\alpha^* \neq 0$) müssen wir nach Blatt 4 noch eine weitere zusätzliche Übergeschwindigkeit $\left(\frac{u_\alpha}{U_\infty}\right)_l = \alpha^* \left(\frac{u_\alpha}{V_\infty}\right)_l$ auf der Saugseite addieren

$$\left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_{l\alpha} = \left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_{l0} + \left(\frac{u_\alpha}{U_\infty}\right)_l$$

und auf der Druckseite subtrahieren:

$$\left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_{l\alpha} = \left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_{l0} - \left(\frac{u_\alpha}{U_\infty}\right)_l.$$

Für symmetrische Profile ist analog (Blatt 4)

$$\left(\frac{w_{S,D}}{U_\infty}\right)_{l\alpha} = \left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_l \pm \left(\frac{u_\alpha}{U_\infty}\right).$$

Die Übergeschwindigkeiten $\frac{u_\alpha}{U_\infty}$ sind von der sog. »Wirbelverteilung der ebenen Platte« induziert, die zu der Querströmung gehört, deren Anblasgeschwindigkeit V_∞ senkrecht auf U_∞ steht. Die Anblasgeschwindigkeit W_∞ (Bild III, 12), die mit der Anströmrichtung des tangentialen Eintritts den Winkel $\alpha^* \ll 1$ bildet, ist also in die beiden Komponenten $U_\infty = W_\infty \cos\alpha^* \approx W_\infty$ und $V_\infty = W_\infty \sin\alpha^* \approx U_\infty \alpha^*$ zerlegt. Diese Wirbelverteilung ruft in der Strömung eine Auftriebserhöhung (Bild III, 12)

$$c_{a\alpha} = 2\pi\alpha^* = 2\pi(\alpha_S - \alpha_{s\,opt})$$

hervor, wenn α_S der Anstellwinkel zwischen Profilsehne (x-Achse) und Strömungsrichtung ist. Der Gesamtauftrieb ist mit

$$c_a = c_{a\,w} + c_{a\alpha}$$

gegeben, während das Moment um den Einviertelpunkt ungeändert bleibt.

Für den Grenzwert verschwindender Profildicke $\delta \to 0$ erhalten wir mit $\frac{u_T}{\delta U_\infty}$, $\frac{u_W}{\delta U_\infty}$ und $\frac{u_\alpha}{\delta U_\infty}$ exakt richtige Grenzwerte für die Übergeschwindigkeiten.

b) Die verbesserte erste Näherung.

Hilfsmittel: Rechenschieber, Addiatortafel, 5 Rechenblätter Blatt N 1 bis N 4, 8 Kurvenblätter (1 bis 8). [Die Kurven für $x = -0{,}40$; $-0{,}20$ und 0 sind nur die Tangenten in $y_T = 0$].

In der Umgebung der Profilnase sind die Ergebnisse der 1. Näherung für Profildicken $\delta > 0$ quantitativ sehr ungenau. Die v-Komponenten der Geschwindigkeit und die Abnahme der von den Singularitäten (Quellen und Senken) induzierten Geschwindigkeiten mit der Entfernung von der Belegungslinie ($y_T = 0$) der Singularitäten sind jetzt von der gleichen oder sogar höheren Größenordnung wie die bisher berechneten Übergeschwindigkeiten $\left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_l$ und $\left(\frac{u_\alpha}{U_\infty}\right)_l$, wie die angestellten theoretischen Untersuchungen zeigen. Die Singularitätenstrecke ist jetzt außerdem kürzer als die Profiltiefe, so daß wir zwischen der Singularitäten-Abszisse x und der Profilabszisse $\bar{x}$ unterscheiden müssen. Die mit $\Delta\bar{x}$ gegebene Verzerrung ist nach Blatt N 1 mit Kurvenblatt 1 gegeben; dabei ist zu beachten, daß für negative d_{0a} der Wert $\Delta\bar{x} = 0$ wird.

Nachdem das Profil in überhöhtem Maßstab y_T aufgezeichnet ist, lesen wir an den Stellen x von Blatt N 1 die Ordinaten y_T ab. Die Berechnung von $\left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_N$ erfolgt in Abhängigkeit von y_T nach Blatt N 1 mit den Kurvenblättern 2 bis 4. Der Faktor f_{12} (bzw. f_{123}) besteht aus dem linearen und dem quadratischen Glied von d_{12} (bzw. d_{123}). Dieses ist zusammen mit der Verzerrung $\Delta\bar{x}$ dadurch bestimmt, daß im vorderen Scheitelpunkt des Profiles Profiltangente und Krümmungsradius die mit der Profilkontur vorgeschriebenen Werte annehmen. Zu bemerken bleibt noch, daß in der Spalte $\left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_N$ die Werte von (A) für $x = -0{,}30$ und $\bar{x} = -0{,}10$ nicht auftreten dürfen. Bei der Berechnung der verbesserten 1. Näherung muß die zugehörige 1. Näherung vorliegen. Nachdem mit Blatt N 2a sowie Kurvenblatt 5 bis 7 und dem oberen Teil von Blatt N 2b die Komponente $\left(\frac{v_T}{U_\infty}\right)_N$ berechnet ist, kann auf Blatt N 2a die Geschwindigkeit für symmetrische Profile

$$\left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_N = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_N\right]^2 + \left(\frac{v_T}{U_\infty}\right)_N^2}$$

ohne Anstellwinkel ($\alpha^* = 0$) angegeben werden. Für gewölbte Profile werden diese vier letzten Spalten von Blatt N 2a nicht gerechnet, dafür wird nach der Bestimmung der Übergeschwindigkeiten $\frac{v_W}{U_\infty}$ der Wölbung (Blatt N 2b unten) mit Blatt N 3 die Geschwindigkeit berechnet bei $\alpha^* = 0$ für die Saugseite

$$\left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_0 = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_N + \frac{u_W}{U_\infty}\right]^2 + \left[\frac{v_W}{U_\infty} + \frac{v_T}{U_\infty}\right]^2}$$

und für die Druckseite:

$$\left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_0 = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_N - \frac{u_W}{U_\infty}\right]^2 - \left[\frac{v_W}{U_\infty} - \frac{v_T}{U_\infty}\right]^2}.$$

Für Profile — gewölbte und symmetrische — in Queranblasung erhalten wir nach Blatt N 4 und Kurvenblatt 8 die Geschwindigkeit

$$\left(\frac{w_\alpha}{V_\infty}\right)_N = \sqrt{\left(\frac{u_\alpha}{V_\infty}\right)_N^2 + \left[1 + \left(\frac{v_\alpha}{V_\infty}\right)_N\right]^2}.$$

Wird das Profil unter einem Anströmwinkel α^* angeströmt, so wird der Anblasgeschwindigkeit U_∞ eine Queranblasung $V_\infty = \alpha^* U_\infty$ überlagert. Da die Richtung der Geschwindigkeit auf der Profilkontur für jede Anblasrichtung mit der Profiltangente zusammenfällt, überlagern wir auch ihre Näherungswerte $\left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_0$, $\left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_0$ und $\pm\left(\frac{w_\alpha}{U_\infty}\right)_N = \pm\alpha^* \times \left(\frac{w_\alpha}{V_\infty}\right)_N$ und erhalten (Blatt N 4) für die Saugseite gewölbter Profile

$$\left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_{\alpha^*} = \left(\frac{w_S}{U_\infty}\right)_0 + \alpha^* \left(\frac{w_\alpha}{V_\infty}\right)_N$$

und für die Druckseite

$$\left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_{\alpha^*} = \left(\frac{w_D}{U_\infty}\right)_0 - \alpha^* \left(\frac{w_\alpha}{V_\infty}\right)_N.$$

Für symmetrische Profile ist analog

$$\left(\frac{w_{S,D}}{U_\infty}\right)_{\alpha^*} = \left(\frac{w_T}{U_\infty}\right)_N \pm \alpha^* \left(\frac{w_\alpha}{V_\infty}\right)_N.$$

Nachdem die Geschwindigkeit für $\alpha^* = 0$ und einen weiteren Anstellwinkel gerechnet ist, liegen alle weiteren Werte für eine Stelle x_1 der Profilkontur exakt auf einer Geraden mit den bereits berechneten Werten (Bild III, 13). Dabei ist

$$\frac{d}{d\alpha^*}\left(\frac{w}{U_\infty}\right)_{\alpha^*} = \left(\frac{w_\alpha}{V_\infty}\right)_N.$$

Für Saugspitzen und Druckspitzen sind oft noch Zwischenpunkte für die Geschwindigkeitsverteilung wertvoll.

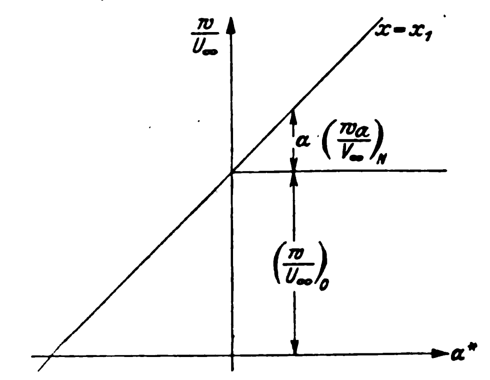


Bild III. 13. Die Geschwindigkeit an einer Stelle $x = x_1$ des Profils, abhängig vom Anblaswinkel.

Diese erfordern hier keinen größeren Rechenaufwand als jeder andere Punkt der Geschwindigkeitsverteilung. Für solche nachträglichen Rechnungen ist auf den Blättern N 1 bis N 4 genügend Raum geblieben[14]). Außerdem ist die Geschwindigkeit im vorderen Scheitelpunkt des Profiles ($x = 1$, $y_T = 0$) mit dem Nasenradius r_N bekannt. Es ist dort nämlich:

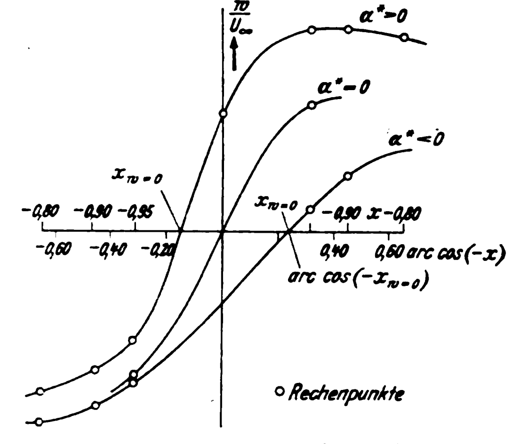


Bild III, 14. Die Entzerrung der Geschwindigkeitsverteilung nahe der Profilnase.

$$\left(\frac{w_{S,N}}{U_\infty}\right)_{\alpha^*} \approx \varkappa^* \left(\frac{w_N}{V_\infty}\right)_N = \varkappa^* \left(\frac{v_N}{V_\infty}\right)_{\substack{x=-1\\ y=0}}$$

$$= \varkappa^* \left(\sqrt{\frac{2}{\varrho_N}} + \sqrt{\frac{\varrho_N}{2}}\right).$$

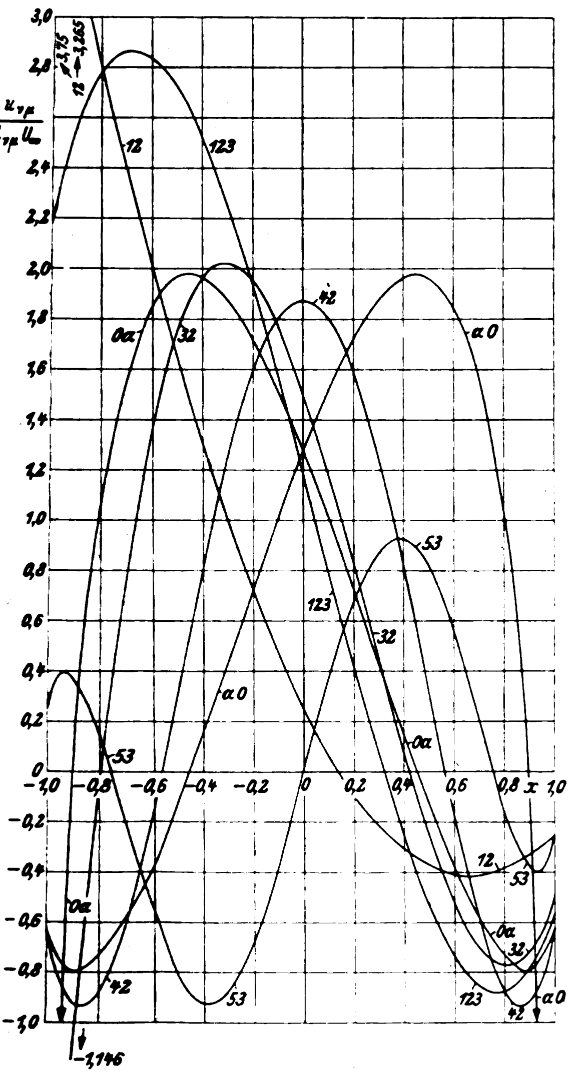


Bild III. 15. Geschwindigkeitsverteilung erste Näherung: Dickenanteile.

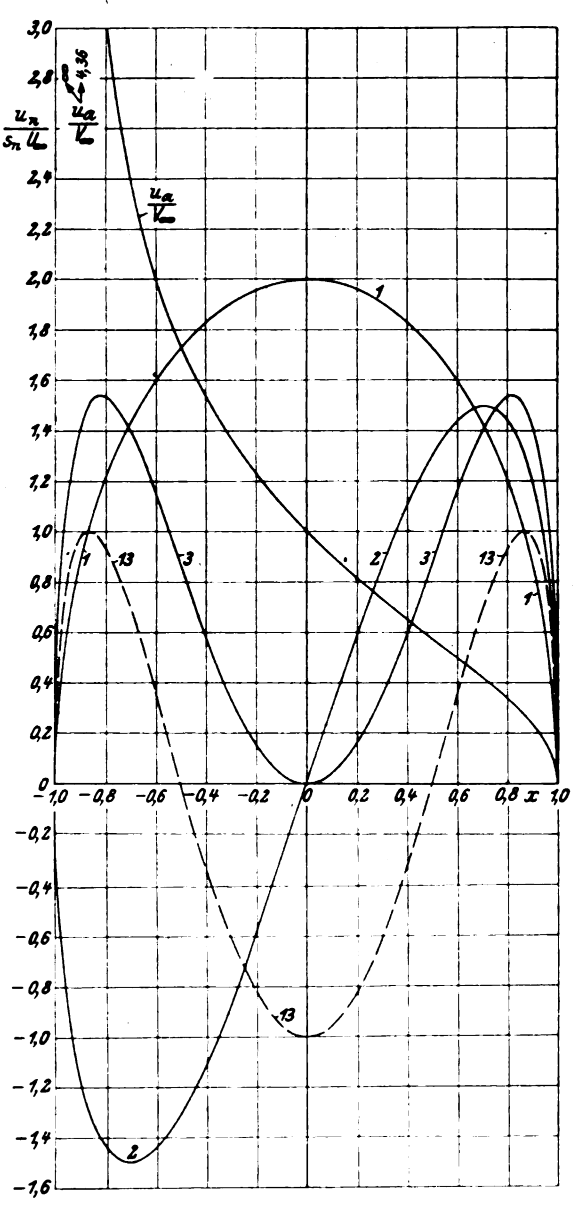


Bild III. 16. Geschwindigkeitsverteilung erste Näherung Wölbungsanteile und Anstellwinkelanteil (𝔄).

[14]) Die für Zwischenpunkte zu entnehmenden Werte der 1. Näherung können am einfachsten durch graphische Interpolation gewonnen werden, und zwar handelt es sich um Ⓐ (Bl. 1), $\frac{u_W}{U_\infty}$ (Bl. 3) sowie Ⓑ und $\frac{v_W}{U_\infty}$ (Bl. 2b).

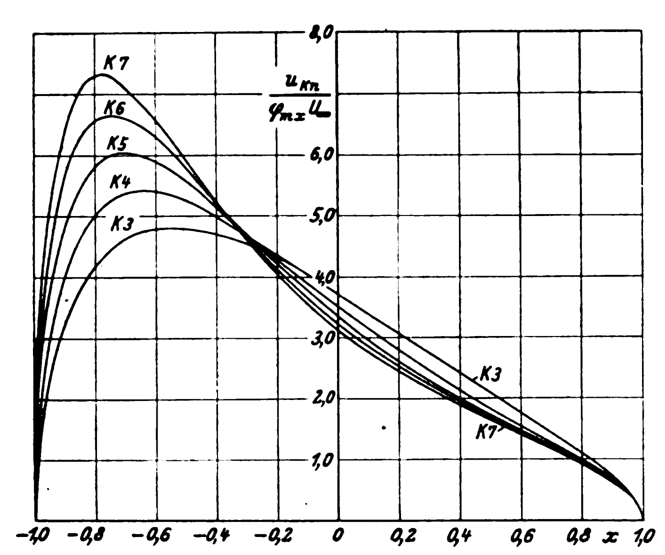


Bild III, 17. Geschwindigkeitsverteilung der Kawalki-Skelette.

Die verbesserte 1. Näherung wurde bis in die Profilmitte durchgeführt, damit die beiden nebeneinander laufenden Kurven der 1. Näherung und der verbesserten 1. Näherung gut ineinander übergeführt werden können, da sie in der Umgebung der Dickenrücklage ξ_δ am dichtesten beieinander liegen werden. Der Übergang wird dort am zweckmäßigsten in dem hier vorliegenden Näherungsverfahren von Hand ausgeführt.

Da die Verbesserung der ersten Näherung an der Profilnase hinter ihrem Schnittpunkt mit der ersten Näherung nicht mehr eine Verbesserung der Werte $\left(1 + \frac{u}{U_\infty}\right) \approx \frac{w}{U_x}$ gibt, ist dort stets die erste Näherung als Rechenergebnis zu nehmen, das vor dem Schnittpunkt — asymptotisch in die verbesserte Näherung übergehend — gezeichnet werden muß.

Während der eine Staupunkt des Profiles theoretisch stets in der scharfen Profilhinterkante bleibt, ändert sich die Lage des vorderen Staupunktes mit dem Anstellwinkel. Solange das Profil unter dem Anstellwinkel $\alpha_{S\,opt}$ des tangentialen Eintritts angeströmt wird, liegt der Staupunkt im vorderen Scheitelpunkt ($x = -1$, $y = 0$) des Profiles. Bei Schräganströmung unter einem Anstellwinkel α^* findet man die Abszisse $x_W = 0$ des Staupunktes am genauesten, wenn man die Geschwindigkeit über der Bogenlänge des Profiles aufträgt. Bei einer solchen Auftragung wird die im Uhrzeigersinn gerichtete Geschwindigkeit als positiv, die ihm entgegengesetzt gerichtete als negativ angesprochen, so daß der Staupunkt durch graphische Interpolation der Geschwindigkeit bekannt ist (Bild III, 14). Will man die Lage des Staupunktes nur angenähert feststellen, so genügt es, anstatt über der Bogenlänge über einer ähnlichen Größe, nämlich $\varphi = \arccos(-x)$, aufzutragen, welche die Verzerrung der Bogenlänge über der Abszisse annähernd[15]) berücksichtigt (Bild III, 14) und rascher zum Ziel führt[16]). Der Fehler in $x_{W=0}$ bleibt dabei sehr klein.

Bemerkung: Bei der systematischen Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung eines Profiles mit verschiedenen Dickenverhältnissen δ und Wölbungsverhältnissen φ_{mx} kann bei richtiger Aufteilung der Rechnung viel Arbeit gespart werden. Die Rechenblätter 1, 2, N 1, N 2^a und N 2^b (oben) sind von allen Wölbungsformen und deshalb auch von der maximalen Wölbung unabhängig. Ähnlich sind die Rechenblätter 3 und N 2^b (unten) von der Tropfenform unabhängig. Von diesen Blättern können bei 1, 2 und N 2^b (oben) das Dickenverhältnis δ und bei Blatt 3 und N 2^b (unten) das Wölbungsverhältnis φ_{mx} als Ähnlichkeitsfaktoren verwendet werden. Statt mit $d_{\nu n}$ und s_n wird mit $\frac{d_{\nu n}}{\delta}$ und $\frac{s_n}{\varphi_{mx}}$ gerechnet, so daß wir statt Ⓐ $\left(\frac{u_T}{U_\infty}\right)_l$, Ⓑ und $\frac{u_W}{U_\infty}$, $\frac{v_W}{U_\infty}$ nun $\left(\frac{A}{\delta}\right)$, $\left(\frac{u_T}{\delta U_\infty}\right)_l$, $\left(\frac{B}{\delta}\right)$ und $\frac{u_W}{\varphi_{mx} U_\infty}$, $\frac{v_W}{\varphi_{mx} U_\infty}$ erhalten. Für die einzelnen Werte δ und φ_{mx} brauchen wir dann an Stelle der Rechenblätter 1, 2, 3 und N 2^b nur diese von δ oder φ_{mx} abhängigen fünf Werte mit δ oder φ_{mx} zu multiplizieren.

[15]) Für den Kreis ist exakt $s = \varphi$.

[16]) Die gleiche Auftragung wählt man bei der graphischen Bestimmung des Geschwindigkeitsmaximums.

Der theoretische Auftriebsanstieg $\left(\frac{d c_a}{d \alpha^*}\right)_x = c'_{ap} = 2\pi$ kann durch den experimentellen Wert von c'_{ap} ersetzt werden. Dann ist (vgl. Abschnitt 4 a)

$$c_{a\,n} = c'_{a\,p}\,\alpha^*.$$

5. Zusammenfassung.

Die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung (bzw. Druckverteilung) auf der Profilkontur wird mit Hilfe von Quell- und Wirbelverteilungen (Singularitätenverteilungen) durchgeführt, welche das Profil in der Parallelströmung zur Stromlinie machen. Da die Profile im allgemeinen dünn und nur schwach gewölbt sind (Verhältnis der max. Dicke zur Tiefe $\leq 0{,}2$ und das der max. Wölbung $\leq 0{,}1$), wird in 1. Näherung die Geschwindigkeit auf der Profilkontur gleich der u-Komponente der Gesamtgeschwindigkeit auf der x-Achse gesetzt, auf der auch die Singularitäten angebracht sind. Die Quellverteilungen und die von ihnen induzierten Übergeschwindigkeitskomponenten sind (in Tafel III, 1) für jede Dickenverteilung gegeben und werden nach der Multiplikation mit den zugehörigen, von den Formparametern abhängigen Dickenkonstanten mit der Anströmgeschwindigkeit in Richtung der x-Achse addiert zur Geschwindigkeit des symmetrischen Profiles ohne Anstellwinkel. Für die einzelnen Wölbungsformen und den Anstellwinkel sind die schon bei W. Birnbaum berechneten Wirbelverteilungen und die von ihnen induzierten Übergeschwindigkeitskomponenten bekannt (und in Tafel III, 2 oder III, 3 angegeben). Diese werden mit den entsprechenden Wölbungskonstanten bzw. dem Anstellwinkel multipliziert und mit der Geschwindigkeit am Tropfen auf der Saugseite addiert und auf der Druckseite subtrahiert (vgl. Tafel III, 2). Die so berechneten Geschwindigkeiten auf der Profilkontur sind im Grenzfall verschwindender Profildicke exakt richtig und für endliche Dicken eine gute Näherung, wenn man von der Umgebung der Profilnase absieht. An der Nase geht diese Linearität zwischen den einzelnen Anteilen verloren. Dort muß die Änderung der Geschwindigkeit zwischen Profilkontur und Belegungslinie berücksichtigt und eine besondere Korrektur der Singularitätenverteilungen angebracht werden, die dafür sorgt, daß die Tangente und die Krümmung der Stromlinie im vorderen Scheitelpunkt mit denen des Profiles übereinstimmen. Die Berechnung wird zunächst stets für den Anstellwinkel des tangentialen Eintritts durchgeführt. Da die Geschwindigkeiten exakt linear vom Anstellwinkel abhängen, genügt die Berechnung eines einzigen weiteren Anstellwinkels.

Im 4. Abschnitt ist in übersichtlicher Anordnung ein Rechenverfahren entwickelt worden, das es gestattet, ohne Kenntnis der vorausgegangenen Theorie die Geschwindigkeitsverteilung am Profil rasch zu berechnen.

6. Schrifttum.

[1] bis [4] vgl. das Schrifttum des Beitrages I.

[5] und [6] vgl. das Schrifttum des Beitrages II.

[7] M. M. Munk, vermutlich Aero Digest. Genau nicht mehr nachzuweisen. Quellenangabe nach dem Gedächtnis. (H. B. Helmbold.)

[8] H. Doetsch, Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner c_a-Werte. Nicht veröffentlichter Bericht.

[9] G. Roßner, Über eine Klasse theoretischer Profile mit vier frei wählbaren geometrischen Parametern. Bisher noch unveröffentlichte Arbeit.



Grenzen für die Genauigkeit der Lotbestimmung im Flugzeug durch Scheinlotmittelung.

Von E. Timmel.

Bericht der deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V. Berlin-Adlershof,
Institut für Bordgerät und Navigation.

Um einen Überblick über die Genauigkeit der astronomischen Ortsbestimmung zu erhalten, werden die Fehler der Lotbestimmung in Flugzeugen nach Ursache und Größe untersucht.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die astronomische Ortsbestimmung setzt die Kenntnis der Lotrichtung voraus. Da weder die vorhandenen künstlichen Horizonte noch die durch die Störbeschleunigungen des Flugzeugs beeinflußte Stellung von Pendel oder Libelle die erforderliche Genauigkeit erreichen — eine Unsicherheit von 0,1° der Lotrichtung hat eine Ortsungenauigkeit von 11 km zur Folge — ersetzt man in Flugzeugen die wahre Lotrichtung durch den Mittelwert der Scheinlotrichtungen, genommen über eine längere Zeit. Die bei diesem Mittelungsverfahren unabhängig von der besonderen Art des Beobachtungsgerätes zu erwartenden Fehler werden im folgenden untersucht, und zwar unter Beschränkung auf den Geradeausflug mit Hand- oder automatischer Steuerung, da nur bei diesem Flugzustand astronomisch navigiert werden kann. Die Störbeschleunigungen des Fluges sind dann klein gegen die Erdbeschleunigung. Weiterhin werden alle Störursachen außer Betracht gelassen, die eine Lotabweichung von weniger als 1′ zur Folge haben.

II. Einteilung der Lotabweichungen.

Die wahre Lotrichtung ist die der geographischen Breitengradeinteilung zugrunde gelegte Resultierende $\mathfrak{g}$ aus Massenanziehung der Erde und Fliehkraft der Erddrehung. Örtliche Inhomogenitäten des Erdkörpers und die Abhängigkeit des Betrages von g von geographischer Breite und Flughöhe bleiben dabei unberücksichtigt, da sie nur Beträge von einigen Bogensekunden bzw. $0{,}005\,g$ erreichen.

Eine Störbeschleunigung b mit der Horizontalkomponente b_H und der Vertikalkomponente b_v verursacht eine Lotabweichung α, die durch die Gleichung gegeben ist, Bild 1.

$$\tan\alpha = \frac{b_H}{g + b_v}.$$

Bei den kleinen Störbeschleunigungen des Geradeausfluges gilt die Näherungsformel

$$\alpha = \frac{b_H}{g + b_v} = \frac{b_H}{g} - \frac{b_H \cdot b_v}{g^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

Bei Mittelwertbildung der Scheinlotrichtungen während der Beobachtungsdauer T wird das wahre Lot bis auf den Restfehler $\bar{\alpha}$ angenähert

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{b_H}{g}\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{b_H b_v}{g^2}\,dt \quad \ldots\ldots (2)$$

Setzen wir voraus, daß die Störbeschleunigungen kleiner als $\frac{1}{60}g$ bleiben, d. h. die auftretenden Lotabweichungen sollen kleiner als 1° sein, dann gilt für das zweite Integral der Gl. (2) die Abschätzung

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T \frac{b_H \cdot b_v}{g^2}\,dt\right| < \frac{b_{H\max}}{g}\,\frac{1}{T}\int_0^T \left|\frac{b_v}{g}\right| dt$$
$$< \frac{b_{H\max}}{g}\cdot\frac{b_{v\max}}{g} < \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60} < 1'.$$

Bei dieser Abschätzung ist der ungünstigste Fall angenommen, daß horizontale und vertikale Störbeschleunigungen periodische Glieder derselben Frequenz und der Amplitude von $\frac{1}{60}g$ haben[1]). Da der Resonanzfall in dieser Form erfahrungsgemäß nie auftritt, gilt die Abschätzung des zweiten Gliedes auch dann noch, wenn die Störbeschleunigungen die oben gesetzte Grenze von 1° Lotabweichung gelegentlich überschreiten. Der Anteil der Vertikalkomponente an der Lotabweichung bleibt also stets kleiner als 1′. Im folgenden wird deshalb nur das erste, die horizontalen Störbeschleunigungen allein enthaltende Glied der Gl. (2) berücksichtigt.

Die auftretenden Störbeschleunigungen können in zwei Gruppen aufgeteilt werden. Zur ersten Gruppe der zufälligen Störbeschleunigungen rechnen wir diejenigen, die von den Schwankungen der wirklichen Flugbahn gegen die erstrebte (Richtung und Geschwindigkeit konstant) herrühren. Sie ändern dauernd Betrag und Richtung, ihr Mittelwert genommen über lange Zeiten nähert sich Null. In die zweite Gruppe der stationären Störbeschleunigungen gehören diejenigen, die von der Mittelwertbildung nicht erfaßt werden. Sie treten auch bei exakter Einhaltung der erstrebten Flugbahn auf und sind über lange Zeiten nach Betrag und Richtung nahezu konstant.

1. Lotschwankungen.

Die Lotschwankungen sind die durch die zufälligen Störbeschleunigungen verursachten Lotabweichungen. Sie rühren von Böen, Kompaßschwingungen, Triebwerksschwankungen, Eingriffen des Flugzeugführers bzw. der Automatik usw. her und

[1]) Vgl. K. Stellmacher, Werft, Reederei und Hafen Bd. 19 (1938). S. 42/44.

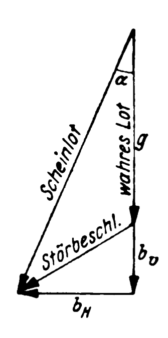


Bild 1. Zusammensetzung des Scheinlots aus wahrem Lot und Störbeschleunigungen.

sind nicht in allen Einzelheiten meßbar. Da jedoch durch die Steuerung die erstrebte Flugbahn im Mittel eingehalten wird, sind auch die Lotschwankungen im Mittel über genügend lange Zeiten nahezu gleich Null.

Zur Abschätzung der bei vorgegebener Steuergenauigkeit des Flugzeugs und vorgegebener Mittelungsdauer zu erwartenden Fehler bzw. der für einen höchstzulässigen Fehler der Lotbestimmung erforderlichen Mittelungsdauer untersuchen wir die Störbeschleunigungen getrennt nach ihren Komponenten b_l längs und b_q quer zur Flugbahn. Wird ein Gestirn unter dem Winkel τ gegen die Flugzeuglängsachse (τ = Seitenpeilung, der Schiebewinkel kann hierbei vernachlässigt werden) beobachtet, so ist in dieser Richtung der Mittelwert des von den zufälligen Störbeschleunigungen b' herrührenden Anteils α' der Lotabweichungen nach Gl. (2) gegeben durch

$$\alpha' \approx \cos\tau \frac{1}{g\,T}\int_0^T b_l'\,dt + \sin\tau \frac{1}{g\,T}\int_0^T b_q'\,dt.$$

Wir betrachten im folgenden die einzelnen Komponenten für sich. Der Einfluß langperiodischer Windänderungen wird an anderer Stelle noch behandelt, wir können deshalb hier bis auf Böen mit gleichförmig bewegter Luft rechnen.

In Längsrichtung geben die Lotschwankungen bei der Mittelungsdauer T einen Anteil α_l zur resultierenden Lotabweichung vom Betrag

$$\alpha_l = \frac{1}{g\,T}\int_0^T b_l'\,dt = \frac{\Delta v_g}{g \cdot T}.$$

Dabei bedeutet Δv_g die Differenz der Übergrundgeschwindigkeit zwischen Beginn und Ende der Messung.

Bei Drehungen der Flugbahn mit der Drehgeschwindigkeit ω treten Fliehbeschleunigungen b_q in Querrichtung auf

$$b_q = v_g \cdot \omega.$$

Von der Drehgeschwindigkeit ω der Flugbahn gegen die Großkreisebene betrachten wir hier nur den Anteil ω' der Drehung der Flugbahn gegen die Kursgleiche. Die Drehung der Kursgleiche gegen den Großkreis wird später behandelt. Der Lotabweichungsanteil α_q der Lotschwankungen quer zur Flugrichtung ist dann

$$\alpha_q = \frac{1}{g \cdot T}\int_0^T v_g\,\omega'\,dt = \frac{v_g \cdot \Delta\chi}{g \cdot T}.$$

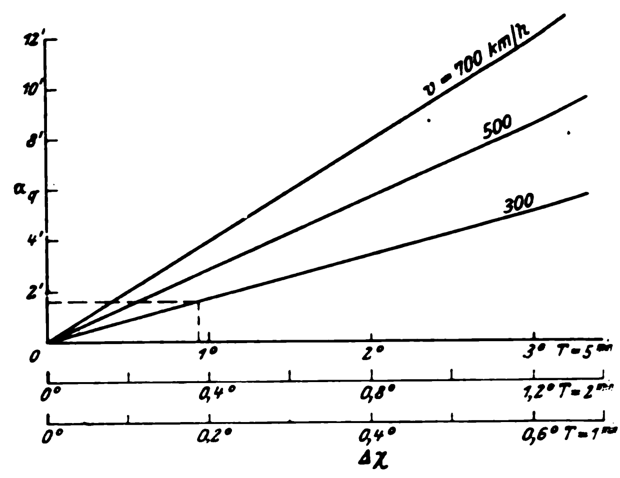


Bild 3. Lotfehler in Querrichtung in Abhängigkeit vom Drehwinkel der Flugbahntangente $\Delta\chi$ von der Geschwindigkeit v und der Mittelungsdauer T.

Der Winkel $\Delta\chi$, um den sich die Flugbahntangente zwischen Beginn und Ende der Messung dreht, ist bis auf vernachlässigbare Fehler gleich der Summe von Kursänderung $\Delta\gamma$ und Änderung $\Delta\beta$ des Schiebewinkels.

Die Restfehler α_l und α_q des Mittelungsverfahrens sind also durch die Differenzen von Geschwindigkeit und Flugrichtung zwischen Anfangs- und Endpunkt der Messung und durch die Mittelungsdauer bestimmt. Sie sind unabhängig vom übrigen Verhalten der Flugrichtung und der Geschwindigkeit während der Messung. Bild 2 zeigt, daß beispielsweise bei einer Geschwindigkeitsänderung von 4 km/h zwischen Beginn und Ende der Messung und bei einer Mittelungsdauer von 1 min ein Lotfehler von ~ 6' auftritt. Aus Bild 3 folgt für eine Kursänderung von 1° während der Beobachtungsdauer von 5 min ein Lotfehler von 1,6' bei einer Geschwindigkeit von 300 km/h.

2. Stationäre Lotabweichungen.

Die von der Mittelwertbildung nicht erfaßbaren, stationären Lotabweichungen setzen sich nach ihrer Ursache aus verschiedenen Einzelanteilen zusammen.

a) Coriolisbeschleunigungen. Infolge der Erddrehung tritt beim Flug auf jeder Flugbahn die Coriolis-

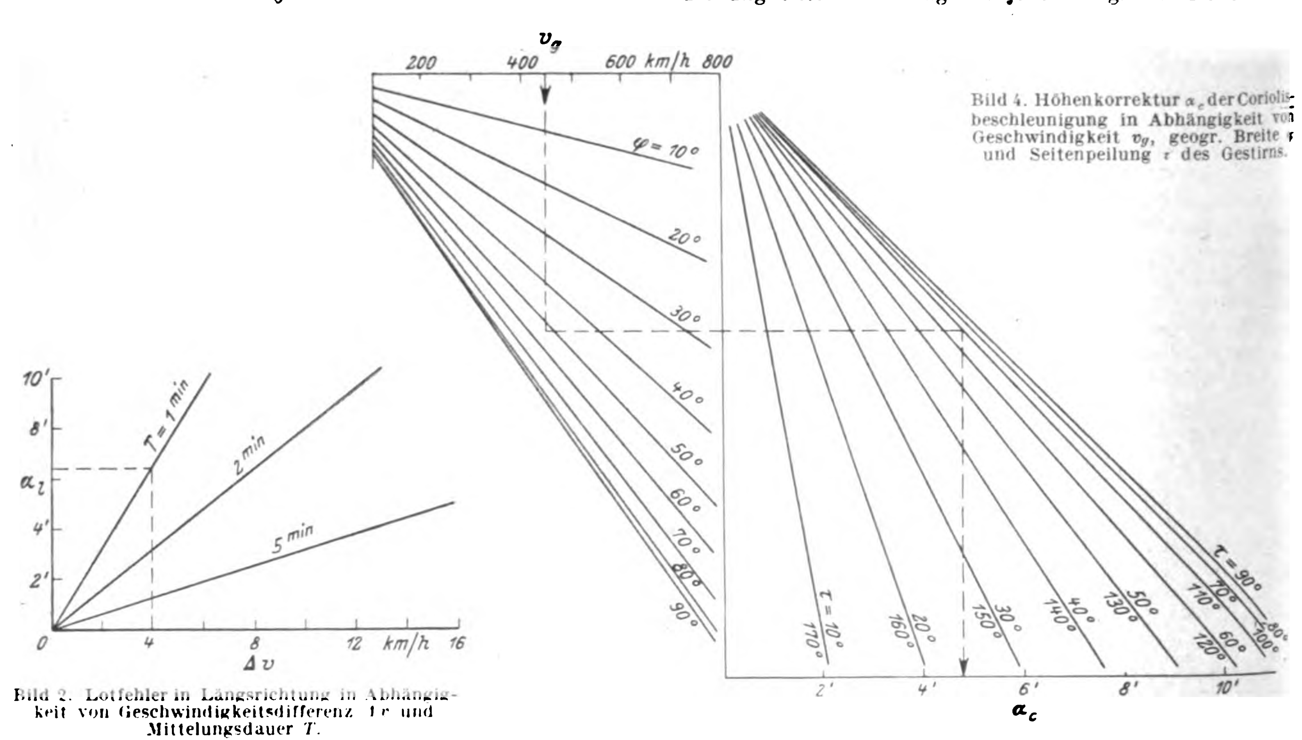


Bild 4. Höhenkorrektur α_c der Coriolisbeschleunigung in Abhängigkeit von Geschwindigkeit v_g, geogr. Breite φ und Seitenpeilung τ des Gestirns.

Bild 2. Lotfehler in Längsrichtung in Abhängigkeit von Geschwindigkeitsdifferenz Δv und Mittelungsdauer T.

beschleunigung b_c in Erscheinung. In Vektordarstellung ist sie gegeben durch die Beziehung

$$\mathfrak{b}_c = 2\,\mathfrak{d} \times \mathfrak{v}$$

$\mathfrak{d}$ = Vektor der Erddrehung,
$\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeitsvektor.

Der Betrag ihrer Horizontalkomponente ist

$$b_c = 2\,\omega_e\, v_g \sin\varphi$$

v_g = Übergrundgeschwindigkeit,
ω_e = Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung = 0,25°/min,
φ = geographische Breite.

Sie bewirkt eine Lotabweichung vom Betrag $\frac{b_c}{g}$, die auf der Nordhalbkugel nach Steuerbord, auf der Südhalbkugel nach Backbord gerichtet ist. Auf der Nordhalbkugel müssen Gestirnshöhenmessungen um den Betrag

$$\alpha_c = \frac{b_c}{g}\cdot\sin\tau = \frac{2\,\omega_e\, v_g}{g}\sin\tau\cdot\sin\varphi$$

vergrößert oder verkleinert werden, je nachdem die Seitenpeilung τ des Sternes kleiner oder größer als 180° ist. Die Ermittelung der Höhenbeschickung α_c kann nach Bild 4 erfolgen.

Beispiel: v_g = 450 km/h
φ = 52° ergibt α_c = 4,8′
τ = 70°.

b) Fliehbeschleunigung bei Loxodromenflug. Außer der Corioliskraft treten beim Flug auf gekrümmten Bahnen noch Fliehkräfte auf, die das Lot senkrecht zur Flugbahn nach außen um den Betrag

$$\alpha_r = \frac{v_g^2}{r\cdot g}$$

r = Krümmungsradius der Flugbahn

auslenken. Beim Flug unter konstantem Kurs ist die Flugbahn eine Loxodrome, deren Krümmungsradius r, wie hier nicht weiter abgeleitet werden soll, durch die Beziehung

$$r = R\,\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\psi\cdot\tan^2\varphi}}$$

gegeben ist. Dabei bedeutet R den Erdradius (R = 6370 km) und ψ den Kurs. Wir betrachten wiederum nur die Horizontalkomponente der Fliehbeschleunigung und erhalten für den Anteil α_r der Loxodromenkrümmung zur Lotabweichung die Beziehung

$$\alpha_r = \frac{v_g^2}{R\cdot g}\tan\varphi\,\sin\psi.$$

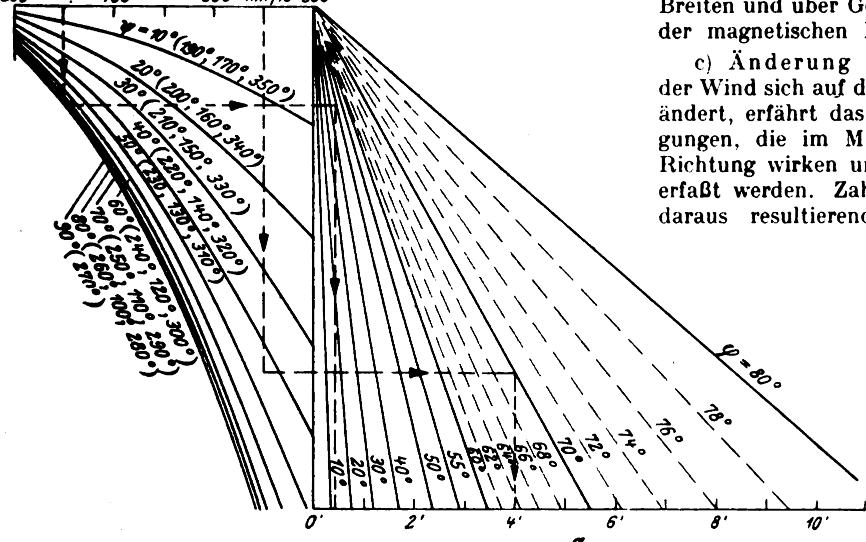


Bild 5. Lotabweichung α_r quer zur Flugrichtung als Folge der Bahnkrümmung der Loxodrome in Abhängigkeit von Geschwindigkeit v_g, Kurs ψ und geogr. Breite φ.

Die Richtung der Lotabweichung ist senkrecht zur Flugrichtung nach der dem Äquator zugewandten Seite. Also auf der Nordhalbkugel bei Ostkurs nach Steuerbord, bei Westkurs nach Backbord. Bei einer Seitenpeilung τ des Gestirnes ist die Komponente

$$\alpha_r\cdot\sin\tau$$

als Höhenkorrektur anzubringen. Bild 5 zeigt ein Diagramm zur Ermittelung von α_r. Aus Bild 5 folgt z. B.:

v_g = 300 km/h, ψ = 90°, φ = 50° ergibt α_r = 0,5′
v_g = 700 km/h, ψ = 45°, φ = 70° ergibt α_r = 4′.

Die Loxodrome schneidet alle Meridiane unter gleichem Winkel ψ. Beim Flug nach Kompaß ist die Flugbahn wegen der Abhängigkeit der magnetischen Mißweisung vom Ort nur angenähert eine Loxodrome. Die wirkliche Flugbahn dreht sich im Mittel relativ zur Loxodrome mit der von der Fluggeschwindigkeit abhängigen Änderungsgeschwindigkeit $\frac{d\delta}{dt}$ der Ortsmißweisung δ. Die nach Bild 5 berechneten Lotabweichungen erfahren eine Korrektur um den Betrag

$$\alpha_\delta = \text{const}\,\frac{v_g^2}{g}\,\frac{d\delta}{ds}$$

$\frac{d\delta}{ds}$ = Änderung der Mißweisung auf dem Flugweg ds.

Zur exakten Ermittlung der Lotabweichung α_δ müßte die Deklinationsänderung zwischen Beginn und Ende der Mittelung bekannt sein. Im allgemeinen wird sich nur die mittlere Änderung von δ über einen längeren Flugweg feststellen lassen. Zahlentafel 1 zeigt α_δ für verschiedene v_g und $\frac{d\delta}{ds}$. In Deutschland treten außerhalb der magnetischen Störgebiete am Boden Deklinationsänderungen bis zu 1,8°/100 km auf. Über magnetischen Störgebieten treten größere $\frac{d\delta}{ds}$ auf. Da sie meist nur über kurze Zeiten wirksam sind, wird ihr Einfluß auf die Lotabweichung durch die Mittelwertbildung verringert.

Zahlentafel 1. Lotabweichung als Folge der Flugbahnkrümmung bei Änderung der Ortsmißweisung.

Änderung der magn. Mißweisung	v_g = 300	500	700 km/h
0,5°/100 km	0,2′	0,6′	1,2′
1°/100 km	0,4′	1,2′	2,3′
1,8°/100 km	0,8′	2,1′	4,2′

Die durch die Bahnkrümmung der Loxodrome verursachte Lotabweichung und ihre zusätzliche von der Ortsänderung der magnetischen Mißweisung abhängige Korrektur ergeben im allgemeinen erst bei Geschwindigkeiten über 500 km/h Fehler der Lotbestimmung von über 1′. Unter 500 km/h müssen sie nur bei Flügen in höheren Breiten und über Gebieten mit stärkerer örtlicher Änderung der magnetischen Mißweisung berücksichtigt werden.

c) Änderung der Windgeschwindigkeit. Wenn der Wind sich auf dem Flugwege nach Betrag und Richtung ändert, erfährt das Flugzeug relativ zur Erde Beschleunigungen, die im Mittel über längere Zeiten in derselben Richtung wirken und deshalb von der Lotmittelung nicht erfaßt werden. Zahlentafel 2 gibt eine Übersicht über die daraus resultierenden mittleren Lotabweichungen. Sie

lenken das Lot entgegengesetzt zur Richtung der Windänderung aus.

Zahlentafel 2. Lotabweichung infolge Änderung der Windgeschwindigkeit.

Windänderung je 100 km Flugweg	$v_g = 300$	500	700 km/h
1 km/h	0,08′	0,13′	0,19′
20 km/h	1,6′	2,6′	3,7′

Der Anteil der Windänderung an der Lotabweichung kann bei normalen Wetterlagen und Geschwindigkeiten unter 500 km/h unberücksichtigt bleiben. Zur exakten Berichtigung sind genaue Wetterunterlagen erforderlich.

III. Zusammenfassung.

Die beim Geradeausflug infolge der Störbeschleunigungen auftretenden Lotabweichungen setzen sich zusammen aus Lotschwankungen, deren Einfluß durch Mittelwertbildung der Scheinlotrichtungen herabgesetzt wird, und stationären Lotabweichungen, die bei der Mittelwertbildung nicht erfaßt werden.

Der Beitrag der Lotschwankungen zum Restfehler der Lotbestimmung hängt von der Änderung der Geschwindigkeit und Flugrichtung zwischen Beginn und Ende der Messung und der Mittelungsdauer ab.

Einzelursachen der stationären Lotabweichungen sind die durch die Erddrehung bedingte Coriolisbeschleunigung, die durch die Bahnkrümmung der Loxodrome verursachte Fliehbeschleunigung und Windänderungen auf dem Flugweg. Die Anteile der Coriolisbeschleunigung und des Loxodromenfluges können aus den beigegebenen Schaubildern entnommen werden. Für die Erfassung der Windänderung sind genaue Wetterunterlagen erforderlich. Bahnkrümmung der Loxodrome und Windänderung verursachen im allgemeinen erst bei Geschwindigkeiten über 500 km/h Fehler der Lotbestimmung über 1′.





Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 6 enthält Arbeiten von: H. Cornelius und F. Bollenrath S. 175—180, O. Widmaier S. 181—183, W. Gröbner S. 184—191, H. B. Helmbold und F. Keune S. 192—206

LUFTF.-FORSCHG. BAND 20 | LFG. 6 SEITE 175 BIS 206 | MÜNCHEN, 30. 6. 1943

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Die Schriftenreihe erscheint in Monatslieferungen. Sie kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Halbjahresbezugspreis RM. 12.— einschließlich Zeitungs- und Verpackungsgebühr, zuzüglich Zustellgebühr.

Ausland siehe oben: Halbjährlich durch die Post (in solchen Ländern, in denen Postbezug zugelassen) oder durch den Buchhandel bei jahresweiser Bestellung.

Einzelheft: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr. Nach dem Ausland nur gegen Voreinsendung des Betrages.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangenen Bandes erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Einzellieferungen werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Schriftenreihe direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Bandes Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 30. Juni 1943 Lfg. 6

Festigkeitseigenschaften hochfester Lichtbogen-Schweißverbindungen aus Stahl*).

Von Heinrich Cornelius und Franz Bollenrath in Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Gefüge und Härte nicht nachbehandelter, sowie vor allem statische Festigkeitseigenschaften und Zeit- und Dauerfestigkeit auf hohe Festigkeit vergüteter, nicht bearbeiteter und bearbeiteter Metall-Lichtbogen-Stumpfschweißverbindungen von 3, 4 und auch 6 mm dicken Blechen aus Stählen mit 0,26 bis 0,29 % C, 0,25 bis 0,40 % Si, 0.70 bis 1,25 % Mn, 0,85 bis 2,2 % Cr, 0 bis 0,22% Mo und 0 bis 0,21 % V. Anwendungsbereich der verwendeten Elektrode hinsichtlich Blechdicke und Schweißfestigkeit.

Gliederung.

1. Einleitung.

Hohe Bauteilfestigkeiten, wie sie vor allem im Flugzeugbau üblich sind, setzen Verbindungsverfahren voraus, die es gestatten, die Festigkeit der Werkstoffe auszunutzen. Unter den Verbindungsarten kommt den verschiedenen Schweißverfahren eine besondere Bedeutung zu. Durch Gas- oder Arcatomschweißung hergestellte, nachträglich vergütete Verbindungen aus Stahl mit Zugfestigkeiten bis etwa 130 kg/mm² sind im Flugzeugbau anzutreffen[1]), der unter den Schmelzschweißverfahren die Azetylen-Sauerstoff-Schweißung bevorzugt. Seit einer Reihe von Jahren gewinnt auch die Metall-Lichtbogenschweißung im Flugzeugbau Anwendungsgebiete[2]), wofür unter anderem der im Vergleich zur Gasschmelzschweißung kleinere Verzug und die größere Schweißleistung als Ursachen genannt werden können. Im Zusammenhang mit dieser Entwicklung wurden Versuche über die Eigenschaften von Metall-Lichtbogen-Stumpfschweißungen an Blechen durchgeführt, die auf hohe Festigkeiten vergütet wurden. Über die Ergebnisse dieser Untersuchungen wird hier berichtet.

*) J 31 5, E 21 1.
[1]) Vgl. H. Cornelius, Beim Bau von Feindflugzeugen verwendete Eisenwerkstoffe. Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942), S. 197/206, besonders S. 205.
[2]) J. B. Johnson, J. Am. Weld. Soc. Bd. 15 (1936), Nr. 9, S. 2; M. L. Smith, J. Am. Weld. Soc. Bd. 20 (1941), Nr. 8, S. 516/19.

2. Versuchswerkstoffe und Versuchsdurchführung.

Für die Versuche wurden 3, 4 und zum Teil auch 6 mm dicke Bleche aus drei Stählen herangezogen, deren chemische Zusammensetzung Zahlentafel 1 wiedergibt. Stahl 1 ist mit Mangan, Chrom und Vanadin, Stahl 2 mit Chrom und Molybdän legiert. Der Chrom-Vanadin-Stahl 3 enthält etwa doppelt so viel Chrom wie die beiden anderen Stähle. Geschweißt wurde mit umhüllten Elektroden[3]) mit 3 und 4 mm Kerndurchmesser, deren Kernwerkstoff schwach mit Chrom und Molybdän legiert ist und etwas Nickel aus dem Schrott enthält. Der reine Schweißwerkstoff weist infolge Abbrand weniger Silizium und Chrom als der Kernwerkstoff auf. Auf Grund der chemischen Zusammensetzung des Kernwerkstoffs und des reinen Schweißwerkstoffs, Zahlentafel 1, sowie der beim Schweißen eintretenden Auflegierung des Zusatzwerkstoffs durch den höher legierten Grundwerkstoff war vorauszusehen, daß mit der Versuchselektrode geschweißte Bleche mit bis zu 2,0 mm Dicke aus Stählen von der Art der Versuchsstähle 1 bis 3 sicher auf hohe Schweißfestigkeiten, z. B. 110 bis 130 kg/mm² Zugfestigkeit, bei belassener Schweißraupe vergütet werden könnten. Daher wurden die Versuche auf dickere Bleche ausgedehnt, um auch den Anwendungsbereich der Elektrode abzugrenzen.

Im Hinblick darauf, daß besonders im Flugzeugbau ein Schweißen von zwei Seiten häufig nicht möglich ist, wurden alle Versuchsschweißungen mit V-Nähten hergestellt, die nicht wurzelseitig nachgeschweißt wurden. Daher wurde besonderer Wert auf gutes Durchschweißen der Nahtwurzel gelegt. Die nicht vorgewärmten Bleche wurden in einer Vorrichtung geschweißt, um das Verwerfen und Verziehen klein zu halten. Hierbei wurde das Schrumpfen nicht behindert und der Wärmeübergang aus der Schweißzone in die Vor-

[3]) Vox EVH der Edelstahlwerke Gebr. Böhler & Co. A. G.

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe.

Werkstoff	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Cr %	Mo %	V %	Ni %
Stahl 1	0,26	0,38	1,25	0,021	0,011	0,85	n. b.*)	0,17	n. b.
Stahl 2	0,26	0,40	0,70	0,011	0,013	1,07	0,22	n. b.	n. b.
Stahl 3	0,29	0,25	0,75	0,030	0,023	2,19	n. b.	0,21	n. b.
Elektrodenkern, 4 mm Dmr.	0,15	0,22	0,68	n. b.	n. b.	0,62	0,22	n. b.	0,25
3-mm-Elektrode, Schweißwerkstoff	0,13	0,05	0,68	n. b.	n. b.	0,35	0,21	n. b.	n. b.
4-mm-Elektrode, Schweißwerkstoff	0,14	0,05	0,67	n. b.	n. b.	0,38	0,21	n. b.	0,22

*) n. b. = nicht bestimmt, nur in kleinen Gehalten oder nicht vorhanden.

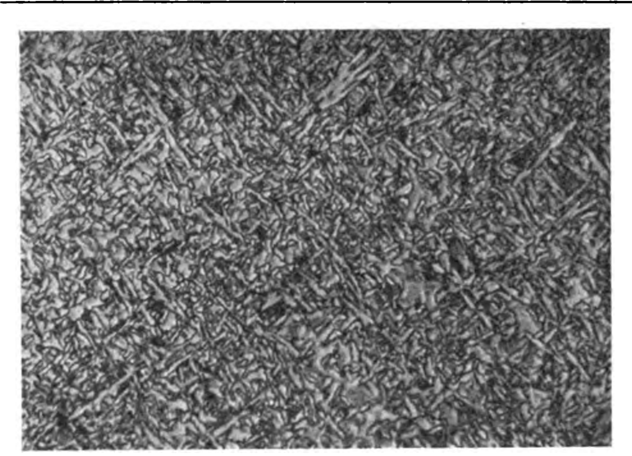


Bild 1. Kennzeichnendes Gefüge in der oberen Schweißraupe der nicht nachbehandelten Schweißverbindungen der Stähle 1 und 2. (4-mm-Blech aus Stahl 1.) Geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

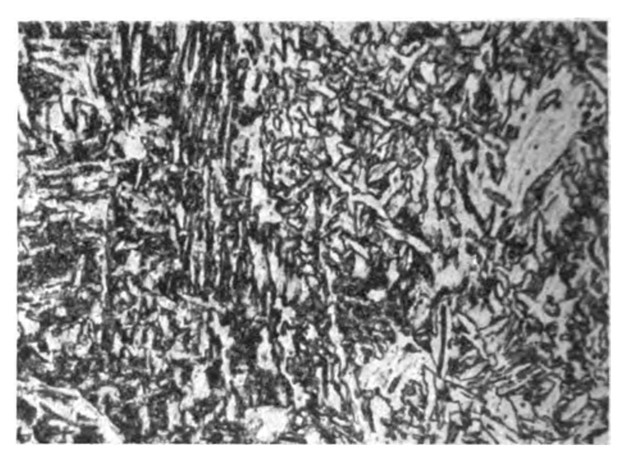


Bild 2. Kennzeichnendes Gefüge in der oberen Schweißraupe der nicht nachbehandelten Schweißverbindungen des Stahles 3. Geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

richtung durch eine Wärmeisolation an den Einspannstellen der Bleche in der Vorrichtung klein gehalten. Die Nahtlänge betrug etwa 200 mm. Die folgende Aufstellung enthält weitere Angaben über die Durchführung der Schweißung bei den verschiedenen Blechdicken:

Blechdicke mm	V-Naht, Winkel Grad	Steilkante, Höhe mm	Anzahl der Lagen und Elektrodendurchmesser
3	70	ohne	2 Lagen, 3-mm-Elektrode
4	80	0,5	2 Lagen, 3-mm-Elektrode
6	90	0,5	3 Lagen, die erste mit 3 mm, die beiden andern mit 4-mm-Elektrode

Die Versuchsschweißungen wurden nach Normalglühen (Glühdauer ½ h) durch Härten in Öl und Anlassen bei 400, 500, 575 und 650° (Anlaßdauer 1 h) vergütet. Hierbei wurde die Abkühlung von der Anlaßtemperatur in Öl vorgenommen, um Anlaßsprödigkeit zu vermeiden. Den so behandelten Schweißungen wurden Probestäbe für Zerreiß- und Zugschwellversuche entnommen. Bei beiden Versuchsarten wurden sowohl nach dem Schweißen nicht mehr bearbeitete, wie auch allseitig bearbeitete Prüfstäbe benutzt. Für metallographische Untersuchungen und Härtemessungen quer zur Naht fanden Schweißproben Verwendung, die nach dem Schweißen keinerlei Nachbehandlung erfahren hatten. Das Ergebnis dieser letztgenannten Versuche sei zunächst kurz dargelegt.

3. Versuchsergebnisse.

Die metallographische Untersuchung der nicht nachbehandelten Schweißungen der Versuchsbleche lieferte naturgemäß nur unsichere Anhaltspunkte für eine von der Art des Grundwerkstoffs abhängige, verschiedene Auflegierung der Schweißnaht. Diese hatte bei den Blechen aus den Stählen 1 und 2 vorwiegend ein feines Widmannstätten-Gefüge, Bild 1, wie es bei molybdänhaltigen Stählen nach Überhitzung und beschleunigter Abkühlung besonders leicht auftritt. Die Nähte in den Schweißverbindungen aus Stahl 3 hatten vorwiegend ein gröberes, weniger zur nadeligen Ausbildung des Ferrits neigendes Gefüge mit mengenmäßig stärker hervortretendem, eutektoidischem Bestandteil, Bild 2. Demgemäß ist die Härte der Naht bei den Schweißverbindungen aus Stahl 3 größer als bei denen aus den Stählen 1 und 2, Bild 3. Der metallographische Befund und die Härtemessungen lassen darauf schließen, daß die Auflegierung des Zusatzwerkstoffs während des Schweißens erwartungsgemäß bei Stahl 3 ausgeprägter als bei den Stählen 1 und 2 ist, die sich in dieser Beziehung untereinander nur wenig und nicht immer im gleichen Sinne unterscheiden.

Mit zunehmender Blechdicke nehmen die Härte der Naht und bei den Stählen 1 und 2 auch die Höchsthärte des wärmebeeinflußten Gebietes neben der Naht ab, Bild 3. Die Ursache hierfür ist die mit steigender Blechdicke abnehmende Abkühlungsgeschwindigkeit der Naht und ihrer Umgebung nach dem Schweißen, wofür unter anderem auch die bei den dickeren Blechen verminderte Kühlwirkung der Atmosphäre maßgebend ist. Die Höchsthärte neben der Naht ist bei Stahl 3 unabhängig von der Blechdicke, da auch die nach dem Schweißen der 6-mm-Bleche auftretende Abkühlungsgeschwindigkeit noch zur Bildung von Martensit neben der Naht, Bild 4, ausreichte. Dies ist, wie andere Versuche gezeigt haben, auch bei viel größeren Blechdicken noch der Fall. Für Stahl 1 liegt die obere Grenze der Blechdicke, bei der noch Martensit neben der Naht entsteht, bei 3 mm. Der Stahl 2 enthält bei dieser Blechdicke noch keinen Martensit, wohl aber schon einige Ferritinseln an der Stelle der Höchsthärte in der wärmebeeinflußten Zone, Bild 5. Mit der Härteneigung der Versuchsstähle in der wärmebeeinflußten Zone zusammenhängende Fehler konnten selbst bei Stahl 3 metallographisch nicht festgestellt werden.

Die Ergebnisse der Zerreißversuche an den ungeschweißten 3- und 4-mm-Blechen und an den entsprechenden Schweißverbindungen mit belassener und abgearbeiteter Raupe enthalten Bild 6 bis 8 für die drei Versuchsstähle. In diesen Bildern beziehen sich die Linienzüge auf die ungeschweißten Bleche, während die eingetragenen Versuchspunkte an Schweißverbindungen gewonnen wurden. Die

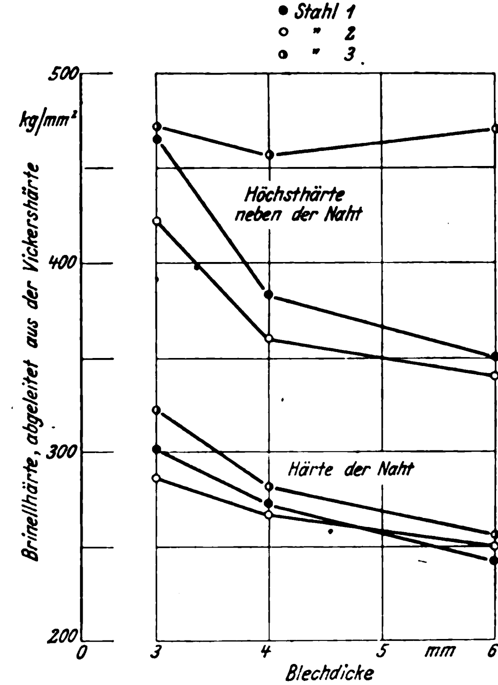


Bild 3. Höchsthärte in der wärmebeeinflußten Zone neben der Naht und Härte der Naht selbst bei verschiedenen Blechdicken.



Bild 4. Martensit in der wärmebeeinflußten Zone der 6-mm-Bleche aus Stahl 3. Geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. 500fach.



Bild 5. Gefüge aus dem Gebiet der Höchsthärte neben der Naht in 4-mm-Blech aus Stahl 2. Geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

Wiedergabe der Schweißdehnungswerte neben der $\sigma_{0,2}$-Grenze und der Zugfestigkeit in Bild 6 bis 8 hat vor allem den Sinn, die Lage des Bruches zur Schweißnaht zu kennzeichnen. Schweißdehnungswerten, die sehr viel kleiner als die Bruchdehnungen der ungeschweißten Bleche sind, entsprechen Brüche in der Naht und im Übergang von der Naht zum Grundwerkstoff. Zu hohen Schweißdehnungswerten gehören Brüche in einigem Abstand von der Naht im Grundwerkstoff.

Bild 6 bis 8 ist folgendes zu entnehmen: Unter Vergütungsbedingungen, die zu Blechzugfestigkeiten über 130 kg/mm² führen, erreichen die Schweißverbindungen der 3-mm-Bleche zwar in einigen Fällen die Festigkeit der ungeschweißten Bleche, jedoch ist mit einem zu großen Streubereich zu niedrigen Festigkeiten hin zu rechnen. Der Bruch tritt bei den nicht bearbeiteten Proben meist am Übergang der Naht zum Grundwerkstoff, selten im vollen Blech, bei den bearbeiteten Proben meist in der Naht, selten am Übergang und nur ausnahmsweise im vollen Blech ein. Die Naht hat demnach, trotz Auflegierung des Schweißguts durch den Grundwerkstoff eine diesem unterlegene Vergütbarkeit. Dieser Umstand tritt bei den Schweißverbindungen in den 3-mm-Blechen nach Vergüten entsprechend Blechzugfestigkeiten bis zu 130 kg/mm² wenigstens bei nicht abgearbeiteter Schweißraupe nicht mehr störend in Erscheinung. Vergütungsbedingungen, die bei den Stählen 1 und 2 Blechfestigkeiten von 90 bis 120, bei Stahl 3 von 95 bis 130 kg/mm² ergeben, führen bei den Schweißverbindungen im

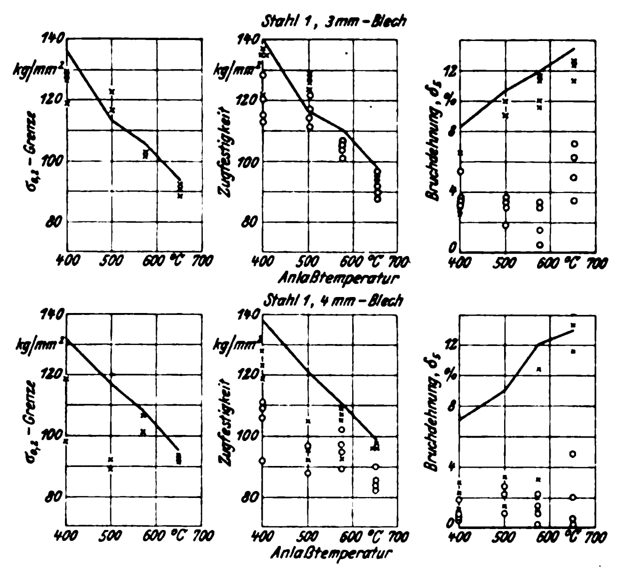


Bild 6. Festigkeitswerte der ungeschweißten und geschweißten Bleche aus Stahl 1 im vergüteten Zustand.
Linienzüge: ungeschweißt; Punkte: geschweißt; × Raupe belassen; ○ Raupe abgearbeitet.

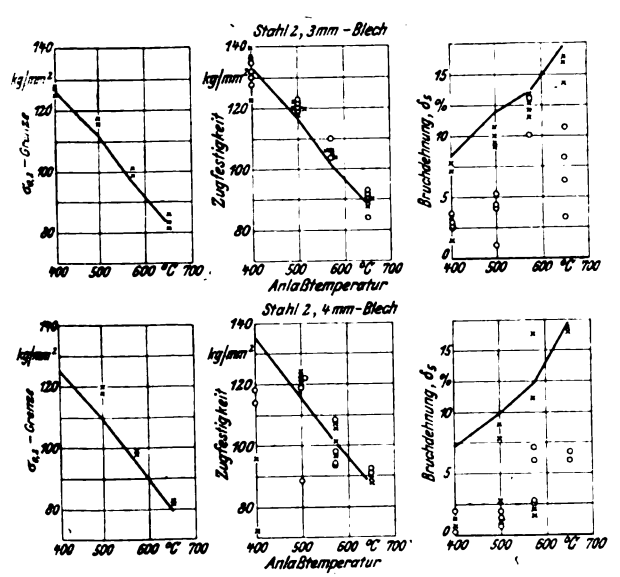


Bild 7. Festigkeitswerte der ungeschweißten und geschweißten Bleche aus Stahl 2 im vergüteten Zustand.
Linienzüge: ungeschweißt; Punkte: geschweißt; × Raupe belassen; ○ Raupe abgearbeitet.

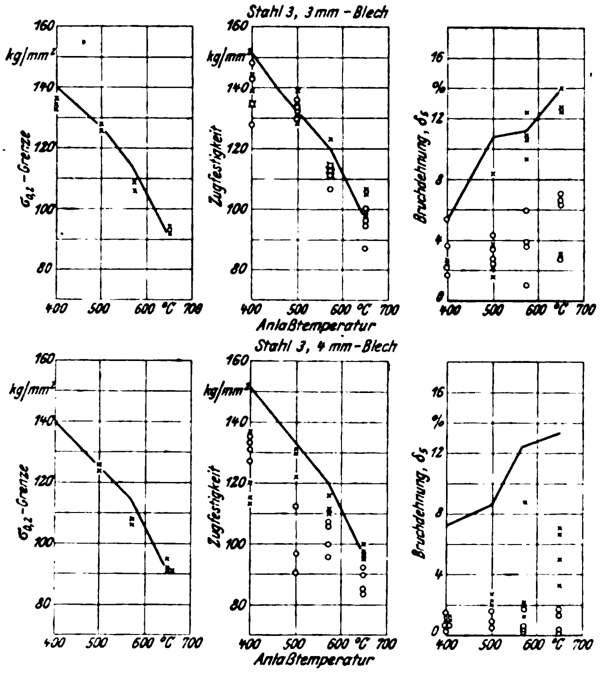


Bild 8. Festigkeitswerte der ungeschweißten und geschweißten Bleche aus Stahl 3 im vergüteten Zustand.
Linienzüge: ungeschweißt; Punkte: geschweißt; × Raupe belassen; ○ Raupe abgearbeitet.

wesentlichen zu den gleichen Festigkeiten. Die Stäbe mit Schweißraupe reißen unterhalb 120 kg/mm² Schweißzugfestigkeit fast ausnahmslos in größerem Abstand von der Schweißnaht im vollen Blech. Bei den bearbeiteten Proben tritt der Bruch noch bei Schweißzugfestigkeiten bis herunter zu 90 kg/mm² in der Schweißnaht ein. Während die bei diesen Versuchen benutzte Elektrode sich also bei den 3-mm-Blechen aus den Versuchsstählen für Schweißverbindungen mit hoher statischer Festigkeit eignet, ist ihre Anwendbarkeit auf die entsprechenden 4-mm-Bleche schon auf mittlere Schweißfestigkeiten begrenzt. Bei 90 bis 100 kg/mm² Schweißzugfestigkeit und nicht abgearbeiteter Schweißraupe ist nicht immer damit zu rechnen, daß der Bruch außerhalb der Naht im vollen Blech eintritt. Andererseits wurden bei Stahl 2 noch Zugfestigkeiten von 120 kg/mm² (mit Raupe) überschritten bei teilweise befriedigender Bruchlage. Für Schweißverbindungen mit hoher Vergütungsfestigkeit in 6-mm-Blechen kommt die nur schwach legierte Elektrode nicht mehr in Betracht. Die Angaben über ihren Anwendungsbereich bei Blechen mit 3 und teilweise noch 4 mm Dicke gelten praktisch für alle drei Versuchsstähle. Die bei diesen vorhandenen Unterschiede in der Auflegierung des Nahtwerkstoffs sind also nicht von größerer Bedeutung für dessen Vergütbarkeit.

Die Dauerversuche hätten nach dem Ergebnis der statischen Festigkeitsprüfung auf Schweißverbindungen der 3-mm-Bleche beschränkt werden können, da die Elektrode nur bei diesen Blechen nach Vergüten wirklich hohe Schweißfestigkeiten liefert. Da jedoch der Fall, daß vergütete Schweißverbindungen statisch eine kleinere Festigkeit als der zugehörige Grundwerkstoff aufweisen, praktisch bei bearbeiteten, dynamisch beanspruchten Schweißverbindungen hoher Festigkeit häufiger vorkommt (Beispiel: amerikanische Stahl-Hohlluftschrauben) wurden neben Schweißungen mittlerer Festigkeit der 4-mm-Bleche auch solche aus den gleichen Blechen im Dauerversuch geprüft, bei denen die Schweißzugfestigkeit die hohe Vergütungsfestigkeit des Grundwerkstoffs nicht erreichte.

Die Dauerversuche mit den Schweißverbindungen der 3- und 4-mm-Bleche wurden als Zugschwellversuche ($\sigma_u = 0$) auf Pulsern der Bauart Schenk-Erlinger zwischen Lastwechselzahlen von rd. 10^4 bis 10^7 nach dem Wöhlerverfahren durchgeführt. Die den vergüteten Versuchsschweißungen entnommenen Dauerprüfstäbe wurden mit belassener Schweißraupe und nach allseitiger Bearbeitung (Körnung des Schleifmittels etwa entsprechend Schmirgelpapier 0) geprüft. Bevor auf die Ergebnisse der Zugschwellversuche eingegangen wird, soll kurz zu der Frage der Abhängigkeit der Dauerfestigkeit der Schweißverbindungen von ihrer Zugfestigkeit bei belassener Schweißraupe Stellung genommen werden. In Bild 9 ist die Biegewechselfestigkeit in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit nach verschiedenen Verfahren mit Rundnaht geschweißter und z. T. anschließend vergüteter Rohre mit belassener Schweißraupe wiedergegeben[4]). Bedingt durch die unterschiedliche Güte der Schweißungen sind die Streuungen der Biegewechselfestigkeit bei gleicher Zugfestigkeit groß. Aus der oberen Grenze des Streubereiches läßt sich auf einen Anstieg der Biegewechselfestigkeit bis zu einer Schweißzugfestigkeit von 80 bis 90 kg/mm² schließen. An der unteren Streugrenze steigt die Biegewechselfestigkeit bis etwa 100 kg/mm² an. Oberhalb 80 bis 100 kg/mm² Zugfestigkeit dürfte die Dauerfestigkeit nach Bild 9 wieder abnehmen, wenn auch der eingezeichnete Abfall der Dauerfestigkeit durch die Versuchspunkte nicht ausreichend belegt ist. Nach diesen Versuchsunterlagen und vielen weiteren, die hier nicht aufgeführt werden, sowie auf Grund der allgemeinen Kenntnis von dem mit steigender Zugfestigkeit des Stahles zunehmenden, schädlichen Einfluß von Kerben auf die Dauerfestigkeit[5]) wurde von vornherein nicht erwartet, daß die Dauerfestig-

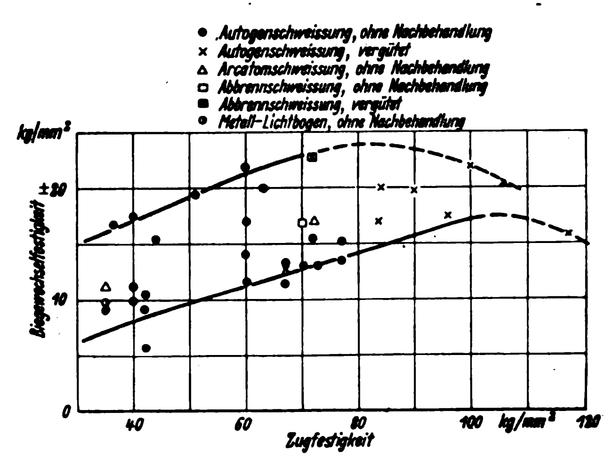


Bild 9. Abhängigkeit der Biegewechselfestigkeit von der Zugfestigkeit mit Rundnaht geschweißter, dünnwandiger Stahlrohre.

keit der Versuchsschweißungen mit nicht abgearbeiteter Schweißraupe durch Vergüten auf Zugfestigkeiten über 100 kg/mm² eine Verbesserung gegenüber Schweißungen mit Zugfestigkeiten zwischen 60 und 100 kg/mm² erfahren könnte. Es wurden daher auch allseitig bearbeitete Schweißverbindungen geprüft, obgleich das Bearbeiten der Schweißnähte beispielsweise im Flugzeugbau häufig nicht möglich und im Hinblick auf die statische Festigkeit meist unzulässig ist. Die Bearbeitung beseitigt äußere Kerbstellen an der Naht und wirkt daher bei einwandfreien Schweißungen im allgemeinen dauerfestigkeitssteigernd. Andererseits kann das Anschneiden von ursprünglich innenliegenden Fehlern in Einzelfällen den Nutzen der Bearbeitung in Frage stellen. Bei gesunden Schweißungen läßt die Bearbeitung auch bei Steigerung der Zugfestigkeit auf mehr als 100 kg/mm² eine erhöhte Schweißdauerfestigkeit möglich erscheinen. Grundsätzlich haben Schweißverbindungen mit hoher Vergütungs-Zugfestigkeit und damit hoher Streckgrenze den Vorteil, daß sie hohe Mittelspannungen zulassen.

Zu den in Zahlentafel 2 wiedergegebenen Ergebnissen der Zugschwellversuche mit gleichgehaltener Unterspannung 0 ist zu sagen: Die für 10^4 Lastwechsel an der unteren Grenze des Streubereichs der Wöhlerkurven erhaltenen Zeitfestigkeitswerte liegen für die vergüteten Schweißverbindungen in den 3-mm-Blechen aus den drei Versuchsstählen zwischen 42 und 58 kg/mm². Ein eindeutiger Einfluß der Stahlart und der zwischen 80 und 120 bis 130 kg/mm² liegenden statischen Schweißzugfestigkeit ist nicht zu erkennen. Selbst die Bearbeitung ist ohne Einfluß auf die Größe der Zeitfestigkeit bei 10^4 Lastwechseln. Dagegen haben die bearbeiteten Schweißverbindungen der 4-mm-Bleche bei vorwiegend unter der Blechfestigkeit liegender Schweißzugfestigkeit eine kleinere Zeitfestigkeit für 10^4 Lastwechsel als die Schweißungen mit belassener Raupe und der Blechfestigkeit entsprechender Schweißfestigkeit. Diese nicht bearbeiteten Schweißungen der 4-mm-Bleche entsprechen hinsichtlich ihrer Zeitfestigkeit den unbearbeiteten und bearbeiteten Schweißungen der 3-mm-Bleche. Auch bei den 4-mm-Blechen ist kein eindeutiger Einfluß der Stahlart der Bleche, und damit der kleinen Unterschiede in der Auflegierung des Nahtwerkstoffs durch den Grundwerkstoff auf die Zeitfestigkeit bei 10^4 Lastwechseln festzustellen. Die nicht bearbeiteten Schweißungen der 4-mm-Bleche lassen auch keinen Zusammenhang zwischen der Schweißzugfestigkeit im untersuchten Bereich (80 bis 120 kg/mm²) und der Zeitfestigkeit für 10^4 Lastwechsel erkennen.

Die Dauerfestigkeit (10^7 Lastwechsel) der Schweißverbindungen der 3-mm-Bleche ist ebenso wie die Zeitfestigkeit bei 10^4 Lastwechseln weder eindeutig abhängig von der Werkstoffart noch von der Schweißzugfestigkeit zwischen 100 und 130 kg/mm². Im Gegensatz zu der Zeitfestigkeit hängt aber die Höhe der Dauerfestigkeit entscheidend davon ab, ob die Schweißnaht bearbeitet wird oder nicht. Die nicht bearbei-

[4]) H. Cornelius u. F. Bollenrath, Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Lfg. 10, S. 520/26.

[5]) H. Cornelius u. F. Bollenrath, Z. VDI Bd. 86 (1942), S. 103/08.

Zahlentafel 2. Zeit- und Dauerfestigkeit von Metall-Lichtbogenschweißungen in 3-und 4-mm-Blechen aus den Versuchsstählen (Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$), Schweißnaht senkrecht zur Zugspannungsrichtung).

Stahl Nr.	Stahl Blechdicke mm	Probe	Prüfquerschnitt mm²	Zugfestigkeit Blech kg/mm²	Zugfestigkeit Schweißverbindung kg/mm²	Zeitfestigkeit*) (10^4 Lastwechsel) kg/mm²	Zeitfestigkeit*) untere Grenzwerte kg/mm²	Dauerfestigkeit*) (10^7 Lastwechsel) kg/mm²	Dauerfestigkeit*) untere Grenzwerte kg/mm²	**) untere Grenzwerte
1	3	mit Raupe	3 · 12	100 — 110 120 — 130	100 — 110 120 — 130	52 (—) 56 (57)	+ 26 ± 26 + 28 ± 28	20 (27) 20 (22)	+ 10 ± 10 + 10 ± 10	0,095 0,080
2	3	mit Raupe	3 · 12	100 — 110 120 — 130	100 — 110 120 — 130	— (42) 42 (44)	— + 21 ± 21	18 (20) 23 (26)	+ 9 ± 9 + 11,5 ± 11,5	0,085 0,092
3	3	mit Raupe	3 · 12	100 — 110 120 — 130	100 — 110 120 — 130	50 (—) 45 (50)	+ 25 ± 25 + 22,5 ± 22,5	23 (—) 20 (26)	+ 11,5 ± 11,5 + 10 ± 10	0,110 0,080
1	3	allseitig bearbeitet	2,6 · 12	100 — 110 120 — 130	100 — 110 120 — 130	56 (—) 48 (—)	+ 28 ± 28 + 24 ± 24	43 (47) 43 (50)	+ 21,5 ± 21,5 + 21,5 ± 21,5	0,204 0,172
2	3	allseitig bearbeitet	2,5 · 12	100 — 110 120 — 130	100 — 110 120 — 130	— (—) 58 (—)	— + 29 ± 29	44 49 (52)	+ 22 ± 22 + 24,5 ± 24,5	0,210 0,196
3	3	allseitig bearbeitet	2,6 · 12	100 — 110 120 — 130	100 — 110 120 — 130	— (—) 49 (52)	— + 24,5 ± 24,5	43 (—) 39 (42)	+ 21,5 ± 21,5 + 19,5 ± 19,3	0,205 0,156
1	4	mit Raupe	4 · 16	90 — 100 110	90 — 100 90 — 110	— 48 (50)	— + 24 ± 24	17 (20) 18 (—)	+ 8,5 ± 8,5 + 9 ± 9	0,089 0,090
2	4	mit Raupe	4 · 16	80 — 90 100 110 — 120	80 — 90 90 — 110 110 — 120	54 (—) — 54 (—)	+ 27 ± 27 — + 27 ± 27	20 (—) 18 (—) —	+ 10 ± 10 + 9 ± 9 —	0,117 0,090 —
3	4	mit Raupe	4 · 16	90 — 100 130 — 140	90 — 100 120 — 130	— —	— —	26 (—) 30 (—)	13 ± 13 15 ± 15	0,137 0,120
1	4	allseitig bearbeitet	3,5 · 16	90 — 100 110	80 — 90 90 — 100	44 (50) 42 (48)	22 ± 22 21 ± 21	34 (38) 34 (38)	17 ± 17 17 ± 17	0,200 0,179
2	4	allseitig bearbeitet	3,5 · 16	80 — 90 100 — 110 110 — 120	80 — 90 90 — 110 90 — 125	42 (48) 46 (52) —	21 ± 21 23 ± 23 —	28 (40) 27 (35) 30 (—)	14 ± 14 13,5 ± 13,5 15 ± 15	0,165 0,135 0,140
3	4	allseitig bearbeitet	3,5 · 16	90 — 100 130 — 140	80 — 90 90 — 110	— —	— —	28 (38) 36 (—)	14 ± 14 18 ± 18	0,165 0,180

*) Nicht eingeklammerte Werte beziehen sich auf die untere, eingeklammerte Werte auf die obere Grenze des Streubereichs der Wöhlerkurve. Die Zeitfestigkeitswerte sind zum Teil extrapoliert.
**) Verhältnis des Spannungsausschlages bei der Dauerfestigkeit für Zugfestigkeit der Schweißverbindung.

teten Schweißverbindungen haben an der unteren Streugrenze der Wöhlerkurven eine Zugursprungsfestigkeit von 18 bis 23 kg/mm². Hier hat die Vergütung auf hohe statische Festigkeit hinsichtlich des Spannungsausschlags (+ 9 ± 9 bis + 11,5 ± 11,5 kg/mm²) keinen Vorteil gegenüber Schweißungen mit niedrigerer Zugfestigkeit mit sich gebracht. Die Bearbeitung der Schweißnaht hat aber die Dauerfestigkeit gegenüber den unbearbeiteten Schweißverbindungen verdoppelt. Mit Mindestwerten (untere Streugrenze) von 38 bis 49 kg/mm² der Zugursprungsfestigkeit (+ 19 ± 19 bis + 24,5 ± 24,5 kg/mm²) haben die bearbeiteten Schweißverbindungen hoher Zugfestigkeit beachtliche Dauerfestigkeitswerte erreicht.

Für die Schweißverbindungen der 4-mm-Bleche gilt hinsichtlich ihrer Dauerfestigkeit grundsätzlich das über die Schweißungen der 3-mm-Bleche Gesagte. Folgende Abweichung ist festzustellen: Die bearbeiteten Schweißungen sind den unbearbeiteten weniger überlegen als bei den 3-mm-Blechen. Dies wird im wesentlichen darauf beruhen, daß die bearbeiteten Schweißverbindungen der 4-mm-Bleche eine der Blechzugfestigkeit meist unterlegene statische Schweißfestigkeit hatten, und in geringerem Maße auch darauf, daß die Güte der Schweißung derjenigen der 3-mm-Bleche nicht ganz ebenbürtig war. Auf letzteres deutete z. T. das Dauerbruchaussehen hin, das etwas häufiger Nahtfehler als Dauerbruchausgangsstelle als bei den 3-mm-Blechen erkennen ließ. In Einzelfällen (Stahl 3) liegt die Dauerfestigkeit der unbearbeiteten Schweißverbindungen der 4-mm-Bleche über dem Höchstwert der bei den entsprechenden Schweißungen der 3-mm-Bleche festgestellten Dauerfestigkeit.

Vorstehend ist hinsichtlich der Zeit- und Dauerfestigkeit der Versuchsschweißungen nur auf die an der unteren Grenze des Wöhlerbereiches festgestellten Werte Bezug genommen worden. Bild 10, das den Wöhlerbereich für die auf 100 bis 110 kg/mm² Zugfestigkeit vergüteten, nicht bearbeiteten Schweißverbindungen der 3-mm-Bleche aus Stahl 1 wiedergibt, vermittelt einen Eindruck von den Streuungen der Dauerversuchsergebnisse. In Zahlentafel 2 sind in Klammern die an der oberen Grenze des Wöhlerbereiches erhaltenen Dauerversuchsergebnisse in mehreren Fällen angeführt.

Aus dem Vergleich der Zeit- und Dauerfestigkeitswerte der Lichtbogenschweißungen der 3-mm-Bleche mit wirklich

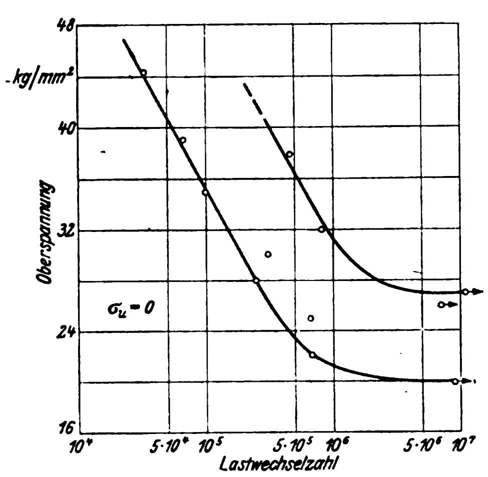


Bild 10. Wöhlerbereich für die auf 100 bis 110 kg/mm² Zugfestigkeit vergüteten Schweißverbindungen der 3-mm-Bleche aus Stahl 1 mit belassener Schweißraupe.

hoher Vergütungsfestigkeit ergibt sich, daß die Wöhlerkurven für die unbearbeiteten Verbindungen einen steilen, für die bearbeiteten einen flachen Verlauf haben. Ausgehend von der Feststellung, daß die Zeitfestigkeit der nicht bearbeiteten und der bearbeiteten Schweißungen bei 10^4 Lastwechseln übereinstimmt, die Dauerfestigkeit durch Bearbeiten der Schweißnaht auf den doppelten Wert erhöht werden kann, und der Übergang des schrägen in den annähernd horizontalen Ast der Wöhlerkurve bei den bearbeiteten Schweißungen nach kleinerer Lastwechselzahl als bei den nicht bearbeiteten eintritt, gelangt man zu der idealisierten Darstellung von Wöhlerkurven für die bearbeitete und nicht bearbeitete Lichtbogenschweißung hoher Zugfestigkeit in Bild 11. Hiernach ist eine Bearbeitung von Schweißteilen, die vorwiegend auf Zeitfestigkeit im Gebiet weit oberhalb der Dauerfestigkeit der bearbeiteten Schweißungen beansprucht werden, nicht erforderlich, unter Umständen, nämlich bei Lastwechselzahlen unter 10^4, nicht einmal nützlich. Für vorwiegend im unteren Bereich der Zeitfestigkeit oder rein auf Dauerfestigkeit beanspruchte Bauteile ist dagegen die Bearbeitung von sehr großem Nutzen.

Aus den Ergebnissen der Dauerversuche mit den 4-mm-Blechen soll noch einmal die Feststellung hervorgehoben werden, daß bei bearbeiteten Schweißverbindungen eine Unterlegenheit des Nahtwerkstoffs in der statischen Festigkeit gegenüber dem hochfesten Grundwerkstoff zu kleinerer Zeit- und Dauerfestigkeit führt, als eine angenähert gleiche statische Festigkeit von Naht- und Grundwerkstoff.

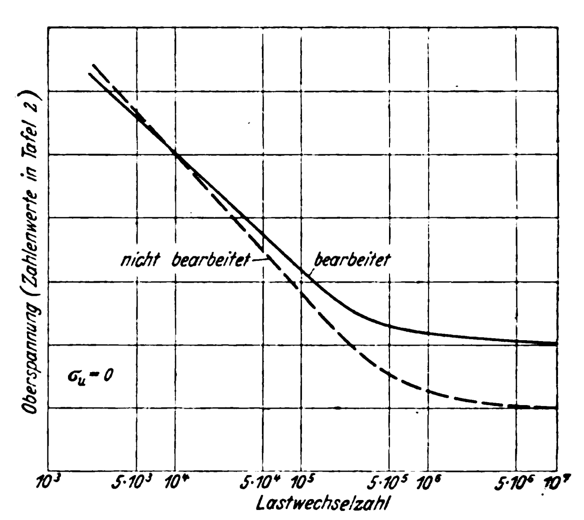


Bild 11. Idealisierte Darstellung der Ergebnisse der Zugschwellversuche mit Schweißungen von 100 bis 130 kg/mm² Zugfestigkeit. 3-mm-Bleche aus den Versuchsstählen.

4. Zusammenfassung.

Eine Elektrode, die ein schwach mit Chrom und Molybdän legiertes Schweißgut ergibt, erwies sich als geeignet für nicht bearbeitete und bearbeitete Schweißverbindungen hoher Zugfestigkeit (120 bis 130 kg/mm²) in Blechen bis zu 3 mm Dicke aus drei mit Mangan, Chrom, Molybdän und Vanadin legierten Vergütungsstählen. Für 4 mm dicke Bleche aus den gleichen Stählen ergab die Elektrode nur noch bis zu mittleren Festigkeiten (90 bis 100 kg/mm²) und bei belassener Schweißraupe befriedigende Schweißverbindungen. Das Ausmaß der Auflegierung des Nahtwerkstoffs durch verschieden hoch legierte Grundwerkstoffe ist für den Anwendungsbereich der Elektrode hinsichtlich Blechdicke und Schweißfestigkeit nicht von wesentlicher Bedeutung. — Ein eindeutiger Einfluß der statischen Schweißzugfestigkeit im Bereich von 100 bis 130 kg/mm² auf die Zeit- und Dauerfestigkeit (Zugschwellbeanspruchung $\sigma_u = 0$) bearbeiteter und unbearbeiteter Schweißverbindungen war nicht festzustellen. Auch machte sich in dieser Beziehung die Art des Grundwerkstoffs nicht bemerkbar. — Im oberen Bereich der Zeitfestigkeit sind nicht bearbeitete Schweißverbindungen hoher statischer Festigkeit entsprechenden, aber bearbeiteten Schweißungen überlegen. Die bearbeiteten Verbindungen haben dagegen gegenüber den unbearbeiteten eine weit überlegene Lebensdauer im unteren Bereich der Zeitfestigkeit und bei reiner Dauerbeanspruchung. Die Bearbeitung hebt die Dauerfestigkeit auf den doppelten Wert der Dauerfestigkeit nicht bearbeiteter Verbindungen. — Im Vergleich zu hochfesten, bearbeiteten Schweißverbindungen mit annähernd gleich hoher statischer Festigkeit von Naht- und Grundwerkstoff haben Schweißverbindungen, deren Nahtfestigkeit deutlich kleiner als die des Grundwerkstoffs ist, eine verminderte Zeit- und Dauerfestigkeit.

Für die Durchführung der Versuche wird auch an dieser Stelle Herrn Ing. K. Fahsel bestens gedankt.

FKFS-Schnellverfahren zur Bestimmung des Bleigehaltes in Flugmotorenkraftstoffen*).

Von O. Widmaier.

Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Das in Flugmotorenkraftstoffen enthaltene Bleitetraäthyl wurde bisher entweder gewichtsanalytisch als Bleichromat und Bleisulfat oder maßanalytsich durch Zurücktitrieren von überschüssigem Kaliumbichromat mittels Natriumthiosulfats bei der Bleichromatfällung bestimmt. Diese Verfahren liefern zwar gute Ergebnisse, haben aber den Nachteil, daß eine Bleitetraäthylbestimmung 2 bis 4 h in Anspruch nimmt.

Mit dem nachstehend beschriebenen FKFS-Schnellverfahren kann der Bleigehalt mit einer für die meisten Zwecke ausreichenden Genauigkeit in etwa 15 min bestimmt werden. In der heutigen verbesserten Form ist für alle Kraftstoffe anwendbar.

Gliederung.

I. Grundlagen des Verfahrens.

Das FKFS-Verfahren zur Bleibestimmung in Flugmotorenkraftstoffen beruht auf der jodometrischen Analyse, wobei das Bleitetraäthyl in Bleitriäthyljodid und Äthyljodid übergeführt wird.

Die jodometrische Analyse gründet sich auf die Reaktion

$$Pb\,(C_2H_5)_4 + 2\,J = Pb\,(C_2H_5)_3J + C_2H_5J.$$

Andere Bleiverbindungen verbrauchen kein Jod oder nur sehr wenig. Das zu einigen Tausendteilen anwesende Hexaäthyl-Diplumban verbraucht je Bleiatom nur die Hälfte Jod; es tritt dabei folgende Reaktion ein:

$$Pb_2\,(C_2H_5)_6 + 2\,J = 2\,Pb\,(C_2H_5)_3J.$$

Die gravimetrische Bestimmung ergibt deshalb gegenüber der jodometrischen Methode einen um 0,2 bis 0,5% höheren Gehalt an Bleitetraäthyl, sofern das Grundbenzin kein Jod aufnimmt.

Bei Verwendung einer wäßrigen Jodlösung müssen die im Kraftstoff vorhandenen ungesättigten Bestandteile entweder durch Anlagerungsprodukte abgesättigt oder abgetrennt werden. Allerdings ist dabei die Gefahr der Hydrolyse besonders zu beachten.

Eingehende Versuche mit organischen Lösungsmitteln haben ergeben, daß eine alkoholische Jod-Jodkaliumlösung in erster Linie mit dem Bleitetraäthyl eine Reaktion eingeht und erst bei Vorhandensein größerer Mengen von Ungesättigten auch an das Grundbenzin etwas Jod anlagert. Letztere Möglichkeit kommt bei Flugkraftstoffen praktisch nicht vor. Neuerdings konnte zudem auch diese Fehlerquelle ausgeschaltet werden, so daß das Verfahren heute für alle Kraftstoffe mit praktisch ausreichender Genauigkeit anwendbar ist.

II. Versuchsdurchführung.

Das FKFS-Schnellverfahren in seiner ersten Ausführungsform, die in der Hauptsache für die üblichen Flugkraftstoffe vorgesehen ist, wurde bisher an folgenden Kraftstoffen erprobt:

1. VT 702	Flugkraftstoffe
2. VT 707	
3. VT 810	
4. VHT 302	
5. 80 Vol.-% VT 810 + 20 Vol.-% VHT 302	
6. Leuna-Benzin	Fahrzeugkraftstoffe
7. Fischer-Tropsch-Benzin	

Bei den Kraftstoffen Nr. 1 bis 5 handelt es sich ausschließlich um Flugmotoren-Grundkraftstoffe; die Kraftstoffe Nr. 6 und 7 stellen Synthesebenzine dar und werden als Fahrzeugkraftstoffe verwendet.

Diese Kraftstoffe wurden zuerst mit einer äthylalkoholischen Jod-Jodkaliumlösung behandelt, um die Jodaufnahme und damit die von vornherein auftretende Fehlergrenze feststellen zu können. Dann wurden die einzelnen Kraftstoffe mit verschiedenen Mengen Ethylfluid versetzt, und zwar mit:

0,05 Vol.-% Ethylfluid	= 0,0326 Vol.-%	Bleitetraäthyl
0,1 » »	= 0,0653 »	»
0,15 » »	= 0,0979 »	»
0,20 » »	= 0,1306 »	»

Der Bleigehalt der verschieden verbleiten Kraftstoffe wurde sodann nach dem FKFS-Verfahren ermittelt:

Die Schüttelzeiten wurden zu 5 und 10 min gewählt. Zum Schütteln der Proben wurde eine Schüttelmaschine benutzt. Bei kräftigem Schütteln konnte die Schüttelzeit bis auf 3 min herabgesetzt werden.

Auf Grund der im chemischen Laboratorium des Instituts gemachten Erfahrungen wurde zunächst folgende Vorschrift für die Bleibestimmung in Flugkraftstoffen ausgearbeitet:

In einem 100 cm³ fassenden Jodzahlkolben werden 25 cm³ des zu untersuchenden Kraftstoffs mit 5 cm³ $n/10$ alkoholischer Jodlösung 5 bis 10 min (bei niederverbleiten 5 min, bei höherverbleiten Kraftstoffen 10 min) geschüttelt.

Zur Herstellung der Jodlösung werden 1 l absoluter Äthylalkohol und 12,7 g Jod (pro analysi) mit 20 g Kaliumjodid (pro analysi) etwa ½ h geschüttelt und das nicht in Lösung gegangene Kaliumjodid als Bodensatz belassen. Der Jodüberschuß wird mit $n/10$ Natriumthiosulfat mit Hilfe einer Mikrobürette zurücktitriert.

Die verbrauchte Menge an $n/10$ alkoholischer Jodlösung mit 0,0391 multipliziert ergibt den Bleitretaäthylgehalt in Volumen-Hundertteilen.

III. Versuchsergebnisse mit verschiedenen Kraftstoffen.

Zur Feststellung der Jodempfindlichkeit wurden die Grundkraftstoffe nach der oben angegebenen Vorschrift für die Bleitetraäthylbestimmung untersucht. Aus Zahlentafel 1 ist zu ersehen, daß der Jodverbrauch zwischen 0 und 0,04 cm³ liegt, wobei 0,04 cm³ $n/10$ Jodlösung einem Bleitetraäthylgehalt von 0,0016 Vol.-% entsprechen. Die Jodaufnahme ist also verhältnismäßig gering und ruft demzufolge nur einen kleinen Fehler hervor.

*) G 1.

Zahlentafel 2 bis 5 stellen die nach dem FKSF-Verfahren erhaltenen Bleiwerte der Kraftstoffe bei einem theoretischen Gehalt von 0,0326 Vol.-%, 0,0653 Vol.-%, 0,0979 Vol.-% und 0,1306 Vol.-% Bleitetraäthyl dar.

Die erhaltenen niedrigsten Werte bei 5 min Schüttelzeit und die höchsten bei 10 min Schüttelzeit sind in den Zahlentafeln durch Fettdruck hervorgehoben.

Aus Zahlentafel 2 bis 5 geht hervor, daß die niederverbleiten Kraftstoffe etwa 5 min und die höherverbleiten Kraftstoffe etwa 10 min geschüttelt werden müssen. Selbstverständlich hängt die Schüttelzeit von der Art des Schüttelns ab. Die Unterschiede betragen aber nur wenige Minuten.

IV. Verbesserte, für alle Kraftstoffe anwendbare Bestimmungsweise.

Neuerdings wurde das beschriebene Verfahren noch etwas abgeändert, um es bei allen vorkommenden Kraftstoffen anwenden zu können. Hierbei ist die Arbeitsweise wie folgt:

50 cm³ Kraftstoff werden im vorgeschriebenen Schüttelgefäß mit 50 cm³ Wasser bei einer Temperatur von 20° C kurz durchgeschüttelt. Diese Vorbehandlung ist indessen nur bei alkoholhaltigen Kraftstoffen notwendig. Die wäßrige Schicht wird abgelassen und der Kraftstoff im Schüttelzylinder je nach Braunfärbung mit 10 bis 50 cm³ 70proz. Schwefelsäure[1]) (bei starker Braunfärbung mit 50, bei geringer Braunfärbung mit 10 cm³ Schwefelsäure) 20 s lang kräftig geschüttelt. Die geringe Volumenabnahme, die durch die Schwefelsäure beim Kraftstoff selbst hervorgerufen wird, darf nicht berücksichtigt werden, da — wie Versuche gezeigt haben — mit den Harzanteilen und höher molekularen Olefinen die entsprechende Menge Bleitetraäthyl mit herausgenommen wird.

Die Schwefelsäure wird sofort nach Einstellung der Trennschicht abgelassen (es ist besonders darauf zu achten, daß die Schwefelsäure möglichst schnell entfernt wird) und der Kraftstoff zweimal mit Wasser gut nachgewaschen; der Schliff des Schüttelzylinders ist ebenfalls mit Wasser schwefelsäurefrei zu machen. Sodann wird der Kraftstoff im Schüttelgefäß mit wasserfreiem Natriumsulfat getrocknet, was vielfach erst durch kräftiges Schütteln erreicht wird. Ein zu großer Überschuß von Natriumsulfat darf nicht angewandt werden, da es sich sonst schlecht absetzt, jedoch muß der Kraftstoff vollkommen klar sein.

Von dem vollkommen wasserfreien, in einen kleinen Erlenmeyerkolben gebrachten Kraftstoff werden in einem 150 cm³-Jodzahlkolben 25 cm³ mit 5 cm³ $n/10$ alkoholischer Jod-Jodkaliumlösung[2]) versetzt und nach Umschwenken 6 min lang, vor Licht geschützt (Jodzahlkolben in dunklen Lappen einhüllen), stehen gelassen. Das überschüssige Jod wird mit $n/10$ Natriumthiosulfatlösung möglichst schnell ohne Stärke[3]) zurücktitriert, da langsames Titrieren manchmal zu hohen Jodverbrauch ergibt. Die verbrauchte Menge $n/10$ Jodlösung in cm³, mit 0,0391 multipliziert, ergibt den Gehalt an Bleitetraäthyl in Volumenhundertteilen.

Beispiel:

Wasserlösliche Bestandteile in 25 cm³ Kraftstoff a cm³
Verbrauchte Menge an $n/10$ Natriumthiosulfatlösung b cm³, dann ist der Bleitetraäthylgehalt:

$$x = \left(b - \frac{b \cdot a}{25}\right) \cdot 0{,}0391 \text{ Vol.-\%}$$

Folgende Punkte sind besonders zu beachten:

a) Die Temperatur des Kraftstoffes soll zwischen 15 und 20° C betragen.
b) Die 70proz. Schwefelsäure nur 20 s lang auf den Kraftstoff einwirken lassen.
c) Kaliumjodidkonzentration beachten.

¹) 70 Vol.-% 95 bis 96proz. Schwefelsäure und 30 Vol.-% Wasser.
²) Zur Herstellung der Jodlösung werden 1 l wasserfreier Aethylalkohol und 12,7 g Jod (Analysenware) so lange geschüttelt, bis alles gelöst ist.
³) Sofern Stärke verwendet wird, nur ganz am Schluß der Titration.

Zahlentafel 1. Jodaufnahmen bei Grundkraftstoffen und der daraus errechnete Bleitetraäthylwert.

Schüttelzeit	5 min	10 min	5 min	10 min
Kraftstoff	Verbrauch an $n/10$ alkoholischer Jodlösung (cm³)		Bleitetraäthylgehalt (Vol.-%)	
VT 702	0	0	0	0
VT 707	0,02	0,025	0,0008	0,001
VT 810	0,02	0,02	0,0008	0,0008
VHT 302	0	0	0	0
80% VT 810 + 20% VHT 302	0,03	0,04	0,0012	0,0016
Leuna-Benzin	0	0	0	0
Fischer-Tropsch-Benzin	0,026	0,04	0,001	0,0016

Zahlentafel 2. Gefundene Bleiwerte bei einem theoretischen Gehalt von 0,0326 Vol.-%.

Schüttelzeit	5 min	10 min	5 min	10 min
Kraftstoff	Verbrauch an $n/10$ alkoholischer Jodlösung (cm³)		Bleitetraäthylgehalt (Vol.-%)	
VT 702	0,835	0,835	0,0326	0,0326
VT 707	0,83	0,83	0,0325	0,0325
VT 810	0,84	0,85	0,0328	**0,0332**
VHT 302	0,83	0,835	0,0325	0,0326
80% VT 810 + 20% VHT 302	0,80	0,81	**0,0313**	0,0317
Leuna-Benzin	0,83	0,83	0,0325	0,0325
Fischer-Tropsch-Benzin	0,835	0,84	0,0326	0,0328

Zahlentafel 3. Gefundene Bleiwerte bei einem theoretischen Gehalt von 0,0653 Vol.-%.

Schüttelzeit	5 min	10 min	5 min	10 min
Kraftstoff	Verbrauch an $n/10$ alkoholischer Jodlösung (cm³)		Bleitetraäthylgehalt (Vol.-%)	
VT 702	1,67	1,67	0,0653	0,0653
VT 707	1,71	1,72	0,0669	**0,0672**
VT 802	1,695	1,70	0,0663	0,0665
VHT 302	1,66	1,68	0,0649	0,0657
80% VT 810 + 20% VHT 302	1,65	1,67	**0,0645**	0,0653
Leuna-Benzin	1,67	1,67	0,0653	0,0653
Fischer-Tropsch-Benzin	1,67	1,68	0,0653	0,0657

Zahlentafel 4. Gefundene Bleiwerte bei einem theoretischen Gehalt von 0,0979 Vol.-%.

Schüttelzeit	5 min	10 min	5 min	10 min
Kraftstoff	Verbrauch an $n/10$ alkoholischer Jodlösung (cm³)		Bleitetraäthylgehalt (Vol.-%)	
VT 702	2,46	2,49	**0,0962**	0,0974
VT 707	2,48	2,50	0,0970	**0,0978**
VT 810	2,485	2,49	0,0972	0,0974
VHT 302	2,49	2,50	0,0974	**0,0978**
80% VT 810 + 20% VHT 302	2,47	2,49	0,0966	0,0974
Leuna-Benzin	2,49	2,50	0,0974	**0,0978**
Fischer-Tropsch-Benzin	2,49	2,50	0,0974	**0,0978**

Zahlentafel 5. Gefundene Bleiwerte bei einem theoretischen Gehalt von 0,1306 Vol.-%.

Schüttelzeit	5 min	10 min	5 min	10 min
Kraftstoff	Verbrauch an $n/10$ alkoholischer Jodlösung (cm³)		Bleitetraäthylgehalt (Vol.-%)	
VT 702	3,26	3,33	**0,1275**	**0,1302**
VT 707	3,28	3,30	0,1282	0,1290
VT 810	3,285	3,32	0,1284	0,1298
VHT 302	3,32	3,33	0,1298	**0,1302**
80% VT 810 + 20% VHT 302	3,30	3,32	0,1290	0,1298
Leuna-Benzin	3,29	3,32	0,1287	0,1298
Fischer-Tropsch-Benzin	2,28	3,33	0,1282	**0,1302**



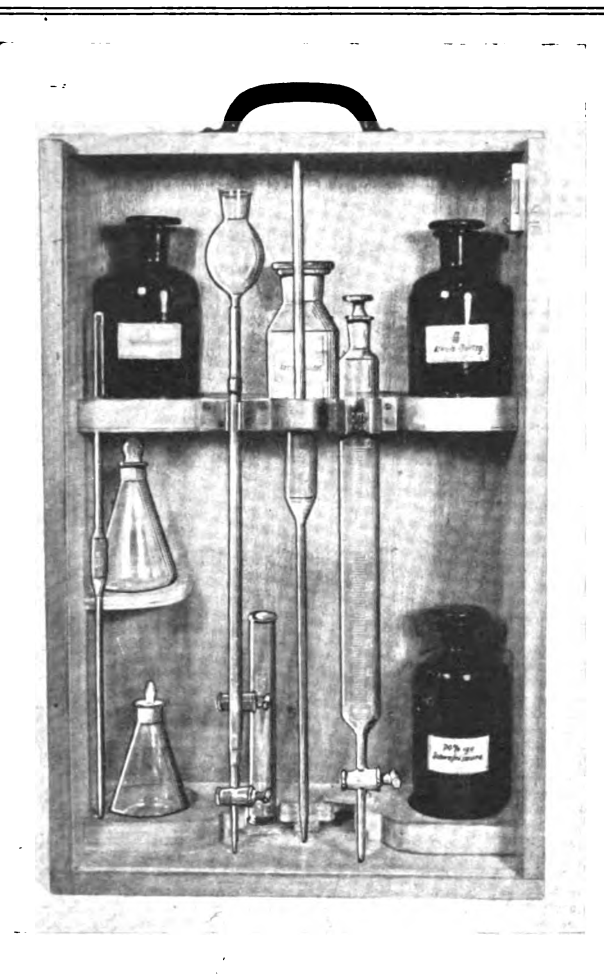


Bild 1. FKFS-Versuchskasten zur Bleitetraäthylbestimmung in Flugmotoren-Kraftstoffen.

d) Jodlösung ohne Schütteln genau 6 min auf Kraftstoff im Dunkeln einwirken lassen.
e) Nach Möglichkeit ohne Stärke titrieren.
f) Titration möglichst schnell durchführen.

V. Die Anwendung des Verfahrens.

Das FKFS-Verfahren ist sehr einfach, schnell durchführbar und hat alle Vorteile einer maßanalytischen Bestimmungsweise. Filtrieren, Glühen, Wägen fallen fort.

Für ortsbewegliche Laboratorien wurde ein Gerätekasten zur Bestimmung des Bleitetraäthylgehaltes angefertigt. Der Versuchskasten enthält:

1 Bürette, 2 Pipetten, 4 Flüssigkeitsflaschen und 1 Meßzylinder, 1 Schüttelzylinder, 2 Jodzahlkolben.

Dieser Gerätekasten ist in Bild 1 dargestellt und gestattet, jeweils an Ort und Stelle in etwa 15 min den Bleitetraäthylgehalt festzustellen.

VI. Zusammenfassung.

Das vom Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart entwickelte maßanalytische Verfahren zur Bleibestimmung in Flugmotorenkraftstoffen läßt sich in etwa 15 min durchführen und ist deshalb besonders für fahrbare Laboratorien geeignet. Zur bequemen Anwendung sind die notwendigen Geräte in einem handlichen Kasten zusammengestellt. Der größte auftretende Fehler beträgt etwa $\pm 2\%$.

Über eine Näherungsmethode für die ebene Potentialströmung einer kompressiblen Flüssigkeit*).

Von Wolfgang Gröbner.

Bericht der Arbeitsgruppe für Industriemathematik in der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Ein Ansatz für die Berechnung der kompressiblen Potentialströmung um ein gegebenes Profil, der erstmalig von H. Glauert aufgestellt aber nur mit den ersten Gliedern ausgewertet wurde, wird bis zu den vierten Gliedern der Entwicklung allgemein berechnet. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, den besonderen Randbedingungen des gegebenen Profils mit größerer Annäherung Rechnung zu tragen. Es wird eine Formel für die Umströmung eines Kreiszylinders ohne Zirkulation bei nicht zu großer Unterschallgeschwindigkeit abgeleitet.

Gliederung.

1. Einleitung.

In einer Arbeit des Jahres 1928[1]) hat H. Glauert einen bemerkenswerten Ansatz für die Berechnung der ebenen Potentialströmung einer kompressiblen Flüssigkeit um ein Hindernis dazu benutzt, um einige wichtige Formeln abzuleiten, die den Widerstand und den Auftrieb eines beliebigen Profils mit der Zirkulation um dasselbe in Beziehung setzen. Glauert verwendete in seiner Arbeit zweckmäßig ebene Polarkoordinaten r, ϑ und setzte für die Radial- und Tangentialgeschwindigkeit die Entwicklungen

$$q_r = U\left(\cos\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{r^n}\right), q_t = -U\left(\sin\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{r^n}\right)$$

an, wo die Koeffizienten A_n und B_n Funktionen des Winkels ϑ bedeuten. Von den hier angeschriebenen unendlichen Reihen ließ Glauert jedoch nur jeweils das erste Glied A_1/r und B_1/r stehen; auch alle weiteren Entwicklungen führte er mit Beschränkung auf die linearen Annäherungen durch, was für eine Strömung in sehr großer Entfernung vom umströmten Hindernis ja wohl zulässig sein muß.

Trotzdem dürfte die Frage nicht müßig sein, was bei diesem Ansatz wohl herauskommen mag, wenn man sich nicht auf die ersten Glieder der unendlichen Reihen beschränkt, sondern durch Berechnung weiterer Glieder den Gültigkeitsbereich der obigen Entwicklungen auch auf die Umgebung des Hindernisses selbst auszudehnen sucht. Diesem Zwecke dient nun die vorliegende Arbeit.

Setzt man die Entwicklungen von q_r und q_t in die Differentialgleichungen für Wirbelfreiheit und Kontinuität ein, nachdem man vorher mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung und unter Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderungen die örtliche Dichte ϱ berechnet hat, so ergeben sich für die Koeffizienten A_n und B_n der Reihe nach gewisse Rekursionsformeln, welche jedoch nicht einfache Gleichungen sind, sondern, da A_n und B_n Funktionen des Winkels ϑ vorstellen, auch deren Ableitungen enthalten und also Differentialgleichungen sind.

Glücklicherweise ist es möglich, diese Differentialgleichungen in allgemeiner Gestalt zu lösen, was in Abschnitt 5 dieser Arbeit durchgeführt wird. Man hat also die Möglichkeit, die Koeffizienten A_n und B_n der Reihe nach formal zu berechnen. Dabei ist aber noch ein Punkt zu beachten: A_n und B_n müssen als Funktionen des Polarwinkels ϑ offenbar die Periode 2π haben, wenn die obigen Entwicklungen eine eindeutige Strömung festlegen sollen. Dafür jedoch, daß eine Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten eine periodische Lösung besitze, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein; diese sind ebenfalls in Abschnitt 5 für allgemeinen Index n aufgestellt (Formel (30*)).

Für $n = 1$ erhält man natürlich wieder die Glauertschen Formeln; danach muß $A_1 = 0$ sein, wenn die Strömung quellenfrei ist, während B_1 proportional der Zirkulation Γ um das Hindernis ist. Beim nächsten Schritt $n = 2$ jedoch folgt überraschenderweise, daß die Funktionen A_2 und B_2 nur dann als periodische Funktionen von ϑ bestimmt werden können, wenn die Zirkulation $\Gamma = 0$, also außer A_1 auch $B_1 = 0$ ist. Die Rechnungen werden dann noch für die nächsten Schritte $n = 3$ und $n = 4$ durchgeführt.

2. Ableitung der grundlegenden Formeln und Berechnung der ersten Annäherung.

Es bedeuten

r und ϑ	Polarkoordinaten der Ebene,
q_r und q_t	die Geschwindigkeitskomponenten in radialer und tangentialer Richtung als Funktionen von r und ϑ,
ϱ	die Dichte des Gases und
p	den Druck des Gases.

Dann ist die ebene wirbelfreie Strömung eines kompressiblen Gases durch folgende Gleichungen charakterisiert:

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\varrho\, r\, q_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\varrho\, q_t)}{\partial\vartheta} = 0, \quad \ldots\ldots (1)$$

die Bedingung für wirbelfreie Strömung

$$\frac{\partial(r\, q_t)}{\partial r} - \frac{\partial q_r}{\partial\vartheta} = 0, \quad \ldots\ldots (2)$$

die Bernoullische Gleichung

$$\frac{1}{2}q^2 + \int\frac{d\,p}{\varrho} = \text{konst.} \quad \ldots\ldots (3)$$

und die Gleichung für adiabatische Zustandsänderung des Gases

$$p = C\,\varrho^{\varkappa}, \quad \ldots\ldots (4)$$

*) P 31 4.

[1]) H. Glauert. The effect of compressibility on the lift of an aerofoil. Proc. Roy. Soc. London. A. Bd. 118 (1928). S. 113—119. Vgl. auch den Vortrag von Enrico Pistolesi. La portanza alle alte velocità inferiori a quella del suono, Berichte der A. Volta-Tagung Rom 1936, S. 283—326.

wobei $\varkappa = 1{,}405$ für Luft und C eine weitere Konstante bedeutet.

Setzt man (4) in (3) ein und bezeichnet mit ϱ_1 die Dichte, mit p_1 den Druck, mit U die Geschwindigkeit und mit $a_1 = \sqrt{\left(\frac{d\,p}{d\,\varrho}\right)_1} = \sqrt{\varkappa\frac{p_1}{\varrho_1}}$ die Schallgeschwindigkeit im ungestörten unendlichfernen Gebiet ($r = \infty$), so erhält man nach leichten Umformungen die Gleichung

$$\varrho = \varrho_1\left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2}M^2\left(\frac{q^2}{U^2} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \quad (5)$$

mit

$$M = \frac{U}{a_1} \text{ und } q^2 = q_r^2 + q_t^2. \quad (6)$$

Wir führen nun nach Glauert für die Geschwindigkeitskomponenten q_r und q_t folgende Ansätze ein:

$$\left.\begin{aligned} q_r &= U\left(\cos\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{r^n}\right) \\ q_t &= -U\left(\sin\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{r^n}\right)\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hier bedeuten A_n und B_n stetige Funktionen von ϑ mit der Periode 2π, welche so bestimmt werden müssen, daß die Gleichungen unseres Problems (1), (2) und (5) sowie die vorgegebenen speziellen Randbedingungen erfüllt werden und die unendlichen Reihen (7) in der Umgebung von $r = \infty$ konvergieren.

Für $r \to \infty$ reduzieren sich q_r und q_t auf $U\cos\vartheta$ bzw. $-U\sin\vartheta$, d. h. man hat in unendlicher Entfernung von dem im Ursprung angenommenen Hindernis tatsächlich eine gleichförmige Geschwindigkeit U in der Richtung der x-Achse.

Setzt man die Ansätze (7) für q_r und q_t in die Differentialgleichung (2) ein und setzt weiter die Koeffizienten der Potenzen von r einzeln gleich null, so erhält man die Gleichungen

$$A_n' \equiv \frac{d\,A_n}{d\,\vartheta} = (n-1)\,B_n(\vartheta) \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots; \quad (8)$$

insbesondere ist also $A_1' = 0$, folglich A_1 eine von ϑ unabhängige Konstante.

Es ist noch die Kontinuitätsgleichung (1) zu erfüllen. Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst

$$q^2 = q_r^2 + q_t^2 = U^2\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos\vartheta + B_n\sin\vartheta}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n A_m + B_n B_m}{r^{n+m}}\right\} \quad (9)$$

in (5) einsetzen und die Produkte $\varrho\, r\, q_r$ und $\varrho\, q_t$ nach fallenden Potenzen von r entwickeln.

Wir erhalten den Ausdruck

$$\varrho = \varrho_1\left[1 - \frac{\varkappa-1}{2}M^2\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos\vartheta + B_n\sin\vartheta}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n A_m + B_n B_m}{r^{n+m}}\right)\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}}, \quad (10)$$

den wir nach den gemachten Voraussetzungen über die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{r^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{r^n}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes in eine Reihe nach fallenden Potenzen von r entwickeln können; eine längere Rechnung liefert

$$\begin{aligned}\varrho = \varrho_1\Big\{1 &- \frac{M^2}{r}(A_1\cos\vartheta + B_1\sin\vartheta) - \frac{M^2}{r^2}\left[A_2\cos\vartheta + B_2\sin\vartheta + \frac{A_1^2 + B_1^2}{2} - \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)M^2(A_1\cos\vartheta + B_1\sin\vartheta)^2\right] \\ &- \frac{M^2}{r^3}\Big[A_3\cos\vartheta + B_3\sin\vartheta + A_1A_2 + B_1B_2 - \\ &\quad - \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)M^2(A_1\cos\vartheta + B_1\sin\vartheta)(2A_2\cos\vartheta + 2B_2\sin\vartheta + A_1^2 + B_1^2) + \\ &\quad + \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 - \frac{2\varkappa}{3}\right)M^4(A_1\cos\vartheta + B_1\sin\vartheta)^3\Big] - \\ &- \frac{M^2}{r^4}\Big[A_4\cos\vartheta + B_4\sin\vartheta + A_1A_3 + B_1B_3 + \frac{A_2^2 + B_2^2}{2} - \\ &\quad - \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)M^2(A_1\cos\vartheta + B_1\sin\vartheta)(2A_3\cos\vartheta + 2B_3\sin\vartheta + 2A_1A_2 + 2B_1B_2) - \\ &\quad - \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)M^2\left(A_2\cos\vartheta + B_2\sin\vartheta + \frac{A_1^2 + B_1^2}{2}\right)^2 + \\ &\quad + \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 - \frac{2\varkappa}{3}\right)M^4\,3\,(A_1\cos\vartheta + B_1\sin\vartheta)^2\left(A_2\cos\vartheta + B_2\sin\vartheta + \frac{A_1^2 + B_1^2}{2}\right) - \\ &\quad - \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 - \frac{2\varkappa}{3}\right)\left(1 - \frac{3\varkappa}{4}\right)M^6(A_1\cos\vartheta + B_1\sin\vartheta)^4\Big] - \ldots\ldots\Big\}\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\varrho\, r\, q_r = \varrho_1 U\Big\{&r\cos\vartheta + [(1 - M^2\cos^2\vartheta)A_1 - M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot B_1] + \\ &+ \frac{1}{r}\Big[(1 - M^2\cos^2\vartheta)A_2 - M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot B_2 - M^2\cos\vartheta\left(\frac{3}{2} - \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)M^2\cos^2\vartheta\right)A_1^2 - \\ &\quad - M^2\cos\vartheta\left(\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)M^2\sin^2\vartheta\right)B_1^2 - M^2\sin\vartheta\,(1 - (2 - \varkappa)M^2\cos^2\vartheta)A_1B_1\Big] +\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[(1-M^2\cos^2\vartheta)A_3 - M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot B_3 - \ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{r^3}\left[(1-M^2\cos^2\vartheta)A_4 - M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot B_4 + M^2\cos\vartheta\left(-\frac{3}{2}+\frac{2-\varkappa}{2}M^2\cos^2\vartheta\right)A_2^2+\right.$$
$$\left.+M^2\sin\vartheta(-1+(2-\varkappa)M^2\cos^2\vartheta)A_2B_2 + M^2\cos\vartheta\left(-\frac{1}{2}+\frac{2-\varkappa}{2}M^2\sin^2\vartheta\right)B_2^2 - \ldots\right]+\ldots\Big\}^{2)} \quad \ldots (12)$$

$$\varrho\, q_t = \varrho_1 U\Big\{-\sin\vartheta + \frac{1}{r}\left[M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot A_1 - (1-M^2\sin^2\vartheta)B_1\right]+$$
$$+\frac{1}{r^2}\left[M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot A_2 - (1-M^2\sin^2\vartheta)B_2 + M^2\sin\vartheta\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)M^2\cos^2\vartheta\right)A_1^2+\right.$$
$$\left.+M^2\cos\vartheta(1-(2-\varkappa)M^2\sin^2\vartheta)A_1B_1 + M^2\sin\vartheta\left(\frac{3}{2}-\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)M^2\sin^2\vartheta\right)B_1^2\right]+$$
$$+\frac{1}{r^3}\left[M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot A_3 - (1-M^2\sin^2\vartheta)B_3 + \ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{r^4}\left[M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot A_4 - (1-M^2\sin^2\vartheta)B_4 + M^2\sin\vartheta\left(\frac{1}{2}-\frac{2-\varkappa}{2}M^2\cos^2\vartheta\right)A_2^2+\right.$$
$$\left.+M^2\cos\vartheta(1-(2-\varkappa)M^2\sin^2\vartheta)A_2B_2 + M^2\sin\vartheta\left(\frac{3}{2}-\frac{2-\varkappa}{2}M^2\sin^2\vartheta\right)B_2^2+\ldots\right]\ldots\Big\} \quad \ldots (13)$$

Die Ausdrücke (12) und (13) müssen wir nun in die Differentialgleichung (1) einsetzen und wieder die dabei sich ergebenden Koeffizienten der Potenzen von r einzeln gleich null setzen. Das konstante Glied fällt von selbst weg, der Koeffizient von $\frac{1}{r}$ liefert die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\vartheta}\left[M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot A_1 - (1-M^2\sin^2\vartheta)B_1\right] = 0, \quad \ldots (14_1)$$

der Koeffizient von $\frac{1}{r^2}$ die Differentialgleichung[3])

$$-\left[(1-M^2\cos^2\vartheta)A_2 - M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot B_2 - M^2\cos\vartheta\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)M^2\sin^2\vartheta\right)B_1^2\right]+$$
$$+\frac{d}{d\vartheta}\left[M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot A_2 - (1-M^2\sin^2\vartheta)B_2 + M^2\sin\vartheta\left(\frac{3}{2}-\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)M^2\sin^2\vartheta\right)B_1^2\right] = 0, \quad \ldots (14_2)$$

welche mit Hilfe der aus (8) folgenden Beziehung $A_2' = B_2$ in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für A_2 umgeformt werden kann.

Die Integration von (14_1) liefert

$$B_1 = \frac{\gamma + \frac{1}{2}M^2 A_1 \sin 2\vartheta}{1-M^2\sin\vartheta} \quad \ldots (15)$$

mit der Integrationskonstanten γ, deren physikalische Bedeutung in (19) klargestellt werden wird.

8. Zirkulation und Bedingung für Quellenfreiheit.

Bevor wir in der Behandlung dieser Differentialgleichungen fortfahren, müssen wir noch eine Bedingung einführen, welche für eine physikalisch sinnvolle Lösung unseres Problems unerläßlich ist. Da nämlich unsere Strömung quellenfrei sein muß, so muß das Integral

$$\oint \varrho\, q_n\, ds = 0$$

sein über eine beliebige geschlossene Kurve, welche das im Ursprung liegende Hindernis einschließt. Wählt man zweckmäßig für diese Kurve einen Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung und einem so großen Radius r, daß man die Glieder mit negativen Potenzen von r vernachlässigen darf, so erhält man die Bedingung

$$0 = \int_0^{2\pi} \varrho\, q_r\, r\, d\vartheta =$$
$$= \varrho_1 U \int_0^{2\pi} \left[(1-M^2\cos^2\vartheta)A_1 - M^2\sin\vartheta\cos\vartheta\, B_1\right] d\vartheta \quad (16)$$

oder integriert

$$2\pi A_1\left(1-\frac{M^2}{2}\right) - \frac{M^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\vartheta\cdot B_1\, d\vartheta = 0; \quad . (17)$$

wir erinnern daran, daß A_1 wegen (8) von ϑ unabhängig ist und deshalb als Konstante bei der Integration behandelt werden darf.

In üblicher Weise wird das Integral

$$\Gamma = \oint q_s\, ds$$

über eine das Hindernis umschließende Kurve als Zirkulation bezeichnet. Da die Strömung überall wirbelfrei sein soll, ist Γ unabhängig von der speziellen Kurve, und man kann zweckmäßigerweise wieder einen möglichst großen Kreis um den Ursprung wählen; das ergibt, wenn man die negativen Potenzen von r wegläßt,

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} q_t\, r\, d\vartheta = -U\int_0^{2\pi} B_1\, d\vartheta \quad \text{oder} \quad \int_0^{2\pi} B_1\, d\vartheta = -\frac{\Gamma}{U} \quad \ldots (18)$$

Wir müssen nun (15) in (17) und (18) einsetzen. Unter der Voraussetzung $M < 1$, also für Unterschallgeschwindigkeit im ungestörten Gebiet, erhält man

$$\int_0^{2\pi} B_1\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma + \frac{1}{2}M^2 A_1\sin 2\vartheta}{1-M^2\sin^2\vartheta}\, d\vartheta = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-M^2}};\ ^{4)}$$

wegen (18) folgt für die Integrationskonstante γ der Ausdruck:

$$\gamma = -\frac{\Gamma}{2\pi U}\sqrt{1-M^2}. \quad \ldots (19)$$

Analog erhält man mit (15)

$$\int_0^{2\pi} B_1 \sin 2\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi A_1}{M_2}\left[1-\frac{M_2}{2}-\sqrt{1-M^2}\right],$$

was mit (17) verglichen die Bedingung

$$2\pi A_1\sqrt{1-M^2} = 0$$

liefert, woraus

$$A_1 = 0 \quad \ldots (20)$$

---

[2]) In den Klammern zu $\frac{1}{r^3}$ und $\frac{1}{r^4}$ wurden die von A_1 und B_1 abhängigen Glieder weggelassen, weil, wie sich später ergibt, $A_1 = B_1 = 0$ zu setzen ist; ähnliches gilt für (13).

[3]) Hier wurde mit Vorwegnahme eines späteren Resultates $A_1 = 0$ gesetzt.

[4]) Die Berechnung der hier auftretenden Integrale wird in Abschnitt 6 durchgeführt.

zu folgern ist. Dadurch vereinfacht sich (15) zu

$$B_1 = \frac{\gamma}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (20^*)$$

Dieses Ergebnis hat bereits Glauert in der zitierten Arbeit[5]) gefunden und als Annäherung für unsere kompressible Potentialströmung benützt.

Wir wollen nun prüfen, was die Weiterverfolgung des Glauertschen Ansatzes liefert, wenn man sich nicht mit dem ersten Glied der Potenzreihenentwicklung (5) für q_r und q_t begnügt, sondern die folgenden Glieder berücksichtigt. Schon gleich beim nächsten Glied wird sich eine sehr bemerkenswerte Folgerung ergeben bezüglich der Konstanten γ bzw. der Zirkulation Γ.

4. Zweite Annäherung.

Die Koeffizienten A_2 und B_2 von $\frac{1}{r^2}$ in (7) müssen der Differentialgleichung (14_2) genügen. Wenn man (20) und (20*) einsetzt und $B_2 = A'_2$ berücksichtigt, so erhält man die Gleichung

$$(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)\, A_2'' - 2\, M^2 \sin 2\vartheta \cdot A_2' + (1 + M^2 - 3\, M^2 \cos^2 \vartheta)\, A_2 = \frac{2\, M^2 \cos\vartheta\, (1 + \varkappa\, M^2 \sin^2 \vartheta)\, \gamma^2}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)^3} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

mit den Bedingungen für die Periodizität von $A_2(\vartheta)$

$$A_2(0) = A_2(2\pi) \quad , \quad A_2'(0) = A_2'(2\pi). \quad . \quad . \quad (21^*)$$

Die Auflösung dieser Differentialgleichungen und der analogen, welche sich bei den weiteren Schritten ergeben, wird zusammenfassend in Abschnitt 5 durchgeführt werden.

Mit Hilfe der Gl. (28) von Abschnitt 5 folgt hier:

$$A_2(\vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{\sin(\vartheta - \xi)}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} \frac{2\, M^2 \gamma^2 \cos\xi\, (1 + \varkappa\, M^2 \sin^2 \xi)}{(1 - M^2 \sin^2 \xi)^3}\, d\xi + \frac{\gamma_2 \cos\vartheta + \delta_2 \sin\vartheta}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta}$$

$$= \frac{2\, M^2 \gamma^2}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ \sin\vartheta \int_0^\vartheta \frac{\cos^2\xi\, (1 + \varkappa\, M^2 \sin^2 \xi)}{(1 - M^2 \sin^2 \xi)^3}\, d\xi - \cos\vartheta \int_0^\vartheta \frac{\sin\xi \cos\xi\, (1 + \varkappa\, M^2 \sin^2 \xi)}{(1 - M^2 \sin^2 \xi)^3}\, d\xi \right\} + \frac{\gamma_2 \cos\vartheta + \delta_2 \sin\vartheta}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta}; \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

γ_2 und δ_2 sind willkürliche Integrationskonstanten.

Rechnet man die Integrale mit Hilfe der Formeln (33) und (36) aus, so erhält man schließlich

$$A_2(\vartheta) = \frac{2\, M^2 \gamma^2}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ \sin\vartheta \left[\frac{\varkappa + 1}{8} \frac{\sin 2\vartheta}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)^2} + \frac{(3 - \varkappa)\, M^2 + 2\,(\varkappa - 1)}{16\,(M^2 - 1)} \frac{\sin 2\vartheta}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{(3 - \varkappa)\, M^2 - 4}{8\,(M^2 - 1)}\, \omega(M, \vartheta) \right] \right.$$
$$\left. - \frac{\cos\vartheta}{4\, M^2} \left[\frac{1}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} - 1 \right] \left[\frac{\varkappa + 1}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} - (\varkappa - 1) \right] \right\} + \frac{\gamma_2 \cos\vartheta + \delta_2 \sin\vartheta}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und

$$B_2(\vartheta) = A_2'(\vartheta) = \frac{2\, M^2 \gamma^2}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)^2} \left\{ \cos\vartheta\, (1 + M^2 \sin^2 \vartheta) \left[\frac{\varkappa + 1}{8} \frac{\sin 2\vartheta}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)^2} + \frac{(3 - \varkappa)\, M^2 + 2\,(\varkappa - 1)}{16\,(M^2 - 1)} \frac{\sin 2\vartheta}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta} \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{(3 - \varkappa)\, M^2 - 4}{8\,(M^2 - 1)}\, \omega(M, \vartheta) \right] + \sin\vartheta\, (1 - 2\, M^2 + M^2 \sin^2 \vartheta) \frac{\sin^2\vartheta\, [2 + (\varkappa - 1)\, M^2 \sin^2 \vartheta]}{4\,(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)^2} \right\}$$
$$+ \frac{\gamma_2 \sin\vartheta\, (-1 + 2\, M^2 - M^2 \sin^2 \vartheta) + \delta_2 \cos\vartheta\, (1 + M^2 \sin^2 \vartheta)}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wo

$$\omega(M, \vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{d\xi}{1 - M^2 \sin^2 \xi} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\cot\vartheta}{\sqrt{1 - M^2}} \right\}$$

ist.

Von den Bedingungen (21*) ist die erste, wie man leicht sieht, bereits erfüllt, während die zweite wegen $\omega(M, 2\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - M^2}}$

$$\gamma_2 = \frac{4\pi\, M^2 \gamma^2}{\sqrt{1 - M^2}} \cdot \frac{(3 - \varkappa)\, M^2 - 4}{8\,(M^2 - 1)} + \gamma_2$$

liefert.

Wenn man von den speziellen Werten $M = 0$ und $M = 2/\sqrt{3 - \varkappa}$ absieht, erfordert diese Bedingung

$$\gamma = 0,$$

also auch

$$\Gamma = 0,$$

d. h. die Zirkulation um das Hindernis muß verschwinden.

Es ist zu beachten, daß diese Bedingung schon bei beliebig kleinen Machschen Zahlen M erfüllt sein muß und daher nicht etwa damit in Zusammenhang gebracht werden darf, daß die Schallgeschwindigkeit irgendwo im Strömungsgebiet überschritten werden könnte und infolgedessen Unstetigkeiten im Strömungsverlauf auftreten würden. Setzt man dagegen genau $M = 0$, was bekanntlich als Grenzfall der inkompressiblen Strömung angesehen werden darf, so ist offenbar die Bedingung $\Gamma = 0$ nicht mehr nötig, was mit den bekannten Tatsachen für die inkompressible Potentialströmung in Einklang steht.

Mit

$$\Gamma = 0$$

hat man außer

$$A_1 = 0$$

auch

$$B_1 = 0,$$

und die Formeln (23) und (24) vereinfachen sich in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} A_2(\vartheta) &= \frac{\gamma_2 \cos\vartheta + \delta_2 \sin\vartheta}{1 - M^2 \sin^2 \vartheta}, \\ B_2(\vartheta) &= \\ &\frac{-\gamma_2 \sin\vartheta\, (1 - 2\, M^2 + M^2 \sin^2 \vartheta) + \delta_2 \cos\vartheta\, (1 + M^2 \sin^2 \vartheta)}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta)^2} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

γ_2 und δ_2 sind noch völlig willkürliche Konstanten, die so bestimmt werden müssen, daß die Strömung sich den besonderen Randbedingungen anpaßt, welche durch das Hindernis gestellt werden.

5. Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten $A_n(\vartheta)$ und $B_n(\vartheta)$. Bedingungen für die Periodizität der Lösungen.

In gleicher Weise wie wir die Differentialgleichungen (14_1) und (14_2) durch Nullsetzen der Koeffizienten von $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r^2}$ in der Entwicklung der Kontinuitätsgleichung (1) gewonnen haben, erhalten wir allgemein durch Nullsetzen des Koeffizienten von $\frac{1}{r^n}$ und Berücksichtigung der Gleichung

$$A_n' = (n - 1)\, B_n \quad (n = 1, 2 \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

[5]) Vgl. Fußnote 1.

die Differentialgleichungen

$$(1 - M^2 \sin^2 \vartheta) A_n'' - n M^2 \sin 2\vartheta A_n' + \\ + (n-1)[n - 1 + M^2 - (n+1) M^2 \cos^2 \vartheta] A_n = f(\vartheta) \\ (n = 2, 3, \ldots); \quad (14_n)$$

die Funktion $f(\vartheta)$ auf der rechten Seite ist bekannt, weil sie nur von den Funktionen $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ und $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ abhängt, deren Berechnung bereits in den vorhergehenden Schritten erledigt wurde.

Die Lösung der Differentialgleichung (14_n) muß als Funktion von ϑ die Periode 2π besitzen. Nach allgemeinen Sätzen über periodische Lösungen von inhomogenen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten existiert eine persiodische Lösung und ist eindeutig bestimmt, wenn die homogene Gleichung keine periodische Lösung besitzt[6]). Hat dagegen die homogene Gleichung eine bzw. zwei linear unabhängige periodische Lösungen, so muß die Störungsfunktion $f(\vartheta)$ eine bzw. zwei Bedingungen erfüllen, damit die inhomogene Gleichung periodische Lösungen zuläßt; sind diese Bedingungen erfüllt, so besitzt die inhomogene Gleichung eine ein- bzw. zweifach unendliche Schar von periodischen Lösungen.

Im Falle $n = 2$ fanden wir eine Bedingung für die Störungsfunktion, aus der wir das Verschwinden von γ bzw. der Zirkulation Γ folgern mußten.

Bei den folgenden Schritten sind die Bedingungen für die Störungsfunktion $f(\vartheta)$, soweit dies allgemein überblickt werden kann, immer von selbst erfüllt, so daß wir als Lösungen der Differentialgleichungen (14_n) jeweils Funktionen $A_n(\vartheta)$ erhalten, welche die Perdiode 2π besitzen und zwei willkürliche Konstanten enthalten, die zur Erfüllung der Randbedingungen herangezogen werden müssen.

Es ist zunächst notwendig, daß wir die Lösungen der Differentialgleichungen (14_n) $(n = 2, 3, \ldots)$ allgemein aufstellen.

Die homogene Differentialgleichung

$$(1 - M^2 \sin^2 \vartheta) y'' - n M^2 \sin 2\vartheta \cdot y' \\ + (n-1)[n - 1 + M^2 - (n+1) M^2 \cos^2 \vartheta] y = 0 \quad (26)$$

besitzt die beiden linear unabhängigen Integrale

$$\left.\begin{aligned} y_1(\vartheta) &= \frac{1}{(\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{\cos\vartheta + \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta}{1 - M^2\sin^2\vartheta}\right)^{n-1} \\ y_2(\vartheta) &= \frac{1}{(\cos\vartheta + \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta}{1 - M^2\sin^2\vartheta}\right)^{n-1\,7)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (27)$$

Im Falle $M < 1$ sind die beiden Integrale wegen des Auftretens der Wurzel $\sqrt{M^2-1}$ konjugiert komplex; um reelle Integrale zu erhalten, muß man die Kombinationen $y_1 + y_2$ und $\frac{y_1 - y_2}{\sqrt{M^2-1}}$ benützen. Davon, daß $y_1(\vartheta)$ und $y_2(\vartheta)$ tatsächlich Integrale der homogenen Differentialgleichung (26) sind, muß man sich durch Einsetzen überzeugen; es genügt, die Rechnung für $y_1(\vartheta)$ durchzuführen, weil $y_2(\vartheta)$ einfach durch Änderung des Vorzeichens der Wurzel $\sqrt{M^2-1}$ aus $y_1(\vartheta)$ hervorgeht.

Es ist nun

$$y_1'(\vartheta) = (n-1)\frac{\sin\vartheta + \sqrt{M^2-1}\cos\vartheta}{(\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^n}$$

$$y_1''(\vartheta) = (n-1)\left[\frac{n(\sin\vartheta + \sqrt{M^2-1}\cos\vartheta)^2}{(\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^{n+1}} + y_1(\vartheta)\right].$$

6) Vgl. etwa Sansone, Equazioni differenziali nel campo reale, S. 297 u. f., besonders S. 311—313. Kamke, Differentialgleichungen, Leipzig 1942, S. 257.

7) Die Identität dieser beiden Schreibweisen folgt einfach aus der Beziehung:

$$1 - M^2\sin^2\vartheta = \cos^2\vartheta - (M^2-1)\sin^2\vartheta \\ = (\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)(\cos\vartheta + \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (26) ein, so folgt leicht die Richtigkeit unserer Behauptung.

Aus der vollständigen Lösung der homogenen Differentialgleichung gewinnt man die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auf gewöhnliche Weise mit Hilfe der Formel

$$A_n(\vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{y_1(\xi)\,y_2(\vartheta) - y_1(\vartheta)\,y_2(\xi)}{y_1(\xi)\,y_2'(\xi) - y_1'(\xi)\,y_2(\xi)} \cdot \frac{f(\xi)\,d(\xi)}{1 - M^2\sin^2\xi} \\ + C_n\,y_1(\vartheta) + D_n\,y_2(\vartheta)$$

mit willkürlichen Koeffizienten C_n und D_n. Die Ausrechnung liefert wegen

$$y_1(\xi)\,y_2'(\xi) - y_1'(\xi)\,y_2(\xi) = \frac{-2(n-1)\sqrt{M^2-1}}{(1 - M^2\sin^2\xi)^n}$$

$$A_n(\vartheta) = \frac{1}{2(n-1)\sqrt{M^2-1}}\int_0^\vartheta \left[\left(\frac{\cos\xi - \sqrt{M^2-1}\sin\xi}{\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta}\right)^{n-1}\right. \\ \left. - \left(\frac{\cos\xi - \sqrt{M^2-1}\sin\xi}{\cos\vartheta + \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta}\right)^{n-1}\right] f(\xi)\,d\xi \\ + \frac{C_n}{(\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^{n-1}} + \frac{D_n}{(\cos\vartheta + \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^{n-1}} \\ (n = 2, 3 \ldots) \quad \ldots (28)$$

Die Ableitung davon nach ϑ ergibt

$$A_n'(\vartheta) = (n-1)\,B_n(\vartheta) \\ = \frac{1}{2\sqrt{M^2-1}}\int_0^\vartheta \left[\frac{(\cos\xi - \sqrt{M^2-1}\sin\xi)^{n-1}(\sin\vartheta + \sqrt{M^2-1}\cos\vartheta)}{(\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^n}\right. \\ \left. - \frac{(\cos\xi + \sqrt{M^2-1}\sin\xi)^{n-1}(\sin\vartheta - \sqrt{M^2-1}\cos\vartheta)}{(\cos\vartheta + \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^n}\right] f(\xi)\,d\xi \\ + \frac{(n-1)\,C_n(\sin\vartheta + \sqrt{M^2-1}\cos\vartheta)}{(\cos\vartheta - \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^n} \\ + \frac{(n-1)\,D_n(\sin\vartheta - \sqrt{M^2-1}\cos\vartheta)}{(\cos\vartheta + \sqrt{M^2-1}\sin\vartheta)^n}, \; (n = 2, 3, \ldots). \quad (29)$$

Die Formeln (23) und (24) waren die Spezialisierungen der obigen Formeln (28) und (29) für $n = 2$, wobei noch einige leichte Umformungen vorgenommen wurden, deren Zweck vor allem die Entfernung der Irrationalität $\sqrt{M^2-1}$ war. Die Spezialisierungen für $n = 3$ und 4 werden im folgenden noch ausdrücklich nachgeholt werden.

Die Bedingungen für die Periodizität der Lösung $A_n(\vartheta)$ sind:

$$A_n(2\pi) = A_n(0), \quad A_n'(2\pi) = A_n'(0)$$

oder mit Benutzung der Formeln (28) und (29)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left[(\cos\xi - \sqrt{M^2-1}\sin\xi)^{n-1} \right. \\ &\qquad \left. - (\cos\xi + \sqrt{M^2-1}\sin\xi)^{n-1}\right] f(\xi)\,d\xi = 0 \\ &\int_0^{2\pi} \left[(\cos\xi - \sqrt{M^2-1}\sin\xi)^{n-1} \right. \\ &\qquad \left. + (\cos\xi + \sqrt{M^2-1}\sin\xi)^{n-1}\right] f(\xi)\,d\xi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

oder einfacher

$$\int_0^{2\pi} (\cos\xi \pm \sqrt{M^2-1}\sin\xi)^{n-1} f(\xi)\,d\xi = 0, \; (n = 2, 3 \ldots). \quad (30^*)$$

Das sind zwei Bedingungen für die Störungsfunktion $f(\vartheta)$, die erfüllt sein müssen, damit unsere Aufgabe überhaupt Lösungen hat. Das steht im Einklang mit den oben angeführten allgemeinen Sätzen über periodische Lösungen von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, da ja in diesem Falle die homogene Differentialgleichung (26)

zwei linear unabhängige periodische Lösungen $y_1(\vartheta)$ und $y_2(\vartheta)$ besitzt.

Im Falle $n = 2$ lauten die Bedingungen (30) einfach

$$\int_0^{2\pi} \sin\xi\, f(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos\xi\, f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Wie die bereits durchgeführte Diskussion gezeigt hat, ist von diesen Bedingungen die erste ohne weiteres, die zweite aber nur dann erfüllt, wenn die Zirkulation $\Gamma = 0$ ist.

In den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ werden wir das Bestehen der Beziehungen (30) bzw. (30*) noch gesondert nachprüfen.

Für allgemeines n läßt sich diese Untersuchung leider nicht durchführen, weil die Zusammensetzung der Funktion $f(\vartheta)$ außerordentlich kompliziert und unübersichtlich ist. Mit Sicherheit läßt sich nur behaupten, daß die Bedingungen (30) immer dann von selbst erfüllt sein müssen, wenn bei den vorausgehenden Schritten die Funktionen $A_n(\vartheta)$ jeweils als gerade Funktionen gewählt wurden, so daß es sich um eine zur x-Achse, d. h. zur Strömungsrichtung symmetrische Strömung handelt. Das folgt einfach aus der Symmetrie. Bei einer unsymmetrischen Strömung, welche sich z. B. immer dann herausstellen müßte, wenn das Hindernis selbst unsymmetrisch ist, könnte man daran zweifeln, ob die Bedingungen (30) immer erfüllt sind. Tatsächlich hat ja der zweite Schritt die Bedingung ergeben, daß die Zirkulation null sein muß, was dasselbe bedeutet, wie die Forderung, daß die Strömung bis zur zweiten Annäherung symmetrisch verlaufen muß. Nun haben aber, wie schon erwähnt, die durchgeführten Untersuchungen ergeben, daß bei den nächsten Schritten die Bedingungen (30) von selbst erfüllt sind, auch dann, wenn die Strömung unsymmetrisch ist.

6. Formeln für die Berechnung der auftretenden Integrale.

Die in den vorstehenden Formeln enthaltenen Integrale lassen sich, abgesehen von elementaren Integralen, auf folgende Typen zurückführen:

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{(1 - M^2 \sin^2\xi)^\alpha}, \quad \int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\, d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^\alpha}, \quad \int_0^\vartheta \frac{\sin\xi\, d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^\alpha},$$

$$\int_0^\vartheta \frac{\sin\xi\cos\xi\, d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Auf diese Typen kommt man, wenn man in den Integranden die höheren Potenzen von $\sin\xi$ und $\cos\xi$ mit Hilfe von $N_\xi = 1 - M^2\sin^2\xi$ wegschafft und dann alles nach Potenzen von N_ξ ordnet.

Berechnung von

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^\alpha}.$$

Zur Berechnung dieser Integrale dient folgende Rekursionsformel:

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^\alpha} = \frac{M^2}{2(\alpha - 1)(M^2 - 1)} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1 - M^2\sin^2\vartheta)^{\alpha-1}}$$

$$-\frac{(2\alpha - 3)(2 - M^2)}{(2\alpha - 2)(1 - M^2)} \int_0^\vartheta \frac{d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^{\alpha-1}}$$

$$-\frac{\alpha - 2}{(\alpha - 1)(1 - M^2)} \int_0^\vartheta \frac{d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^{\alpha-2}}, \quad (\alpha = 2, 3 \ \ldots) \qquad \ldots (31)$$

Das entsprechende Integral für $\alpha = 1$, das wir kurz mit $\omega(M, \vartheta)$ bezeichnen, kann man mit Hilfe der Substitution $\sin\vartheta = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ in ein rationales Integral umformen, dessen Berechnung nach den gewöhnlichen Methoden durchzuführen ist. Man erhält so die Formel

$$\omega(M, \vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{d\xi}{1 - M^2\sin^2\xi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)}{\sqrt{1 - M^2}} - \frac{\pi}{2}\right] \qquad \ldots (32)$$

Es ist insbesondere

$$\omega(M, \pi) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad \omega(M, 2\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - M^2}}.$$

Diese Formeln gelten offenbar nur für $|M| < 1$.

Für $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ ergeben sich demnach die folgenden Formeln, wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$N_\xi = 1 - M^2\sin^2\xi, \quad N_\vartheta = 1 - M^2\sin^2\vartheta.$$

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{N_\xi} = \omega(M, \vartheta)$$

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{N_\xi^2} = -\frac{M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{2(1 - M^2) N_\vartheta} + \frac{2 - M^2}{2(1 - M^2)}\, \omega(M, \vartheta)$$

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{N_\xi^3} = -\frac{M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{4(1 - M^2) N_\vartheta^2} - \frac{3(2 - M^2) M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{8(1 - M^2)^2 N_\vartheta}$$

$$+ \frac{8 - 8M^2 + 3M^4}{8(1 - M^2)^2}\, \omega(M, \vartheta)$$

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{N_\xi^4} = -\frac{M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{6(1 - M^2) N_\vartheta^3} - \frac{5(2 M^2) M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{24(1 - M^2)^2 N_\vartheta^2}$$

$$-\frac{(44 - 44M^2 + 15M^4) M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{48(1 - M^2)^3 N_\vartheta}$$

$$+ \frac{(2 - M^2)(8 - 8M^2 + 5M^4)}{16(1 - M^2)^3}\, \omega(M, \vartheta)$$

$$\int_0^\vartheta \frac{d\xi}{N_\xi^5} = -\frac{M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{8(1 - M^2) N_\vartheta^4} - \frac{7(2 - M^2) M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{48(1 - M^2)^2 N_\vartheta^3}$$

$$-\frac{(104 - 104M^2 + 35M^4) M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{192(1 - M^2)^3 N_\vartheta^2}$$

$$-\frac{5(2 - M^2)(40 - 40M^2 + 21M^4) M^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{384(1 - M^2)^4 N_\vartheta}$$

$$+ \frac{128 - 256M^2 + 288M^4 - 160M^6 + 35M^8}{128(1 - M^2)^4}\, \omega(M, \vartheta) \qquad \ldots (33)$$

Berechnung von

$$\int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\, d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^\alpha} \quad \text{und} \quad \int_0^\vartheta \frac{\sin\xi\, d\xi}{(1 - M^2\sin^2\xi)^\alpha}.$$

Für diese Integrale gelten folgende, leicht zu bestätigende Rekursionsformeln:

$$\int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\, d\xi}{N_\xi^\alpha} = \frac{1}{2\alpha - 2} \frac{\sin\vartheta}{N_\vartheta^{\alpha-1}} + \frac{2\alpha - 3}{2\alpha - 2} \int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\, d\xi}{N_\xi^{\alpha-1}},$$

$$(\alpha = 2, 3, \ \ldots) \qquad \ldots (34)$$

$$\int_0^\vartheta \frac{\sin\xi\, d\xi}{N_\xi^\alpha} = \frac{1}{(2\alpha - 2)(1 - M^2)} \left(1 - \frac{\cos\vartheta}{N_\vartheta^{\alpha-1}}\right)$$

$$+ \frac{2\alpha - 3}{(2\alpha - 2)(1 - M^2)} \int_0^\vartheta \frac{\sin\xi\, d\xi}{N_\xi^{\alpha-1}}, \quad (\alpha = 2, 3 \ \ldots). \qquad \ldots (35)$$

Für $\alpha = 1$ gelten die Formeln:

$$\int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\, d\xi}{N_\xi} = \frac{1}{2M} \ln \frac{1 + M\sin\vartheta}{1 - M\sin\vartheta}, \qquad \ldots (34^*)$$

$$\int_0^\vartheta \frac{\sin\xi\, d\xi}{N_\xi} = \frac{1}{M\sqrt{1-M^2}} \operatorname{arctg} \frac{M\sqrt{1-M^2}\,(1-\cos\vartheta)}{1-M^2+M^2\cos\vartheta}\,. \quad (35^*)$$

Berechnung von $\int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\sin\xi\, d\xi}{N_\xi^\varkappa}$.

Diese Integrale kann man sofort in geschlossener Form integrieren:

$$\int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\sin\xi\, d\xi}{N_\xi^\varkappa} = \frac{1}{2(\varkappa-1)M^2}\left(\frac{1}{N_\vartheta^{\varkappa-1}}-1\right), (\varkappa = 2, 3, \ldots) \quad \ldots\ldots (36)$$

$$\int_0^\vartheta \frac{\cos\xi\sin\xi\, d\xi}{N_\xi} = \frac{1}{2M^2}\ln\frac{1}{N_\vartheta}. \quad \ldots\ldots (36^*)$$

Für die Ausrechnung der Formeln (30) braucht man die Werte dieser Integrale für die obere Grenze $\vartheta = 2\pi$. Man erkennt leicht, daß sämtliche Integrale für $\vartheta = 2\pi$ verschwinden mit Ausnahme der Integrale (33), bei denen die Glieder mit $\omega(M, 2\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-M^2}}$ stehen bleiben.

7. Berechnung der 3. und 4. Annäherung.

Die Differentialgleichung für A_3 lautet so:

$$(1-M^2\sin^2\vartheta)A_3'' - 3M^2\sin 2\vartheta\, A_3' + 2(2+M^2-4M^2\cos^2\vartheta)A_3 = 0. \quad \ldots (14_3)$$

Die Gleichung ist homogen, weil die weiteren Glieder, welche die Störungsfunktion $f(\vartheta)$ zusammensetzen, sämtlich entweder A_1 oder B_1 enthalten, die ja null sind. Die Bedingungen (30*) sind offenbar identisch erfüllt, darum erhält man aus den allgemeinen Formeln (28) und (29) nach leichten Umformungen ($\gamma_3 = C_3 + D_3$, $\delta_3 = 2\sqrt{M^2-1}\,(C_3 - D_3)$):

$$\left.\begin{aligned} A_3(\vartheta) &= \frac{\gamma_3[1-(2-M^2)\sin^2\vartheta]+\delta_3\cos\vartheta\sin\vartheta}{(1-M^2\sin^2\vartheta)^2} \\ B_3(\vartheta) &= \frac{1}{2}A_3'(\vartheta) = \\ &= \frac{1}{2(1-M^2\sin^2\vartheta)^3}\{2\gamma_3\cos\vartheta\sin\vartheta[-2+3M^2 \\ &\quad - M^2(2-M^2)\sin^2\vartheta] \\ &\quad + \delta_3[1+(3M^2-2)\sin^2\vartheta - 2M^2\sin^4\vartheta]\} \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

γ_3 und δ_3 sind willkürliche Konstanten, welche zur Erfüllung der Randbedingungen verwendet werden müssen.

Für $A_4(\vartheta)$ gilt die Differentialgleichung

$$(1-M^2\sin^2\vartheta)A_4'' - 4M^2\sin 2\vartheta\, A_4' + 3(3+M^2-5M^2\cos^2\vartheta)A_4 = f(\vartheta). \quad \ldots (14_4)$$

Die Funktion $f(\vartheta)$ lautet unter Berücksichtigung von $A_1 = B_1 = 0$ so:

$$\left.\begin{aligned} f(\vartheta) = {} & 3M^2\cos\vartheta[5-(2-\varkappa)M^2(3\cos^2\vartheta-1)]A_2'^2 \\ & +3M^2\sin\vartheta[3-(2-\varkappa)M^2(7\cos^2\vartheta-1)]A_2A_2' \\ & +12M^2\cos\vartheta[1-(2-\varkappa)M^2\sin^2\vartheta]A_2'^2 \\ & +3M^2\cos\vartheta[1-(2-\varkappa)M^2\sin^2\vartheta]A_2A_2'' \\ & +3M^2\sin\vartheta[3-(2-\varkappa)M^2\sin^2\vartheta]A_2'A_2''. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Setzt man hier für A_2 den Ausdruck (25) ein, so erhält man nach längerer Rechnung

$$\left.\begin{aligned} f(\vartheta) = {} & 3\gamma_2^2\cos\vartheta\left[\frac{a_1}{N_\vartheta^3}+\frac{a_2}{N_\vartheta^4}+\frac{a_3}{N_\vartheta^5}\right] \\ & +6\gamma_2\delta_2\sin\vartheta\left[\frac{b_1}{N_\vartheta^3}+\frac{b_2}{N_\vartheta^4}+\frac{b_3}{N_\vartheta^5}\right] \\ & +3\delta_2^2\cos\vartheta\left[\frac{c_1}{N_\vartheta^3}+\frac{c_2}{N_\vartheta^4}+\frac{c_3}{N_\vartheta^5}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (38^*)$$

wobei gesetzt ist:

$$N_\vartheta = 1 - M^2\sin^2\vartheta$$

$$a_1 = 16(1+\varkappa) - 4(4+5\varkappa)M^2 + 2(1+3\varkappa)M^4$$

$$a_2 = -4(1+\varkappa)(1-M^2)(8-5M^2)$$

$$a_3 = 16(1+\varkappa)(1-M^2)^2$$

$$b_1 = 16(1+\varkappa) - 12(1+\varkappa)M^2 + (1+\varkappa)M^4$$

$$b_2 = -4(1+\varkappa)(1-M^2)(8-3M^2)$$

$$b_3 = 16(1+\varkappa)(1-M^2)^2$$

$$c_1 = -16(1+\varkappa) + 4(2+\varkappa)M^2$$

$$c_2 = 4(1+\varkappa)(8-5M^2)$$

$$c_3 = -16(1+\varkappa)(1-M^2).$$

Setzt man diesen Ausdruck von $f(\vartheta)$ in die Bedingungsgleichungen (30*) ($n = 4$) ein, so findet man, daß sie tatsächlich erfüllt sind. Man kann also $A_4(\vartheta)$ und $B_4(\vartheta)$ gewinnen, indem man in die Formeln (28) und (29) für $n = 4$ den Ausdruck (38*) für $f(\vartheta)$ einsetzt und ausrechnet. Die Rechnung hat keine prinzipiellen Schwierigkeiten — man benützt die Formeln (32) bis (36) — ist aber einigermaßen langwierig. Setzt man $\delta_2 = 0$ und $C_4 = D_4 = \frac{1}{2}M^2\gamma_4$, was für eine in bezug auf die x-Achse symmetrische Strömung der Fall ist, so folgen für $A_4(\vartheta)$ und $B_4(\vartheta)$ die Ausdrücke

$$A_4(\vartheta) = \cos\vartheta\left(\frac{g_1}{N_\vartheta^2}+\frac{g_2}{N_\vartheta^3}+\frac{g_3}{N_\vartheta^4}\right),$$

$$B_4(\vartheta) = \sin\vartheta\left(\frac{h_1}{N_\vartheta^2}+\frac{h_2}{N_\vartheta^3}+\frac{h_3}{N_\vartheta^4}+\frac{h_4}{N_\vartheta^5}\right);$$

hierbei sind:

$$g_1 = \gamma_4(4-3M^2) - 3\gamma_2^2(3+\varkappa-2M^2),$$

$$g_2 = -4\gamma_4(1-M^2) + 3\gamma_2^2[4+2\varkappa-(3+\varkappa)M^2],$$

$$g_3 = -3\gamma_2^2(1+\varkappa)(1-M^2),$$

$$h_1 = \gamma_4(4-3M^2) - 3\gamma_2^2(3+\varkappa-2M^2),$$

$$h_2 = -4\gamma_4(1-M^2)(3-M^2) + \gamma_2^2[32+14\varkappa-(35+9\varkappa)M^2 + 8M^4],$$

$$h_3 = 8\gamma_4(1-M^2)^2 - \gamma_2^2[31+19\varkappa-6(3+\varkappa)M^2](1-M^2),$$

$$h_4 = 8\gamma_2^2(1+\varkappa)(1-M^2)^2.$$

8. Kompressible Potentialströmung ohne Zirkulation um einen Kreiszylinder.

Wenn wir als Hindernis einen Kreiszylinder vom Radius R mit dem Mittelpunkt im Ursprung annehmen, müssen wir zu den Differentialgleichungen der Strömung noch die Randbedingungen

$$q_r = 0 \text{ für } r = R \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

hinzufügen. Da die Strömung in diesem Fall symmetrisch zur x-Achse ist, können wir von vornherein die Koeffizienten δ_2 und δ_3 in den Formeln (25) und (37) null setzen und für A_4 und B_4 die Ausdrücke (39) verwenden. Es bleiben uns dann noch die Koeffizienten γ_2, γ_3, γ_4 übrig, welche so bestimmt werden müssen, daß die obige Bedingung (40) näherungsweise erfüllt wird.

Wir können an Stelle von (40) die unendliche Reihe von Bedingungen

$$\int_0^{2\pi} q_r\cos n\vartheta\, d\vartheta = 0\,, \quad \int_0^{\vartheta} q_r\sin n\vartheta\, d\vartheta = 0$$

$$\text{für } r = R \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

einführen, welche offenbar mit (40) äquivalent sind, weil sämtliche Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion q_r dann und nur dann verschwinden, wenn q_r selbst verschwindet. Für die Rechnung sind die folgenden, mit den obigen gleichwertigen Bedingungen vorzuziehen:

$$\int_0^{2\pi} q_r\cos^m\vartheta\sin^n\vartheta\, d\vartheta = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (40^*)$$

Zur Bestimmung unserer Koeffizienten γ_2, γ_3 und γ_4 ziehen wir von den Bedingungen (40*) der Reihe nach so viele heran, als gerade notwendig sind.

Wenn wir uns mit der Annäherung

$$q_r = U\left(\cos\vartheta + \frac{A_2}{r^2}\right)$$

begnügen, wo für A_2 gemäß (25) der Ausdruck

$$A_2 = \frac{\gamma_2 \cos\vartheta}{1 - M^2 \sin^2\vartheta}$$

einzusetzen ist, so sind die beiden Bedingungen

$$\int_0^{2\pi} q_r\, d\vartheta = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} q_r \sin\vartheta\, d\vartheta = 0$$

identisch erfüllt, während

$$\int_0^{2\pi} q_r \cos\vartheta\, d\vartheta = 0$$

liefert

$$\gamma_2 = \frac{-M^2 R^2}{2\left(1 - \sqrt{1 - M^2}\right)}.$$

So erhält man in zweiter Annäherung für die kompressible Gasströmung mit der ungestörten Geschwindigkeit U und der Machschen Zahl $M < 1$ um einen Kreiszylinder vom Radius R die Radialgeschwindigkeit

$$q_r = U\cos\vartheta\left[1 - \frac{R^2}{r^2}\,\frac{M^2}{2\left(1-\sqrt{1-M^2}\right)}\,\frac{1}{1 - M^2\sin^2\vartheta}\right] \quad (41)$$

und die Tangentialgeschwindigkeit

$$q_t = -U\sin\vartheta\left[1 + \frac{R^2}{r^2}\,\frac{M^2}{2\left(1-\sqrt{1-M^2}\right)}\,\frac{1 - 2M^2 + M^2\sin^2\vartheta}{(1 - M^2\sin^2\vartheta)^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; (41^*)$$

Für $M = 0$ vereinfachen sich diese Formeln zu den folgenden:

$$\left.\begin{aligned} q_r &= U\cos\vartheta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \\ q_t &= -U\sin\vartheta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

Das sind die Geschwindigkeitskomponenten für die Potentialströmung ohne Zirkulation einer inkompressiblen Flüssigkeit um einen Kreiszylinder, was in Übereinstimmung damit steht, daß man als Grenzfall für $M \to 0$ immer die entsprechende inkompressible Strömung erhalten muß.

Daß die Randbedingung $q_r = 0$ (für $r = R$) mit sehr großer Annäherung erfüllt ist, zeigt Zahlentafel 1 für die Werte der Funktion $\frac{q_r}{U}$ bei $r = R$ und $M = 0{,}2$ und $0{,}4$.

Zahlentafel 1.

ϑ \ $\left(\frac{q_r}{U}\right)_{r=R} = \cos\vartheta\left[1 - \frac{M^2}{2(1-\sqrt{1-M^2})}\,\frac{1}{1 - M^2\sin^2\vartheta}\right]$	$M = 0{,}2$	$M = 0{,}4$
0°	0,0101	0,042
10°	0,0088	0,036
20°	0,0051	0,022
30°	0,0001	0,002
40°	—0,0050	—0,020
50°	—0,0088	—0,037
60°	—0,0103	—0,045
70°	—0,0089	—0,038
80°	—0,0052	—0,023
90°	0,0000	0,000

9. Zusammenfassung.

Die durchgeführte Untersuchung hat ergeben, daß eine stationäre Potentialströmung eines kompressiblen Gases um ein in der Nähe des Ursprunges gelegenes Hindernis mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit U im Unendlichen durch den Glauertschen Ansatz (7) nur dann erfaßt werden kann, wenn die Zirkulation um das Hindernis verschwindet. Ist das nicht der Fall, so muß die Strömung entweder im Unendlichen eine Singularität besitzen, so daß für die Geschwindigkeitskomponenten keine regulären Reihenentwicklungen von der oben angegebenen Art (7) existieren, oder es muß irgendeine andere Voraussetzung unterdrückt werden. Vielleicht dürfte es nahe liegen, die Bedingung »stationär« fallen zu lassen und nach instationären Lösungen zu suchen; jedoch kann hier nichts Abschließendes darüber ausgesagt werden.

Auf Konvergenzuntersuchungen mußte in der vorliegenden Arbeit leider noch verzichtet werden. Zur formalen Durchführung der Rechnungen muß lediglich die Voraussetzung

$$M < 1$$

für die Machsche Zahl erfüllt sein, also Unterschallgeschwindigkeit im Unendlichen herrschen. Man sieht auch leicht, daß man im Grenzfall $M \to 0$ die entsprechende inkompressible Strömung erhält, und daß alle Reihen um so besser konvergieren, je kleiner M ist. Vor der Anwendung dieser Methode auf konkrete Fälle, wo es darauf ankommt, gewisse Randbedingungen im unendlichen Gebiet zu erfüllen, werden aber noch genauere Untersuchungen über den Konvergenzbereich anzustellen sein; denn zu diesem Zwecke muß man Sicherheit darüber haben, daß die aufgestellten Formeln wirklich bis zu den Stellen, wo die Randbedingungen eingreifen, also bis zur Oberfläche des Profiles, gelten, so daß es einen Sinn hat, von ihnen die Erfüllung dieser Randbedingungen zu verlangen.

Vorläufig wurde hier (Abschnitt 7) nur eine Anwendung der Methode für die Umströmung eines Kreiszylinders bis zur zweiten Annäherung ausgeführt, was die Formeln (41) lieferte. Die Erfüllung der Randbedingung ($q_r = 0$ auf der Oberfläche des Zylinders) ist, wie Zahlentafel 1 zeigt, noch für Machsche Zahlen bis $M = 0{,}4$ befriedigend. Über weitere Ergebnisse und Anwendungen soll später berichtet werden.

Beiträge zur Profilforschung.

Von H. B. Helmbold und F. Keune.

V. Theorie des Singularitätenverfahrens *).

Von H. B. Helmbold.

Bericht der Ernst-Heinkel-Flugzeugwerke, Seestadt Rostock.

Nachdem ein linearisiertes Singularitätenverfahren (1. Näherung) zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung auf dem Profilumfang vorhanden war, wurde verlangt anzugeben, wie die Ergebnisse der ersten Näherung durch Iteration weiter verbessert werden können. Die Profilform baut sich auf aus einem Profiltropfen mit einer Wölbungslinie als Rückgrat. Das Geschwindigkeitsfeld der Profilströmung wird entstanden gedacht durch Überlagerung einer Parallelströmung über das Feld der längs der Wölbungslinie verteilten Quellen und Wirbel. Die Verteilung dieser Singularitäten wird aus der Bedingung, daß die Profilkontur Stromlinie sein muß, hergeleitet. Die Lösung des Problems kann durch sukzessive Approximation gewonnen werden. Da das Verfahren jedoch an der Profilnase nicht ohne weiteres konvergiert, bedarf es dort noch einer besonderen Modifikation.

Gliederung.

1. Aufbau der Profilform.

Es ist üblich und auch zweckmäßig, die Profilform in der Weise aufzubauen, daß die Ordinaten y_W der Wölbungslinie W senkrecht zur Profilachse (Profilsehne A) und die Ordinaten $\pm y_T$ des Profiltropfens senkrecht zur Wölbungslinie aufgetragen werden. Dann liegen entsprechende Punkte der Saug- (S) und Druckseite (D) senkrecht zur Wölbungslinie übereinander (und nicht senkrecht zur Profilachse übereinander). Die Tangente im Punkte W der Wölbungslinie s ist die Winkelhalbierende der Tangenten in den zugehörigen Punkten der Saug- und Druckseite. Die Steigung der Tangente in einem Punkte der Profilkontur gegen die Profilachse hängt demnach mit der Steigung der Wölbungslinie gegen die Profilachse $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{d y_W}{d x} = y'_W$ und mit der Steigung der Kontur gegen die Wölbungslinie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d y_T}{d s} = y'_T$ folgendermaßen zusammen, Bild 1:

$$\operatorname{tg}(\vartheta \pm \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\vartheta \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp \operatorname{tg}\vartheta \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \frac{y'_W \pm y'_T}{1 \mp y'_W y'_T} \cdot \begin{cases} \operatorname{tg}(\vartheta + \varphi) = y'_S \\ \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi) = y'_D \end{cases} \quad (1)$$

Hier wie auch im folgenden bezieht sich das obere Vorzeichen auf die Saugseite, das untere auf die Druckseite. Der arithmetische Mittelwert der Tangentensteigungen an entsprechenden Punkten der Saug- und Druckseite beträgt nun

$$\frac{y'_S + y'_D}{2} = y'_W \cdot \frac{1 + y'^2_T}{1 - (y'_W\, y'_T)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

und die Differenz der Tangentensteigungen

$$y'_S - y'_D = 2\, y'_T \cdot \frac{1 + y'^2_W}{1 - (y'_W\, y'_T)^2} = d'_x \cdot \frac{1 + y'^2_W}{1 - (y'_W\, y'_T)^2} \cdot \quad (3)$$

Diese beiden Ausdrücke werden später zur Bestimmung der Singularitäten benutzt.

*) P 31 13.

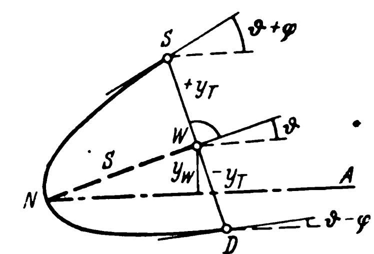


Bild 1. Aufbau der Profilform aus Profiltropfen ($\pm y_T$) und Profilwölbung (y_W).

Würde man das Profil einfach durch Addition der Ordinaten y_W und $\pm y_T$ aufbauen, so daß entsprechende Punkte von Druck- und Saugseite senkrecht zur Profilachse übereinander zu liegen kämen, so würden die Ausdrücke $\frac{y'_S + y'_D}{2} = y'_W$ und $y'_S - y'_D = d'_x$ lauten. Die geringe Komplikation, die der von uns gewählte Profilaufbau mit sich bringt, ist übrigens so lange ohne praktische Bedeutung, als bei dünnen Profilen y'_W und y'_T von 1. Ordnung klein bleiben; die Verbesserung betrifft dann erst die kleinen Glieder 3. Ordnung. Nur in der Umgebung der Profilnase, wo y'_T gegen Unendlich geht, dürfen die in Gl. (2) und (3) enthaltenen Korrekturen nicht mehr unberücksichtigt bleiben. — Wenn ausnahmsweise die Wölbungslinie nicht bekannt, sondern nur die Kontur gegeben ist, dann ordnet man senkrecht zur Profilachse übereinanderliegende Konturpunkte einander zu und definiert wie oben angegeben die Wölbungslinie als Mittellinie $\left(\text{aus } y'_W = \frac{y'_S + y'_D}{2}\right.$ folgt durch Integration $\left. y_W = \frac{y_S + y_D}{2}\right)$ und die örtliche Dicke als Ordinatendifferenz (aus $d'_x = y'_S - y'_D$ folgt $d_x = y_S - y_D$). Die Größen x, y, d_x usw. sind mit der halben Flügeltiefe $t/2$ als Bezugslänge dimensionslos gemachte Längen X, Y, D_x usw. Ableitungen wie $\frac{d y_W}{d x} = \frac{d Y_W}{d X}$ oder $\frac{d y_T}{d s} = \frac{d Y_T}{d S}$ sind von vornherein dimensionslos. Es ist in theoretischen Arbeiten üblich, den Koordinatenursprung in Profilmitte zu legen.

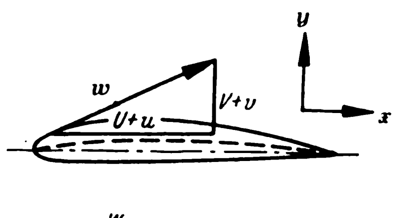
2. Aufbau des Geschwindigkeitsfeldes.

In einem profilfesten Koordinatensystem, Bild 2, setzt sich die Anblasgeschwindigkeit W aus den Komponenten U parallel zur Profilachse und V senkrecht dazu zusammen und der Tangens des Anstellwinkels beträgt dabei $\operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{U}$ [1]). Bei der Anwendung der Theorie setzen wir $\operatorname{tg}\alpha$ als klein gegen Eins voraus. An einem Punkte der Profilkontur kommen noch die Störgeschwindigkeiten u und v hinzu, so daß die Bedingung dafür, daß die Profilkontur Stromlinie ist, die Gestalt

$$\frac{d y}{d x} = y' = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \varphi) = \frac{V + v}{U + u} = \frac{U \operatorname{tg}\alpha + v}{U + u} \quad . \; . \; (4)$$

annimmt.

[1]) An Stelle von α_{Sehne} ist hier (in Beitrag V) kurz α geschrieben.



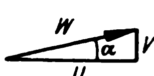


Bild 2 (links). Komponentenzerlegung der Geschwindigkeiten an der Kontur (w) und im Unendlichen (W).

Wir wollen nun voraussetzen, daß es möglich ist, die gegebene Profilkontur als geschlossene Grenzstromlinie zu erzeugen, indem man in einer Parallelströmung W eine geeignete Singularitätenbelegung (Quellen und Wirbel) auf der im 1. Abschnitt durch Bild 1 definierten Wölbungslinie anordnet, wobei die Summe aller Quellen Null sein muß. Die exakte Bestimmung der Belegungslinie ist bisher noch nicht erledigt. Solange das Verfahren praktisch nur bis zur 2. Näherung durchgeführt wird, womit eine gewisse Beschränkung hinsichtlich der Genauigkeit und der zulässigen Profildicken sowie Wölbungen gegeben ist, genügt folgende Überlegung: Man kann sich das Profilinnere als von ruhender Flüssigkeit erfüllt denken, wenn man die Profilkontur mit gebundenen Wirbeln dicht belegt. Wird nun von der Profilströmung die Parallelströmung (Anblasströmung) subtrahiert, so verbleibt außerhalb des Profils eine Absolutströmung, die im Unendlichen nach Null abklingt und auf der Profilkontur endigt. Im Profilinnern hat man dann eine der fortgenommenen Anblasströmung entgegengesetzt gleiche Parallelströmung. Man kann nun aber auch die Außenströmung drehungsfrei und quellenfrei ins Profilinnere fortsetzen, wenn es gelingt, im Profilinnern eine Singularitätenbelegung anzuordnen, die nach Auslöschung der vorhandenen (positiven) Konturbelegung durch die negativ genommene Konturbelegung die Außenströmung unverändert läßt. Nehmen wir zunächst nur an, daß die Belegung im Innern dann eindeutig auf eine einfache, unverzweigte Linie fällt, so zeigt eine einfache Symmetriebetrachtung, daß die Belegungslinie des symmetrischen (ungewölbten) Profils in seine Symmetrieachse fällt. Wenn wir weiter annehmen dürfen, daß bei einer stetigen Verformung der Profilmittellinie aus der Geradengestalt heraus die Belegungslinie ebenfalls stetig aus der Symmetrieachse herauswandert, so können die Abweichungen in den Ordinaten der Belegungslinie und der Profilmittellinie nur proportional Dicke mal Wölbung sein, weil für verschwindende Dicke beide Linien zusammenfallen müssen. Der Lagefehler der Mittellinie als Belegungslinie ist also von zweiter Ordnung klein, der Fehler in den Störgeschwindigkeiten ist jedoch erst von dritter Ordnung klein, wenn die Intensität der Singularitäten von erster Ordnung bleibt.

An der Belegungslinie haben die Störgeschwindigkeiten die Werte u_B und v_B (u_{BS} und v_{BS} saugseitig, u_{BD} und v_{BD} druckseitig) und verändern sich beim Übergang von der Belegungslinie zur Kontur S bzw. D um Beträge $\Delta_T u$ und $\Delta_T v$. Die Bedingung für das Zusammenfallen von Profilkontur und Grenzstromlinie schreiben wir nunmehr

$$y' = \frac{V + v_B + \Delta_T v}{U + u_B + \Delta_T u} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Die auf der Wölbungslinie angeordneten Singularitäten bestehen aus einer Quellbelegung von der Dichte $\frac{dQ}{dS}$ und aus einer Wirbelbelegung von der Dichte $\frac{d\Gamma}{dS}$ oder anders ausgedrückt: an der Wölbungslinie springen die Normalgeschwindigkeiten v_n (Störgeschwindigkeiten senkrecht zur Wölbungslinie) um den Betrag

$$[v_n] = v_{n\,S} - v_{n\,D} = \frac{dQ}{dS} = \frac{dQ}{dX}\frac{dX}{dS} = q_B \cos\vartheta \quad \ldots \quad (6)$$

und die Tangentialgeschwindigkeiten v_t (Störgeschwindigkeiten tangential zur Wölbungslinie) um den Betrag

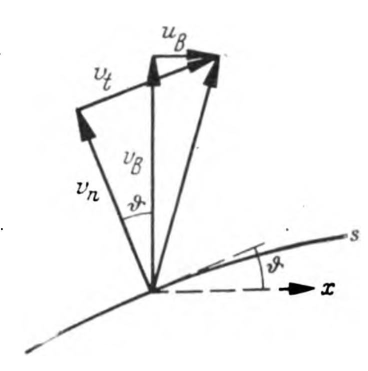


Bild 3. Störgeschwindigkeiten an der Belegungslinie s.

$$[v_t] = v_{t\,S} - v_{t\,D} = \frac{d\Gamma}{dS} = \frac{d\Gamma}{dX}\frac{dX}{dS} = \gamma_B \cos\vartheta \quad \ldots \quad (7)$$

Wie aus Bild 3 hervorgeht, ist

$$v_n = v_B \cos\vartheta - u_B \sin\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

und

$$v_t = u_B \cos\vartheta + v_B \sin\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Demnach betragen die Unstetigkeiten

$$[v_n] = q_B \cos\vartheta = [v_B] \cos\vartheta - [u_B] \sin\vartheta \quad \ldots \quad (10)$$

und

$$[v_t] = \gamma_B \cos\vartheta = [u_B] \cos\vartheta + [v_B] \sin\vartheta \quad \ldots \quad (11)$$

Daraus folgt zunächst

$$\begin{aligned} q_B &= [v_B]\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta) - \gamma_B\,\mathrm{tg}\,\vartheta \\ &= (v_{BS} - v_{BD})\,(1 + y_W'^2) - \gamma_B\, y_W' \quad \ldots \quad (12) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_B &= [u_B]\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\vartheta) + q_B\,\mathrm{tg}\,\vartheta \\ &= (u_{BS} - u_{BD})\,(1 + y'^2) + q_B\, y_W' \quad \ldots \quad (13) \end{aligned}$$

und hieraus weiter

$$[u_B] = u_{BS} - u_{BD} = \gamma_A = \frac{\gamma_B - q_B\, y_W'}{1 + y_W'^2} \quad \ldots \quad (14)$$

und

$$[v_B] = v_{BS} - v_{BD} = q_A = \frac{q_B + \gamma_B\, y_W'}{1 + y_W'^2} \quad \ldots \quad (15)$$

Dies sind die Beträge, um welche die Störgeschwindigkeiten u_B und v_B an der Belegungslinie springen. Um die Berechnung dieser Geschwindigkeiten übersichtlicher zu gestalten, unterteilen wir sie auf folgende Weise. Wir vergleichen die Singularitätenbelegung der Wölbungslinie mit einer Belegung der Profilachse, die aus Quellen von der Dichte $q_A = [v_B]$ nach Gl. (15) und aus Wirbeln von der Dichte $\gamma_A = [u_B]$ nach Gl. (14) besteht. Die Achsbelegung erzeugt an der Profilachse selbst Störgeschwindigkeiten

$$u_A = \bar{u}_A \pm \frac{1}{2}[u_B] \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

und

$$v_A = \bar{v}_A \pm \frac{1}{2}[v_B], \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

die sich aus einem arithmetischen Mittelwert der Geschwindigkeiten auf Saug- und Druckseite der Belegungslinie (Profilachse) und entgegengesetzt gleichen unstetigen Anteilen zusammensetzen, wobei wieder das obere Vorzeichen die Saugseite, das untere die Druckseite der Belegungslinie (Profilachse) betrifft[2]). Die Geschwindigkeit $\bar{u}_A = \frac{u_{AS} + u_{AD}}{2}$ rührt ausschließlich von der Quellbelegung q_A und die Geschwindigkeit $\bar{v}_A = \frac{v_{AS} + v_{AD}}{2}$ ausschließlich von der Wirbelbelegung γ_A her. Die Geschwindigkeiten u_A und v_A unterscheiden sich von den entsprechenden Geschwindigkeiten

[2]) Mit Hilfe der Gl. (8) bis (11) läßt sich übrigens leicht zeigen, daß auch die Geschwindigkeiten u_B, v_B, v_n und v_t den gleichen Aufbau aus arithmetischem Mittelwert und antimetrischer Unstetigkeit wie u_A und v_A nach Gl. (16) und (17) aufweisen. Und zwar stellen hierbei die arithmetischen Mittelwerte diejenigen Geschwindigkeitsgrößen dar, die man erhält, wenn man an der jeweils betrachteten Stelle die Singularitätenbelegung auf einer kleinen Strecke ds bzw. dx unterbricht und die in dieser Lücke auftretenden Geschwindigkeiten feststellt.

u_B und v_B bei gleicher Abszisse x um Geschwindigkeitsgrößen $\Delta_W u$ und $\Delta_W v$ derart, daß

$$u_B = u_A + \Delta_W u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

und

$$v_B = v_A + \Delta_W v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Die (stetigen) Korrekturgeschwindigkeiten $\Delta_W u$ und $\Delta_W v$ sind nach dem in der Fußnote Gesagten einfach die Differenzen $\Delta_W u = \bar{u}_B - \bar{u}_A$ und $\Delta_W v = \bar{v}_B - \bar{v}_A$. Es ergibt sich nunmehr folgender Aufbau der Störgeschwindigkeiten in entsprechenden Punkten der Saugseite

$$u_S = \bar{u}_A + \frac{1}{2}[u_B] + \Delta_W u + \Delta_T u_S, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$v_S = \bar{v}_A + \frac{1}{2}[v_B] + \Delta_W v + \Delta_T v_S \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

und der Druckseite

$$u_D = \bar{u}_A - \frac{1}{2}[u_B] + \Delta_W u + \Delta_T u_D, \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

$$v_D = \bar{v}_A - \frac{1}{2}[v_B] + \Delta_W v + \Delta_T v_D \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

3. Bestimmung der Singularitätenbelegungen aus der Profilgestalt.

Die Form der Randbedingung Gl. (4) oder (5) läßt erkennen, daß die Kontur durch Integration aus dem Geschwindigkeitsfeld der Singularitätenbelegung hervorgeht. Es muß deshalb auch möglich sein, umgekehrt die Singularitätenbelegung durch Differentiationen aus der Kontur herzuleiten.

Die exakte Lösung des Problems kann nicht unmittelbar, sondern nur als Ergebnis eines unendlichen Prozesses gewonnen werden. Indessen nimmt die erforderliche Rechenarbeit mit fortschreitender Näherung derart rasch zu, daß wir uns praktisch genötigt sehen, uns mit der 2. Näherung zu begnügen. Man könnte also daran denken, die 2. Näherung einfach durch eine Verbesserung der 1. Näherung herzustellen, und in der Tat ist die vorliegende Untersuchung auch aus einer solchen Betrachtung (über die Affinitätsbedingung der Profilsystematik) hervorgegangen; im Interesse einer schärferen Begriffsbildung und besserer Übersichtlichkeit ist es jedoch zweckmäßig, umgekehrt von der formal gegebenen asymptotischen Lösung her die Näherungsausdrücke abzuleiten; hierin folge ich einem Vorschlag meines Mitarbeiters Dr. F. Keune.

Um die Quelldichte $q_B = \dfrac{[v_n]}{\cos\vartheta}$ zu bestimmen, berechnen wir aus Gl. (5)

$$v_B = y'(U + u_B + \Delta_T u) - V - \Delta_T v \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

und bilden gemäß Gl. (15) und mit Hilfe der Gl. (2) und (3) den Ausdruck

Für dünne, schwach gewölbte Profile ist außer an der Profilnase y' von 1. Ordnung klein gegen Eins. Dann sind auch die Größen $\dfrac{u}{U}$, $\dfrac{v}{U}$, $\dfrac{q}{U}$ und $\dfrac{\gamma}{U}$ von 1. Ordnung und $\dfrac{\Delta_T u}{U}$, $\dfrac{\Delta_T v}{U}$, $\dfrac{\Delta_W u}{U}$ und $\dfrac{\Delta_W v}{U}$ von 2. Ordnung klein. Daß die Δ-Ausdrücke von 2. Ordnung klein sind, ergibt sich daraus, daß es sich um kleine Änderungen kleiner Größen handelt. Bei den Δ_T handelt es sich um die Änderungen, die die Störgeschwindigkeiten auf dem kleinen Weg y_T erfahren, bei den Δ_W um eine Änderung der Störgeschwindigkeiten infolge der kleinen Gestaltänderung der Wölbungslinie aus der geraden zur gewölbten Form. (Diese Abschätzung gilt, wie bereits gesagt, nicht an der Profilnase). Man erhält nun in 1. Näherung $q_{BI} = d'_x U$ und in 2. Näherung

$$q_{BII} = d'_x(U + \bar{u}_A) - \Delta_T v_S + \Delta_T v_D, \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

oder wenn wir

$$\Delta_T v_{SI} - \Delta_T v_{DI} = \Delta_T(q_{AI}) = \Delta_T[v_B]_I$$

schreiben, weil dieser Betrag nur vom Abklingen der Quellströmung von der Belegungslinie nach der Kontur hin herrührt,

$$q_{BII} = q_{BI} + d'_x \bar{u}_{AI} - \Delta_T[v_B]_I \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Die Werte der rechten Seite sind der 1. Näherung zu entnehmen. Die Quelldichte der Achsbelegung $q_A = [v_k]$ beträgt nach Gl. (14) und (15) in 1. Näherung $q_{AI} = q_{BI}$ und in 2. Näherung

$$q_{AII} = q_{BII} + \gamma_{AI} y'_W = q_{AI} + d'_x \bar{u}_{AI} - \Delta_T[v_B]_I + \gamma_{AI} y'_W \quad (30)$$

Die Wirbeldichte $\gamma_B = \dfrac{[v_t]}{\cos\vartheta}$ läßt sich nach Gl. (14) auf die Wirbeldichte der Achsbelegung $\gamma_A = [u_B]$ zurückführen. Diese ergibt sich aus der Bedingung, daß die von ihr auf der Achse induzierten Geschwindigkeiten senkrecht zur Achse eine bestimmte Verteilung besitzen müssen, die wir folgendermaßen ermitteln. Wir bilden gemäß Gl. (5) und (20) bis (23) die Tangentensteigungen an entsprechenden Punkten der Saug- und Druckseite:

$$y'_S = \frac{V + v_{BS} + \Delta_T v_S}{U + u_{BS} + \Delta_T u_S} = \frac{V + \bar{v}_A + \frac{1}{2}[v_B] + \Delta_W v + \Delta_T v_S}{U + \bar{u}_A + \frac{1}{2}[u_B] + \Delta_W u + \Delta_T u_S} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

und

$$y'_D = \frac{V + v_{BD} + \Delta_T v_D}{U + u_{BD} + \Delta_T u_D} = \frac{V + \bar{v}_A - \frac{1}{2}[v_B] + \Delta_W v + \Delta_T v_D}{U + \bar{u}_A - \frac{1}{2}[u_B] + \Delta_W u + \Delta_T u_D} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Daraus folgt nach Gl. (2) und mit Rücksicht auf Gl. (16) bis (19) in 2. Näherung

$$\left.\begin{aligned}
\frac{q_B + q\gamma_B y'_W}{1 + y'^2_W} &= v_{BS} - v_{BD} \\
&= y'_S(U + u_{BS} + \Delta_T u_S) - y'_D(U + u_{BD} + \Delta_T u_D) - \Delta_T v_S + \Delta_T v_D \\
&= (y'_S - y'_D)(U + \Delta_W u) + y'_S(u_{AS} + \Delta_T u_S) - y'_D(u_{AD} + \Delta_T u_D) - \Delta_T v_S + \Delta_T v_D \\
&= d'_x \frac{1 + y'^2_W}{1 - (y'_W y'_T)^2}(U + \bar{u}_A + \Delta_W u) + y'_W \frac{1 + y'^2_T}{1 - (y'_W y'_T)^2} \frac{\gamma_B - q_B y'_W}{1 + y'^2_W} \\
&\quad + y'_S \cdot \Delta_T u_S - y'_D \cdot \Delta_T u_D - \Delta_T v_S + \Delta_T v_D
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Danach folgt

mit
$$\frac{1}{1 + y'^2_W}\left(1 + \frac{1 + y'^2_T}{1 - (y'_W y'_T)^2} y'^2_W\right) = \frac{1}{1 - (y'_W y'_T)^2} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

$$\frac{q_B}{1 - (y'_W y'_T)^2} = d'_x \frac{1 + y'^2_W}{1 - (y'_W y'_T)^2}(U + \bar{u}_A + \Delta_W u) + \frac{\gamma_B y'_W y'^2_T}{1 - (y'_W y'_T)^2} + y'_S \cdot \Delta_T u_S - y'_D \cdot \Delta_T u_D - \Delta_T v_S + \Delta_T v_D \quad \ldots \quad (27)$$

$$y'_W = \frac{y'_S + y'_D}{2} = \frac{1}{2} \frac{U(V + v_{BS} + \Delta_T v_S) + u_{BD}(V + v_{BS}) + U(V + v_{BD} + \Delta_T v_D) + u_{BS}(V + v_{BD})}{U(U + u_{BS} + u_{BD})}$$

$$= \frac{U(V + \bar{v}_A + \Delta_W v_S) + \bar{u}_A(V + \bar{v}_A) - \frac{1}{4}[u_B][v_B]}{U(U + 2\bar{u}_A)} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Wenn wir durch die Schreibweise wieder hervorheben, daß der Betrag

$$\Delta_T v_{S\,I} + \Delta_T v_{D\,I} = 2\,\Delta_T \bar{v}_B$$

nur vom Abklingen des Wirbelfeldes herrührt, dann ist demnach in 2. Näherung

$$\bar{v}_{A\,II} = y'_W (U + \bar{u}_A) - V - \Delta_W v + \frac{1}{4}\frac{[u_B][v_B]}{U} - \Delta_T \bar{v}_B \quad (34)$$

oder wenn wir berücksichtigen, daß in 1. Näherung

$$\bar{v}_{A\,I} = y'_W U - V = U\,(y'_W - \operatorname{tg}\alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

schließlich

$$\bar{v}_{A\,II} = \bar{v}_{A\,I} + y'_W \bar{u}_{A\,I} + \frac{1}{4}\frac{[u_B]_I [v_B]_I}{U} - \Delta_T \bar{v}_B - \Delta_W v_I. \quad (36)$$

Die Integralgleichung für die Wirbelinduktion, durch welche die Verteilung der Wirbeldichte der Achsbelegung γ_A festgelegt wird, lautet

$$\bar{v}_A(x_1) = \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma_A\,dx}{2\pi(x - x_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Die Lösung der Integralgleichung findet sich bei W. Birnbaum, Z. Angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923), S. 290. Eine ganz analoge Induktionsformel gilt für den Zusammenhang zwischen Quelldichte der Achsbelegung und mittlerer axialer Störgeschwindigkeit auf der Achse

$$\bar{u}_A(x_1) = \int_{-1}^{+1} \frac{q_A\,dx}{2\pi(x_1 - x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Führt man Gl. (36) in Gl. (37) ein und berücksichtigt man den durch die Gl. (14) und (15) gegebenen Zusammenhang zwischen q_A und q_B und zwischen γ_A und γ_B, so verfügt man mit Gl. (27) und Gl. (33) über zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten q_A und γ_A. Die Auflösung dieses Gleichungssystems ist indessen solange nur von formaler Bedeutung, als die in den Formeln auftretenden Geschwindigkeiten nicht berechnet sind. Um diese berechnen zu können, ist der Weg der Iteration beschritten worden. Dabei ergab sich die Vereinfachung, daß in der ersten Näherung q_A und γ_A voneinander unabhängig sind und daß auch weiterhin q_A und γ_A unabhängig voneinander bestimmt werden können, da $q_{A(n)}$ nur von $\gamma_{A(n-1)}$ und $\gamma_{A(n)}$ nur von $q_{A(n-1)}$ abhängig erscheint (die Klammerindizes bezeichnen den Näherungsgrad).

Ziel der Untersuchung ist die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung auf dem Profilumfang. In 2. Näherung sind entsprechend Gl. (20) bis (23) die Störgeschwindigkeiten

$$u_{II} = \bar{u}_{A\,II} \pm \frac{1}{2}[u_B]_{II} + \Delta_W u_I + \Delta_T u_I, \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

wobei $\Delta_T u_I$ im allgemeinen für Druck- und Saugseite verschieden ist, und

$$v_{II} = \bar{v}_{A\,II} \pm \frac{1}{2}[v_B]_{II} + \Delta_W v_I + \Delta_T v_I \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Die resultierende Geschwindigkeit auf dem Profilumfang beträgt dann

$$w_{II} = \sqrt{(U + u_{II})^2 + (U\operatorname{tg}\alpha + v_{II})^2}$$
$$= \sqrt{U^2 + 2\,U\,u_{II} + \left(\bar{u}_{A\,I} \pm \frac{1}{2}[u_B]_I\right)^2 + \left(U\operatorname{tg}\alpha + \bar{v}_{A\,I} \pm \frac{1}{2}[v_B]_I\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

4. Die zweite Näherung an der Profilnase.

An der Profilnase konvergiert das Verfahren im allgemeinen nicht, weil dort in der 1. Näherung die Quell- und Wirbeldichte unendlich wird. Ist nämlich die Profilnase abgerundet, dann geht im Nasenpunkt $d'_x \to \infty$ und folglich auch $q_{A\,I} = d'_x\,U \to \infty$. Die Geschwindigkeiten $\bar{u}_{A\,I}$ vor dem Nasenpunkt des symmetrischen Profils ohne Anstellwinkel sind nach Gl. (38) negativ (nach vorn gerichtet) und groß gegen U. Der Staupunkt, an dem $U + \bar{u}_{A\,I} = O$ ist, liegt also vor der Profilnase. Geben wir dem symmetrischen Profil einen Anstellwinkel, dann wird nach W. Birnbaum die Wirbeldichte und damit der unstetige Anteil der axialen Störgeschwindigkeiten im Nasenpunkt antimetrisch unendlich. Die Aussagen der 1. Näherung sind nur mit verschwindender Profildicke verträglich, und selbst in diesem Grenzfall ist der Nasenpunkt ein singulärer Punkt. Will man das Verfahren als eine Entwicklung nach steigenden Potenzen des Dickenverhältnisses δ an der Stelle $\delta = 0$ auffassen, dann muß man sich damit abfinden, daß es an der Profilnase nicht mehr konvergiert. Man kann die Konvergenz jedoch verbessern, wenn man den unendlichen Prozeß als Iterationsprozeß bei konstanter endlicher Dicke $\delta > 0$ aufbaut und nur dafür sorgt, daß bei krümmungsstetiger Profilkontur keine Unendlichkeitsstellen der Geschwindigkeit auf der Kontur vorkommen. Was dafür zu tun ist, zeigt die vorhergehende Betrachtung über das symmetrische Profil ohne Anstellwinkel. Wenn die Belegung der Profilachse längs der Tiefe t mit Quellen $q_{A\,I} = d'_x U$ einen Staupunkt vor der Profilnase ergibt, dann ist das von der angenommenen Quellbelegung erzeugte Profil der 1. Näherung tiefer als beabsichtigt, seine Tiefe größer als t. Man kommt auf die vorgegebene Tiefe t zurück, wenn man die Quellbelegung auf einer verkürzten Tiefe $t^* > t$ innerhalb des Profils anbringt. Im Nasenpunkt geht dann $y' = y'_T = \dfrac{v}{U + u} \to \infty$, nicht weil $v \to \infty$ ginge (dies bleibt vielmehr endlich), sondern weil $U + u \to 0$ geht. Auch die Wirbelbelegung muß auf eine verkürzte Tiefe beschränkt werden, damit die Tangente im Nasenpunkt des Profils mit Nasenradius eindeutig bleibt. (Vgl. [14] im Schrifttumverzeichnis des VI. Beitrags).

Eine weitere Verbesserung der Konvergenz wird erzielt, indem auch noch die Krümmung im Nasenpunkt durch passende Festlegung des entsprechenden Anteils der Quellbelegung in Ordnung gebracht wird. Die hier zuletzt geschilderten Maßnahmen sind jedoch nicht bloße Aushilfen, sondern können als Anfangsschritte eines zweiten unendlichen Prozesses aufgefaßt werden, dessen Schritte jeweils zwischen die Schritte des zuerst geschilderten eingeschaltet werden, nämlich als Glieder einer Reihenentwicklung der Krümmung nach dem Profilumfang vom Nasenpunkt aus.

5. Zusammenfassung.

Unter der Voraussetzung, daß das Profil durch eine linienhafte Belegung mit Singularitäten (Quellen und Wirbeln) in der Parallelströmung erzeugt werden kann (Existenzproblem), kann die Belegungslinie wenigstens für die beiden ersten Näherungen angegeben werden, nämlich als mit der Profilmittellinie zusammenfallend. Überall am Profil, wo die Tangente an der Kontur nur wenig gegen die Profilachse geneigt ist, also außerhalb des Nasenbereichs, läßt sich die Singularitätenbelegung der 1. Näherung durch Iteration verbessern. Das Iterationsverfahren konvergiert jedoch keinesfalls an der abgerundeten Profilnase. Die Bedingung, daß im Nasenpunkt Tangente und Krümmung von Stromlinie und Kontur übereinstimmen müssen, ergibt Aussagen darüber, wie Lage und Intensitätsverteilung der Singularitäten verändert werden müssen.

Beiträge zur Profilforschung.

Von H. B. Helmbold und F. Keune.

VI. Zweite Näherung zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung nach dem Singularitätenverfahren.

Von F. Keune.

Bericht des Entwurfsbüro der Ernst Heinkel Flugzeugwerke, Seestadt Rostock.

Die vorangegangene Theorie des Singularitätenverfahrens (V. Beitrag) gibt die Möglichkeit, eine Abschätzung der in der 1. Näherung (III. Beitrag) auftretenden Fehler durchzuführen. Diese Fehlerabschätzung soll angegeben und der Weg zur Berechnung einer vollständigen 2. Näherung der Geschwindigkeitsverteilung gezeigt werden.

Gliederung.

1. Zerlegung der Strömung in Längs- und Querströmung.

Das im III. Beitrag angegebene Rechenverfahren zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung auf der Profilkontur ist ein Näherungsverfahren, das praktisch rasch zum Ergebnis führt und als Singularitätenverfahren auch übersichtlich und anschaulich bleibt. Die Berücksichtigung nur der 1. Potenz der Profildicke δ als Faktor der Störgeschwindigkeiten ist jedoch theoretisch nicht voll befriedigend, solange man keine Fehlerabschätzung über die Größenordnung der gemachten Vernachlässigungen ausführen kann. Um eine solche theoretisch notwendige Erweiterung der 1. Näherung vornehmen zu können, hat H. B. Helmbold im V. Beitrag ein Iterationsverfahren entwickelt, das bis zur 2. Näherung — also unter Berücksichtigung noch der 2. Potenzen von δ — im folgenden angewendet werden soll.

Nach der im V. Beitrag gewählten Schreibweise der Gleichungen des Singularitätenverfahrens ist U die Anblasgeschwindigkeit in Richtung der x-Achse und V die dazu senkrechte Anblasung $V = U \operatorname{tg} \alpha_s$[1]) in y-Richtung. Die Berechnung der Singularitätenverteilungen wird dort für irgendeinen Anstellwinkel $\alpha_s = \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + \alpha^*$ (Bild II, 3) durchgeführt; für die Anwendung der Theorie ist es jedoch zweckmäßig, diese Anblasgeschwindigkeit $W = W_\infty$ in zwei zueinander senkrechte Richtungen so zu zerlegen, daß die Singularitätenverteilungen beider Anblasrichtungen vom Anstellwinkel α^* unabhängig sind und jede für sich allein berechnet werden kann. Die eine dieser ausgezeichneten Richtungen ist die des tangentialen Eintritts ($\alpha_{s\,\mathrm{opt}}$: Definition vgl. II, nach Gl. (II, 28)) mit der Anblasgeschwindigkeit U_∞, die andere, die Querströmung V_∞, erfolgt unter dem Winkel $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$ senkrecht zum tangentialen Eintritt. Die zu beiden Anblasrichtungen gehörenden Singularitätenverteilungen induzieren dann auf der Profilkontur — und nur dort — Geschwindigkeiten, deren Richtungen übereinstimmen

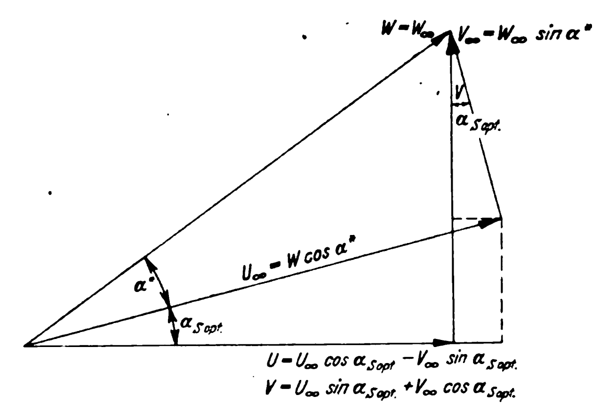


Bild VI. 1. Die Komponenten der Anblasgeschwindigkeit unter Berücksichtigung des Anblaswinkels bei stoßfreiem Eintritt.

müssen, und zwar fallen diese mit der Tangentenrichtung des Profiles zusammen und ihre Beträge können zur Gesamtgeschwindigkeit bei einem beliebigen Anstellwinkel addiert werden[2]).

Die im V. Beitrag gewählten Geschwindigkeitskomponenten $U = W \cos \alpha$ und $V = W \sin \alpha$ sind in die beiden ausgezeichneten Anblasrichtungen $U_\infty = W_\infty \cos \alpha^*$ und $V_\infty = W_\infty \sin \alpha^*$ zu zerlegen (Bild VI, 1):

$$\left.\begin{aligned} U &= U_\infty \cos \alpha_{s\,\mathrm{opt}} - V_\infty \sin \alpha_{s\,\mathrm{opt}} = U_{\infty x} - V_{\infty x} \\ V &= U_\infty \sin \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + V_\infty \cos \alpha_{s\,\mathrm{opt}} = U_{\infty y} + V_{\infty y} \end{aligned}\right\}, \quad \text{(VI, 1)}$$

so daß die Ausgangsgleichung (4) des V. Beitrages in die Form übergeht

$$y' = \frac{U_\infty \sin \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + V_\infty \cos \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + v}{U_\infty \cos \alpha_{s\,\mathrm{opt}} - V_\infty \sin \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + u} \quad . \; . \quad \text{(VI, 2)}$$

Für den Anstellwinkel ($\alpha^* = 0$) des tangentialen Eintritts ist dann der Richtungstangens der Geschwindigkeit auf der Profilkontur

$$y' = \frac{U_\infty \sin \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + v}{U_\infty \cos \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + u}, \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(VI, 3a)}$$

und analog für die Queranblasung (Index $\mathfrak{A}$: Anstellung)

$$y' = \frac{V_\infty \cos \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + v_{\mathfrak{A}}}{- V_\infty \sin \alpha_{s\,\mathrm{opt}} + u_{\mathfrak{A}}} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(VI, 3b)}$$

Aus diesen Gleichungen (VI, 3) sind die Singularitätenverteilungen für die beiden ausgezeichneten Anblasrichtungen (vom Anstellwinkel α^* und voneinander unabhängig) nach dem im V. Beitrag beschriebenen Verfahren herzuleiten. Mit ihnen gewinnt man die Singularitäten für jeden beliebigen Anstellwinkel durch die exakt gültige lineare Überlagerung:

[1]) Im V. Beitrag ist zur Vermeidung von Irrtümern der Index S, der auch »Saugseite« bedeutet, weggelassen worden. Jetzt können wir dafür wieder die gebräuchliche Schreibweise einführen.

[2]) Vgl. hierzu im III. Beitrag Gl. (III, 31) und Bild III, 8.

$$\left.\begin{aligned}\frac{q_{\alpha^*}}{W_\infty} &= \frac{U_\infty}{W_\infty}\frac{q_{\alpha^*=0}}{U_\infty} + \frac{V_\infty}{W_\infty}\frac{q_\pi}{V_\infty};\\ \frac{\gamma_{\alpha^*}}{W_\infty} &= \frac{U_\infty}{W_\infty}\frac{\gamma_{\alpha^*=0}}{U_\infty} + \frac{V_\infty}{W_\infty}\frac{\gamma_\pi}{V_\infty}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(VI, 4)}$$

Die von den Singularitäten ($q_{\alpha^*=0}$, $\gamma_{\alpha^*=0}$ bzw. q_π, γ_π) auf der Profilkontur induzierten Störgeschwindigkeiten (u, v bzw. u_π, v_π) setzen sich mit den in Komponenten zerlegten Anblasgeschwindigkeiten U_∞ bzw. V_∞ zur Geschwindigkeit auf der Profilkontur zusammen; und zwar ist die Geschwindigkeit für den Anstellwinkel $\alpha^* = 0$ des tangentialen Eintritts

$$w_{\alpha^*=0} = \sqrt{(U_\infty \cos\alpha_{s\,opt} + u)^2 + (V_\infty \sin\alpha_{s\,opt} + v)^2}, \quad \ldots \text{(VI, 5a)}$$

für die Queranblasung

$$w_\pi = \sqrt{(-V_\infty \sin\alpha_{s\,opt} + u_\pi)^2 + (V_\infty \cos\alpha_{s\,opt} + u_\pi)^2} \quad \ldots \text{(VI, 5b)}$$

und schließlich die nur auf der Profilkontur (ebenfalls exakt) gültige Gleichung für einen beliebigen Anstellwinkel α^*, für den sich U_∞ und V_∞ zur Anblasgeschwindigkeit W_∞ zusammensetzen:

$$\frac{w_{\alpha^*}}{W_\infty} = \frac{U_\infty}{W_\infty}\frac{w_{\alpha^*=0}}{U_\infty} \pm \frac{V_\infty}{W_\infty}\frac{w_\pi}{V_\infty} = \cos\alpha^*\frac{w_{\alpha^*=0}}{U_\infty} \pm \sin\alpha^*\frac{w_\pi}{V_\infty}, \quad \text{(VI, 6)}$$

dabei gilt das positive Vorzeichen für die Saug-, das negative für die Druckseite.

Die Störgeschwindigkeiten u_π und v_π sind nur für kleine Anstellwinkel ($\alpha^* \sim \delta$; $V_\infty \sim \delta\, U_\infty$) von der gleichen Größenordnung wie die Störgeschwindigkeiten beim Anstellwinkel des tangentialen Eintritts. Für große Anstellwinkel ($\alpha^* \sim 1$) werden sie jedoch von der Größenordnung der Anblasgeschwindigkeit, was für die Berechnung der Korrekturglieder nach dem Iterationsverfahren beachtet werden muß. Der hier nicht weiter behandelte Sonderfall großer Anstellwinkel erfordert nämlich zwei Korrekturen (statt einer), wenn man die Störgeschwindigkeiten einschließlich der quadratisch kleinen Glieder ($\sim \delta^2$) bestimmen will.

2. Theorie zur 2. Näherung.

Die Berechnung der 2. Näherung wird nach der im V. Beitrag entwickelten Theorie durchgeführt. Die zusätzlichen Singularitäten (Quellen $(q_{AII} - q_{AI})$ und Wirbel $(\gamma_{AII} - \gamma_{AI})$ sind wieder auf der x-Achse anzunehmen und werden aus den bekannten (vgl. Tafel III 1 und 2) Singularitäten der 1. Näherung und den von ihnen induzierten Störgeschwindigkeiten $\bar{u}_{AI}$ und $\bar{v}_{AI}$ berechnet. Dabei sind noch die Beträge $\Delta_T v_I$ (bzw. $\Delta_T u_I$) der Änderung der Störgeschwindigkeiten beim Übergang von der Belegungslinie zur Profilkontur und die Korrekturen $\Delta_W v_I$ (bzw. $\Delta_W u_I$) der Verschiebung der Singularitäten der 1. Näherung von der x-Achse auf die Belegungslinie (Wölbungslinie) zu berücksichtigen. Für beide ausgezeichnete Anblasrichtungen sind die zusätzlichen Quellverteilungen nach Gl. (V, 30) und die zusätzlichen Wirbelverteilungen nach Gl. (V, 36) und (V, 37) zu berechnen. Die von diesen Singularitäten induzierten Störgeschwindigkeiten[3]) auf der x-Achse sind $(\bar{u}_{AII} - \bar{u}_{AI})$ und $(\bar{v}_{AII} - \bar{v}_{AI})$. Mit ihnen erhalten wir die Störgeschwindigkeiten auf der Profilkontur für Saug- und Druckseite nach den Gl. (V, 20) bis (V, 23).

Da für die 1. Näherung des Singularitätenverfahrens im III. Beitrag bereits die Zerlegung der Singularitätenverteilungen für die beiden ausgezeichneten Anblasrichtungen durchgeführt wurde, wird diese Trennung jetzt besonders einfach. Für die Anblasrichtung $\alpha_{s\,opt}$ des tangentialen Eintritts sind die Singularitätenverteilungen der 1. Näherung (vgl. Zahlentafel III, 1 und 2):

$$q_{AI} = 2\,U_\infty \sum_{\nu\mu} d_{\nu\mu}\frac{v_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty};\; \gamma_{AI} = 2\,U_\infty \sum_n s_n \frac{u_n}{s_n\,U_\infty} \quad \text{(VI; 7)}$$

und die Mittelwerte der Störgeschwindigkeiten:

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_{AI} &= U_\infty \sum_{\nu\mu} d_{\nu\mu}\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty};\\ \bar{v}_{AI} &= U_\infty \sum_n s_n \frac{v_n}{s_n\,U_\infty} - U_\infty \sin\alpha_{s\,opt}\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 8)}$$

Für die Queranblasung $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$ sind die Singularitäten

$$q_{AI\pi} = 0;\; \gamma_{AI\pi} = 2\,V_\infty \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \ldots \text{(VI, 9)}$$

und die Mittelwerte der Störgeschwindigkeiten:

$$\bar{u}_{AI\pi} = 0;\; \bar{v}_{AI\pi} = -V_\infty \quad \ldots \text{(VI, 10)}$$

Die zusätzlichen Singularitätenverteilungen sind mit diesen Gleichungen aus Gl. (V, 30) und (V, 36) gewonnen:

a) für den Anstellwinkel des tangentialen Eintritts:

die Quellverteilung

$$q_{AII} - q_{AI} = 2\,U_\infty \left[y'_W \sum_n s_n \frac{u_n}{s_n\,U_\infty} + y'_T \sum_{\nu\mu} d_{\nu\mu}\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_T v_{SI}}{U_\infty} - \frac{\Delta_T v_{DI}}{U_\infty}\right)\right] \quad \text{(VI, 11)}$$

und die zur Berechnung der Wirbelverteilung notwendigen[4]) Mittelwerte der v-Komponente

$$\bar{v}_{AII} - \bar{v}_{AI} = U_\infty \left[y'_W \sum_{\nu\mu} d_{\nu\mu}\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}\,U_\infty} + y'_T \sum_n s_n \frac{u_n}{s_n\,U_\infty} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_T v_{SI}}{U_\infty} + \frac{\Delta_T v_{DI}}{U_\infty}\right) - \frac{\Delta_W v_I}{U_\infty}\right] \quad \ldots \text{(VI, 12)}$$

und b) für die Queranblasung:

die Quellverteilung

$$q_{AII\pi} - q_{AI\pi} = 2V_\infty \left[y'_W \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_T v_{SI\pi}}{V_\infty} - \frac{\Delta_T v_{DI\pi}}{V_\infty}\right)\right] \quad \ldots \text{(VI, 13)}$$

und der Mittelwert der v-Komponente:

$$\bar{v}_{AII\pi} - \bar{v}_{AI\pi} = V_\infty \left[y'_T \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_T v_{SI\pi}}{V_\infty} + \frac{\Delta_T v_{DI\pi}}{V_\infty}\right) - \frac{\Delta_W v_{I\pi}}{V_\infty}\right] \quad \text{(VI, 14)}$$

Die Komponenten der Störgeschwindigkeiten auf der Profilkontur erhalten wir ebenso aus den Gl. V, 20 bis V, 23

a) für den Anstellwinkel des tangentialen Eintritts:

$$\left.\begin{aligned}u_{II} &= u_I + (\bar{u}_{AII} - \bar{u}_{AI}) \pm \frac{1}{2}(\gamma_{AII} - \gamma_{AI}) + U_\infty\left(\frac{\Delta_T u_I}{U_\infty} + \frac{\Delta_W u_I}{U_\infty}\right)\\ v_{II} &= v_I + (\bar{v}_{AII} - \bar{v}_{AI}) \pm \frac{1}{2}(q_{AII} - q_{AI}) + U_\infty\left(\frac{\Delta_T v_I}{U_\infty} + \frac{\Delta_W v_I}{U_\infty}\right)\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 15)}$$

und b) für die Queranblasung

[3]) Die Berechnung dieser zusätzlichen Störgeschwindigkeiten wird im Rechenverfahren mit Hilfe der Ergebnisse der 1. Näherung (III. Beitrag) durchgeführt.

[4]) Vgl. im III. Beitrag unter 2 b oder im V. Beitrag Gl. (37).

$$\left.\begin{aligned} u_{II\mathfrak{A}} &= u_{I\mathfrak{A}} + (\bar{u}_{AII\mathfrak{A}} - \bar{u}_{AI\mathfrak{A}}) \pm \frac{1}{2}(\gamma_{AII\mathfrak{A}} - \gamma_{AI\mathfrak{A}}) \\ &\quad + V_\infty\left(\frac{\Delta_T u_{I\mathfrak{A}}}{V_\infty} + \frac{\Delta_W u_{I\mathfrak{A}}}{V_\infty}\right) \\ v_{II\mathfrak{A}} &= v_{I\mathfrak{A}} + (\bar{v}_{AII\mathfrak{A}} - \bar{v}_{AI\mathfrak{A}}) \pm \frac{1}{2}(q_{AII\mathfrak{A}} - q_{AI\mathfrak{A}}) \\ &\quad + V_\infty\left(\frac{\Delta_T v_{I\mathfrak{A}}}{V_\infty} + \frac{\Delta_W v_{I\mathfrak{A}}}{V_\infty}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 16)}$$

wobei das obere Vorzeichen für die Saugseite, das untere für die Druckseite gilt. Die Störgeschwindigkeiten der 1. Näherung sind nach dem III. Beitrag bekannt:

$$u_I = u_T \pm u_W, \quad v_I = (y'_W \pm y'_T)\, U_\infty = y'\, U_\infty \quad \text{(VI, 17a)}$$

und

$$u_{I\mathfrak{A}} = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, V_\infty, \quad v_{I\mathfrak{A}} = -V_\infty \quad \text{(VI, 17b)}$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeiten $\left(\frac{w_{II}}{U_\infty}\right)_{\alpha^*=0}$ und $\left(\frac{w_{II}}{V_\infty}\right)_{\mathfrak{A}}$ sind die v-Komponenten der 2. Näherung nicht erforderlich, wenn wir von der Umgebung der Profilnase absehen, so daß die Gl. (VI, 5) für die Geschwindigkeit umgeschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{w_{II}}{U_\infty}\right)_{\alpha^*=0} &\approx \cos\alpha_{s\,opt} + \frac{u_{II}}{U_\infty} + \frac{1}{2}(y'_W \pm y'_T)^2; \\ \left(\frac{w_{II}}{V_\infty}\right)_{\mathfrak{A}} &\approx \frac{u_{II\mathfrak{A}}}{V_\infty} - \sin\alpha_{s\,opt} \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 18)}$$

Gl. (VI, 6) gibt dann die Gesamtgeschwindigkeit für einen beliebigen Anstellwinkel α^*.

Unbekannt sind jetzt nur noch die Geschwindigkeitskorrekturen $\Delta_W u_I$, $\Delta_W v_I$ und $\Delta_T u_I$, $\Delta_T v_I$, die im folgenden berechnet werden sollen.

Sind die Singularitäten auf der Belegungslinie (der Wölbungslinie y_W) durch die Quellen von der Dichte $\frac{dQ}{dX'} = q_B(x')$ und die Wirbel von der Dichte $\frac{d\Gamma}{dX'} = \gamma_B(x')$ gegeben, so sind (Bild VI, 2) die von diesen Singularitäten in einem Punkt P (x, y) induzierten Geschwindigkeiten

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{d\Gamma}{dX'}\frac{dx'}{ds}\frac{y - y_W^*}{(x-x')^2 + (y-y_W^*)^2}\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{dQ}{dX'}\frac{dx'}{ds}\frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-y_W^*)^2}\,ds \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{d\Gamma}{dX'}\frac{dx'}{ds}\frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-y_W^*)^2}\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{dQ}{dX'}\frac{dx'}{ds}\frac{y-y_W^*}{(x-x')^2 + (y-y_W^*)^2}\,ds \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 19)}$$

Liegt dieser Punkt P auf der Profilkontur, dann addieren sich in 2. Näherung die Profilordinaten noch ohne Korrekturen: $y = y_W \pm y_T$, so daß die Ordinate $y - y_W$ noch nicht von y_T zu unterscheiden ist. Vgl. Gl. (V, 1):

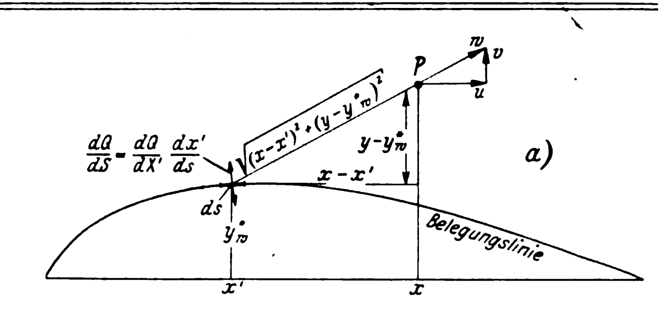
$$y' \approx (y'_W \pm y'_T)(1 \pm y'_W y'_T) \approx y'_W \pm y'_T.$$

Die Singularitäten $q_B \sim \delta U_\infty$ und $\gamma_B \sim \delta U_\infty$ auf der Belegungslinie y_W sind die Geschwindigkeitssprünge in Richtung der Normalen und Tangenten dieser Belegungslinie. Die Geschwindigkeiten der Singularitäten $q_A \sim \delta U_\infty$ und $\gamma_A \sim \delta U_\infty$ sind senkrecht und parallel zur x-Achse gerichtet. Die Unterschiede zwischen beiden sind mit $y'_W \sim \delta$ in 2. Näherung:

$$\left.\begin{aligned} q_B - q_A &= -y'_W\gamma_B \approx -y'_W\gamma_A \\ \gamma_B - \gamma_A &\approx y'_W q_B \approx y'_W q_A \end{aligned}\right\} \ldots \quad \text{(VI, 20)}$$

Die Berechnung dieser Korrekturen ist im V. Beitrag und dort Bild V, 3 einzusehen.

Aus Gl. (VI, 19) mit Gl. (VI, 20) erhält man für die 1. Näherung, für welche die Singularitäten auf der x-Achse



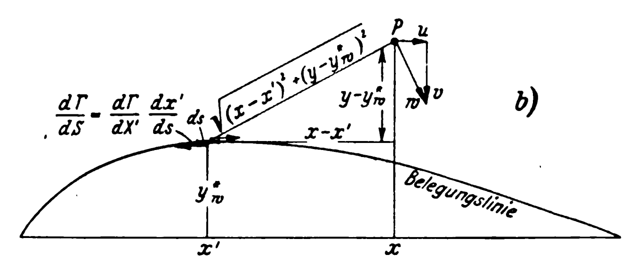


Bild VI, 2, a), b). Die Fernwirkung die Singularitäten unter Berücksichtigung des Querabstandes von der Belegungslinie.

bleiben ($y_W = y_W^* = 0$), zunächst mit $y_T = 0$ die Mittelwerte der Störgeschwindigkeiten auf der Achse (vgl. G. (III 7) und (III, 17))

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_A &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} q_A(x')\frac{dx'}{x-x'} \\ \bar{v}_A &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma_A(x')\frac{dx'}{x-x'} \end{aligned}\right\} \ldots \quad \text{(VI, 21)}$$

und beim Grenzübergang für verschwindende Profildicke y_T

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\pm y_T \to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma_A(x')\frac{y_T}{(x-x')^2 + y_T^2}\,dx' &\to \pm\frac{1}{2}\gamma_A \\ \lim_{\pm y_T \to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} q_A(x')\frac{y_T}{(x-x')^2 + y_T^2}\,dx' &\to \pm\frac{1}{2}q_A \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 22)}$$

Die Mittelwerte $\bar{u}_A$ und $\bar{v}_A$ sind für die in der Profilsystematik erforderliche Anzahl von Singularitäten q_A und γ_A bereits im III. Beitrag und den Gl. VI, 8 und VI, 10 angegeben.

Die Integrale der Gl. (19) können mit einer Reihenentwicklung des Nenners so umgeformt werden, daß in 2. Näherung noch eine völlige Trennung von y in $y_W - y_W^*$ und y_T möglich ist[5]). Zieht man von diesen Integralen, die nur noch von y_T oder von $y_W - y_W^*$ abhängen, die Ergebnisse der 1. Näherung ab, so erhalten wir schließlich die gesuchten Korrekturen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_W u &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma_A(x')\frac{y_W - x_W^*}{(x-x')^2 + (y_W - y_W^*)^2}\,dx' \\ &\quad + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} q_B(x')\frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y_W - y_W^*)^2}\,dx' - \bar{u}_A\right] \\ \Delta_W v &= \left[-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma_B(x')\frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y_W - y_W^*)^2}\,dx' - \bar{v}_A\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} q_A(x')\frac{y_W - y_W^*}{(x-x')^2 + (y - y_W^*)^2}\,dx' \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 23)}$$

[5]) Diese Aufspaltung in y_T und y_W wurde in [3], S. I, 9 bereits für die Stromfunktion durchgeführt. Dort war aber infolge der vorliegenden Aufgabe eine genaue Untersuchung dieser zusätzlichen Integrale nicht notwendig.



und

$$\left.\begin{aligned}\Delta_T u &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma_A(x')\,\frac{y_T}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx' \mp \frac{1}{2}\gamma_A\right]\\ &\quad + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} q_A(x')\,\frac{x-x'}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx' - \bar u_A\right]\\ \Delta_T v &= \left[-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma_A(x')\,\frac{x-x'}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx' - \bar v_A\right]\\ &\quad + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} q_A(x')\,\frac{y_T}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx' \mp \frac{1}{2}\gamma_A\right]\end{aligned}\right\}\text{(VI, 24)}$$

Dabei gehören die in eckiger Klammer eingefaßten Glieder zusammen, so daß jedes in Klammern gesetzte Glied einen mindestens quadratisch kleinen Anteil ($\sim \delta^2 U_\infty$) der Korrekturen angibt, bei denen bereits bei der Ableitung einige Glieder von höherem als 2. Grad in δ vernachlässigt sind.

Für den Aufbau der Profilsystematik (I. und II. Beitrag) haben wir angesetzt:

$$y_T = \delta \sum_{\nu\mu} \frac{d_{\nu\mu}}{\delta}\,\frac{y_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}}$$

$$y_W = \delta\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta} \sum_n \frac{s_n}{\varphi_{mx}}\,\frac{y_n}{s_n}$$

und erhielten nach den Ergebnissen der 1. Näherung (III. Beitrag) die Singularitäten:

$$q_A = \delta \sum_{\nu\mu} \frac{d_{\nu\mu}}{\delta}\,\frac{q_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}};\quad \gamma_A = \delta\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta} \sum_n \frac{s_n}{\varphi_{mx}}\,\frac{\gamma_n}{s_n}.$$

Unter den Voraussetzungen des Iterationsverfahrens zur Berechnung der Singularitäten können wir den gleichen Ansatz auch für alle höheren Näherungen durchführen. Die Lösungen der Integrale der Gl. (VI, 24)

$$\frac{u_{\nu\mu}(y)}{d_{\nu\mu}U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{q_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu}U_\infty}\,\frac{x-x'}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx' \qquad \frac{u_n(y)}{s_n U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_n(x')}{s_n U_\infty}\,\frac{y_T}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx'$$

$$\frac{v_{\nu\mu}(y)}{d_{\nu\mu}U_\infty} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{q_{\nu\mu}(x')}{d_{\nu\mu}U_\infty}\,\frac{y_T}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx' \qquad \frac{v_n(y)}{s_n U_\infty} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_n(x')}{s_n U_\infty}\,\frac{x-x'}{(x-x')^2+y_T^2}\,dx' \quad \text{. . (VI, 25)}$$

sind im III. Beitrag in den Tafeln III 5 bis 7 angegeben[6]). Die dort auftretenden Abkürzungen Ω_1 und Ω_2 wurden schon in [3] für zwei von y_T und x abhängige komplizierte mathematische Funktionen gewählt, die in Tafel III, 4 durch Näherungswerte ($y \ll 1$) veranschaulicht sind. In diesen Integralen sind außer den gesuchten Werten ersten und zweiten Grades in δ auch noch solche höheren Grades enthalten, da $y \sim \delta$ in höheren Potenzen auftritt. Schränken wir den Gültigkeitsbereich der Gl. (VI, 24) — der an sich unbegrenzt ist — durch die Forderungen $|x| < 1$ und $y_T \ll |1 - x^2|$ ein, die für Profile mit Nasenradius ($\varrho_N > 0$) völlig mit denen des Iterationsverfahrens $|x| < 1$; $y \sim \delta$ übereinstimmen, so können aus den Gl. (VI, 25) oder den Tafeln III, 5 bis III, 7 durch Entwicklung nach Potenzen von y die Anteile abgespalten werden, die vom 2. Grade klein in δ sind. Dies sind:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\Delta_T u_l}{U_\infty} &= \delta\, y_T\left(\sum_{\nu\mu}\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}\,\frac{\Delta_T u_{\nu\mu l}}{y_T d_{\nu\mu} U_\infty} \pm \frac{\varphi_{mx}}{\delta}\sum_n \frac{s_n}{\varphi_{mx}}\,\frac{\Delta_T u_{nls}}{y_T s_n U_\infty}\right)\\ \frac{\Delta_T v_l}{U_\infty} &= \delta\, y_T\left(\pm\sum_{\nu\mu}\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}\,\frac{\Delta_T v_{\nu\mu ls}}{y_T d_{\nu\mu} U_\infty} + \frac{\varphi_{mx}}{\delta}\sum_n \frac{s_n}{\varphi_{mx}}\,\frac{\Delta_T v_{nl}}{y_T s_n U_\infty}\right)\end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned}\frac{\Delta_T u_{l\alpha}}{V_\infty} &= \pm\, y_T\,\frac{\Delta_T u_{\alpha s}}{y_T V_\infty}\\ \frac{\Delta_T v_{l\alpha}}{V_\infty} &= y_T\,\frac{\Delta_T v_\alpha}{y_T V_\infty}\end{aligned} \quad \text{. . . (VI, 26)}$$

[6]) Ein Teil der hier gegebenen Störgeschwindigkeiten sind aus [3] entnommen, weitere sind nach der dort angegebenen Grundform Gl. (66) zu lösen, da sich alle Integrale in den Gl. (VI 24) und (VI 25) auf diese Grundform bringen lassen.

Die einzelnen Summanden sind in Tafel III, 8 zu finden. Für die Stellen $|x| \approx 1$ werden später im Zusammenhang mit der Profilnase die genauen Formeln Gl. VI, 25 herangezogen werden müssen.

Für die Integrale der Gl. (VI, 23) entwickeln wir nach Potenzen von $y_W - y_W^*$, streichen ebenfalls alle Glieder, die von höherem als 2. Grade klein sind und führen die Gl. (VI, 20) und (VI, 21) ein. Dann sind die Korrekturen, die durch den Wölbungseinfluß bedingt sind:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_W u_l &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma_A(x')\left(\frac{y_W - y_W^*}{x-x'} - y_W'\right)\frac{dx'}{x-x'}\\ \Delta_W v_l &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}q_A(x')\left(\frac{y_W - y_W^*}{x-x'} - y_W'\right)\frac{dx'}{x-x'}\end{aligned}\right\}\text{(VI, 27)}$$

Beschränken wir uns bei der Berechnung auf die ersten beiden Birnbaumschen Skelettformen und den Anstellwinkel α^*, so wird nach der Integration

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta_W u_l}{U_\infty} &= -\,\delta^2\left(\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\right)^2\left[\left(\frac{s_1}{\varphi_{mx}}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{s_2}{\varphi_{mx}}\right)^2 + x\left(\frac{s_1}{\varphi_{mx}}\right)\left(\frac{s_2}{\varphi_{mx}}\right)\right]\\ \frac{\Delta_W u_{l\alpha}}{U_\infty} &= -\,\delta^2\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\,\frac{\alpha^*}{\delta}\left(\frac{s_1}{\varphi_{mx}} - \frac{s_2}{\varphi_{mx}} + x\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}}\right)\end{aligned}\right\}\text{(VI, 28)}$$

und die für beliebige Profilformen y gültige Gleichung

$$\frac{\Delta_W v_l}{U_\infty} = \delta^2\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\mathfrak{J}}{\delta};\quad \frac{\Delta_W v_{l\alpha}}{V_\infty} = 0 \quad \text{(VI, 29)}$$

wobei der Inhalt des Profiles ist:

$$\frac{\mathfrak{J}}{\delta} = 2\sum_{\nu\mu}\frac{d_{\nu\mu}}{\delta}\int_{-1}^{+1}\frac{y_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu}}\,dx \quad \text{. . . . (VI, 30)}$$

so daß für die im Beitrag I. und II. gegebenen Profile gilt

$$\frac{\Delta_W v_l}{U_\infty} = \delta^2\,\frac{\varphi_{mx}}{\delta}\,\frac{s_2}{\varphi_{mx}}\left[\frac{d_1}{\delta} + \frac{5}{8}\,\frac{d_{12}}{\delta} + \frac{35}{32}\,\frac{d_{123}}{\delta} + \frac{3}{4}\,\frac{d_{32}}{\delta} + \frac{5}{8}\,\frac{d_{42}}{\delta} + \frac{8}{3\pi}\left(\frac{d_{0\alpha}}{\delta} + \frac{d_{\alpha 0}}{\delta}\right)\right] \quad \text{(VI, 31)}$$

$\dfrac{\Delta_W v_l}{U_\infty}$ ist nur dann von Null verschieden, wenn das Skelett mit der unsymmetrischen Wölbungsform $\dfrac{s_2}{\varphi_{mx}}$, dem S-Schlag, gebildet wird.

Die große Einfachheit der von F. Kalscheuer gewonnenen Ergebnisse für die Wölbungseinflüsse $\Delta_W u_l$ u. $\Delta_W v_l$ ist dem systematischen Profilaufbau nach Beitrag I und II zu verdanken.

Die Integrale (VI, 27) wurden mit Hilfe einer Reihenentwicklung abgeleitet, die mit dem Glied $\dfrac{y_W - y_W^*}{x - x'}$ gebildet ist. Da jedoch für das untersuchte Birnbaum-Skelett (im II. Beitrag mit B I bezeichnet)

$$\frac{y_W - y_W^*}{x - x'} = -\,s_1(x + x') + s_2(1 - x^2 - x\,x' - x'^2)$$

ist, so wird die Reihenentwicklung für die Voraussetzungen des Singularitätenverfahrens $s_1 \sim \delta$; $s_2 \sim \delta$ stets konvergieren. Die Werte $\Delta_W u_l$ und $\Delta_W v_l$ gelten für $|x| \leq 1$ und natürlich für $y_W \sim \delta$.

3. Die Profilnase im Singularitätenverfahren.

In der Nähe der Profilnase aller praktisch brauchbaren Profile ist das bisher beschriebene Iterationsverfahren zur Berechnung der Singularitätenverteilungen und damit der Geschwindigkeiten auf der Profilkontur nicht mehr anwendbar (vgl. Beitrag III, 3). Das Gebiet, für welches das Verfahren versagt, ist (nach Beitrag V 4) gekennzeichnet durch die starke Neigung der Profiltangenten, die im vorderen Scheitelpunkt der Profile sogar den Wert ∞ annimmt. Glücklicherweise ist dieses dem Iterationsverfahren nicht zugängliche Gebiet nur klein, es erstreckt sich vom vorderen Scheitelpunkt, der mit $y' = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \varphi) = \infty$ gegeben ist, im allgemeinen nur über einen kleinen Prozentsatz der Profiltiefe, da die Profiltangenten schon bald hinter der Nase nur noch schwach ($y' \sim \delta$) geneigt sind. So ist z. B. für die Ellipse die Richtung $y'_E = \delta$ schon nach 14,65% der Ellipsentiefe hinter dem Scheitelpunkt erreicht[7]).

Die Sonderstellung der Profilnase im Rechenverfahren erstreckt sich auf alle Profile, deren Nasenradius $\frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0$ ist und auf solche, die wenigstens einen Vorderkantenwinkel $\frac{\varepsilon}{\delta} > 0$ haben. Für die Profile, die mit einem endlichen Winkel beginnen, ist zwar scheinbar mit $\frac{\varrho_N}{\delta^2} = 0$ auch $y'_T \sim \delta$, jedoch ist im Scheitelpunkt des Vorderkantenwinkels die Tangente $y'_T = \operatorname{tg}\varphi_r$ vieldeutig, der Winkel nimmt alle Werte zwischen φ_r und $\pi - \varphi_r$ an, so daß im Scheitel des Vorderkantenwinkels die Bedingung kleiner Profiltangenten ebenfalls verloren geht[8]). Theoretisch müßte also für diese letzte Art von Profilen nur der Scheitelpunkt des Winkels vom beschriebenen Iterationsverfahren auszunehmen sein, das Singularitätenverfahren bringt es im Näherungsprozeß jedoch mit sich, daß auch die Umgebung des Punktes noch nicht dem Iterationsverfahren gehorcht, wie wir bald sehen werden. Natürlich bleibt diese dem Iterationsverfahren nicht zugängliche Gebiet hier erheblich kleiner als bei den Profilen mit Nasenradius.

Wenn wir nun nach anderen Möglichkeiten suchen, die Berechnung der Geschwindigkeit an der Profilnase genügend genau durchzuführen, so wollen wir zunächst noch bei der Bedingung bleiben, daß die Geschwindigkeitsrichtung in jedem Punkt der Profilkontur mit der Richtung des Profils übereinstimmen muß: Dann gilt für den Anstellwinkel α^* $= 0$ des tangentialen Eintritts Gl. (VI, 3a) und für die Queranblasung $\left(\alpha^* = \frac{\pi}{2}\right)$ die Gl. (VI, 3b). Da für alle Profile mit Nasenradius $\left(\frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0\right)$ die Geschwindigkeit auf der Profilkontur nicht unendlich groß werden kann, muß wegen der Bedingung $y' = \infty$ im vorderen Scheitelpunkt zwangsläufig gelten:

$$\left.\begin{aligned} y' = \infty: U_\infty \cos\alpha_{s\,\mathrm{opt}} + u &= 0, \\ V_\infty \sin\alpha_{s\,\mathrm{opt}} + u_{\mathfrak{R}} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (\mathrm{VI}, 32)$$

während die v-Komponenten ($U_\infty \sin\alpha_{s\,\mathrm{opt}} + v$) und ($V_\infty \cos\alpha_{s\,\mathrm{opt}} + v_{\mathfrak{R}}$) beliebige endliche Werte annehmen können. Ist noch die v-Komponente $V_\infty \cos\alpha_{s\,\mathrm{opt}} + v_{\mathfrak{R}} = 0$, so muß der Anstellwinkel α^* Null sein. Der vordere Scheitelpunkt wird zum Staupunkt, wenn beide v-Komponenten Null sind.

Für symmetrische Profile liegt der Scheitelpunkt bei $x = -1$ und $y_T = 0$. Bei gewölbten Profilen verschiebt er sich um eine kleine Strecke, die mit der Bedingung (VI, 32) berechnet werden kann. Wenn für die folgenden Untersuchungen der Scheitelpunkt trotzdem auch für gewölbte Profile im Punkt $x = -1$, $y_T = 0$, der in jedem Fall Profilpunkt ist, angenommen wird, so wirkt sich der gemachte Fehler erst in einer höheren Näherung aus. In diesem Punkt würde die Profiltangentenrichtung mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta \sim \delta$ vgl. Gl. (V, 1) nicht mehr senkrecht, sondern nur noch sehr steil sein[9]). Für die symmetrischen Profile, deren Dickenverlauf allein für das Versagen des Iterationsverfahrens an der Profilnase verantwortlich ist, gilt

$$\underline{x = -1}: y'_T = \infty;\; y_T = 0;\; U_\infty + u_{TA} = 0;\; u_{A\mathfrak{R}} = 0 \quad (\mathrm{VI}, 32\mathrm{a}),$$

wobei der Anstellwinkel des tangentialen Eintritts mit der Profilachse zusammenfällt ($\alpha_{s\,\mathrm{opt}} = 0$).

Die Bedingungen (Gl. 32a) können nur von den Dickenverteilungen $\frac{y_1}{d_1}$ und $\frac{y_{0a}}{d_{0a}}$ und außerdem natürlich noch von den zusammengesetzten Verteilungen $\frac{y_{12}}{d_{12}}$ und $\frac{y_{123}}{d_{123}}$ erfüllt werden; diese letzten führen an der Nase im wesentlichen zu den gleichen Ergebnissen, so daß sich die kleinen Unterscheidungen später von selbst ergeben werden.

Wir untersuchen deshalb nur die Dickenverteilungen mit einziffrigen Indizes, die wir später nach den bekannten Regeln (Tafel II, 5) zusammensetzen können, und verfügen zunächst über den Vorderkantenwinkel: $\frac{\varepsilon}{\delta} = 0$. Dann erfüllt nur die Dickenverteilung $\frac{y_1}{d_1}$ (Tafel III, 1) mit den von der zugehörigen Quellverteilung induzierten Geschwindigkeiten die Bedingung Gl. (32a). Führen wir für die Summe aller von den übrigen Singularitäten induzierten Geschwindigkeitskomponenten eine später zu bestimmende Restgeschwindigkeit $u_{A\mathfrak{R}} \sim \delta U_\infty$ ein und berücksichtigen das bisher noch unbekannte quadratisch kleine Glied ($\sim \delta^2$) der 2. Näherung, der Geschwindigkeitsverteilung des analytischen Schukowski-Profiles durch den Ansatz $\frac{\Delta u_{A1}}{U_\infty} = n\, d_1^2 \frac{u_1}{d_1 U_\infty}$ mit einem mit Gl. (VI, 44) berechnetem Faktor n, so wird

$$U_\infty + u_T = U_\infty \left[1 + d_1 (1 + n\, d_1) \frac{u_1}{d_1 U_\infty} + \frac{u_{A\mathfrak{R}}}{U_\infty}\right]$$

$$= U_\infty \Big\{1 + d_1 (1 + n\, d_1) \times$$

$$\left[1 - 2x + (1 + 2x) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] + \frac{u_{A\mathfrak{R}}}{U_\infty}\Big\} = 0 \; . \; . \; (\mathrm{VI}, 33\mathrm{a})$$

Diese Gleichung führt zwangsläufig zu der Forderung, daß die Abzsisse $x < -1$ wird, also zu einem Widerspruch mit der Bedingung Gl. (32a), die $x = -1$ fordert. Der praktisch sinnvollste Ausweg aus diesem Widerspruch ist mit einer Verkürzung (Zusammenziehung) der Quellstrecke an der Nase gegeben. Wir wollen zwischen der Profilabszisse x und der Abszisse $\bar{x}$ für die Singularitäten unterscheiden und erhalten dann in Gl. (33a):

$$1 + d_1 (1 + n\, d_1) \left[1 - 2\bar{x} + (1 + 2\bar{x}) \sqrt{\frac{\bar{x}-1}{\bar{x}+1}}\right] + \frac{u_{A\mathfrak{R}}}{U_\infty} = 0 \quad . \; . \; . \; (\mathrm{VI}, 33)$$

Der Scheitelpunkt liegt an der Stelle $\bar{x}$, wenn Gl. (33) erfüllt ist, und hat außerdem die Profilabszisse $x = -1$ (Index N: Nase)

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}_N = -1 - 2\, d_1^2 (1 - \omega_l) \\ &\text{mit der Abkürzung} \\ &\omega_l = 6\, d_1 - 2\, n\, d_1 + 2 \frac{u_{A\mathfrak{R}}}{U_\infty} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (\mathrm{VI}, 34)$$

---

[7]) Für die Ellipse ist die Richtung $y'_E = k\delta_E$ schon im Punkte $\xi = \frac{\sqrt{1+k^2} - k}{2\sqrt{1+k^2}}$ erreicht, wenn ξ die mit der Profiltiefe dimensionslos gemachte Entfernung vom vorderen Scheitel ist.

[8]) Das Gleiche gilt für den Hinterkantentangens.

[9]) Für schwach gewölbte Profile wird: $y' \sim \delta^{-1}$, $U_\infty + u = \frac{r}{y'}$, $\sim \delta^2$. Diese Restgeschwindigkeit ist also von 2. Ordnung klein und tritt zu den zusätzlichen Geschwindigkeiten $u_{\mathfrak{R}}/u_\infty$ hinzu, braucht aber für die Verhältnisse an der Profilnase erst in 3. Näherung berücksichtigt werden, vgl. Gl. (34).

Das bedeutet, da $\bar{x}_N < -1$ ist, daß die Quellstrecke $-1 \leq \bar{x} \leq +1$ kürzer sein muß als die Profiltiefe $-1 \leq x \leq +1$.

In ω_I sind alle Glieder von 2. und höherem Grade in δ gestrichen. Der Anfangspunkt der Quellverteilung $\bar{x} = -1$ liegt innerhalb des Profiles und zwar um $\Delta_r x_{II} = \Delta_r \bar{x}_{II} = (x - \bar{x})_N$:

$$\Delta_r x_{II} = 2 d_1^2 (1 - \omega_I)$$

hinter dem Scheitelpunkt. Da $d_1 \sim \delta$ ist, wird $\Delta_r x_{II} \sim \delta^2$ und mit $2 d_1 = \varrho_N$ und $r_N = 2 \varrho_N$ noch

$$\Delta_r x_{II} = \frac{1}{2} r_N (1 - \omega_I) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{VI}, 35)$$

Zur 1. Näherung des Verfahrens gehört wegen $\omega_I \sim \delta$ nur die Verkürzung[10]) $\Delta_r x_I = \frac{1}{2} r_N$, zur 2. Näherung der Gl. (VI, 35) ist der Faktor n in ω_I später noch zu berechnen. Dieser für die Profilnase bedeutungsvolle Abstand des vordersten Quellpunktes $\bar{x} = -1$ von der Profilnase wird für das ganze übrige Profil wegen der nur sehr kleinen Verkürzung ($\Delta_r x_{II} \sim \delta^2$) der mit Singularitäten belegten Strecke $\bar{t} = t \;\; (1 - \Delta_r x_{II})$ erst in der 3. Näherung bemerkbar. Setzen wir nämlich die Korrekturen der Abszisse

$$\bar{x} = x - \frac{1-x}{2} \Delta_r x_{II} \text{ oder } x = \bar{x} + \frac{1-\bar{x}}{2} \Delta_r \bar{x}_{II} \quad (\text{VI}, 35^a)$$

in diese u- und v-Komponenten der von den Singularitäten induzierten Geschwindigkeiten (Tafel III 1 und 2) ein, so werden die Unterschiede $u_{\nu\mu}(x) - u_{\nu\mu}(\bar{x}) \sim d_{\nu\mu} U_\infty x \, \Delta_r x_{II} \sim \delta^3 U_\infty$ und ebenso $v_{\nu\mu}(x) - v_{\nu\mu}(\bar{x}) \sim \delta^3 U_\infty$, also von mindestens 3. Ordnung klein sein. Deshalb erweist es sich für die spätere Rechnung der 2. Näherung als besonders nützlich, wenn man alle Singularitäten um die gleiche Strecke verkürzt. Die dabei auftretenden Fehler wären erst in der 3. Näherung zu berücksichtigen. Eine Ausnahme bilden in der Nähe der Profilnase außer u_1 nur noch v_π und $u_{0\alpha}$, mit denen wir uns noch beschäftigen werden. Jedoch erweist sich auch für diese Geschwindigkeiten die gleiche Verkürzung der Singularitätenstrecke in 2. Näherung als richtig.

Bei der Berechnung der Geschwindigkeitskomponente v_π der Queranströmung zeigt sich, daß v_π im Scheitelpunkt vom Nasenradius des Profiles abhängt. Für $r_N = 0$ ist $v_\pi = \infty$; für wachsenden Nasenradius wird diese Komponente der Störgeschwindigkeit immer kleiner werden, bis sie für das zum Kreis ausgeartete Profil den Wert $v_\pi = V_\infty$ annimmt. In Abhängigkeit von $r_N = 2 \varrho_N$ bewegt sich also v_π in den Grenzen $\infty \geqslant v_\pi \geqslant V_\infty$. Neben der Bedingung (32a) wird wegen dieser großen Abhängigkeit vom Nasenradius an der Profilnase gefordert werden müssen, daß der Krümmungsradius r_Ψ der Stromlinie Ψ im Scheitelpunkt $x = -1$, $y = 0$ mit dem Nasenradius r_N der Profilkontur übereinstimmt:

$$x = -1, \; y = 0; \; r_\Psi = r_N \quad . \; . \; . \; . \quad (\text{VI}, 36)$$

Die Stromlinie Ψ durch den Scheitelpunkt wird von den Singularitäten gebildet, die das Profil zur Stromlinie machen, und die in 1. Näherung (III. Beitrag) bekannt sind. Mit diesen Singularitätenverteilungen müssen wir jetzt die Krümmung der Stromlinie im vorderen Scheitelpunkt berechnen.

Die Stromlinie Ψ sei durch die Ordinaten $\bar{x}$ und y_Ψ gegeben, dann wird die Krümmung $(1/r_\Psi)$ in einem Punkte der Profilkontur nach der bekannten Formel für sehr steile Richtungen der Kurve bestimmt:

$$\frac{1}{r_\Psi} = \frac{\dfrac{d^2 \bar{x}}{d y^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{d \bar{x}}{d y}\right)^2\right]^{3/2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{VI}, 37^a)$$

Da nun die Geschwindigkeitskomponenten an jeder Stelle der ganzen Profilebene bekannt sind, setzen wir für $\dfrac{d\bar{x}}{dy}$ den Quotienten aus den Geschwindigkeitskomponenten des Profiles zunächst bei beliebiger Anströmrichtung α^*:

$$\frac{d \bar{x}}{d y} = \frac{U_\infty + u}{V_\infty + v}; \quad \frac{d^2 \bar{x}}{d y^2} = \frac{d}{d y}\left(\frac{U_\infty + u}{V_\infty + v}\right),$$

so daß jetzt die Krümmung mit

$$\frac{1}{r_\Psi} = \left[\frac{1}{V_\infty + v} \frac{d u}{d y} - \frac{U_\infty + u}{(V_\infty + v)^2} \frac{d v}{d y}\right] \frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{U_\infty + u}{V_\infty + v}\right)^2\right]^{1/2}} \quad . \; . \; . \quad (\text{VI}, 37)$$

gegeben ist. Ferner gilt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d u}{d y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{d \bar{x}}{d y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{U_\infty + u}{V_\infty + v} \\ \frac{d v}{d y} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \frac{d \bar{x}}{d y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \frac{U_\infty + u}{V_\infty + v} \end{aligned}\right\} (\text{VI}, 38^a)$$

Für die vorgeschriebene Tangentenrichtung $y' = \dfrac{d y}{d \bar{x}} = \infty$ der Stromlinie im Scheitelpunkt erhalten wir dann die folgende Beziehung für die Stromlinienkrümmung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_\Psi} &= \frac{1}{V_\infty + v} \frac{d u}{d y} - \frac{U_\infty + u}{(V_\infty + v)^2} \frac{d v}{d y}; \\ \frac{d y}{d \bar{x}} &= \frac{V_\infty + v}{U_\infty + u} = \infty. \end{aligned}\right\} (\text{VI}, 38)$$

Wenn zunächst der Krümmungsradius für die Queranblasung mit dem Nasenradius des Profiles in Übereinstimmung gebracht werden soll, so müssen wir in Gl. (VI, 38) $U_\infty = 0$, $u = u_\pi$ und $v = v_\pi$ setzen. Die Komponente v_π im Scheitelpunkt eines symmetrischen Profiles $x = -1$, $y = 0$ ist nur dann nicht unendlich groß, wenn der vorderste Punkt ($\bar{x} = -1$) der Wirbelverteilung γ_π (Tafel III, 2), welche die u_π und v_π induziert, nicht mit dem vorderen Scheitelpunkt ($x = -1$) des Profiles zusammenfällt. Wir machen deshalb den nach den Gl. (VI, 34) und (VI, 35) naheliegenden Ansatz: für die Profilnase $x = -1$ soll sein:

$$\bar{x} = -\left[1 + \frac{1}{2} r_N (1 - \omega_\pi)\right], \; y_T = 0$$

der für $\omega_\pi = 0$ die Lage des Scheitelpunktes im Koordinatensystem ($\bar{x}$; y) der Singularitäten angibt, wobei ω_π die Bestimmungsgröße zur Erfüllung der Bedingung Gl. (VI, 36) sein soll, und vermuten nach den bisherigen Erfahrungen, daß $|\omega_\pi| \ll 1$ ist.

Zunächst zeigt sich, daß der Ansatz zu $u_\pi = 0$ führt (vgl. Tafel III, 2), so daß die notwendige Bedingung der Gl. (VI, 32a) erfüllt ist. Aus Gl. (VI, 38) folgt dann

$$\frac{1}{r_\Psi} = \frac{1}{V_\infty + v_\pi} \frac{d u_\pi}{d y} = \frac{1}{1 + \dfrac{v_{\Lambda\pi}}{V_\infty}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_\pi}{V_\infty}\right).$$

Die Wirbelverteilung γ_π ist für kleine Anstellwinkel ($\alpha^* \sim \delta$) von 1. Ordnung klein, so daß bei der Berechnung der 2. Näherung noch ein quadratisch kleines Glied auftreten kann, das bei den folgenden Betrachtungen berücksichtigt werden muß. Wir wählen den Ansatz $(1 + m\,\alpha^*)\,\gamma_\pi$ für die Wirbelverteilung der Queranblasung, berücksichtigen noch die von anderen Wirbelverteilungen an der Nase induzierten Geschwindigkeiten durch die Ausdrücke $\dfrac{u_{\alpha\pi}}{V_\infty}$ und $\dfrac{v_{\alpha\pi}}{V_\infty}$, und erhalten mit den Störgeschwindigkeiten $\dfrac{u_\pi}{V_\infty}$ und $\dfrac{v_\pi}{V_\infty}$ und ihren Ableitungen (nach Tafel III, 7) für die Stromlinienverkürzung im Punkt $\bar{x}$, $y_T = 0$:

$$\frac{1}{r_\Psi} = \frac{(1 + m\,\alpha^*)\left[1 - (1 - m\alpha^*)\sqrt{\bar{x}^2 - 1}\;(\bar{x} + 1)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{u_{\alpha\pi}}{V_\infty}\right)\right]}{(\bar{x} + 1)\left[(1 + m\,\alpha^*)(\bar{x} - 1) + m\,\alpha^* \sqrt{\bar{x}^2 - 1}\left(1 - \dfrac{v_{\alpha\pi}}{V_\infty}\right)\right]}$$

und schließlich mit dem Ansatz für die Lage $\bar{x}$ des Scheitelpunktes

$$r_\Psi = r_N\left(1 - \omega_\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2\varrho_N}\,\frac{v_{\alpha\pi}}{V_\infty} + \frac{1}{2}\varrho_N - \frac{1}{2} m\alpha^* \sqrt{2\varrho_N}\right).$$

---

[10]) Diese Verkürzung ist in [3] schon durchgeführt worden. Das gleiche Ergebnis findet man mit Hilfe der konformen Abbildung als den vorderen Verzweigungspunkt der Abbildung, auf den zuerst M. M. Munk hinwies [14]. Über ihn hinaus können keine Geschwindigkeitssprünge auf der Belegungslinie mehr auftreten.

Da nun $\varrho_N \sim \delta^2$, $v_{\mathfrak{R}N} \sim \varrho V_\infty$ und $\omega_{\mathfrak{R}} \sim \delta$ (nach Vermutung) ist, sind alle Glieder in der Klammer von mindestens erster Ordnung klein gegenüber der Eins. Für den unberücksichtigt bleibenden großen Winkel α^* (d. h. große Queranblasung V_∞) sind die ersten und die letzten beiden Glieder jeweils von gleicher Größenordnung, für schwache Queranblasung $(V_\infty \sim \delta U_\infty)$ sind die drei letzten Glieder schon von 2. Ordnung (δ^2) klein. Für die 2. Näherung des Rechenverfahrens gilt dann mit $V_\infty \sim \delta U_\infty$ endlich

$$\left.\begin{aligned} r_{\varphi II} &= r_N (1 - \omega_{\mathfrak{R}I}) \\ \text{so daß mit Gl. (VI, 36)} \quad \omega_{\mathfrak{R}I} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (VI, 39)$$

Die Stromlinie in der Queranblasung hat also im Scheitelpunkt des Profiles nur dann in 2. Näherung den vorgeschriebenen Krümmungsradius $r_{\varphi II} = r_{II}$ der Profilkontur, wenn die zugehörige Wirbelverteilung $\gamma_{\mathfrak{R}}$ genau in der Entfernung des halben Nasenradius hinter dem Scheitelpunkt beginnt. Mit Gl. (VI. 36) ist dann gleichzeitig Gl. (32 a) erfüllt, während das quadratische Glied $m\,\alpha^*$ in dieser Näherung ohne Einfluß auf die Krümmung und deshalb unwichtig ist.

Erfüllen wir für den Anstellwinkel $\alpha^* = 0$ des tangentialen Eintritts $V_\infty = 0$ die gleiche Bedingung (VI, 36) der übereinstimmenden Nasenradien zur Bestimmung des noch unbekannten Faktors n des quadratisch kleinen Gliedes d_1^2, der in Gl. (VI, 34) in ω_I auftritt, so führen wir zunächst entsprechend der Gl. (VI, 33) für das symmetrische Profil ein:

$$\left.\begin{aligned} U_\infty + u_T &= U_\infty + d_1 (1 + n\, d_1) \frac{u_1(y)}{d_1 U_\infty} U_\infty + \frac{u_{\mathfrak{R}}}{U_\infty} U_\infty \\ v_T &= d_1 (1 + n\, d_1) \frac{v_1(y)}{d_1 U_\infty} U_\infty + \frac{v_{\mathfrak{R}}}{U_\infty} U_\infty \end{aligned}\right\} \quad (VI, 40)$$

Da in Gl. (VI, 38) zwar wieder im Scheitelpunkt $\frac{d\bar{x}}{dy} = \frac{U_\infty + u_T}{v_T} = 0$ ist, dafür dort aber auch für alle Quellinduktionen $v_T = 0$ und deshalb $\frac{1}{v_T} = \infty$ wird, müssen wir zunächst für den 2. Summanden der Gl. (VI, 38) den Grenzwert bilden

$$\frac{d v_T}{dy} \lim_{y \to 0} \left(\frac{U_\infty + u_T}{v_T^2}\right) = \frac{d v_T}{dy} \frac{1}{2 \frac{d v_T}{dy}} \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{v_T} \frac{d u_T}{dy}\right)$$
$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{v_T} \frac{d u_T}{dy}\right),$$

dann erhalten wir die Krümmung im Scheitel mittels des Grenzüberganges:

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{r_\varphi} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{v_T} \frac{d u_T}{dy} - \frac{1}{2 v_T} \frac{d u_T}{dy}\right)$$
$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{2 v_T} \frac{d u_T}{dy}\right) \qquad (VI, 41)$$

Nach Tafel III, 5 und 6 sind, wenn höhere als erste Potenzen in y vernachlässigt werden, die beiden Faktoren der Gl. VI, 41 im Scheitelpunkt bestimmt:

$$\frac{1}{U_\infty} \frac{d u_T}{dy} = d_1 (1 + n\, d_1) \frac{d}{dy} \left(\frac{u_1(y)}{d_1 U_\infty}\right) \approx$$
$$- d_1 (1 + n\, d_1)\, y \frac{\bar{x} - 1}{(\bar{x}^2 - 1)^{5/2}} \left\{3 + \frac{\bar{x}^2 - 1}{2 \varrho_N} [2 \sqrt{\bar{x}^2 - 1}\, (\bar{x} - 1) - 1 + 2\bar{x}(1 + \bar{x})] + \frac{1}{y} \frac{(\bar{x}^2 - 1)^{5/2}}{\bar{x} - 1} \frac{1}{d_1 (1 + n\, d_1)} \frac{d}{dy} \left(\frac{u_{\mathfrak{R}}}{U_\infty}\right)\right\}$$

und

$$\frac{v_T}{U_\infty} = d_1 (1 + n\, d_1) \frac{v_1}{d_1 U_\infty} \approx$$
$$- d_1 (1 + n\, d_1)\, y \frac{\bar{x} - 1}{(\bar{x}^2 - 1)^{3/2}} \left\{1 - 2\bar{x}(\bar{x} + 1) - 2 \sqrt{\bar{x}^2 - 1}\, (\bar{x} + 1) - \frac{1}{y} \frac{(\bar{x}^2 - 1)^{3/2}}{\bar{x} - 1} \frac{1}{d_1 (1 + n\, d_1)} \frac{v_{\mathfrak{R}}}{U_\infty}\right\},$$

die für $y = 0$ einzeln aber nicht im Grenzwert (VI, 41) verschwinden. Führen wir nämlich diese beiden Ausdrücke mit Gl. (VI, 35) in die Gl. (VI, 41) ein, so erhalten wir nach einiger Rechnung[11])

$$r_{\varphi} = r_N \left(1 - \frac{3}{2}\, \omega_I - \frac{9}{4}\, \varrho_N + \dots\right) \quad \dots \quad (VI, 42)$$

Da nun aber $\omega_I \sim \delta$ und $\varrho_N \sim \delta^2$ ist, stimmen Profilkrümmung und Stromlinienkrümmung nur überein $(r_\varphi = r_N)$, wenn in dieser Näherung gilt:

$$\omega_I = 0.$$

Erst in einer höheren Näherung wäre $\omega_{II} = -\frac{3}{2}\, \varrho_N$ von Null verschieden. Zusammenfassend können wir feststellen, daß für alle Profile, bei denen kein Vorderkantenwinkel $\left(\frac{\varepsilon}{\delta} = 0\right)$ auftritt, die Belegungslinie für alle Singularitäten um

$$\Delta_r\, x_{II} = \frac{1}{2}\, r_N = \varrho_N \quad \dots\dots \quad (VI, 43)$$

verkürzt wird. Aus der Abszisse x der Profilkontur läßt sich nach Gl. (VI, 35 a) leicht die der Singularitätenbelegung $\bar{x}$ berechnen. Der Faktor n des quadratischen Gliedes der Schukowskischen Quellenverteilung Gl. (VI, 33 a) ist jetzt wegen $\omega_I = 0$ mit (Gl. VI, 34) gegeben:

$$n = 3 + \frac{1}{d_1} \frac{u_{\mathfrak{R}}}{U_\infty}, \quad \dots\dots \quad (VI, 44)$$

während der Faktor m des quadratisch kleinen Gliedes der Wirbelverteilung $\gamma_{\mathfrak{R}}$ der Queranblasung in der 2. Näherung ohne Einfluß bleibt. Mit den Gl. (VI, 43) und (VI, 44) hat das symmetrische Profil[12]) im Scheitelpunkt eine senkrechte Tangente und den vorgeschriebenen Krümmungsgrad r_N.

Untersuchen wir jetzt die Dickenverteilung $\frac{y_{0\alpha}}{d_{0\alpha}}$, die den Vorderkantenwinkel liefert. Ihre Quellsenkenverteilung $q_{0\alpha}$ induziert im Anfangspunkt der Singularitäten $\bar{x} = -1$ eine unendlich große Geschwindigkeitskomponente $u_{0\alpha}$. Deshalb wird auch für diese Dickenverteilung die Bedingung (VI, 32 a) $(U_\infty + u_T = 0)$ nur vor dem Anfangspunkt der Quellverteilung erfüllt, wenn $d_{0\alpha} > 0$ ist. Wir setzen für den Scheitelpunkt $\bar{x} = -1$ an: $\bar{x} = -1 - \Delta_\varepsilon\, x$, führen diesen Ansatz in die Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung $\frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha} U_\infty}$ (Beitrag III, Tafel 5) ein, berücksichtigen eine mögliche Störgeschwindigkeit $\frac{u_{\mathfrak{R}\varepsilon}}{U_\infty}$ und den Faktor $n_\varepsilon\, d_{0\alpha}^2$ des quadratisch kleinen Gliedes der Singularitätenverteilung $q_{0\alpha}$ — alles analog den vorausgegangenen Ansätzen — und erhalten nach kurzer Rechnung[13]):

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\varepsilon\, x_{II} &= 0{,}164\, e^{-0{,}785 \frac{1}{d_{0\alpha}} \left(1 - \frac{u_{\mathfrak{R}\varepsilon}}{U_\infty} - n_\varepsilon\, d_{0\alpha}\right)} \\ d_{0\alpha} &> 0 \end{aligned}\right\} \quad (VI, 45)$$

Die so gegebene Verkürzung der Quellstrecke ist sehr klein, vgl. den Hinweis im III. Beitrag nach Gl. (III, 52). Die gleichen

---

[11]) Die zusätzlichen Geschwindigkeiten $\frac{u_{\mathfrak{R}}}{U_\infty}$ und $\frac{v_{\mathfrak{R}}}{U_\infty}$ treten erst in höherer Näherung auf, d. h. in der vierten Näherung, wenn $\frac{1}{d_1 y} \frac{v_{\mathfrak{R}}}{U_\infty} \sim 1$ angenommen wird:

$$r_{IV} = r_N \left[1 - \frac{3}{2}\, \omega_{III} - \frac{9}{4}\, \varrho_N + 3 \sqrt{2}\, \varrho_N^{3/2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{y\, d_1 (1 + n\, d_1)} \frac{v_{\mathfrak{R}}}{U_\infty}\right)\right].$$

[12]) Gilt in dieser Näherung auch für das gewölbte Profil.

[13]) Die unrunden Zahlen in Gl. (VI 45) ergeben sich aus

$$\Delta_\varepsilon\, x_{II} = e^{-(2{,}5 - \ln 2)}\, e^{-\frac{\pi}{4} \frac{1}{d_{0\alpha}} \left(1 - \frac{u_{\mathfrak{R}\varepsilon}}{U_\infty} - n_\varepsilon\, d_{0\alpha}\right)}.$$

Verhältnisse finden wir infolge der Dickenverteilung $\frac{y_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0}}$ an der Hinterkante des Profiles vor. Hier tritt mit der Verkürzung

$$\bar{x} = 1 + \Delta_k x$$

im hinteren Scheitelpunkt $x = +1$, $y = 0$ die notwendige Bedingung $U_\infty + u_T = 0$ nur für $d_{\alpha 0} > 0$ ein, wenn entsprechend Gl. (VI, 45) jetzt gilt:

$$\Delta_k x = 0{,}164\, e^{-0{,}785 \cdot \frac{1}{d_{\alpha 0}} \left(1 - \frac{u_{\Re_r}}{U_\infty} - n_k d_{\alpha 0}\right)} \quad \text{(VI, 46)}$$

Für solche Profile, die auch in der Hinterkante einen vorgeschriebenen Abrundungsradius haben, sind die Gl. (VI, 43) und (VI, 44) in gleicher Weise anwendbar. Dadurch, daß die Anfangspunkte der Quellverteilungen $q_{0\alpha}$ und $q_{\alpha 0}$ ein wenig aus dem Scheitel des Vorderkanten- bzw. Hinterkantenwinkels nach hinten verschoben werden, werden die scharfen Kanten des Winkels mit einem kleinen Radius abgerundet[14]). Für Profile mit Nasenradius $\left(\frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0\right)$ und außerdem mit positivem Vorderkantenwinkel $\left(\frac{\varepsilon}{\delta} > 0\right)$ nehmen wir an, daß die Verkürzung der Singularitätenstrecke die Summe der beiden einzelnen Verkürzungen ist und erhalten dann für alle praktisch vorkommenden Fälle in genügender Genauigkeit für die 2. Näherung.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0,\ \frac{\varepsilon}{\delta} > 0: \Delta x_{II} = \Delta_r x_{II} + \Delta_\varepsilon x_{II} \\ 2.\ \frac{\varrho_N}{\delta^2} > 0,\ \frac{\varepsilon}{\delta} < 0: \Delta x_{II} = \Delta_r x_{II} \\ 3.\ \frac{\varrho_N}{\delta^2} = 0,\ \frac{\varepsilon}{\delta} > 0: \Delta x_{II} = \Delta_\varepsilon x_{II} \end{array}\right\}, \quad \text{(VI, 47)}$$

wobei $\Delta_r x_{II}$ und $\Delta_\varepsilon x_{II}$ in den Gl. (VI, 43) und (VI, 45) gegeben sind. Da im ersten Fall für verschwindend kleine Größen $d_{0\alpha}$ die Strecke $\Delta_\varepsilon x_{II}$ stärker[15]) nach Null geht als jede noch so große Potenz $d_{0\alpha}^p$ $(p \to \infty)$ — in den praktisch vorkommenden Fällen wird höchstens $\Delta_\varepsilon x_{II} \sim \delta^4$ — ist der Zusatz $\Delta_\varepsilon x_{II}$ zu $\Delta_r x_{II}$ bei großen Nasenradien unbedeutend, während er bei sehr kleinen Nasenradien $(\varrho_N \sim \delta^4)$ wirksam werden muß[16]). Allerdings würden bei diesen besonders kleinen Nasenradien $(\varrho_N \sim \delta^4)$ unsere Überlegungen zur Festlegung der Krümmung an der Nase ungenau, weil r_N von der gleichen Größenordnung wäre wie der Abrundungsradius des Vorderkantenwinkels. Jedoch beschränkt sich dann die Sonderstellung der Profilnase auf ein so kleines Gebiet in nächster Nähe der Profilnase, daß dann ein kleiner Fehler in der Geschwindigkeit praktisch unbedeutend ist. Es wäre dann außerdem $d_1 \sim \delta^2$, so daß damit $n = 0$ sein müßte. Gl. (VI, 44).

Für normale Nasenradien und ebenso für den Vorderkantenwinkel müssen wir nun noch die zusätzlichen Geschwindigkeiten $\frac{u_{\Re}}{U_\infty}$ bzw. $\frac{u_{\Re_r}}{U_\infty}$ bestimmen. Diese ergeben sich als die Summe aller von den Quellverteilungen induzierten Geschwindigkeiten, die in 2. Näherung nach früheren Überlegungen im vorderen Scheitelpunkt mit

$$\sum_{\nu=2}^{\nu} d_\nu \left(\frac{u_\nu}{d_\nu U_\infty}\right)_{x=-1} = \sum_{\nu=2}^{\nu} d_\nu \left(\frac{u_\nu}{d_\nu U_\infty}\right)_{\bar{x}=-1},$$

$$\left(\frac{u_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0} U_\infty}\right)_{x=-1} = \left(\frac{u_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0} U_\infty}\right)_{\bar{x}=-1}$$

gegeben sind, wenn außerdem gilt:

$$d_{0\alpha} \left(\frac{u_{0\alpha A}}{d_{0\alpha} U_\infty}\right)_{x=-1} = d_{0\alpha} \frac{4}{\pi} [2{,}5 - \ln 2 + \ln (\Delta x_{II})]$$
$$= d_{0\alpha} [2{,}300 + 1{,}273 \ln (\Delta x_{II})] \ldots \quad \text{(VI, 48)}$$

Damit wird für die Profile mit einziffrigen Indizes und

$$\frac{u_{\Re_r}}{U_\infty} = \sum_{\nu=2}^{\nu} d_\nu \left(\frac{u_\nu}{d_\nu U_\infty}\right)_{\bar{x}=-1} + d_{\alpha 0} \left(\frac{u_{\alpha 0}}{d_{\alpha 0} U_\infty}\right)_{\bar{x}=-1}. \quad \text{(VI, 49)}$$

und für Profile mit Nasenradius

$$\frac{u_{\Re}}{U_\infty} = \frac{u_{\Re_r}}{U_\infty} + d_{0\alpha} \left(\frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha} U_\infty}\right)_{x=-1} \ldots \quad \text{(VI, 50)}$$

An der Hinterkante des Profiles erhalten wir die gleichen Formeln, nur für die Abszisse $\bar{x} = +1$ und $x = +1$ gerechnet.

Führen wir Gl. (VI, 50) in die Gl. (VI, 44) für den Faktor des quadratisch kleinen Gliedes der Dickenkonstanten d_1, d_{12} oder d_{123} ein, so wird nach kurzer Zahlenrechnung nach Tafel III, 1 und 4:

$$n\, d_1 = n\, d_{12} - n\, d_{123} = 3\, d_1 + \frac{9}{4} d_{12} + \frac{35}{16} d_{123} - \frac{5}{2} d_{32}$$
$$- \frac{5}{8} d_{42} - \frac{1}{4} d_{53} - 0{,}637\, d_{\alpha 0} + d_{0\alpha} \left(\frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha} U_\infty}\right)_{x=-1} \ldots \quad \text{(VI, 51)}$$

Die Werte $\left(\frac{u_{0\alpha}}{d_{0\alpha} U_\infty}\right)_{x=-1}$ der Gl. (VI, 48) sind im III. Beitrag, Kurvenblatt 1 des Rechenverfahrens, zahlenmäßig gegeben.

An der Profilnase sind auch die Gl. (VI, 17) und (VI, 18) nicht mehr anwendbar, weil dort für die Korrekturen $\Delta_T u$, $\Delta_T v$ gilt: $(\Delta_T u)_{\bar{x} \to -1} \to \infty$ und $(\Delta_T v)_{\bar{x} \to -1} \to \infty$.

Deshalb wird man die von den Quellverteilungen q_1, q_{12}, q_{123} und $q_{0\alpha}$ und der Wirbelverteilung γ_π induzierten Störgeschwindigkeiten auf der Profilkontur nicht mehr von den Geschwindigkeiten auf der Profilachse aus berechnen können, sondern direkt die Störgeschwindigkeiten auf der Profilkontur suchen müssen, die in den Kurvenblättern III, 2 bis III, 8 des Rechenverfahrens im III. Beitrag gegeben sind.

4. Anhang.

a) Bemerkungen zur Berechnung der 2. Näherung:

Bei der Berechnung der 2. Näherung der Singularitätenverteilung setzen wir die Ergebnisse der 1. Näherung (die Quellenverteilung q_{AI} und die von den Wirbeln induzierten Mittelwerte $\bar{v}_{AI}$) als bekannt voraus (nach dem III. Beitrag). Wir suchen nur die zusätzlichen Singularitäten, die quadratisch klein und theoretisch (mit Beitrag V und Beitrag VI 2 und Gl. (VI. 11) bis (VI, 14)) angegeben sind. Die Punkt für Punkt durchzuführende Berechnung der Korrekturen der Quellverteilungen $(q_{AII} - q_{AI})$ und der zu den Wirbelverteilungen führenden Mittelwerte $(\bar{v}_{AII} - \bar{v}_{AI})$ ist sehr zeitraubend[17]) und nur in den sehr seltenen Fällen notwendig, wo nach der 2. Näherung noch eine höhere Näherung gerechnet werden soll. Da wir uns jedoch mit der 2. Näherung begnügen wollen, können wir uns die Rechenarbeit erleichtern, wenn dadurch auch die Ergebnisse der 2. Näherung an Genauigkeit einbüßen. Wir nehmen an, daß die zusätzlichen Singularitäten der 2. Näherung aus den bekannten Singularitäten der 1. Näherung gebildet sind, so daß die sich daraus ergebende Singularitätenverteilung in einer bestimmten Anzahl von Punkten mit der punktweise gegebenen genauen Singularitätenverteilung der 2. Näherung übereinstimmt. Die dabei auftretenden Ungenauigkeiten bleiben um so kleiner, je größer die Anzahl der übereinstimmenden Punkte und damit die Anzahl der einzelnen Singularitätenverteilungen ist. Für die linke Seite der Gl. (VI, 11) bzw. (VI, 13) wählen wir den Ansatz

[14]) Vgl. Beitrag III, Abschnitt 3 und dort Gl. (III, 52).

[15]) Nach F. Kalscheuer.

[16]) Der Ansatz $\Delta x_{II} = \Delta_r x_{II} + \Delta_\varepsilon x_{II} = \Delta_r x_{II} \left(1 + \frac{\Delta_\varepsilon x_{II}}{\Delta_r x_{II}}\right)$ läßt sich sofort überblicken, so lange $\Delta_\varepsilon x_{II}$ sehr viel kleiner bleibt als $\Delta_r x_{II}$, was in den meisten praktisch auftretenden Fällen der Fall sein wird. Dann tritt der Quotient zu ω_I in Gl. (VI, 34) und wäre nur dann in 2. Näherung zu berücksichtigen, wenn er nicht kleiner als von der Größenordnung δ ist. Dann würde aber das Profil bei den normalerweise auftretenden Vorderkantenwinkeln einen so kleinen Nasenradius haben, daß er in die Größenordnung des in der 2. Näherung nicht vermeidbaren Abrundungsradius des Winkels kommt. Wenn eine solche Korrektur dennoch erforderlich wäre, so würde Gl. (VI, 34) bzw. (VI, 44) in die Form übergehen

$$\omega_I = 2 \frac{u_{\Re}}{U_\infty} + 6\, d_1 - 2\, n\, d_1 - \frac{\Delta_\varepsilon x_{II}}{\Delta_r x_{II}} = 0.$$

[17]) Vgl. hierzu Beitrag V.

$$\left.\begin{aligned}(q_{A\,II} - q_{A\,I}) &\approx \sum_{\nu\mu} m_{\nu\mu} \frac{q_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty} \\ \text{bzw.} \quad (q_{A\,II\,\mathfrak{A}} - q_{A\,I\,\mathfrak{A}}) &\approx \sum_{\nu\mu} m_{\mathfrak{A}\nu\mu} \frac{q_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty}\end{aligned}\right\} \quad (\text{VI}, 52)$$

und für die der Gl. VI, 12 bzw. VI, 14:

$$\left.\begin{aligned}(\bar{v}_{A\,II} - \bar{v}_{A\,I}) &\approx \sum_{n} p_n \frac{v_n}{s_n U_\infty} \\ \text{bzw.}^{18)} \quad (v_{A\,II\,\mathfrak{A}} - v_{A\,I\,\mathfrak{A}}) &\approx \sum_{n} p_{\mathfrak{A}n} \frac{v_n}{s_n U_\infty}\end{aligned}\right\} \quad (\text{VI}, 53)$$

Die rechte Seite der genannten Gleichungen wird aus den Ergebnissen der 1. Näherung und nach Gl. (VI, 27) und (VI, 31) mit Tafel III, 8 für eine bestimmte Anzahl von Punkten $\bar{x}_\tau$ berechnet. Die Zahl τ der Punkte muß gleich der Anzahl der freien Konstanten m bzw. p sein, ihr Ort wird aus praktischen Gründen so gewählt, daß dort gerade eine der Singularitäten $q_{\nu\mu}$ oder γ_n eine Nullstelle besitzt. Die Lösung der τ linearen Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten $m_{\nu\mu}$ ($m_{\mathfrak{A}\nu\mu}$) und pn ($p_{\mathfrak{A}n}$), die beide von der Tropfen- und der Skelettform abhängen, ist leicht durchzuführen. Dabei ist noch zu beachten, daß die Konstante m_{12} (bzw. m_{123} oder m_1) nach Beitrag VI, 3 nicht frei wählbar ist, sondern mit Gl. (VI, 51) gegeben ist:

$$m_{12} = n\, d_{12};\; m_{123} = n\, d_{123};\; m_1 = n\, d_1, \quad (\text{VI}, 54)$$

[18]) Hier enthält n auch den Index $\mathfrak{A}$.

und daß die Punkte $\bar{x}_\tau$ nicht in der Nähe ($\bar{x}_\tau > -0{,}5$) der Profilnase gewählt werden dürfen, weil dort das Iterationsverfahren versagt.

Sobald die Konstanten m und p bestimmt sind, ist die Berechnung der Störgeschwindigkeiten Gl. (VI,15) und (VI,16) sehr einfach, denn mit ihnen sind die noch unbekannten Geschwindigkeitsanteile durch

$$\left.\begin{aligned}(\bar{u}_{A\,II} - \bar{u}_{A\,I}) &\approx \sum_{\nu\mu} m_{\nu\mu} \frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty} \\ \text{bzw.} \quad (\bar{u}_{A\,II\,\mathfrak{A}} - \bar{u}_{A\,I\,\mathfrak{A}}) &\approx \sum_{\nu\mu} m_{\mathfrak{A}\nu\mu} \frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty}\end{aligned}\right\} \quad (\text{VI}, 55)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(\gamma_{A\,II} - \gamma_{A\,I}) &\approx \sum_{n} p_n \frac{u_n}{s_n U_\infty} \\ \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}(\gamma_{A\,II\,\mathfrak{A}} - \gamma_{A\,I\,\mathfrak{A}}) &\approx \sum_{n} p_{\mathfrak{A}n} \frac{u_n}{s_n U_\infty}\end{aligned}\right\} \quad (\text{VI}, 56)$$

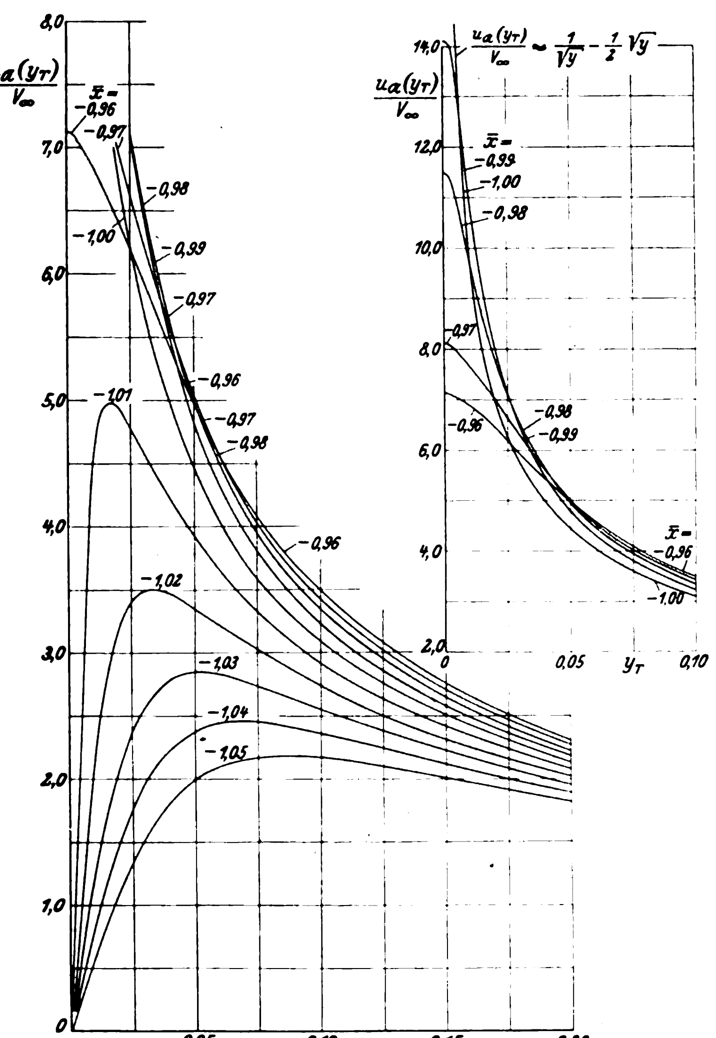
gegeben.

In der Umgebung der Profilnase werden die Gl. (VI, 15) und (VI, 16) zu ungenau, weil die Korrekturen Gl. (VI, 27) (VI, 28) und (VI, 31) dort nicht mehr richtig bestimmt sind. Die Korrekturen der Gl. (VI, 27) werden dadurch ersetzt, daß man in den Störgeschwindigkeitsanteilen selbst die Änderung der Geschwindigkeit von der Profilachse zur Profilkontur in voller Größe berücksichtigt[19]). Statt u_l erhalten wir jetzt $u_l\,(y_T)$, statt v_l jetzt $v_l\,(y_T)$ usw. und damit für

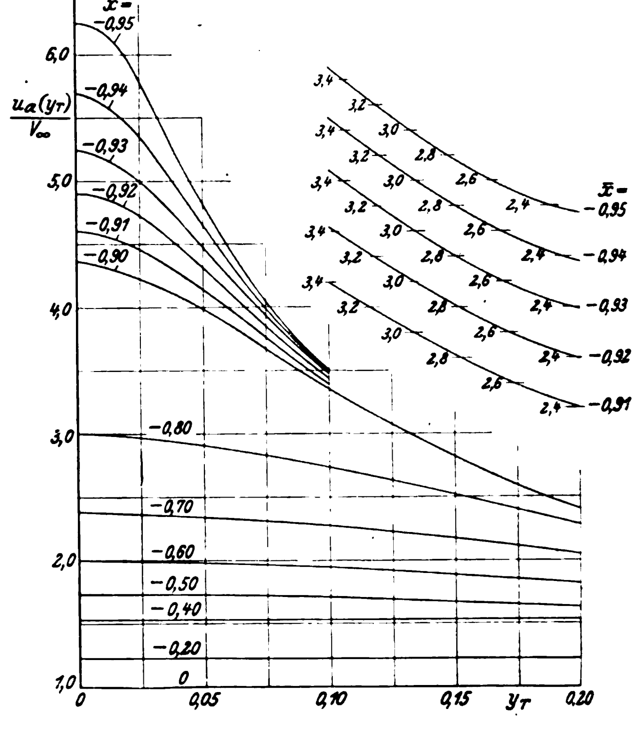
$$\frac{u_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty} \rightarrow \frac{u_{\nu\mu}(y_T)}{d_{\nu\mu} U_\infty};\quad \frac{v_{\nu\mu}}{d_{\nu\mu} U_\infty} \rightarrow \frac{v_{\nu\mu}(y_T)}{d_{\nu\mu} U_\infty} \quad (\text{VI}, 57)$$

und entsprechend für die Geschwindigkeitsanteile $\mathfrak{A}$. Soweit diese von der Profilordinate abhängigen Störgeschwindigkeiten im III. Beitrag schon gebraucht wurden, sind sie zahlenmäßig im Anhang III. und als Kurvenblätter im Rechenverfahren zu III. angegeben. Die Komponenten $\frac{u_{\mathfrak{A}}(y_T)}{V_\infty}$ und $\frac{v_{\mathfrak{A}}(y_T)}{V_\infty}$ sind in den Kurvenblättern VI, 1 und VI, 2 aufgezeichnet. Für die übrigen von den Quell-

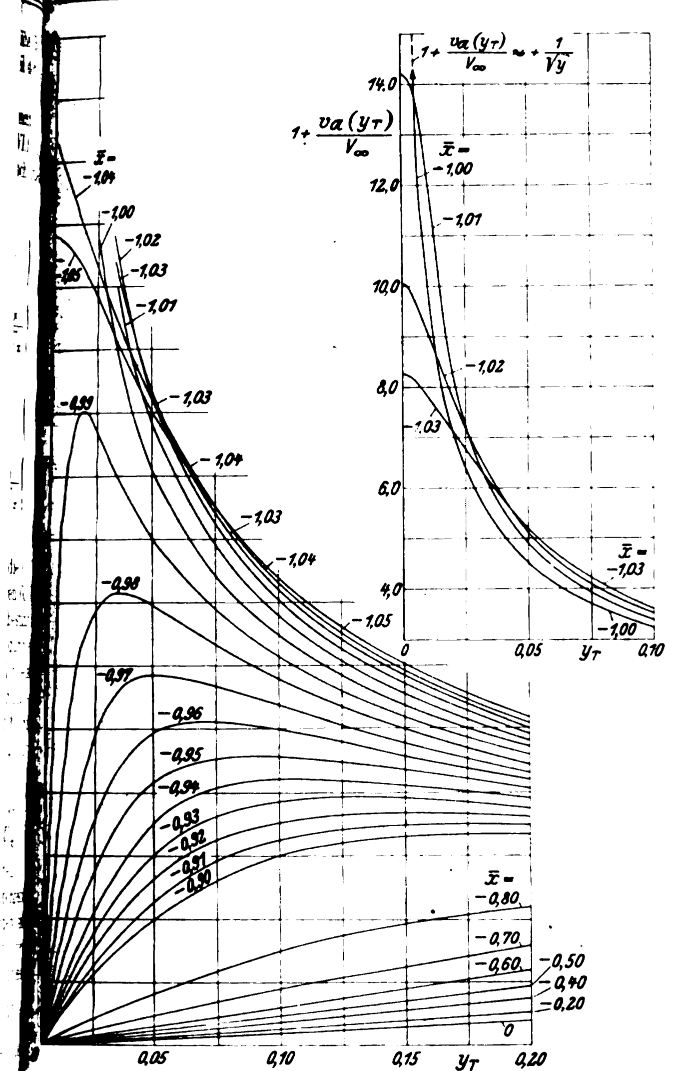
[19]) Vgl. Tafel III, 5 bis 7 und das Rechenverfahren für die Profilnase im Beitrag III.



Kurvenblatt VI, 1 a. Die Geschwindigkeitskomponente $\frac{u_{\mathfrak{A}}(y_r)}{V_\infty}$ aufgetragen über y_r. Parameter $\bar{x}$: $-1{,}05 \leq \bar{x} \leq -0{,}96$.



Kurvenblatt VI, 1 b. Die Geschwindigkeitskomponente $\frac{u_{\mathfrak{A}}(y_T)}{V_\infty}$ aufgetragen über y_T. Parameter $\bar{x}$: $-0{,}95 \leq \bar{x} \leq 0$.



Kurvenblatt VI, 2. Die Geschwindigkeitskomponente $1+\frac{v_a(y_T)}{V_\infty}$ aufgetragen über y_T. Parameter $\bar{x}$: $-1{,}05 \leq \bar{x} < 0$.

verteilungen induzierten Geschwindigkeiten ($\nu\mu = 32$, 42, 53, α 0) genügen auch an der Profilnase die Näherungen der Gl. (VI, 15) und Gl. (VI, 16).

Für die Wölbungseinflüsse liegen die Verhältnisse an der Nase etwas anders. Da die Neigung der Wölbungsformen für die gebräuchlichen schwachen Wölbungen klein sind, wollen wir im allgemeinen für Fehlerabschätzungen $\frac{\Delta_T v_n}{y_T s_n U_\infty}$ vernachlässigen und können dann auch für die Umgebung der Profilnase auf eine Ausnahmestellung verzichten. Genau genommen müßten $\frac{v_n}{s_n U_\infty}$ durch $\frac{v_n(y_T)}{s_n U_\infty}$ und ebenso $\frac{u_n}{s_n U_\infty}$ durch $\frac{u_n(y_T)}{s_n U_\infty}$ nach Tafel III, 7 ersetzt und berechnet werden, während die Gl. (VI, 28) und (VI, 31) nach Gl. (VI, 23) zu bestimmen sind. Wer sich nicht mit einer Fehlerabschätzung der 1. Näherung begnügen will, muß die angegebenen Berechnungen vor der Anwendung ausführen.

b) Bemerkungen zur Berechnung der Luftkräfte am Profil.

Im III. Beitrag (s. III. Abschnitt 2 Anhang) sind Auftrieb und Moment, sowie Nullauftriebsrichtung und Anblasrichtung des tangentialen Eintritts für die 1. Näherung berechnet worden. Sie sind deshalb nur von der Wölbungsform oder vom Anstellwinkel $\alpha^* \sim \delta$ abhängig. In der 2. Näherung wird auch die Tropfenform die Luftkräfte am Profil beeinflussen, ebenso wie die quadratischen Glieder aus den Wölbungskonstanten und dem Anstellwinkel α^*. Bei der Berechnung dieser neuen Einflüsse werden aber nicht nur die quadratisch kleinen Wirbelverteilungen durch die Konstanten p_n bzw. $p_{\bar{x}\,n}$ wirksam, sondern es treten durch die Tatsache, daß die Singularitäten sich in einer gestörten Strömung befinden, neue quadratisch kleine Glieder hinzu, die nach M. Lagally [15] oder A. Betz [16] berechnet werden müssen. Dabei zeigt sich, daß sich die Einflüsse der Störgeschwindigkeiten auf die Singularitäten ($u \cdot q$, $u \cdot \gamma$ und $v \cdot q$, $v \cdot \gamma$) bei den Luftkräften gegenseitig aufheben, während sie bei den Momenten tatsächlich berechnet werden müssen.

5. Zusammenfassung.

Die vorliegenden Untersuchungen sind in der Hauptsache für den Theoretiker von Interesse. Zunächst wird die Berechnung der Singularitätenverteilungen dadurch vom Anstellwinkel unabhängig gemacht, daß man sie für den Anstellwinkel des tangentialen Eintritts $\alpha_{s\,opt}$ (Anblasgeschwindigkeit U_∞) und für die dazu senkrechte Anblasrichtung (Anblasgeschwindigkeit V_∞) getrennt berechnet, sie mit den von der Größe des Anstellwinkels abhängigen Geschwindigkeitskomponenten U_∞ und V_∞ multipliziert

Zahlentafel VI 1. $\frac{u_{\bar{x}}}{V_\infty}$

x \ y	0	0,025	0,050	0,075	0,10	0,15	0,20
−1,05	0	1,355	1,997	2,168	2,165	2,002	1,821
−1,04	0	1,777	2,371	2,447	2,356	2,114	1,89
−1,03	0	2,382	2,844	2,729	2,549	2,218	1,954
−1,02	0	3,411	3,34	3,022	2,733	2,312	2,018
−1,01	0	4,791	3,91	3,328	2,919	2,408	2,073
−1,00	∞	6,251	4,455	3,585	3,086	2,494	2,128
−0,99	14,1	7,10	4,822	3,795	3,224	2,570	2,18
−0,98	11,48	7,088	4,966	3,946	3,342	2,637	2,22
−0,97	8,1	6,64	5,01	4,038	3,427	2,695	2,266
−0,96	7,13	6,188	4,95	4,068	3,482	2,742	2,302
−0,95	6,245	5,773	4,81	4,059	3,506	2,771	2,339
−0,94	5,69	5,347	4,648	4,008	3,501	2,80	2,366
−0,93	5,24	5,009	4,474	3,946	3,479	2,816	2,383
−0,92	4,90	4,731	4,329	3,863	3,438	2,824	2,394
−0,91	4,60	4,462	4,153	3,769	3,394	2,821	2,406
−0,90	4,36	4,217	3,996	3,674	3,350	2,817	2,403
−0,80	3,00	2,968	2,901	2,826	2,735	2,518	2,282
−0,70	2,38	2,369	2,340	2,309	2,267	2,171	2,041
−0,60	2,00	1,990	1,980	1,961	1,940	1,886	1,816
0,50	1,731	1,728	1,723	1,714	1,697	1,671	1,624

Zahlentafel VI 2. $\frac{v_{\bar{x}}}{V_\infty}$

x \ y	0	0,025	0,050	0,075	0,10	0,15	0,20
−1,05	5,41	4,907	4,022	3,245	2,704	2,012	1,59
−1,04	6,14	5,143	4,121	3,246	2,674	1,961	1,548
−1,03	7,25	5,791	4,173	3,207	2,604	1,919	1,505
−1,02	9,05	6,183	4,116	3,118	2,514	1,857	1,461
−1,01	13,2	6,221	3,911	2,949	2,393	1,774	1,408
−1,00	∞	5,379	3,534	2,700	2,242	1,681	1,358
−0,99	−1,0	3,85	3,024	2,448	2,07	1,597	1,290
−0,98	−1,0	2,45	2,478	2,164	1,896	1,493	1,231
−0,97	−1,0	1,455	1,929	1,838	1,69	1,390	1,159
−0,96	−1,0	0,812	1,468	1,55	1,494	1,282	1,094
−0,95	−1,0	0,384	1,075	1,265	1,285	1,175	1,023
−0,94	−1,0	0,058	0,756	1,038	1,106	1,055	0,950
−0,93	−1,0	−0,115	0,500	0,802	0,930	0,950	0,873
−0,92	−1,0	−0,248	0,322	0,613	0,764	0,841	0,806
−0,91	−1,0	−0,368	0,130	0,449	0,627	0,745	0,737
0,90	−1,0	−0,430	0	0,306	0,500	0,651	0,666
−0,80	−1,0	−0,795	−0,596	−0,411	−0,259	−0,045	0,098
−0,70	−1,0	−0,882	−0,773	−0,660	−0,561	−0,385	−0,217
−0,60	−1,0	−0,923	−0,844	−0,770	−0,697	−0,560	−0,410
−0,50	−1,0	−0,941	−0,882	−0,824	−0,774	−0,655	−0,533

und dann addiert. Diese Addition der Singularitäten ist exakt richtig. Die einzelnen im V. Beitrag notwendigen quadratisch kleinen Glieder des Iterationsverfahrens werden für die vorliegende Profilsystematik (I. und II. Beitrag) berechnet und mit diesen die 2. Näherung der Geschwindigkeitsberechnung angegeben. In der Umgebung der Profilnase führt die besonders untersuchte 2. Näherung zur Verzerrung (Verkürzung) der Singularitätenstrecke und sie bestimmt das quadratisch kleine Glied der für den Nasenradius verantwortlichen Quellverteilung aus den Bedingungen an der Profilnase. Außerdem kann dort für die wesentlichen Singularitätenverteilungen die Änderung der Störgeschwindigkeiten von der Belegungslinie zur Profilkontur nicht mehr für kleine Ordinaten y entwickelt werden.

Im Anhang finden sich praktische Hinweise für das Aufstellen eines Rechenverfahrens, das aber nicht in allen Einzelheiten wiedergegeben ist, und in der vorliegenden Form als Fehlerabschätzung zur 1. Näherung gedacht ist.

6. Schrifttum.

[1] bis [4] vgl. das Schrifttum des I. Beitrages.
[5] und [6] vgl. das Schrifttum des II. Beitrages.
[7] bis [9] vgl. das Schrifttum des III. Beitrages.
[10] bis [13] vgl. das Schrifttum des IV. Beitrages (bisher nicht veröffentlicht).
[14] M. M. Munk, General theory of thin wing sections. NACA — Rep. 142 (1922) vgl. S. 257 Fußnote.
[15] M. Lagally, Z. Angew. Math. Mech. Bd. 2 (1922) S. 409.
[16] A. Betz, Singularitätenverfahren zur Ermittlung der Kräfte und Momente auf Körper in Potentialströmungen. Ing. Archiv, Bd. 3 (1932) S. 454.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 | 20. Juli 1943 | Lfg. 7

Über das Korrosionsverhalten von plattierten Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen.

Von Walter Bungardt, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

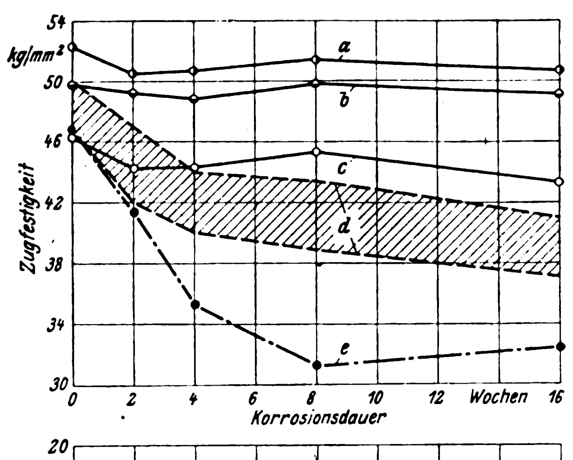
Durch Korrosionsversuche nach DIN E 4853 wird nachgewiesen, daß Bleche aus plattierten Al-Zn-Mg- bzw. Al-Zn-Mg-Cu- Legierungen nach Kalt- bzw. Warmaushärtung bei mindestens gleicher Festigkeit dieselbe Spannungs- und Oberflächenkorrosionsbeständigkeit wie Bleche aus plattierten Al-Cu-Mg-Legierungen aufweisen. Als Plattierwerkstoff wird eine Aluminiumlegierung mit 3% $MgZn_2$ empfohlen.

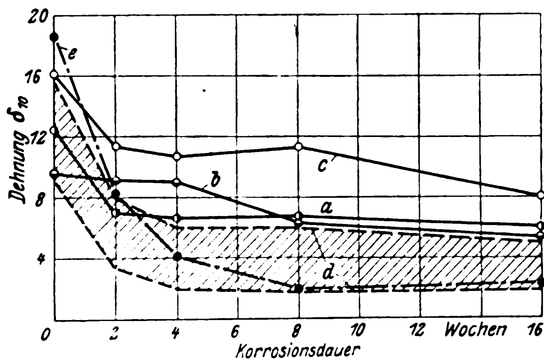
Gliederung.

I. Einleitung.

Die allgemeine Korrosionsbeständigkeit von Leichtmetallblechen aus kupferfreien bzw. kupferarmen Al-Zn-Mg-Legierungen ist, wie Bild 1 für einige Legierungen mit 4 bis 5% Zink und 3 bis 4% Magnesium in verschiedenen Werkstoffzuständen zeigt, größer als die der bekannten Al-Cu-Mg-Legierungen vom Duralumintyp; jedoch wird die Korrosionsbeständigkeit von Verbundwerkstoffen aus einer Kernlegierung der letzten Gattung mit einer Plattierschicht aus Reinaluminium oder einer anderen korrosionsbeständigen Aluminiumlegierung nicht erreicht. Ein Vergleich der von H. Gröber[1]) an acht verschiedenen, wasserabgeschreckten und kaltausgehärteten Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen ermittelten Korrosionsbeständigkeit — die Meßergebnisse lagen ohne systematischen Zusammenhang mit den Zink- und Magnesium-Gehalten der Legierungen innerhalb des in Bild 1 schraffierten Gebietes — und den an einer ähnlich zusammengesetzten, aber kupferärmeren Legierung (Leg. A) gewonnenen Ergebnissen, zeigt die große Bedeutung von Kupferzusätzen für das allgemeine Korrosionsverhalten, deren Einfluß den des Werkstoffzustandes (kalt- oder warmausgehärtet) im allgemeinen überwiegt. Die Warmlagerungszeiten bei 100 bzw. 130° sind bei diesen Versuchen so gewählt worden, daß das Maximum der Verfestigung erreicht wird. Nach Bild 1 wird durch 0,3% Kupfer der Korrosionswiderstand dieser Legierungen bereits beträchtlich verringert, während nach früheren Beobachtungen[2]) kleine Kupfergehalte bis zu etwa 0,1% ohne merklichen Einfluß auf das Korrosionsverhalten sind und erst bei wesentlich höheren Kupferzusätzen, z. B. von mehr als 1%, schließlich nur noch die geringe Beständigkeit der Al-Cu-Mg-Legierungen erreicht wird.

Eine wesentliche Verbesserung der Oberflächenkorrosionsbeständigkeit von Blechen aus Al-Zn-Mg-Legierungen



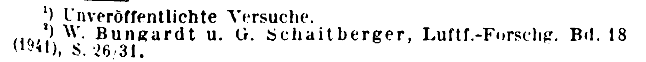


Chemische Zusammensetzung der untersuchten Legierungen.

Bez.	Zn	Mg	Cu	Mn	Si	Fe	V	Cr	Al
Legierung A	4,29	3,45	0,07	0,22	0,13	0,22	0,06	0,18	Rest
Legierung B	4,03 bis 4,83	3,02 bis 4,12	0,29 bis 0,34	0,30 bis 0,40	0,12 bis 0,23	0,20 bis 0,34	0,03 bis 0,12	0,15 bis 0,27	„

Bild 1. Ergebnisse von Korrosionsversuchen mit Blechen von 1 mm Dicke aus verschiedenen Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen im DVL-Wechseltauchgerät in 3proz. reiner Kochsalzlösung.
a) Warm ausgehärtet (100°/6 Tage), Leg. A.
b) Warm ausgehärtet (130°/2 Tage), Leg. A.
c) Wasserabgeschreckt, kalt ausgehärtet, Leg. A.
d) Wasserabgeschreckt, kalt ausgehärtet Leg. B (nach Gröber).
e) Al-Cu-Mg nach DIN 1713 Gattung 1 unplattiert.

läßt sich nun, ähnlich wie bei Al-Cu-Mg-Legierungen, durch Schweißplattieren erzielen. Voraussetzung hierfür ist, daß der Plattierwerkstoff selbst korrosionsbeständig und elektrochemisch unedler als die Kernlegierung ist. Nur dann, wenn diese beiden Forderungen erfüllt sind, erhält man korrosionsfeste Verbundwerkstoffe, die auch an den Schnittkanten oder Stellen mit nicht zu großen Verletzungen in der



[1]) Unveröffentlichte Versuche.
[2]) W. Bungardt u. G. Schaitberger, Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 26/31.

schützenden Deckschicht durch Fernschutzwirkung gegen schnelle Zerstörung geschützt sind[3]).

Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen mit höheren Zinkgehalten sind im Gegensatz zu Al-Cu-Mg-Legierungen unedler als Reinaluminium oder Al-Mg-Si-Legierungen, so daß die letztgenannten, bei Al-Cu-Mg-Legierungen vorwiegend verwendeten Plattierwerkstoffe für Al-Zn-Mg-Legierungen keine ausreichende Korrosionsbeständigkeit gewährleisten können. Durch Korrosionsversuche nach DIN E 4853 wurde früher an 1 mm dicken plattierten Blechen, deren Kernwerkstoff aus einer $MgZn_2$-haltigen Aluminiumlegierung bestand und die mit einer dünnen Deckschicht aus Reinaluminium bzw. einer Al-Mg-Si-Legierung versehen worden waren, nachgewiesen, daß diese Kombination wegen starker Anfälligkeit an den Schnittkanten nur etwa dieselbe Korrosionsbeständigkeit wie der ungeschützte Kernwerkstoff besitzt. Ebenso vermögen diese Plattierungen eine spannungskorrosionsanfällige Kernlegierung nicht vor Spannungskorrosionsrissen zu schützen. Bild 2 mit neueren Versuchsergebnissen von H. Voßkühler[4]), die an mit Reinaluminium plattierten bzw. nichtplattierten, 1 mm dicken Blechen aus einer Al-Zn-Mg-Legierung mit etwa 4,5% Zn und 3,5% Mg erhalten wurden, bestätigen dieses Ergebnis. In der gleichen Richtung liegen auch Beobachtungen von P. Brenner[5]). Auf Grund der bei Potentialmessungen an verschiedenen Al-Zn-Mg-Legierungen gemachten Beobachtungen läßt sich das zum wirksamen Korrosionsschutz notwendige Potentialgefälle vom Kernwerkstoff zur Plattierung in einfacher Weise durch Zulegieren von Kupfer zum Kernwerkstoff gewinnen. Das Potential des Kerns kann hierdurch so weit veredelt werden, daß als Plattierwerkstoff Reinaluminium verwendet werden kann. Besonders vorteilhaft erschien jedoch eine Aluminiumlegierung mit 3% $MgZn_2$, die nach früheren Erfahrungen gut korrosionsbeständig ist. Mit einer derartigen Plattierung wird selbst dann ein Vorteil zu erwarten sein, wenn — z. B. bei kupferarmen Al-Zn-Mg-Legierungen — die Potentialunterschiede zwischen Kern und Plattierung geringer sein sollten, jedoch der Plattierung eine bessere Oberflächenkorrosionsbeständigkeit zukommt.

Die im folgenden beschriebenen, an Blechen von 1 mm Dicke gewonnenen Ergebnisse zeigen, in welchem Maße die Korrosionsbeständigkeit von Al-Zn-Mg-Legierungen auf dem angegebenen Wege verbessert werden kann.

II. Versuchsbleche und Versuchsgestaltung.

Untersucht wurden die in Zahlentafel 1 angegebenen Werkstoffe. Blech 1 besteht im Kern aus einer Al-Zn-Mg-Cu Legierung, die mit etwa 3% $MgZn_2$ enthaltendem Aluminium plattiert wurde. Legierung 2, deren Kernwerkstoff Mg-reicher aber Cu-ärmer ist, wurde mit einer Deckschicht aus derselben Legierung versehen. Die beiden Legierungen 3 und 4 auf der Basis Al-Cu-Mg (Flw. 3126) wurden vergleichsweise mituntersucht; sie unterscheiden sich nur in der Pattierung[6]). Die Dicke der Plattierung war bei allen Blechen gleich; sie betrug je Schicht 5% der Blechdicke.

[3]) W. Bungardt u. H. Bedarff, Metallwirtschaft Bd. 21 (1942), S. 31/38.

[4]) Unveröffentlichte Versuche; Herrn Dr.-Ing. H. Voßkühler sei auch an dieser Stelle für die freundliche Überlassung dieser Versuchsergebnisse bestens gedankt.

[5]) P. Brenner, Z. VDI Bd. 87 (1943), S. 105/109.

[6]) Die Versuchsbleche 1 und 2 wurden im Metall-Laboratorium der I. G. Farbenindustrie, Bitterfeld, hergestellt und der DVL kostenlos geliefert. Auch an dieser Stelle sei der I. G. Farbenindustrie, insbesondere Herrn Dr. Siebel, für die freundliche Unterstützung bestens gedankt.

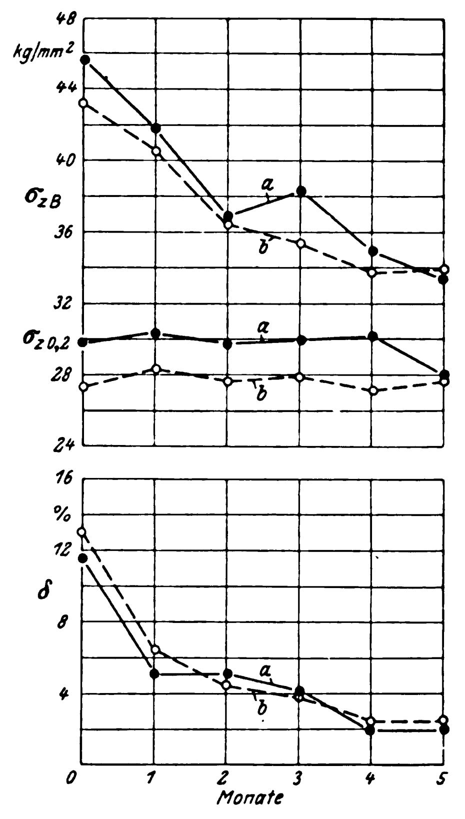


Bild 2. Korrosionsversuche an 1 mm dicken Blechen aus plattierten bzw. nichtplattierten Al-Zn-Mg-Legierungen im DVL-Wechseltauchgerät in künstlichem Seewasser (nach H. Voßkühler 1941).
a) Hy 43, unplattiert; b) Hy 43, mit Reinaluminium plattiert.

Die Untersuchung erstreckte sich auf die Bestimmung:
1. Der statischen Festigkeitseigenschaften nach Kalt- und Warmaushärtung, 2. Des Spannungskorrosionsverhaltens, 3. Der Oberflächenkorrosionsbeständigkeit.

Die Legierungen wurden in folgender Weise warmbehandelt:

Legierung 1 und 2: 450°/20 min (Luftofen) / Wasserabschreckung / Raumtemperaturlagerung. Die Warmaushärtung wurde nach viermonatiger Raumtemperaturvorlagerung bei 120° während 24 h durchgeführt.

Legierung 3 und 4: 500°/15 min (Luftofen) / Wasserabschreckung / Raumtemperaturlagerung.

Die Warmaushärtung wurde nach achttägiger Raumtemperaturvorlagerung bei 160° während drei Tage durchgeführt.

Vor Beginn der Korrosionsversuche lagerten die Proben, deren Beständigkeit im kaltausgelagerten Zustand geprüft werden sollte, sechs Monate und die warmausgehärteten etwa zwei Monate bei Raumtemperatur.

III. Versuchsergebnisse.

1. Statische Festigkeit.

Die statischen Festigkeitswerte sind in Zahlentafel 2 zusammengefaßt. Im kaltausgehärteten Zustand sind die Bleche 1, 3 und 4 gleichwertig, während die Legierung 2 höhere Streckgrenzen und Zugfestigkeitswerte aufweist.

Zahlentafel 1. Chemische Zusammensetzung der untersuchten Bleche.

Bez.	Chemische Zusammensetzung des Kernwerkstoffs in %								Chemische Zusammensetzung der Plattierung in %					
	Zn	Mg	Cu	Mn	Fe	Si	V	Al	Zn	Mg	Mn	Fe	Si	Al
1	4,35	1,52	1,55	0,15	0,12	0,08	0,12	Rest	2,68	0,62	0,18	0,01	0,07	Rest
2	4,35	3,51	0,27	0,30	0,08	0,09	Cr 0,25	«	2,68	0,62	0,18	0,01	0,07	«
3	—	0,99	3,42	1,00	0,50	0,44	—	«	—	0,70	0,95	0,12	0,12	«
4	—	0,99	3,42	1,00	0,50	0,44	—	«	—	—	—	0,30	0,20	«

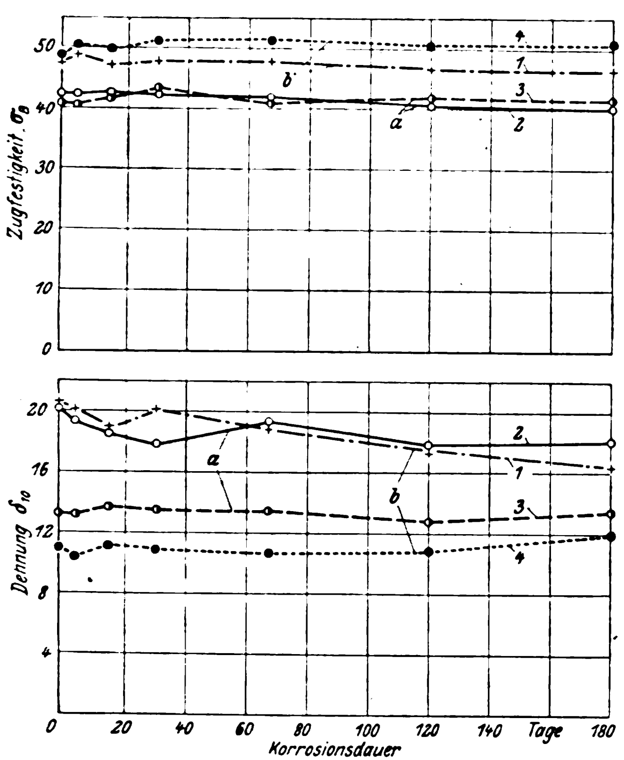


Bild 3. Ergebnisse der Rührkorrosionsversuche mit plattierten, kalt- u. warmausgehärteten Al-Zn-Mg-Legierungen (Bleche von 1 mm Dicke).

a) Kernwerkstoff: 4,5 % Zn, 1,5 % Mg, 1,5 % Cu, 0,10 % V, Rest Al,
b) Kernwerkstoff: 4,5 % Zn, 3,5 % Mg, 0,3 % Cu, 0,25 % Cr, Rest Al.
Plattierwerkstoff: In beiden Fällen 3,0 % $MgZn_2$, Rest Al (99,9 %).

1. 450°/20 min/abgeschr./kaltausgeh.,
2. 450°/20 min/abgeschr./kaltausgeh.,
3. 450°/20 min/abgeschr./4 Mon. bei Raumtemperatur gelagert/warmausgeh.,
4. 450°/20 min/abgeschr./4 Mon. bei Raumtemperatur gelagert/warmausgeh.

Zahlentafel 2. Festigkeitseigenschaften der Bleche.

Legierung	Zustand	Streckgrenze kg/mm²	Zugfestigkeit kg/mm²	Dehnung 10 %
1	kaltausgehärtet warmausgehärtet	27,0 33,2	42,3 40,7	21,1 13,2
2	kaltausgehärtet warmausgehärtet	30,0 42,5	48,1 48,6	20,6 11,0
3	kaltausgehärtet warmausgehärtet	27,3 30,9	43,7 47,0	18,0 16,5
4	kaltausgehärtet warmausgehärtet	26,6 31,0	43,7 43,3	19,7 14,6

Auch im warmausgelagerten Zustand ist Legierung 2 allen anderen festigkeitsmäßig, vor allem in der Streckgrenze, überlegen.

2. Spannungskorrosionsverhalten.

Das Spannungskorrosionsverhalten sämtlicher Legierungen im kalt- und warmausgehärteten Zustand — mittels Schlaufenprobe durch Wechseltauchversuch (DVL-Gerät) in künstlichem Seewasser bestimmt — ist sehr gut. Nach 150 tägiger Prüfung waren keine Brüche festzustellen. Infolge des hohen Korrosionswiderstandes der verwendeten Plattierwerkstoffe für die Al-Zn-Mg- bzw. Al-Zn-Mg-Cu-Legierungen 1 und 2 waren die Proben nach dieser Prüfdauer noch blank; ein stärkerer Angriff war nicht erfolgt. Schnittkantenkorrosion, verbunden mit einem Abblättern der Plattierung, konnte in keinem Falle festgestellt werden.

3. Oberflächenkorrosionsbeständigkeit.

Die allgemeine Korrosionsbeständigkeit, durch Rührversuche in einer 3 proz. NaCl-Lösung mit 0,1% H_2O_2-

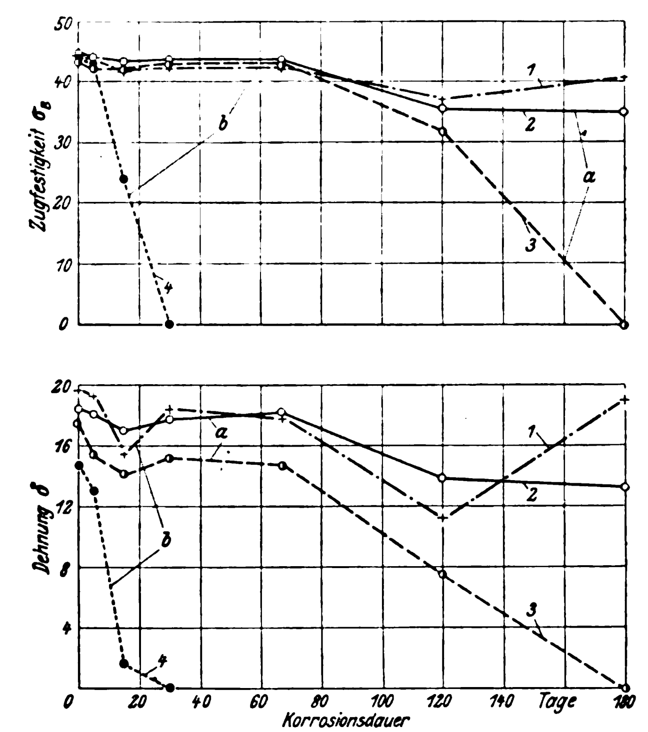


Bild 4. Ergebnisse der Rührkorrosionsversuche mit plattierten, kalt- u. warmausgehärteten Al-Cu-Mg-Legierungen (Bleche von 1 mm Dicke).

a) mit Al-Mg-Si-Legierung plattiert,
b) mit Reinaluminium (99,5 % Al) plattiert.
1. 500°/15 min/abgeschr./kaltausgeh.,
2. 500°/15 min/abgeschr./kaltausgeh.,
3. 500°/15 min/abgeschr./warmausgeh.,
4. 500°/15 min/abgeschr./warmausgeh.

Zusatz an Zugstäben bestimmt, ist nach Bild 3 für die beiden Versuchslegierungen 1 und 2 sowohl nach Kalt- als auch Warmaushärtung sehr gut. In der 180tägigen Prüfung war weder ein nennenswerter Festigkeits- noch Dehnungsverlust festzustellen. Anzeichen für Korngrenzenkorrosion waren nicht festzustellen.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den in Bild 1 mitgeteilten Beobachtungen an unplattierten Blechen, so ist die Bedeutung der Plattierung offensichtlich. Einen besonderen Hinweis verdient die Tatsache, daß auch das kupferhaltige Blech 1 nach Warmaushärtung vollständig korrosionsfest bleibt, was bei dünnen plattierten Blechen aus Al-Cu-Mg-Legierungen nach Warmaushärtung häufig nicht der Fall ist. Wie der zum Vergleich mit den Blechen 3 und 4 durchgeführte Korrosionsversuch zeigt, Bild 4, wird im kaltausgehärteten Zustand die bekannte gute allgemeine Korrosionsbeständigkeit erreicht[7]), die jedoch infolge von Kupfereinwanderung aus dem Kern in die Plattierschicht bis zur Blechoberfläche beim Homogenisieren vor allem bei dem mit Reinaluminium plattierten Blechen nach Warmaushärtung weitgehend verlorengeht.

Herrn Ing. N. Woehl sei für die sorgfältige Durchführung der Versuche bestens gedankt.

IV. Folgerungen.

Aus den mitgeteilten Versuchsergebnissen folgt, daß Bleche aus kalt- und warmausgehärteten Al-Zn-Mg- bzw. Al-Zn-Mg-Cu-Legierungen bei Verwendung geeigneter Plattierwerkstoffe dieselbe Spannungs- und Oberflächenkorrosionsbeständigkeit wie kaltausgehärtete Bleche aus plattierten Al-Cu-Mg-Legierungen besitzen. Die erreichten statischen Festigkeitswerte sind denen, die mit Al-Cu-Mg-Legierungen erhalten werden, gleichwertig. Als Plattierwerkstoff hat sich sowohl für einen kupferarmen als auch kupferreichen Legierungstyp eine Aluminiumlegierung mit 3% $MgZn_2$ gut bewährt.

[7]) P. Brenner, Z. Metallkde. Bd. 27 (1935), S. 169/73.

Einfluß von Stickstoff auf die Eigenschaften einiger austenitischer Ventilkegelstähle*).

Von H. Cornelius und K. Fahsel, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Übersicht über das neuere Schrifttum. — Angaben über die Stickstoffausbeute beim Erschmelzen der Versuchsstähle mit erhöhtem Stickstoffgehalt. — Beständigkeit des Austenits, statische Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit nach verschiedener Warmbehandlung, Warmhärte, Dauerstandfestigkeit bei 700°, Festigkeitseigenschaften in Abhängigkeit von der im Dauerstandversuch aufgetretenen, bleibenden Dehnung, Nitrierhärtbarkeit und Zunderbeständigkeit in Luft, Wärmeausdehnung und Wärmeleitfähigkeit der Versuchsstähle mit 0,43 bis 0,50% C, 1,7 bis 3,5% Si, 1,1 bis 6,7% Mn, 3,1 bis 9,1% Ni, 11,7 bis 18,3% Cr, 0 bis 1,2% W, 0 bis 0,48% Ti und 0,02 bis 0,23% N_2. —

Im Schrifttum der letzten Jahre ist schon mehrfach über austenitische Ventilkegelstähle, darunter solche mit erhöhtem Stickstoffgehalt, berichtet worden. Nach eigenen Versuchen[1]) lassen Stähle mit 0,42 bis 0,52% C, 1,5 bis 2,0% Si, 3,0 bis 5,0% Mn, 6,0 bis 4,5% Ni, 17,5 bis 18,5% Cr und 0,9 bis 1,3% W ein den bekannten Chrom-Nickel-Wolfram-Ventilkegelstählen gleichwertiges Betriebsverhalten erwarten. Ein Austausch des Wolframgehaltes durch 0,8 bis 1,0% V führt zu gutem Dauerstandverhalten. Die praktische Ausnutzung dieser Wirkung des Vanadins setzt einen Oberflächenschutz der Auslaßventilkegel in ihrem thermisch hochbeanspruchten Teil voraus, da Vanadingehalte über 0,5% das Zunderverhalten nachteilig beeinflussen können[2]). W. Tofaute und G. Bandel[3]) glauben auf Grund ihrer Untersuchungen an einer größeren Zahl von Stählen, darunter zwei mit erhöhtem Stickstoffgehalt, dessen austenitstabilisierende Wirkung ausgenutzt werden sollte, daß der 15/13/2 Chrom-Nickel-Wolfram-Ventilkegelstahl in weitem Umfange durch einen Stahl mit kleinerem Nickel- und Wolframgehalt und wahrscheinlich sogar durch einen nickelfreien Chrom-Mangan-Stahl mit Zusatz von Wolfram oder Stickstoff ausgetauscht werden könne. Der sehr geringen Kerbschlagzähigkeit des letzten Stahles bei Raumtemperatur wird unter Hinweis auf seine bessere Kerbschlagzähigkeit in der Wärme weniger Bedeutung beigemessen. Ein Stahl mit 0,4% C, 17% Mn und 12% Cr läßt sich nach F. Rapatz[4]) hinsichtlich seiner Warmfestigkeit durch einen Stickstoffzusatz in ähnlicher Weise verbessern, wie ein Chrom-Nickel-Stahl durch einen etwa 2% betragenden Wolframzusatz. Fügt man dem Chrom-Mangan-Stahl Wolfram und Stickstoff zu, so erhält man eine besonders gute Warmfestigkeit. A. Riedrich[5]) weist darauf hin, daß ein austenitischer Ventilstahl mit 0,4% C, 2,5% Si, 15,5% Mn und 12,5% Cr schon ohne Stickstoff die gleiche Dauerstandfestigkeit hat wie der bekannte Chrom-Nickel-Wolfram-Stahl und hält es daher nicht für erwiesen, daß die gute Warmfestigkeit des von F. Rapatz angeführten Stahles eindeutig auf dessen Stickstoffgehalt zurückzuführen sei. Ein Ventilstahl mit 0,4% C, 1,8% Si, 19,4% Mn, 19,2% Cr und 0,32% N_2 wurde von H. Krainer und K. Swoboda[6]) als besonders warmfest vorgeschlagen. Sie heben den günstigen Einfluß des Stickstoffs auf die Warmfestigkeit der Ventilkegelstähle hervor und machen darauf aufmerksam, daß die Chrom-Mangan-Ventilstähle sehr spröde Nitrierschichten und als weiteren Nachteil eine verminderte Beständigkeit gegen Bleioxyd oder andere Bleiverbindungen haben.

Stickstoff ist als Legierungselement von austenitischen Chrom-Mangan-Stählen[7]) und teilweise oder vollständig austenitischen Chrom-Nickel-Stählen[8]) deshalb von besonderer Bedeutung, weil er den Beständigkeitsbereich des Austenits erweitert. Stickstoffzusätze zu bereits austenitischen Stählen machen den Austenit beständiger. Andererseits kann Stickstoff teilweise an die Stelle von Nickel (oder Mangan) in austenitischen Stählen treten. Die austauschbare Nickelmenge hängt von der Stahlart ab. Durch 0,25% N_2 sollen etwa 2,5 bis 6% Ni ersetzbar sein. Nach einer Angabe von A. Bennek[9]) konnten in einem Stahl mit 25% Cr, 20% Ni und 2% Si sogar 8% Ni durch 0,25% N_2 eingespart werden. Die folgenden Versuche sollen klären, in welchem Ausmaß sich die austenitbildende Wirkung des Stickstoffs in verschiedenen Arten von Ventilkegelstählen auswirkt. Es soll außerdem ein weiterer Beitrag zu der noch nicht eindeutig geklärten Frage der Beeinflussung der Eigenschaften derartiger Stähle durch Stickstoff gegeben werden.

Versuchsstähle und Versuchsdurchführung.

Die Versuchsstähle wurden im 8 kg-Hochfrequenzofen erschmolzen, zu Blöckchen mit 70 bis 80 Dmr. und etwa 220 mm Länge vergossen und zu Stangen mit 18 mm Dmr. verschmiedet. Nach dem letzten, schwachen Überschmieden bei etwa 1050° kühlten die Stangen in Luft ab. Sie wurden anschließend bei 800° 3 h geglüht und wieder luftabgekühlt. Die chemische Zusammensetzung der Stähle enthält Zahlentafel 1. Die Stähle, die ohne absichtlich erhöhten Stickstoffgehalt hergestellt wurden, sind nur mit einer Zahl bezeichnet, während für die stickstofflegierten Stähle dieser Zahl noch ein N zugefügt ist. Mit der gleichen Zahl bezeichnete Stähle unterscheiden sich praktisch nur im Stickstoffgehalt. Die Stähle sind in drei Gruppen eingeteilt. Die erste Gruppe bilden die Stähle 1, 1N, 2, 2N und 3 mit rd. 18% Cr und 7 bis 9% Ni. Dem niedrigeren Nickelgehalt sind Stickstoffgehalte von 0,23%, dem höheren solche von rd. 0,04% zugeordnet. Die Stähle 1 und 1N enthalten noch 1% W, während der Stahl 3 durch 0,5% Ti gekennzeichnet

*) E 211, K 351.

[1]) H. Cornelius, Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 44/56; vgl. Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942), S. 650/51 sowie Z. VDI Bd. 87 (1943), S. 266/67.

[2]) Vgl. außer [1]) noch: H. Cornelius u. W. Bungardt, Arch. Eisenhüttenw. Bd. 15 (1941/42), S. 107/13; H. Cornelius, Arch. Eisenhüttenw. Bd. 15 (1941/42), S. 47/58.

[3]) Techn. Mitt. Krupp., Forsch.-Ber. Bd. 5 (1942), S. 193/200.

[4]) Stahl u. Eisen Bd. 61 (1941), S. 1073/78.

[5]) Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42), S. 514/15.

[6]) Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42), S. 517/18.

[7]) H. Krainer u. O. Mirt, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42), S. 467/72.

[8]) W. Tofaute u. H. Schottky, Techn. Mitt. Krupp, A: Forsch.-Ber. Bd. 3 (1940), S. 103/10; Arch. Eisenhüttenw. Bd. 14 (1940/41), S. 71/76; R. Scherer, Chem. Fabrik Bd. 13 (1940), S. 373/79; H. Krainer u. M. Nowak-Leoville, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42), S. 507/18; R. Scherer, G. Riedrich u. H. Kessner, Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942), S. 347/52; G. Riedrich, Metallwirtsch. Bd. 21 (1942), S. 407/11.

[9]) Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42), S. 515/16.

Zahlentafel 1. Chemische Zusammensetzung der Versuchsstähle.

Stahl	C %	Si %	Mn %	Ni %	Cr %	W %	Ti %	N_2 %
1	0,44	1,81	1,13	9,06	17,6	1,1	—	0,038
1 N	0,47	2,01	1,50	7,03	17,4	1,2	—	0,23
2	0,48	1,74	1,06	9,11	17,7	—	—	0,047
2 N	0,48	1,92	1,13	7,38	18,3	—	—	0,23
3	0,48	1,98	1,36	9,02	18,0	—	0,48	0,039
4	0,50	2,26	6,46	4,65	14,7	0,42	—	0,065
4 N	0,46	2,64	6,67	3,15	14,8	1,1	—	0,18
5	0,46	2,21	6,34	4,75	14,9	—	—	0,024
5 N	0,46	2,28	6,00	3,40	15,0	—	—	0,17
6	0,47	2,56	5,91	4,81	15,0	—	0,27	0,033
7	0,43	3,36	6,00	6,04	11,8	1,2	—	0,030
7 N	0,45	3,21	6,69	5,09	12,6	1,2	—	0,16
8	0,45	3,48	6,57	6,05	11,7	—	—	0,029
8 N	0,44	3,13	6,29	5,51	12,7	—	—	0,16

ist. Die Stähle 4, 4 N, 5, 5 N und 6 der zweiten Gruppe haben als Legierungsgrundlage rd. 15% Cr, 6 bis 6,7% Mn und 3,2 bis 4,8% Ni. Dem kleineren Nickelgehalt sind Stickstoffgehalte von rd. 0,18%, dem höheren solche von 0,024 bis 0,065% zugeordnet. Weitere Zusätze sind Wolfram bei den Stählen 4 und 4 N und Titan bei Stahl 6. — Die dritte Gruppe umfaßt die Stähle 7, 7 N, 8 und 8 N mit einem nur kleinen Chromgehalt von rd. 12%, 6 bis 6,7% Mn, 5 bis 6% Ni und einem auf mehr als 3% erhöhten Siliziumgehalt. Zu dem Nickelgehalt von 5% gehört ein 0,16%, zu dem von 6% ein 0,03% betragender Stickstoffgehalt. Die Stähle 7 und 7 N haben außerdem noch einen Wolframzusatz von 1,2%.

Die Versuchsdurchführung lehnte sich an die in einem früheren Bericht bereits beschriebene an[1]).

Versuchsergebnisse.

a) Stickstoffausbeute

Bei der Erschmelzung der stickstofflegierten Stähle wurde Ferrochrom mit 1,0%[10]) und 6,2% N_2[11]) benutzt. Das stickstoffhaltige Ferrochrom wurde der etwa zusätzlich erforderliches Chrom (und Mangan) schon enthaltenden Schmelze zugesetzt. Betrug der Stickstoffzusatz $^1/_{70}$ des Chromgehaltes im Bade so ergab sich eine Stickstoffausbeute von 77 bis 78%. Mit auf $^1/_{90}$ bis $^1/_{85}$ des Chromgehaltes gesenktem Stickstoffzusatz betrug die Ausbeute 84 bis 90%. Zu hohe Zusätze senken demnach, wie bekannt, die Stickstoffausnutzung. Ein Ausbringen von 95%, wie es H. Krainer und O. Mirt[7]) selbst bei einem Zusatz von $^1/_{75}$ des Chromgehaltes erreicht haben, wurde nicht erzielt. Wahrscheinlich ist das darauf zurückzuführen, daß die Stickstoffausnützung bei den eigenen Versuchen unter Berücksichtigung der Feststellung ermittelt wurde, daß die Versuchsstähle auch ohne beabsichtigte Stickstoffzugabe mindestens 0,024% N_2 aufwiesen. Die Stickstoffausbeute war unabhängig von der Höhe des Stickstoffgehaltes in den beiden Ferrochromen und von dem Zusatz des Stickstoffs vor oder nach dem Aufkohlen der Schmelze. Obgleich die Zugabe besonders des

[10]) Für die freundliche Überlassung danken wir auch hier den Deutschen Edelstahlwerken, A.G., Krefeld, insbesondere Herrn Dr.-Ing. G. Riedrich.

[11]) Wir danken auch an dieser Stelle Herrn Dr.-Ing. H. Krainer, Edelstahlwerke Gebr. Böhler & Co. A.G., Kapfenberg, für die Überlassung bestens.

Zahlentafel 2. Magnetische Sättigung, Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit der Versuchsstähle vor und nach 200 stündigem Glühen bei 700°. (Mittelwerte aus zwei Versuchen.)

Stahl	Behandlung	Sättigung Gauß	E-Grenze[3]) kg/mm²	Streckgrenze[4]) kg/mm²	Zugfestigkeit kg/mm²	E-Modul kg/mm²	Bruchdehnung[5]) %	Einschnürung %	Kerbschlagzähigkeit[6]) mkg/cm²
1	A[1])	< 100	21	35	88	20 000	26	25	4,8
	B[2])	< 100	28	48	89	20 200	15,2	18	4,0
1 N	A	2180	34	50	109	20 200	24,4	26	1,4
	B	4430	38	68	120	20 200	8,5	10	1,4
2	A	< 100	28	46	94	20 150	31	35	4,8
	B	< 100	27	45	94	20 100	26	31	5,0
2 N	A	887	29	46	109	19 800	26	28	3,3
	B	6360	38	67	126	19 700	13,8	14	1,2
3	A	< 100	26	43	91	19 700	31	30	4,0
	B	< 100	23	38	89	19 800	29	30	4,2
4	A	< 100	26	54	110	19 700	20	16	1,7
	B	< 100	25	48	107	19 900	14,2	13	1,6
4 N	A	< 100	28	53	104	19 800	9,5	7	1,0
	B	253	21	39	98	19 900	6,1	4	1,1
5	A	< 100	23	37	97	19 900	19,5	17	1,4
	B	974	18	36	115	19 900	15,2	12	1,3
5 N	A	108	28	52	109	19 300	10	2	1,2
	B	2640	—	—	110—123	19 350	5,3	4	0,5
6	A	< 100	23	37	104	19 400	23	21	1,7
	B	1158	15	31	114	20 160	14,2	12	0,9
7	A	< 100	24	39	105	19 200	23	17	1,6
	B	< 100	20	42	99	19 100	11,6	10	1,5
7 N	A	< 100	25	47	105	19 500	17	14	1,5
	B	< 100	20	38	107	19 200	12,7	11	1,2
8	A	< 100	21	45	113	19 200	22	19	1,6
	B	110	15	29	104	19 500	18	14	1,6
8 N	A	< 100	29	45	108	19 450	27	39	1,0
	B	161	17	36	112	18 800	13,1	10	1,0

[1]) Ausgangszustand: 1050°/Luft, 800°/3h/Luft. [2]) wie [1]), dann 700°/200h/Luft. [3]) 0,02% bleibende Dehnung. [4]) 0,2% bleibende Dehnung. [5]) $l = 5d$. [6]) 3 mm tiefer Kerb mit 2 mm Durchmesser, Schlagquerschnitt 7 · 10 mm².

6,2% N_2 enthaltenden Ferrochroms eine starke Badunruhe hervorrief, war auch dann kein verstärkter Kohlenstoffabbrand zu beobachten, wenn der Stickstoff der fertiggekohlten Schmelze zugesetzt wurde.

b) Beständigkeit des Austenits.

Aus der Messung der magnetischen Sättigung[12]) und aus Zerreiß- und Kerbschlagversuchen im Ausgangszustand und nach 200stündigem Glühen bei 700°, Zahlentafel 2, ergeben sich Schlüsse auf die Beständigkeit des Austenits der Versuchsstähle. In der ersten Gruppe sind die Stähle 1, 2 und 3 stabil austenitisch. Die Sättigung ist in beiden Behandlungszuständen sehr klein, die nur wenig verschiedenen Festigkeitseigenschaften und die Kerbschlagzähigkeit dieser beständigen Stähle ändern sich durch die Langzeitglühung nicht bzw. nicht erheblich. Die Stähle 1 N und 2 N mit gesenktem Nickel- und erhöhtem Stickstoffgehalt enthalten nach Maßgabe der Sättigungswerte schon im Ausgangszustand beträchtliche Mengen Martensit, der durch das langzeitige Glühen noch stark vermehrt wird. Im Vergleich zu den Stählen 1 und 2 haben die Stähle 1 N und 2 N demgemäß eine erhöhte Streckgrenze und Zugfestigkeit, sowie eine kleinere Dehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit. In Stählen mit 0,45% C, 18% Cr, 9% Ni und 0 oder 1% W lassen sich also 2% Ni nicht durch rd. 0,2% N_2 ersetzen. Aus der Größe der Sättigung der Stähle 1 N und 2 N nach langzeitigem Glühen kann man abschätzen, daß die austenitstabilisierende Wirkung von 0,2% N_2 in derartigen Stählen nur sehr klein ist. — In der zweiten Gruppe ist der Stahl 4 stabil austenitisch. Der Stahl 4 N mit um 1,5% kleinerem Nickel- und um 0,12% höherem Stickstoffgehalt zeigt nach der Glühung bei 700° einen kleinen Sättigungsanstieg, der bei nicht erhöhtem Stickstoffgehalt wahrscheinlich nicht viel größer sein würde. In beiden Behandlungszuständen hat der Stahl 4 N eine kleinere Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit als der Stahl 4. Der wolframfreie Stahl 5 bleibt bei der langzeitigen Glühung nicht mehr rein austenitisch. Die Sättigung steigt um rd. 900 Gauß. Bedeutend ausgeprägter ist der Sättigungsanstieg bei Stahl 5 N trotz seines gegenüber Stahl 5 nur um 1,7% gesenkten Nickel- und Mangangehaltes, bei um 0,15% erhöhtem Stickstoffgehalt. Auch der Stahl 5 N hat im austenitischen Ausgangszustand schon kleinere Werte der Dehnung, Einschnürung und auch Kerbschlagzähigkeit als der Stahl 5 mit üblichem Stickstoffgehalt. Die Festigkeitseigenschaften des Stahles 5 N sind ausgesprochen schlecht. Die Kerbschlagzähigkeit beträgt nach dem Glühen bei 700° nur noch 0,5 mkg/cm². Auch der Stahl 6 mit 0,23 Ti neigt beim Glühen bei 700° zum Austenitzerfall zu Martensit mit entsprechenden Änderungen der Festigkeitswerte und der Kerbschlagzähigkeit. Die Dehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit sind jedoch größer als bei dem stickstofflegierten Stahl 5 N. In dem Zustand mit vorwiegend austenitischer Grundmasse haben die Chrom-Mangan-Nickel-Stähle der zweiten Gruppe bei höherer Festigkeit vor allem kleinere Kerbschlagzähigkeitswerte als die Chrom-Nickel-Stähle. Ein Stickstoffgehalt von 0,12 bis 0,15% vermag in den Stählen der zweiten Gruppe einen Nickelgehalt von rd. 1,5% nicht vollwertig zu ersetzen. — Die Stähle 7 bis 8 N der dritten Gruppe sind sämtlich stabil austenitisch. Eine angedeutete Neigung zum Austenitzerfall zeigt lediglich der Stahl 8 N bei einem Stickstoffgehalt von 0,16%. Bei etwas höherem Chrom- und nur 0,74% kleinerem Mangan- und Nickelgehalt als der Stahl 8 hat der Stahl 8 N einen um 0,13% höheren Stickstoffgehalt. Ein nennenswerter Austausch von Nickel oder Mangan durch Stickstoff ist demnach auch bei den Chrom-Mangan-Nickel-Stählen der Gruppe 3 nicht möglich. In ihren Festigkeitseigenschaften und in ihrer Kerbschlagzähigkeit ähneln diese Stähle weitgehend denen der Gruppe 2 im vorwiegend austenitischen Zustand. In diesem Zustand hat die Kerbschlagzähigkeit bei Raumtemperatur noch eben ausreichende Werte. Die Kerbschlagzähigkeit bei höheren Temperaturen, beispielsweise bei den Auslaßkegel-Betriebstemperaturen ist bedeutend größer[3]). Selbstverständlich können die Versuchsstähle durch Abschrecken von Temperaturen zwischen 1000 und 1100° auch auf hohe Kerbschlagzähigkeiten bei Raumtemperatur gebracht werden. Jedoch bleibt dieser Zustand an Auslaßkegeln im Betrieb nicht erhalten und ist daher praktisch von geringer Bedeutung.

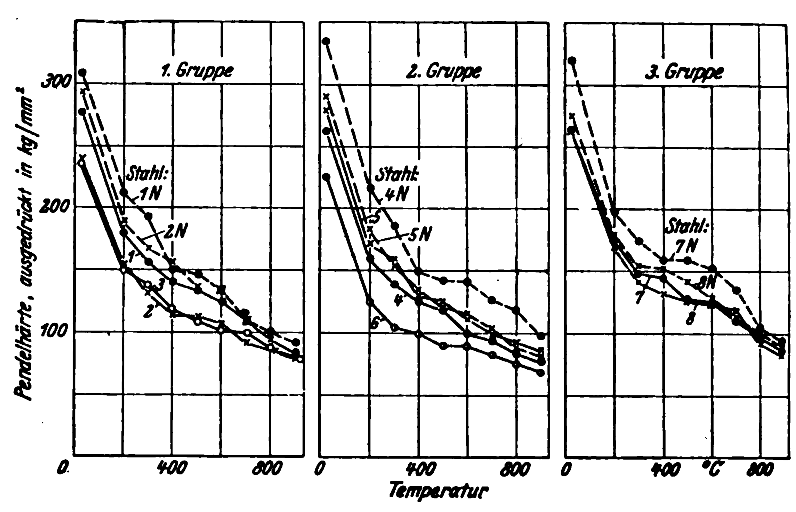
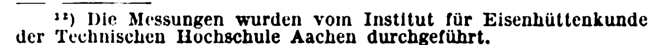


Bild 1. Temperaturabhängigkeit der Pendelfallhärte der Versuchsstähle im Ausgangszustand

c) Formänderungswiderstand in der Wärme.

Der Einfluß des Stickstoffs auf den Formänderungswiderstand der Versuchsstähle bei erhöhten Temperaturen sollte bei großer und kleiner Formänderungsgeschwindigkeit festgestellt werden. Zu dem Zweck wurde die Temperaturabhängigkeit der Pendelfallhärte[13]) und bei 700° das Kriechverhalten der im Ausgangszustand befindlichen Versuchswerkstoffe ermittelt. Die Abhängigkeit der Pendelfallhärte von der Temperatur ist in Bild 1 dargestellt. Die stickstofflegierten Stähle haben innerhalb der drei Stahlgruppen eine höhere Fallhärte als die stickstoffarmen Vergleichsstähle. Dieser Unterschied könnte in der ersten und zweiten Gruppe bis zu Temperaturen von vielleicht 600° wenigstens zum Teil auf die Zerfallsneigung des Austenits der stickstofflegierten Stähle zurückgeführt werden. Jedoch zeigt der stickstoffarme Stahl 6 mit ebenfalls teilweise unbeständigem Austenit im Vergleich zu den Stählen 4 und 5 mit stabilem Austenit eine kleinere Fallhärte. Schließlich zeigen die stickstofflegierten Stähle der dritten Gruppe, in der alle Stähle stabil austenitisch sind, eine höhere Fallhärte als die nicht mit Stickstoff legierten Stähle. Es erscheint also berechtigt, dem Stickstoff in Ventilkegelstählen eine den Formänderungswiderstand in der Wärme bei hoher Formänderungsgeschwindigkeit erhöhenden Einfluß zuzuschreiben. Diese Wirkung des Stickstoffs verringert sich mit steigender Temperatur und ist im Betriebstemperaturbereich der Flugmotoren-Auslaßventilkegel, also in der Umgebung von etwa 850°, meist nur noch unerheblich.

Die Dauerstandversuche bei 700° wurden mit gleichbleibender Temperatur und Belastung über 500 h durchgeführt. Die Ergebnisse enthält Zahlentafel 3. Ihre Auswertung hinsichtlich des Stickstoffeinflusses ist erschwert durch die Unbeständigkeit des Austenits in einigen der Versuchsstähle. Die Auswertung soll daher unter der berechtigten


[12]) Die Messungen wurden vom Institut für Eisenhüttenkunde der Technischen Hochschule Aachen durchgeführt.

[13]) Zu ihrer Messung wurde das von H. Cornelius und W. Trossen, Stahl u. Eisen Bd. 60 (1940), S. 293/94, angegebene Gerät benutzt.



Zahlentafel 8. Kriechverhalten der Versuchsstähle bei 700°.

Stahl	Dauerstandfestigkeit bei einer Dehngeschwindigkeit von		
	$10 \cdot 10^{-4}$ %/h	$5 \cdot 10^{-4}$ %/h	$1 \cdot 10^{-4}$ %/h
	in der 25. bis 35. Belastungsstunde[1])		in der 100. bis 500. Belastungsstunde
1	5,0	4,5	4,2
1 N	6,0	5,3	—
2	3,4	3,2	3,1
2 N	4,3	3,9	4,1
3	5,7	5,2	4,7
4	5,7	5,2	4,3
4 N	7,1	6,5	rd. 6,0
5	4,3	3,7	3,9
5 N	5,7	5,3	4,3
6	4,5[2])	6,0[3])	5,6[3])
7	5,0[2])	6,2[3])	4,1[2]) 6,0[3])
7 N	5,8	5,5	4,5
8	5,7	4,5	4,5
8 N	4,4	3,9	4,0

[1]) Bleibende Dehnung nach 45^h stets kleiner als 0,2 %.
[2]) Kleinstwert.
[3]) Erreichbarer Wert.

Voraussetzung vorgenommen werden, daß dem durch Austenitzerfall entstandenen Martensit bei 700° im allgemeinen eine kleinere Kriechfestigkeit als dem Austenit zukommt. Es geht dann aus Zahlentafel 3 hervor, daß die mit Stickstoff legierten Stähle 1 N, 2 N, 4 N und 5 N, die bis auf den Stahl 4 N größere Mengen Martensit enthalten, einen gegenüber den bis auf den Stahl 5 stabil austenitischen Stählen ohne Stickstoffzusatz bedeutend erhöhten Kriechwiderstand besitzen. In der dritten Gruppe, in der sowohl die stickstoffarmen wie auch die stickstofflegierten Stähle stabil austenitisch sind, ist keine Verbesserung der Dauerstandfestigkeit durch Stickstoff vorhanden; vielmehr ist der Stahl 8 N sogar dem Stahl 8 eindeutig unterlegen. Es hat demnach den Anschein, daß der Stickstoff den Kriechwiderstand besonders solcher Ventilkegelstähle erhöht, deren austenitische Grundmasse eine durch die Anwesenheit des Stickstoffs nicht aufgehobene Neigung zum teilweisen Zerfall zu Martensit besitzt.

Aus dem Vergleich der Stähle 1, 2 und 3 geht hervor, daß der etwa 1% betragende Wolframgehalt des Stahles 1 für seine Dauerstandfestigkeit von großer Bedeutung ist. Der Wolframgehalt kann nicht nur, wie früher gezeigt wurde[1]), durch Vanadin, sondern, wie das Verhalten des Stahles 3 beweist, auch durch 0,5% Ti ersetzt werden. Der günstige Einfluß des Wolframs und eines selbst kleinen Titangehaltes auf das Kriechverhalten ist auch an den Stählen 4, 5 und 6 der zweiten Gruppe zu erkennen, wenngleich hier die Unterschiede in der Austenitbeständigkeit den Vergleich stören. Die beste Dauerstandfestigkeit aller Versuchsstähle hat der stabil austenitische Chrom-Mangan-Nickel-Wolfram-Stickstoff-Stahl 4 N, der außer im Stickstoffgehalt den früher vorgeschlagenen Ventilkegelstählen[1]) weitgehend entspricht. Schließlich zeigt sich die Bedeutung des Wolframgehaltes für das Kriechverhalten noch bei den Stählen 7 und 8 der dritten Gruppe.

Die Verbesserung des Kriechverhaltens durch auf 0,17 bis 0,23% erhöhte Stickstoffgehalte, die bei einem Teil der Versuchsstähle nachgewiesen werden konnte, erreicht auch günstigstenfalls den gleichgerichteten Einfluß von rd. 1% W oder besonders 0,5% Ti noch nicht. In der ersten Stahlgruppe wird die für eine Dehngeschwindigkeit von $1 \cdot 10^{-4}$ % je h in der 100. bis 500. Belastungsstunde erhaltene Dauerstandfestigkeit des Chrom-Nickel-Stahles 2 durch Stickstoff um 1,0 kg/mm², durch Wolfram um 1,1 kg/mm² und durch Titan um 1,6 kg/mm² verbessert. Dabei kann allerdings, worauf schon mehrfach hingewiesen wurde, der Stickstoffeinfluß teilweise durch die Instabilität des Austenits verdeckt sein.

Im neueren Schrifttum [14]) hat die Frage der Ermittlung der Dauerstandfestigkeit aus dem Knick in der Abhängigkeit der Dehngeschwindigkeit von der Belastung eine erhöhte Beachtung gefunden. Da die hier besprochenen Dauerstandversuche nur mit drei Probestäben für jeden Werkstoff durchgeführt wurden, reicht die Zahl der Versuchspunkte nicht aus, um über das Auftreten des Knicks bei den Versuchsstählen sichere Aussagen zu machen. Dagegen wurde der Versuch gemacht, aus den Ergebnissen von Zerreißversuchen an den Dauerstandprüfstäben aus den Versuchsstählen nach dem 500stündigen Dauerstandversuch bei 700° Anhaltspunkte dafür zu gewinnen, ob im Werkstoff während des Dauerstandversuches bei verschiedenen Dauerstandbelastungen Änderungen vor sich gehen, auf die eine schroffe Unstetigkeit in der Abhängigkeit der Kriechgeschwindigkeit von der Dauerstandbelastung zurückgeführt werden könnte. In den Bildern 2 und 3 sind die nach dem Dauerstandversuch ermittelten Festigkeitseigenschaften der Versuchsstähle in Abhängigkeit von der im Dauerstandversuch ermittelten bleibenden Dehnung aufgetragen, die ein Maß für die relative Größe der Dauerstandbeanspruchung ist. Bild 2 bezieht sich auf die Stähle mit einem teilweise zum Zerfall zu Martensit neigenden Austenit. Gegenüber dem Ausgangszustand erfahren diese Stähle im Dauerstandversuch durchweg eine mit der bleibenden Dehnung ansteigende Festigkeitszunahme durch den Zerfall des Austenits zu Martensit. Entsprechend sinken die Dehnung und Einschnürung. Bei den Stählen 1 N und 2 N steigt die Streckgrenze ähnlich wie die Zugfestigkeit an. Die Streckgrenze der Stähle 5, 5 N und 6 fällt jedoch bei kleinen bleibenden Dehnungen unter den Wert des Ausgangszustandes, um erst bei größeren bleibenden Dehnungen wieder anzusteigen. Da die Streckgrenze der austenitischen Stähle besonders auf eine Kaltverfestigung anspricht, ist ihr Abfall wohl so zu deuten, daß die Summierung der im Stahl im Ausgangszustand vorhandenen Kaltverformungsreste und der durch die Dauerstandbeanspruchung erzeugten Verformung zur Erreichung des der Dauerstandbeanspruchungstemperatur entsprechenden, kritischen Verformungsgrades führt. Durch die infolgedessen einsetzende Erholung und Rekristallisation, die den entgegengesetzten Einfluß der Martensitbildung überwiegen kann, sinkt die Streckgrenze unter ihren Wert im Ausgangszustand. Überwiegt dagegen die Martensitbildung die Erholung, so steigt die Streckgrenze an. Letzteres ist bei den Stählen 1 N und 2 N schon nach dem Eintreten kleiner, bei den Stählen 5, 5 N und 6 erst bei größeren bleibenden Dehnungen der Fall. Der bei Raumtemperatur gemessenen, durch Martensitbildung bedingten Festigkeitssteigerung kann, da dem Martensit bei genügend hoher Temperatur eine kleinere Kriechfestigkeit als dem Austenit zuzuschreiben ist, durchaus eine erhöhte Kriechgeschwindigkeit entsprechen. Außerdem tritt bei kleinen bleibenden Dehnungen noch keine, aber wohl bei größeren eine Entfestigung ein. Die mit der bleibenden Dehnung zunehmende Martensitbildung und die von einer bestimmten Verformung ab einsetzende Entfestigung könnten einen Knick in der Abhängigkeit der Kriechgeschwindigkeit von der Dauerstandbelastung herbeiführen. Mit dieser Feststellung soll nicht bestritten werden, daß das Auftreten eines Knickpunktes auch möglich ist, wenn im Werkstoff bei verschieden hohen Beanspruchungen nicht derartige innere Vorgänge ablaufen wie bei den hier behandelten Versuchsstählen, und wenn auch die Versuchstemperatur unter der Entfestigungstemperatur liegt.

In Bild 3 sind die Ergebnisse von Zerreißversuchen nach dem Dauerstandversuch für die Stähle wiedergegeben, bei denen mit stabilem Austenit zu rechnen war. Die Änderungen der Festigkeitseigenschaften durch den Dauerstandversuch können demnach durch Karbidausscheidungen und Kaltverfestigungs- und Erholungsvorgänge bedingt sein. Bei den Stählen 1 bis 3 tritt offenbar so lange (neben der möglichen Karbidausscheidung) eine Verfestigung ein, bis

[14]) Vgl. zuletzt: F. Sauerwald, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 16 (1942/43), S. 269/72.

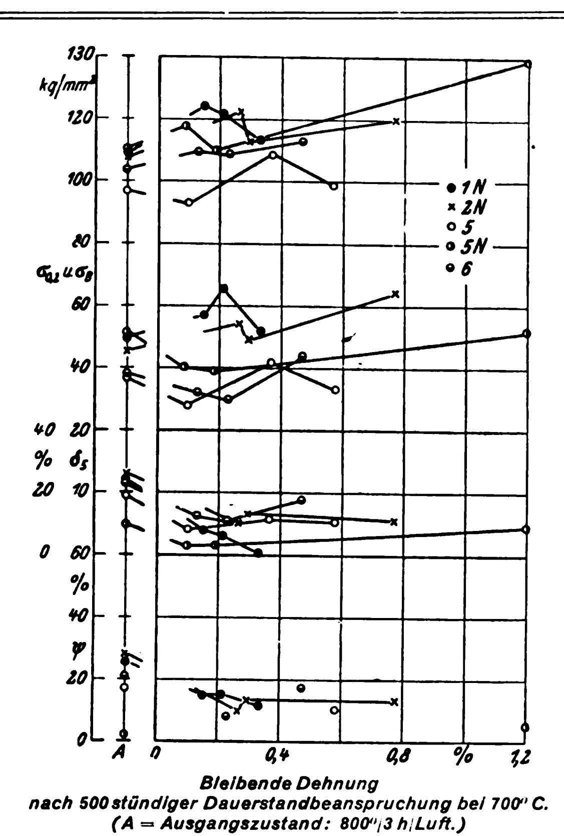


Bild 2. Festigkeitseigenschaften der Stähle 1 N, 2 N, 5, 5 N und 6 vor und nach dem Dauerstandversuch in Abhängigkeit von der im Dauerstandversuch aufgetretenen bleibenden Dehnung.

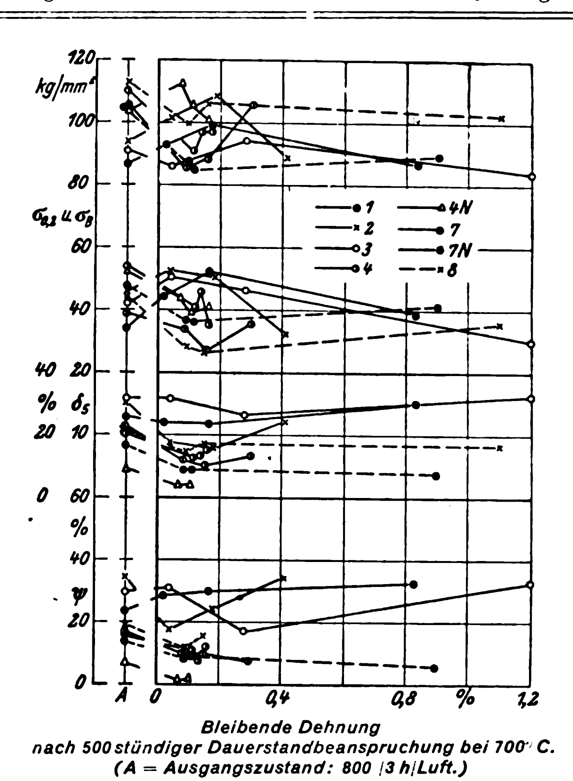


Bild 3. Festigkeitseigenschaften der stabil austenitischen Stähle 1, 2, 3, 4, 4 N, 7, 7 N und 8 vor und nach dem Dauerstandversuch in Abhängigkeit von der im Dauerstandversuch aufgetretenen bleibenden Dehnung.

der Kaltverfestigungsrest und die zusätzliche Verformung im Dauerstandversuch zur Erreichung des kritischen Verformungsgrades führen. Dann folgt die Erholung, die zu einer Wiederabnahme von Zugfestigkeit und Streckgrenze unter entsprechenden Änderungen von Dehnung und Einschnürung beim Überschreiten einer bestimmten bleibenden Dehnung führt. Die Abhängigkeit der Dehngeschwindigkeit von der Dauerstandbelastung könnte einen Knick bei der Beanspruchung aufweisen, die eine Verformung von der Größe der kritischen hervorruft.

Die mit den Stählen 4, 4 N, 7, 7 N und 8 erhaltenen und ebenfalls in Bild 3 wiedergegebenen Ergebnisse sind nicht einheitlich genug, um daraus Folgerungen im Hinblick auf die mögliche Bedingtheit des Knickpunktes durch Änderungen im Werkstoff zu ziehen. Bemerkenswert ist, daß die mit Stickstoff legierten Stähle 4 N und 7 N von den in Bild 3 behandelten Stählen die stärkste Versprödung aufweisen, der letzte bei gegenüber dem Ausgangszustand sogar gesenkter Zugfestigkeit und Streckgrenze. Bei Stahl 4 N, der schon nach 200stündigem Glühen bei 700° eine kleine Sättigungszunahme aufwies, kann die Versprödung mit einem durch die Zugspannungen im Dauerstandversuch begünstigten Zerfall des Austenits zu Martensit zusammenhängen. Hierin wäre dann eine weitere Bestätigung dafür zu sehen, daß die austenitstabilisierende Wirkung des Stickstoffs in Stählen von der Art der Versuchswerkstoffe nur sehr klein ist.

d) Nitrierhärtbarkeit

Proben aus den Versuchsstählen sowohl mit feingeschliffener als auch mit polierter Oberfläche wurden zur Entpassivierung in salzsaurer Kadmiumphosphatlösung[1]) bei Siedetemperatur geätzt und anschließend 100 h bei 550° und 72 h bei 625° in Ammoniak verstickt. Bei früheren Versuchen[1]) hatte sich gezeigt, daß die Verstickung der Ventilkegelstähle mit polierter Oberfläche nach dem Ätzen in Kadmiumphosphatlösung weniger gleichmäßig verlief als bei feingeschliffener Oberfläche. Nach den jetzt durchgeführten Versuchen läßt sich dies wohl darauf zurückführen, daß die sorgfältig polierten Oberflächen sich weniger gut gleichmäßig entpassivieren lassen.

Die Ergebnisse der bei 550° durchgeführten Verstickungsversuche enthält Zahlentafel 4. Die an der nach dem Versticken nicht abgeschliffenen sowie um 0,03 mm abgeschliffenen Oberfläche ermittelten Vickershärten lassen erwartungsgemäß keinen Einfluß des Stickstoffgehaltes erkennen. Dagegen ist die Nitriertiefe bei den stickstofflegierten Stählen der ersten und dritten Gruppe etwas größer als bei den Vergleichsstählen mit üblichem Stickstoffgehalt. Die Stähle der zweiten Gruppe zeigen keinen Einfluß des Stickstoffgehaltes auf die Nitriertiefe. Es liegt nahe, die unterschiedlichen Nitriertiefen damit in Zusammenhang zubringen, daß die stickstofflegierten Stähle teilweise martensitisch waren. Jedoch trifft dies nicht für die dritte Stahlgruppe zu. Eine kleine Zunahme der Nitriertiefe bei mit Stickstoff legierten Stählen ist also nach den Versuchen nicht unwahrscheinlich und könnte ihre Erklärung darin finden, daß eine kleinere Erhöhung des Stickstoffgehaltes beim Versticken erforderlich ist, um den zur Nitrierhärtung führenden Stickstoffgehalt zu erreichen. Ob auch die Anwesenheit von Stickstoff im Stahl das Diffusionsvermögen des Stickstoffs erhöht, oder ob die Einwanderung des Stickstoffs durch eine weitergehende Entpassivierung der stickstofflegierten Stähle begünstigt wird, läßt sich nicht ohne besondere Versuche entscheiden.

Die Chrom-Mangan-Nickel-Stähle der zweiten und dritten Gruppe haben vorwiegend eine größere Oberflächenhärte als die Chrom-Nickel-Stähle der ersten Gruppe, mit Ausnahme des titanhaltigen Stahles 3. Die Erhöhung der Oberflächenhärte durch teilweisen Austausch des Nickels durch Mangan ist mit einer erhöhten Sprödigkeit verbunden, auf die für nickelfreie Chrom-Mangan-Stähle besonders H. Krainer und K. Swoboda[6]) schon hingewiesen haben. Eigene metallografische Untersuchungen führten zu dem Schluß, daß die erhöhte Sprödigkeit der Nitrierschichten der manganlegierten Stähle vermutlich auf die verstärkte Ausbildung der Nitridschicht an der Stahloberfläche zurückzuführen sei. Die Nitridschicht erreichte bis zu $^{3}/_{100}$ mm Dicke. Nach Abschleifen der Proben um diesen Betrag waren bei zwei

Zahlentafel 4. Ergebnisse der Nitrierversuche.

Stahl	100h bei 550° nitriert		
	Vickershärte [1])		Nitriertiefe
	an der Oberfläche	0,03 mm unter der Oberfläche	
1	875	945	0.15
1 N	855	935	0,21
2	830 [2])	—	0,14
2 N	850	935	0,19
3	1100	1020	0,17
4	1060 [2])	1100 [2])	0,21
4 N	1050 [2])	990	0,22
5	1000 [2])	1130 [2])	0,30
5 N	920 [2])	1090	0,28
6	860 [2])	1180 [2])	0,28
7	1050 [2])	1090	0,13
7 N	1020 [2])	1040	0,17
8	1010 [2])	1010	0,17
8 N	880 [2])	1090	0,19

[1]) Mit 10 kg Last gemessen. Mittelwerte aus ursprünglich polierter bzw. feingeschliffener Oberfläche.
[2]) Spröde Nitrierschicht.

Stählen der zweiten Gruppe und bei allen Stählen der dritten Gruppe keine Anzeichen einer besonderen Sprödigkeit der Nitrierschicht (ausgebrochene Kanten der Vickerseindrücke) mehr erkennbar. Dabei wurde die Härte in 0,03 mm Tiefe durchweg größer gefunden als an der Oberfläche selbst. Diese Ergebnisse legen die Folgerung nahe, daß nicht die ganze Nitrierschicht, sondern lediglich die äußerste Nitridschicht der manganlegierten Stähle spröder — weil stärker ausgebildet — als die der Chrom-Nickel-Ventilstähle ist.

Die Nitriertiefe ist bei den Stählen der zweiten Gruppe größer als bei denen der ersten und dritten Gruppe. Der Unterschied zwischen den Stählen der ersten und zweiten Gruppe ist dem teilweisen Austausch von Nickel durch Mangan zuzuschreiben. Die Ursachen für die gegenüber den Stählen der zweiten Gruppe kleinere Nitriertiefe der Stähle der dritten Gruppe können nur teilweise durch den höheren Nickelgehalt der dritten Gruppe bedingt sein.

W. Tofaute und G. Bandel[3]) haben mit einer Nitriertemperatur von 625° bei einigen Ventilkegelstählen gute Erfolge erzielt. Bei den eigenen Versuchen war das nicht der Fall. Die Nitrierhärten waren viel kleiner als bei 550°, die Verstickung teilweise auch ungleichmäßig. Auf die Klärung dieser Verhältnisse wurde verzichtet.

e) Zunderbeständigkeit

Über Verzunderungsversuche mit einigen der Versuchsstähle im ungeschützten und inchromierten Zustand in Verbrennungsgasen von bleifreiem und bleihaltigem Benzin und in Bleioxyd, sowie über Korrosionsversuche mit den blanken und verzunderten Stählen in siedender, gesättigter Bleibromidlösung soll später berichtet werden. Hier soll noch auf Verzunderungsversuche, die bei 890 bis 1050° in Luft durchgeführt wurden, eingegangen werden. Die gesamte Glühdauer betrug 50 h bei jeder Temperatur. Jeweils nach 5 h wurden die Proben außerhalb des Ofens in Luft auf Raumtemperatur abgekühlt und dann wieder in den auf Versuchstemperatur befindlichen Ofen eingesetzt.

Aus Bild 4 und 5 ergibt sich, ohne auf alle Einzelheiten einzugehen, folgendes über das Zunderverhalten der Versuchsstähle in Luft: Wie zu erwarten war, ist der Stickstoffgehalt der Stähle ohne Bedeutung für die Zunderbeständigkeit. Dies zeigt sich besonders klar bei den beiden höheren Versuchstemperaturen, während bei 890° einige Abweichungen zwischen den stickstoffarmen und den mit Stickstoff legierten Stählen vorliegen. Die Abweichungen haben jedoch verschiedene Tendenzen und sind, besonders sicher bei den Stählen der ersten Gruppe mit ihren bei 890° nur kleinen Gewichtsverlusten, den Versuchsungenauigkeiten zuzuschreiben.

Der titanhaltige Stahl 3 hat weit größere Gewichtsverluste als die übrigen Stähle der ersten Gruppe. Es läge also nahe, diese Beeinträchtigung des Zunderverhaltens dem Titangehalt zuzuschreiben. Jedoch hat der allerdings weniger Titan enthaltende Stahl 6 der zweiten Gruppe eine gegenüber den vergleichbaren Stählen erhöhte Zunderbeständigkeit. Die Stähle der zweiten und dritten Gruppe erreichen die Zunderbeständigkeit der Stähle der ersten Gruppe mit ihrem höheren Chromgehalt naturgemäß nicht. Zwischen dem Zunderverhalten der Stähle der zweiten Gruppe mit 2,2 bis 2,6% Si und 14,7 bis 15,0% Cr und denen der dritten Gruppe mit 3,2 bis 3,5% Si und 11,8 bis 12,7% Cr ist folgender Unterschied vorhanden: Die Stähle mit dem höheren Silizium- und kleineren Chromgehalt sind bis etwa 1000° den Stählen der zweiten Gruppe überlegen. Bei 1050° ist das Verhältnis umgekehrt.

f) Wärmeleitfähigkeit und Wärmeausdehnung

Die aus Vergleichsmessungen[1]) gewonnenen, in Zahlentafel 5 zusammengestellten Wärmeleitzahlen der Versuchsstähle bei 50 bis 200° betragen zwischen 0,0280 und 0,0305 cal/cm · s · °C. Der Stickstoffgehalt der Stähle ist, wie an den rein austenitischen Werkstoffen der dritten Gruppe zu erkennen ist, ohne erkennbaren Einfluß auf die Wärmeleit-

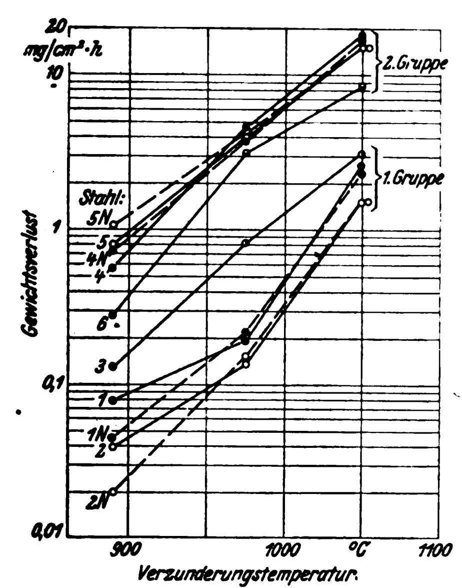


Bild 4. Zunderverhalten der Stähle der ersten und zweiten Gruppe in Luft.

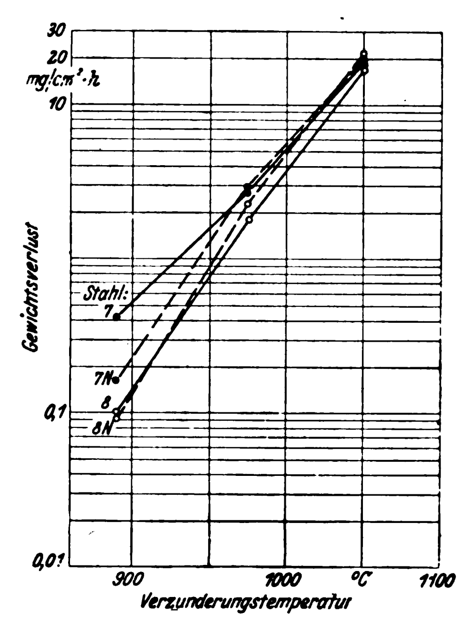


Bild 5. Zunderverhalten der Stähle der dritten Gruppe in Luft.

Zahlentafel 5. Wärmeleitfähigkeit der Versuchsstähle bei 50 bis 200°.

Stahl	cal/cm · s · °C	Stahl	cal/cm · s · °C
1	$0{,}029_8$	5	$0{,}030_5$
1 N	$0{,}028_5$	5 N	$0{,}029_6$
2	$0{,}030_5$	6	$0{,}029_6$
2 N	$0{,}029_0$	7	$0{,}028_0$
3	$0{,}030_5$	7 N	$0{,}028_0$
4	$0{,}028_5$	8	$0{,}028_8$
4 N	$0{,}029_8$	8 N	$0{,}028_0$

Zahlentafel 6. Mittlere lineare thermische Ausdehnungsbeiwerte der Versuchsstähle.

Stahl	Ausdehnungsbeiwerte ($\alpha_m \cdot 10^6$) zwischen 20° und				
	200°	400°	600°	800°	900°
1	16,5	17,9	18,6	19,2	19,8
1 N	16,2	17,7	18,1	19,1	19,9
2	16,5	18,1	18,5	19,2	19,9
2 N	16,1	17,8	18,4	19,1	20,0
4	17,0	18,6	19,2	20,2	20,3
4 N	16,8	18,4	19,1	19,9	20,7
5	17,3	18,6	19,4	20,0	20,4
5 N	—	19,0	19,8	20,6	21,4
7	17,1	18,5	19,0	19,6	20,5
7 N	17,0	18,4	19,3	19,8	20,7
8	17,2	18,7	19,6	20,1	20,8
8 N	17,0	18,9	19,6	20,9	20,7

zahl. Gleiches gilt auch für die Wärmeausdehnungsbeiwerte, die Zahlentafel 6 enthält. Hiernach haben die manganlegierten Versuchsstähle größere Beiwerte als die Chrom-Nickel-Stähle.

Zusammenfassung.

Der Einfluß von Stickstoff auf verschiedene austenitische Chrom-Nickel und Chrom-Mangan-Nickel-Stähle wurde untersucht. Die in Anlehnung an Schrifttumsangaben erschmolzenen Stähle mit teilweise durch Stickstoff ausgetauschtem Nickelgehalt enthielten zum Teil einen zum Zerfall zu Martensit neigenden Austenit. Es ist an Hand der Versuche festzustellen, daß Stickstoff in austenitischen Ventilkegelstählen nur unbedeutende Mengen von Nickel (oder Mangan) zu ersetzen vermag. Durch 0,15 bis 0,2% N_2 sind schätzungsweise 0,5% Ni austauschbar.

Die nach dem Schrifttum unerwartete Zerfallsneigung des Austenits eines Teils der stickstofflegierten Versuchsstähle erschwerte die klare Ermittlung des Stickstoffeinflusses auf die Stahleigenschaften. Folgendes kann jedoch festgestellt werden: Der Formänderungswiderstand der Ventilkegelstähle in der Wärme wird bei hoher Formänderungsgeschwindigkeit durch Stickstoff erhöht. Im Kriechwiderstand war ein derartiger Einfluß zwar bei den zur Martensitbildung neigenden, nicht aber bei den stabil austenitischen Stählen erkennbar. Auf die Nitrierhärtbarkeit, das Zunderverhalten, die Wärmeleitfähigkeit und die Wärmeausdehnung ist der Stickstoff erwartungsgemäß von untergeordnetem bzw. nicht nachweisbarem Einfluß. Unterschiede in der Zähigkeit der Nitrierschichten von verschieden legierten Ventilkegelstählen werden geklärt.

An Hand von Zerreißversuchen an Prüfstäben, die bei 700° Dauerstandversuchen von 500 h Dauer ausgesetzt waren, wird auf den möglichen Zusammenhang zwischen Änderungen der Werkstoffeigenschaften im Dauerstandversuch und dem Knickpunkt in der Abhängigkeit der Dehngeschwindigkeit von der Dauerstandbeanspruchung hingewiesen.

Ermittlung der Formziffer der auf Verdrehung beanspruchten abgesetzten Welle mit Hilfe von Feindehnungsmessungen*).

Von A. Weigand.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Triebwerk-Mechanik.

Mit Hilfe des elektrischen Feindehnungsmessers von Lehr und Granacher (s. [5]) wird die Spannungsverteilung in abgesetzten Wellen bei Drehbeanspruchung bestimmt; aus den Messungen wird die Formziffer α_k in Abhängigkeit von d/D und ϱ/d für $0,5 \leq d/D \leq 0,9$ und $0,1 \leq \varrho/d \leq 0,25$ ermittelt. Es zeigt sich, daß die Versuchswerte stets etwas unter den Werten liegen, die sich aus einer Näherungsformel von Sonntag (s. [2]) ergeben.

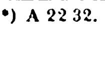
Gliederung.

Die Spannungsverteilung in abgesetzten, auf Verdrehung beanspruchten Wellen wurde durch näherungsweise Integration der Differentialgleichung der Spannungsfunktion zuerst von F. A. Willers [1] bestimmt. Für den Fall $D - d \geqq 2\,\varrho$, Bild 1, gab R. Sonntag [2] eine Näherungsformel für die Spannungsfunktion und die Höchstspannung an. L. S. Jacobsen, A. Thum und W. Bautz, [3] und das dort angegebene Schrifttum, ermittelten die Spannungsziffer mit Hilfe eines elektrischen Modells. Die auf diese Weise gefundenen Werte stimmen mit den nach Sonntag berechneten nicht immer überein; es entspann sich darüber eine Diskussion zwischen diesen Forschern, [4].

Um hier endgültige Klarheit zu schaffen, wurde an Stahlwellen mit Hilfe des von E. Lehr und H. Granacher entwickelten Feindehnungsmessers [5] die Spannungsverteilung ermittelt.

I. Versuchsaufbau und Meßverfahren.

Bild 2 zeigt die Vorrichtung, die zur Verdrehung der Versuchswelle verwendet wurde. Ihre Wirkunsweise geht aus Bild 3 hervor. Die Versuchswelle wird offenbar durch ein reines Drehmoment beansprucht. Dies wurde durch einen Reißlackversuch bestätigt; die Hauptspannungslinien


*) A 22 32.

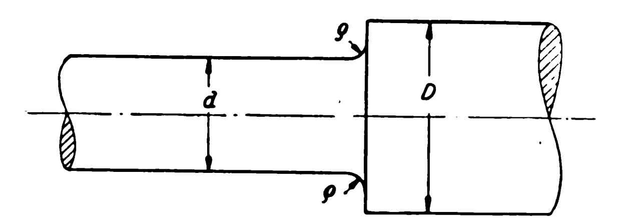


Bild 1. Bezeichnungen an der abgesetzten Welle.

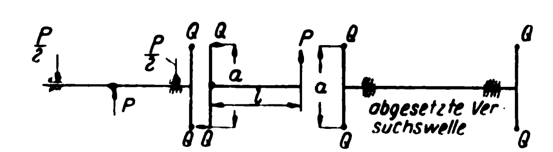


Bild 3. Skizze zur Erklärung der Wirkungsweise der Verdrehvorrichtung.

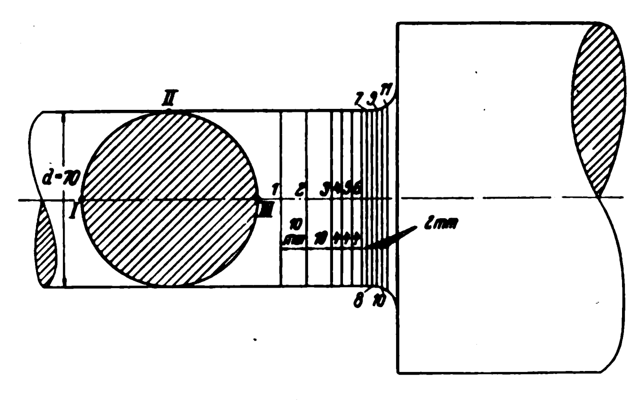
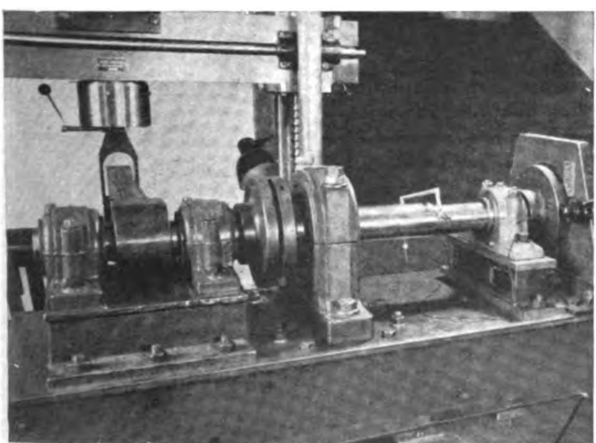
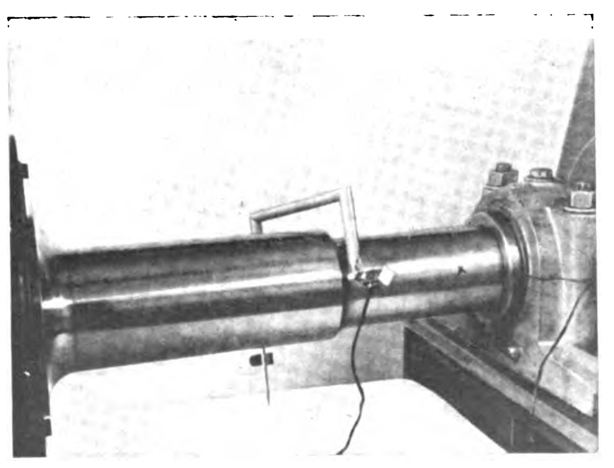


Bild 5. Anordnung der Meßpunkte 1 bis 11 auf den Mantellinien *I* bis *III* der Versuchswelle.


Bild 2. Verdrehvorrichtung.


Bild 4. Versuchswelle mit Dehnungsmesser.

verliefen unter 45° zu den Mantellinien der zylindrischen Welle.

Die Meßpunkte 1 bis 11 für die Dehnungsmessungen wurden gemäß Bild 5 auf drei Mantellinien I, II und III angeordnet, die gegeneinander um 90° versetzt waren. Gemessen wurden die beiden Hauptdehnungen ε_1 und ε_2, die bei reiner Torsionsbeanspruchung entgegengesetzt gleich sein müssen. In Wirklichkeit weichen die Werte vom Mittelwert meistens um 3 bis 4% ab; dies beruht auf der Ungenauigkeit in der Richtung der vorgekörnten Meßstrecke (1,3 mm) und einer geringen Biegebeanspruchung der Welle, die dadurch hervorgerufen wird, daß die in Bild 3 mit α bezeichneten verdrehenden Kräfte nicht genau gleich sind. Dieser Fehler wird dadurch im wesentlichen ausgeglichen, daß auf drei Mantellinien gemessen wird, Bild 5. Aus den drei Meßwerten, die auf demselben Kreisschnitt liegen, wird das Mittel genommen.

Die Dehnungen wurden mittels des von E. Lehr und H. Granacher entwickelten Feindehnungsmessers von 1,3 mm Meßstrecke gemessen, dessen Wirkungsweise in [5] eingehend beschrieben ist. Das Gerät wurde vor Beginn jeder Versuchsreihe an einem Zugstab von bekanntem Elastizitätsmodul geeicht, ebenso am Ende der Versuchsreihe, die je Welle 3 bis 4 Tage dauerte; die gefundenen Werte unterschieden sich stets nur um 1 bis 2% und lagen innerhalb der Meßfehler. Auf genaue Konstanz des Heizstromes für das Lämpchen des Dehnungsmessers muß allerdings geachtet werden; bei einer Heizstromstärke von 120 mA machen sich Schwankungen von 0,1 mA schon unangenehm bemerkbar. Besonders müssen Wackelkontakte sorgfältig vermieden werden, da sich sonst unregelmäßige Schwankungen des den Photostrom messenden Multiflexgalvanometers ergeben, das eine Empfindlichkeit von rd. 4×10^{-6} mA je Skalenteil hat.

Bei den Messungen wurde mit einer Vorlast von $P_0 = 50$ kg belastet und danach der Ausschlag des den Photostrom messenden Multiflexgalvanometers in Abhängigkeit von der Belastung gemessen. Diese Abhängigkeit ist innerhalb der Meßfehler linear, wie aus Bild 6 hervorgeht. Der Galvanometerausschlag wurde auf 400 kg Laständerung bezogen; in Bild 6 entsprechen dieser Laständerung im Mittel 53 Skalenteile. Auf Grund der (geradlinigen) Eichkurve weiß man nun, welche Dehnung dieser Laständerung entspricht.

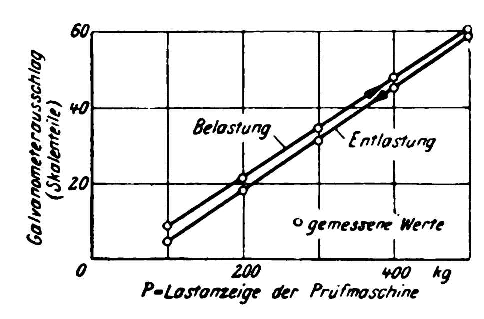


Bild 6. Abhängigkeit des Photostromes (Galvanometerausschlag) von der Lastanzeige der Prüfmaschine für einen bestimmten Meßpunkt.

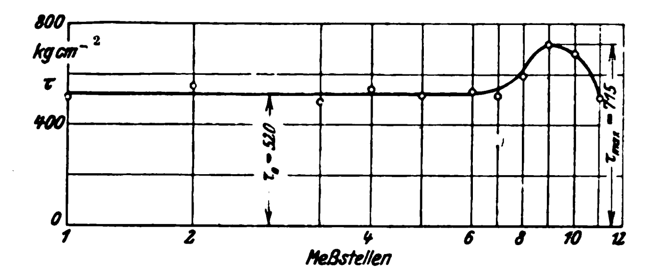


Bild 7. Verteilung der Schubspannungen längs einer Mantellinie der abgesetzten Welle für $\varrho/d = 0{,}107$, $d/D = 0{,}70$.

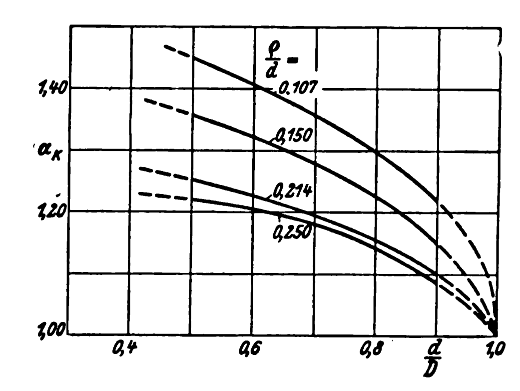


Bild 8. Die Spannungsziffer α_k in Abhängigkeit von d/D.

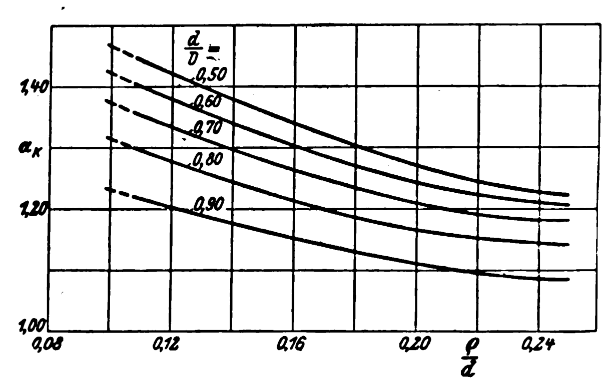


Bild 9. Die Spannungsziffer α_k in Abhängigkeit von ϱ/d.

II. Auswertung der Messungen und Ergebnisse.

Aus dem bekannten Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\,\varepsilon_2)\\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\,\varepsilon_1)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots (1)$$

zwischen den Hauptdehnungen ε_1, ε_2 und den Hauptspannungen σ_1, σ_2 beim ebenen Spannungszustand erhält man für die Schubspannung τ im Wellenquerschnitt

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{E}{1+\mu}\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\quad\ldots\ldots (2)$$

Der Elastizitäts- und Gleitmodul der Versuchswellen, die aus St · C 45 · 61 · gefertigt waren, ergab sich zu $E = 2{,}14 \times 10^6$, $G = 0{,}82 \times 10^6$ kgcm^{-2} und demnach $\mu = \frac{1}{2}\frac{E}{G} - 1 = 0{,}305 \approx 0{,}30$. Demnach ist im vorliegenden Fall

$$\tau = 0{,}823\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cdot 10^6.$$

In Bild 7 ist für den Fall $\varrho/d = 0{,}107$, $d/D = 0{,}70$ die Verteilung der Schubspannung längs der Welle dargestellt. Man sieht, daß im glatten Teil der Welle die Schubspannung bis auf geringe Streuungen konstant ist. Die Hohlkehle beginnt bei Meßpunkt 8; kurz vorher beginnt die Schubspannung anzusteigen und erreicht etwa bei Meßpunkt 9, der schon innerhalb der Hohlkehle liegt, ihr Maximum. Für die Formziffer ergibt sich im vorliegenden Fall:

$$\alpha_k = \frac{\tau_{max}}{\tau_0} = \frac{715}{520} = 1{,}38.$$

In derselben Weise wurde für eine Reihe von Werten von $\varrho/d = \alpha$ und $d/D = \beta$ die Formziffer bestimmt. Das Ergebnis zeigt die Zahlentafel 1. Gleicht man diese Meßwerte graphisch aus, so erhält man die in Zahlentafel 1 als ausgeglichene Meßwerte bezeichneten Zahlen. Diese Werte sind in Bild 8 und 9 in Abhängigkeit von d/D und ϱ/d aufgetragen. Sie liegen stets etwas niedriger als die aus der Näherungsformel von Sonntag

$$\alpha_k = \beta\,(1{,}5 + 3{,}0\,\alpha)\,\frac{1+4\,\alpha}{1+6\,\alpha} + (1 - \beta - 2\,\alpha\beta)\left(1 + \frac{1}{12\,\alpha}\right)\quad (3)$$

berechneten Werte, die nur für $\beta \leq \frac{1}{1+2\,\alpha}$ gilt. Unter Berücksichtigung der unvermeidlichen Meßfehler (z. B. Unge-

nauigkeit der Körnung, keine ideale Verdrehbeanspruchung) wird man die Genauigkeit dieser ausgeglichenen Werte zu rd. 5% annehmen können.

Zahlentafel 1. Die Formziffer α_k in Abhängkeit von ϱ/d und d/D.

ϱ/d	d/D	α_k gemessen	α_k ausgeglichen	α_k berechnet
0,25	0,50	1,17	1,22	1,23
	0,667	1,18	1,19	1,20
	0,824	1,21	1,13	—
	0,90	1,13	1,09	—
0,214	0,50	1,24	1,25	1,27
	0,70	1,22	1,20	1,22
	0,824	1,19	1,19	—
	0,90	1,13	1,10	—
0,15	0,50	1,33	1,36	1,37
	0,70	1,22	1,28	1,30
	0,80	1,20	1,23	—
	0,90	1,13	1,15	—
0,107	0,50	1,43	1,45	1,49
	0,60	1,43	1,41	1,44
	0,70	1,38	1,35	1,38
	0,80	1,26	1,30	1,32
	0,90	1,19	1.22	—

III. Zusammenfassung.

Die Spannungsverteilung in abgesetzten Wellen, die auf Verdrehung beansprucht werden, wurde mit Hilfe von Feindehnungsmessungen ermittelt. Der Vergleich mit einer von R. Sonntag aufgestellten Näherungsformel ergab, daß die Formziffer α_k in dem Intervall $0{,}1 \leqq \varrho/d \leqq 0{,}25$ und $0{,}5 \leqq d/D \leqq 0{,}9$ nach ihr mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden kann.

IV. Schrifttum.

[1] F. A. Willers, Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Z. Math. u. Phys. Bd. 55 (1907) S. 225.

[2] R. Sonntag, Zur Torsion von runden Wellen mit veränderlichem Durchmesser. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 9 (1929) S. 1.

[3] A. Thum u. Bautz, Zur Frage der Formziffer. Z. VDI Bd. 79 (1935) S. 1303.

[7] R. Sonntag, A. Thum u. W. Bautz, zur Frage der Formziffer. Z. VDI Bd. 81 (1937) S. 561.

[5] E. Lehr u. H. Granacher, Dehnungsmeßgerät mit sehr kleiner Meßstrecke und Anzeige mittels Sperrschicht-Photozelle. Forsch. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens Bd. 7 (1936) S. 66.

Zur Strömung kompressibler Flüssigkeiten um feste Körper mit Unterschallgeschwindigkeit*).

(Eine Zusammenfassung des vorliegenden Schrifttums.)

Von Franz Eser, München.

Bericht aus dem Institut für theoretische Physik und angewandte Mechanik der Universität München.

Die vorliegende Darstellung bringt eine kurze Übersicht über die bis jetzt vorliegenden, aber im allgemeinen wenig bekannten Lösungsmethoden für das Problem der kompressiblen Strömung um gegebene, besonders zylindrische Profile. Anschließend sind die erzielten Ergebnisse für den Kreiszylinder, die Kugel, den elliptischen Zylinder und ein symmetrisches Joukowski-Profil zusammengestellt[1]*). Dabei wird insbesondere auch die vom Verfasser vor zwei Jahren und unabhängig davon von einem japanischen Autor gefundene dritte Näherung für die Kreiszylinderströmung berücksichtigt. — Von einer eingehenden Betrachtung der auftretenden Kräfte muß im Rahmen dieser Arbeit abgesehen werden.*

Gliederung.

§ 1. Einleitung.

Wenn feste Körper in einem flüssigen bzw. gasförmigen Medium mit Geschwindigkeiten bewegt werden, die im Vergleich mit der Schallgeschwindigkeit klein bleiben, so kann der Einfluß der Kompressibilität des Mediums vernachlässigt werden. Obwohl gerade für Gase die Berücksichtigung der Zusammendrückbarkeit unumgänglich zu sein scheint, so hat doch die allgemeine Aerodynamik mit gutem Erfolg von den Gesetzen der Hydrodynamik Gebrauch gemacht, indem sie, die Luft als inkompressible Flüssigkeit betrachtend, im Bereich kleiner Geschwindigkeiten bleibt. Bewegen sich aber die Körper mit Geschwindigkeiten, die etwa der halben Schallgeschwindigkeit gleichkommen oder sich weiter diesem kritischen Wert annähern, so kann die Kompressibilität des Mediums nicht mehr vernachlässigt werden.

Die kompressiblen Profilströmungen in reinem Unterschallgebiet wurden erst in den letzten Jahren, namentlich durch die Bemühung der Luftfahrtforschung, teilweise aufgeklärt. Mannigfache theoretische und experimentelle Versuche wurden zur Klärung der Probleme unternommen und es soll hier ein kurzer Überblick über die wichtigsten vorliegenden Untersuchungen gegeben werden.

Ist die Theorie der Strömung schon bei Volumenbeständigkeit verwickelt genug, so wurde die Lage durch Hinzutreten der Kompressibilität besonders schwierig. Man wurde sofort wieder zu Vereinfachungen in anderer Richtung gezwungen. Die folgenden Ausführungen beschränken sich im wesentlichen auf zweidimensionale, wirbelfreie, stationäre Bewegungsvorgänge und sehen auch von der Erscheinung der Reibung und der Wärmeleitung ab. Die Dichte soll als eine stetige Funktion des Druckes vorausgesetzt werden. Ferner ist der Strömung die adiabatische Zustandsgleichung zugrunde gelegt.

*) A 35 25.

[1]) Es handelt sich dabei in erster Linie um japanisches Schrifttum.

I. Die grundlegende Differentialgleichung.

§ 2. Aus der Annahme der Wirbelfreiheit der als eben vorausgesetzten Flüssigkeitsströmung, die durch die Beziehung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

bestimmt wird, folgt die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials, entsprechend

$$\mathfrak{v} = \nabla \Phi;$$

Die für unseren Fall vereinfachte Bernoullische Gleichung hat die Form

$$\frac{v^2}{2} + P = \text{konst},$$

wo die Druckfunktion

$$P(p) = \int \frac{dp}{\varrho}$$

von der vorausgesetzten Beziehung zwischen Druck und Dichte abhängt. Die allgemeine Kontinuitätsbeziehung reduziert sich für die stationäre Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit auf

$$\operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \varrho = 0;$$

Da

$$\nabla \varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial p} \nabla p = \frac{1}{c^2} \nabla p$$

ist, wobei c die örtliche Schallgeschwindigkeit bedeutet, kann der Ausdruck für ∇p aus der Bernoullischen Gleichung entnommen und in der Kontinuitätsgleichung eingesetzt werden. Wir erhalten dann für die Potentialfunktion Φ die Gleichung

$$\Delta \Phi - \frac{\mathfrak{v} \cdot \nabla \frac{v^2}{2}}{c^2} = 0; \qquad (1)$$

In Koordinatendarstellung ergibt sich mit

$$\Delta \Phi = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

als grundlegende Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right) + \frac{\partial v_y}{\partial y}\left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right) - \frac{v_x v_y}{c^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = 0, \qquad (2)$$

die mit

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x\,; \; v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_y$$

auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\Phi_{xx}\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{c^2}\right) + \Phi_{yy}\left(1 - \frac{\Phi_y^2}{c^2}\right) - 2\frac{\Phi_x \Phi_y}{c^2}\,\Phi_{xy} = 0, \qquad (3)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial v^2}{\partial y}\right); \quad . . (4)$$

Stellen wir schließlich c^2 durch v^2 und v^2_0 dar, so erhalten wir für die Grundgleichung noch folgenden Ausdruck:

$$\Delta \Phi [2 c_0^2 - (\gamma - 1)(v^2 - v_0^2)] = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial v^2}{\partial y} \quad (5)$$

§ 3. Die Grundgleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von gemischtem Typ. Sie ist von elliptischem Typ, wenn $v^2 < c^2 (v)$ (Unterschallgebiet), von hyperbolischem, wenn $v^2 > c^2 (v)$ (Überschallgebiet) und von parabolischem, wenn $v^2 = c^2 (v)$ ist. Die Schwierigkeiten bei der Integration sind einerseits durch den nichtlinearen Charakter dieser partiellen Differentialgleichung bedingt, anderseits durch den Wechsel des Typs bei einem kritischen Wert der Schallgeschwindigkeit, der zunächst noch unbekannt ist und im Verlauf der Rechnung erst selbst bestimmt werden soll.

Im folgenden Abschnitt werden wir kurz die Verfahren beschreiben, die bis heute zur Bewältigung dieser Schwierigkeiten entwickelt wurden.

II. Methoden zur Lösung der Grundgleichung.

§ 4. Linearisierte Theorie von Prandtl-Glauert [1 mit 4][1]).

Es kann im ungestörten Bereich der Strömung, d. h. in weiter Entfernung von dem umströmten Profil die Stromgeschwindigkeit v_0 von der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit c_0 sein, in dem zu untersuchenden Stromfeld selbst sei aber nur die Geschwindigkeitskomponente v_x von der Größenordnung der örtlichen Schallgeschwindigkeit c. Das Koordinatensystem ist dabei so zu legen, daß die X-Achse mit der Stromrichtung im ungestörten Bereich zusammenfällt. Die Geschwindigkeitskomponente v_y bleibe gegenüber v_x sehr klein, so daß sie vernachlässigt werden kann. Die Gl. (2) reduziert sich dann auf

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad . . . . . . (6)$$

Setzen wir im Falle von Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit für $v_x = v_0$ (= konst.) und für $c^2 = c_0^2$ (= konst.), so wird $\left(1 - \frac{v_0^2}{c_0^2}\right)$ ein konstanter Faktor. Lösungen der Gl. (6) können daher zu Lösungen der Differentialgleichung der volumenbeständigen ebenen Potentialströmung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$$

in Beziehung gesetzt werden. Die Transformation darf aber nur vorgenommen werden, wenn die durch die Kompressibilität des Mediums bedingten Zusatzgeschwindigkeiten klein bleiben gegenüber v_0, damit die Annahme $v_x = v_0$ (= konst.) gewahrt bleibt. Sie ist anwendbar auf spitze, mit einer Schneide beginnende Konturen, bei Strömungen, die wenig von einer reinen Translationsbewegung abweichen, z. B. bei dem von J. Ackert [5] behandelten Fall einer Strömung längs einer leicht gewellten Wand[3]). — Treten Staupunkte auf, so ist die Transformation nicht erlaubt. Es ist an dieser Stelle auf die vor kurzem erschienene Arbeit von W. Hantsche und H. Wendt [62] hinzuweisen. Sie haben ein Verfahren angegeben, daß von der Prandtlschen Näherung für schlanke Profile ausgeht und für alle unterkritischen Machschen Zahlen gilt. Da die Verfasser selbst ihre Ergebnisse mit einigen der hier beschriebenen Untersuchungen vergleichen, ist von einer weiteren Zitierung dieser Arbeit abgesehen..

Der Wechsel des Typs unserer Grundgleichung ist auch in Gl. (6) erhalten. Für Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit ergibt die beschriebene Linearisierung jedoch imaginäre Lösungen, ist also nicht brauchbar. Eine entsprechende Theorie ist ebenfalls von L. Prandtl gegeben. Weitere Näherungsverfahren für das Überschallgebiet stammen u. a. von Th. Meyer [7], A. Busemann [8], G. I. Taylor und J. W. Maccoll [9], Th. v. Kármán und N. G. Moore [10].

§ 5. Näherungsverfahren von O. Janzen und Lord Rayleigh [11, 12].

Nehmen wir die Grundgleichung in ihrer Form [5]

$$\Delta \Phi = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial v^2}{\partial y}}{2 c_0 \left\{1 - (\gamma - 1)\frac{1}{2 c_0}(v^2 - v_0^2)\right\}},$$

so können zunächst alle auf der rechten Seite stehenden Glieder durch bekannte Werte einer nullten Näherungslösung $\Phi_0 = f(x, y)$ (inkompressibler Fall) ersetzt werden. Die rechte Seite von Gl. (5) ist damit als eine Funktion von x und y zu berechnen und die Lösung der Gleichung

$$\Delta \Phi_1 = f(x, y) \quad . . . . (7)$$

ergibt eine erste Näherung.

Das Verfahren ist wiederholt anzuwenden. Konvergiert es, so ist schließlich durch schrittweise Näherung die Lösung der Grundgleichung unter Berücksichtigung spezieller Randbedingungen mit einer bestimmten Genauigkeit zu errechnen. Im Gegensatz zur linearisierten Theorie können auch die Strömungsverhältnisse um dickere Profile untersucht werden. Es treten aber nur bis zu einem bestimmten kritischen Wert des Verhältnisses v_0/c_0 konvergierende Ergebnisse auf. Beim kreiszylindrischen Profil z. B. divergiert das Verfahren bei $v_0 \approx 0{,}4\, c_0$.

In der obigen Gleichung $\Delta \Phi_n = f(x, y)$ ist der Ausdruck auf der linken Seite gleichbedeutend mit der Divergenz der Geschwindigkeit. L. Poggi [39] faßt deshalb diese Gleichung als die Kontinuitätsgleichung faßt deshalb diese Gleichung als die Kontinuitätsgleichung einer inkompressiblen Strömung mit einer Quellergiebigkeit f auf. Er ersetzt die kompressible Strömung durch eine inkompressible mit einem bestimmten System von Quellen im Bereich des Strömungsfeldes. (Ausführlicher werden wir auf Poggis Methode in § 13 zurückkommen.)

§ 6. Mechanisches Verfahren von G. I. Taylor [13, 14]

Während O. Janzen und Lord Rayleigh durch schrittweise Verzerrung des Stromlinienbildes einer inkompressiblen Strömung auf analytischem Wege das entsprechende Bild einer kompressiblen Strömung zu erreichen suchen, läßt sich G. I. Taylor die ziemlich unbequemen Rechenarbeiten durch einen Versuch abnehmen. Auf Grund der bekannten Analogie eines elektrischen Stromes in einer leitenden Schicht von gleichförmiger Dicke und der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit entwickelt er ein gut brauchbares Verfahren zur mechanischen Verzerrung des Stromlinienbildes. Er benützt den Durchgang eines elektrischen Stromes durch einen Elektrolyten in einem Becken. Die Tiefe des Elektrolyten, d. h. die Dicke der leitenden Schicht ist beim Fortschreiten von einer Näherung zur nächsthöheren zu ändern. — Das Verfahren konvergiert, wenn die Schallgeschwindigkeit an keiner Stelle erreicht ist.

§ 7. Anwendung der Variationsrechnung.

G. Braun [15] hat auf Grund eines Variationsprinzips von H. Bateman [16] Lösungen unseres Problems für den Fall, daß $v \to c$ geht, untersucht. Er stellte das der Grundgleichung entsprechende Variationsproblem auf und linearisiert es, indem er das exakte Potential $\Phi(x, y)$ durch $\Phi_1 + \Phi_2$ ersetzt. Φ_1 genügt den Randbedingungen und ist eine erste Näherung zu Φ. Das linearierte Problem ist dann mittels des direkten Verfahrens von W. Ritz (Crelles Journal Bd. 135, (1909) S. 1 bis 61) behandelt. Es zeigt sich, daß bei physikalisch interessierenden Fällen unter gewissen Voraussetzungen Eigenwerte und Eigenlösungen des Variationsproblems bestehen.

Neuerdings haben M. Pinl [17] und H. Behrbohm [18, 19] das Variationsproblem behandelt. Durch ihre Arbeiten wurden einerseits für die Entwicklung der Strömungstheorie

[1]) Die Zahlen in den eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) H. Görtler [6] behandelt dasselbe Problem für den Fall, daß die Schallgeschwindigkeit durchschritten wird. Er entwickelt dabei ein Iterationsverfahren, wobei er die Ausgangslösung auf Grund einer Linearisierung gewinnt, die zur Prandtlschen Regel führt.



kompressibler Flüssigkeiten wertvolle Beiträge geliefert, anderseits auch die mathematisch interessanten Zusammenhänge unseres Problems mit der Theorie der Minimalflächen hervorgehoben. Bekannt und angedeutet waren diese Beziehungen und die zur Theorie der hypergeometrischen Reihen in dem Schrifttum schon vielfach [7, 16, 20 mit 29, 32, 33]. — Es ist nicht möglich, an dieser Stelle näher auf die angedeuteten Zusammenhänge einzugehen.

§ 8. Molenbröck-Tschapliginsche Transformation; Hodographenmethode.

Im Gegensatz zur Legendreschen Transformation (s. etwa bei Geiger-Scheel, Handb. d. Phys., Bd. 7, S. 315) werden durch Einführung der Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y als neue unabhängige Variablen die Potential- bzw. Stromfunktion Φ und Ψ selbst auf die Geschwindigkeitsebene abgebildet. Mit dieser Transformation der Gasströmung in die Hodographenebene ist zugleich eine Linearisierung der Grundgleichung verbunden. Daß der Weg, der zu den endgültigen Gleichungen führt, bei der Legendreschen Transformation natürlicher und kürzer ist, darauf hat schon P. Molenbröck [30] hingewiesen. Im § 18, S. 186, der zitierten Arbeit zeigt er dann, daß »die Nebenbedingung, die an der Oberfläche eines Strahles sein soll, in der Legendreschen Transformation eine, ein wenig mehr verwickelte Gestalt annimmt, als in der Hodographenmethode, weshalb schließlich letztere Methode über der vorigen den Vorteil davon trägt«[4]).

Handelt es sich z. B. in der x,y-Ebene um freie Strahlgrenzen gegenüber einem Raum mit konstantem Druck, so verwandelt die Molenbröck-Tschapliginsche Transformation die freie Strahlgrenzen in feste Grenzen; denn die konstante Geschwindigkeit längs der Grenzstromlinie ist bekannt. Auch geradlinige feste Grenzen lassen sich einfach in die Hodographenebene übertragen, so daß sich aus geradlinigen festen und freien Grenzen zusammengesetzte Randbedingungen in der neuen Ebene feste Grenzen ergeben.

Den Ansatz zu dieser Methode gab bereits im Jahre 1890 der Holländer P. Molenbröck [30] für ein Gas mit dem Verhältnis der spez. Wärmen $c_p/c_v = 1$. Im Jahre 1904 erweiterte der Russe C. Tschapligin [21] in seiner grundlegenden Arbeit über Gasstrahlen diese Methode für beliebige Gase. Auf beide Arbeiten wurde man erst 30 Jahre später durch D. Riabouchinsky [31] und B. Demtschenko [32, 33] wieder aufmerksam gemacht.

Tschapligin gab auch ein Gasgesetz an, für das die Differentialgleichung in der Geschwindigkeitsebene die Differentialgleichung einer Potentialströmung gewöhnlicher Art wird. Dabei hat die Zustandsgleichung des Gases die Form

$$p - p_0 = \frac{\varrho_0^2}{A}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Diese Beziehung entspricht aber keiner physikalischen Gesetzmäßigkeit mehr; sie stellt ein Gas dar mit einer geradlinigen Adiabaten im Druck-Volumen-Diagramm. Die wirklichen Gase haben jedoch eine gekrümmte Adiabate. Diese Näherung ist also nur dort von Wert, wo sich die wirkliche Adiabate durch ihre Tangente annähern läßt. In der allgemeinen Aerodynamik benützt man überhaupt nur einen Punkt der Adiabaten. Außerdem bleibt die Näherung nur dann noch gültig, wenn v/c_0 einen bestimmten Grenzwert in der gesamten Flüssigkeit nicht überschreitet. Nach Demtschenko sind solche Strömungen als »langsame Strömungen« bezeichnet. Es zeigt sich, daß bei Geschwindigkeiten von etwa dem 0,2- bis 0,5fachen Betrag der Schallgeschwindigkeit nicht mehr mit konstanter Dichte gerechnet werden kann, in guter Annäherung aber mit der Adiabatentangente.

Vollziehen wir die allgemeine Transformation unserer Grundgleichung, indem wir v und Θ als neue unabhängige Variablen einführen (Θ ist der Stromwinkel), so erhalten wir für die Stromfunktion die Gleichung

$$v^2 \Psi_{vv} + v\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\Psi_v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Psi_{\Theta\Theta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

[4]) Zum Übergang in die Hodographenebene mittels der Legendreschen Transformation s. R. Sauer, Angew. Math. Bd. 21 (1941), S. 312—315.

Die Indizes bedeuten wiederum Differentiation nach diesen Größen. Die Gl. (8) findet sich bereits bei A. Steichen [22, S. 7], die Transformation u. a. bei A. Busemann [24] und F. Ringleb [28].

Für Ψ ergibt sich schließlich

$$\Psi = P_n \cos n\,\Theta,$$
$$\Psi = P_n \sin n\,\Theta,$$

mit $P_n = c_n v^n + c_{n+1} v^{n+1} + \ldots$; die Konstanten c_j bestimmen sich aus

$$c_{n+1} = c_{n+3} = c_{n+5} = \ldots 0;$$

$$c_{n+2k+2} = \frac{1}{c_0^2}\,\frac{\alpha'(n+2k)(n+2k-1) + \beta'(n+2k) - \gamma' n^2}{(n+2k+2)^2 - n^2}\,c_{n+2k};$$

$$\alpha' = \frac{\gamma-1}{2};\quad \beta' = \frac{\gamma-3}{2};\quad \gamma = \frac{\gamma+1}{2};$$

P_n konvergiert bis zur Maximalgeschwindigkeit ausschließlich. Beim Übergang von einer inkompressiblen zu einer kompressiblen Strömung hat man die Stromfunktion Ψ in der Form

$$\Psi = \sum_n v^n (A_n \cos n\,\Theta + B_n \sin n\,\Theta) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

zu entwickeln und alsdann v^n durch P_n zu ersetzen.

III. Strömung um den Kreiszylinder.

§ 9. Vorliegendes Schrifttum.

Erstmals wurde die kompressible Strömung um den Kreiszylinder von O. Janzen [11] untersucht, etwas später von Lord Rayleigh [12]. Beide führten die Berechnung einer ersten Näherung durch[5]). Die zweite Näherung wurde in exakter Form im Jahre 1938 von I. Imai [43] gegeben. Bereits 1932 hatte L. Poggi [39, 40] eine zweite Näherung berechnet; in seinem Ergebnis sind aber nicht alle in Frage kommenden Ausdrücke berücksichtigt. Ebenso gab E. Pistolesi [41] in seinem Vortrag auf dem Voltakongreß 1935 (Rom) ein unvollständiges Ergebnis. C. Kaplan [42] berechnete dann nach der Methode von Poggi zwar alle Glieder, gibt aber für einige Faktoren falsche Werte an. Eine richtige, mit I. Imai übereinstimmende Berechnung der zweiten Näherung nach Poggis Methode gaben erst im Jahre 1939 die Japaner Kô Tamada und J. Saito [44]. — In einer Arbeit des gleichen Jahres erklärte E. Pistolesi [45], daß L. Poggi in den erwähnten Arbeiten nicht die Absicht hatte, alle Ausdrücke der zweiten Näherung zu geben, sondern sich auf die Glieder beschränkte, die mit dem Faktor $(\gamma - 1)$ auftreten. Er gibt nun ebenfalls die richtigen Werte in Übereinstimmung mit I. Imai und Kô Tamada—J. Saito.

Im Jahre 1940 wandte Kô Tamada [46] die Hodographenmethode auf unser Problem an. Durch eine Bemerkung von Th. v. Kármán angeregt, hatte Hsue-Shen Tsien [64] eine Theorie entwickelt, die bei bekannten inkompressiblen Strömungsverhältnissen um ein Profil eine Berechnung der Strömung um ein ähnliches, nur wenig abweichendes Profil in einer kompressiblen Strömung ermöglicht. Tamada untersuchte in dieser Weise die Kreisströmung.

Eine dritte Näherung nach der Methode von Janzen-Rayleigh hat der Verfasser im Rahmen seiner Dissertation [48] im Winter 1940/41 berechnet. Die Ergebnisse einer von I. Imai [47] durchgeführten, damals noch nicht veröffentlichten dritten Näherung waren ihm dabei nicht bekannt. Tamada hatte lediglich von der von I. Imai neu ermittelten kritischen Machschen Zahl berichtet.

Schließlich muß auch an dieser Stelle die Arbeit von G. Braun [15] und die experimentellen Untersuchungen von G. I. Taylor [13, 14] hervorgehoben werden.

Die kompressible Strömung um den Kreiszylinder mit Berücksichtigung der Zirkulation haben H. Lamb [38] und S. Tamatiko und H. Umemato [63] behandelt.

§ 10. Das Geschwindigkeitspotential.

Die Grundgleichung, die unter Berücksichtigung der speziellen Randbedingungen zu integrieren ist, läßt sich mit den neuen Größen

[5]) In dem Schrifttum ist vielfach unsere 1. Näherung als 2. Näherung bezeichnet.



$\frac{\Phi}{v_0} = \varphi; \; \frac{v}{v_0} = q; \; \frac{v_0}{c_0} = M$ (= Machsche Zahl),

und mit Polarkordinaten in folgender Form darstellen:

$$\left[1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1) M^2 (q^2 - 1)\right] \Delta \varphi = \frac{1}{2} M^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial q^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}\frac{\partial q^2}{\partial \Theta}\right). \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Entwickeln wir das Potential φ nach steigenden Potenzen von M^2, so ergibt sich

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 M^2 + \varphi_2 M^4 + \; . \; . \; .$$
$$q^2 = q_0^2 + q_1^2 M^2 + q_2^2 M^4 + \; . \; . \; .$$

mit

$$q_0^2 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \Theta}\right)^2;$$

$$q_1^2 = 2\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \Theta}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \Theta}\right);$$

und

$$\Delta \varphi_0 = 0$$

$$\Delta \varphi_n = \frac{1}{2}(\gamma - 1)\left[(q_0^2 - 1)\Delta \varphi_{n-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-2} q_\lambda^2 \Delta \varphi_{n-1-\lambda}\right] + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_{n-1-\lambda}}{\partial r}\frac{\partial q_\lambda^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi_{n-1-\lambda}}{\partial \Theta}\frac{\partial q_\lambda^2}{\partial \Theta}\right). \quad (12)$$

Es zeigt sich, daß alle Glieder auf der rechten Seite von $\Delta \varphi_n$ von der Form $r^p \cos n\,\Theta$ sind, so daß eine Gleichung der Form

$$\Delta \Psi = r^p \cos n\,\Theta$$

zu lösen ist, wobei eine partielle Lösung

$$\Psi = \frac{r^{p+2}}{(p+2)^2 - n^2} \cos n\,\Theta$$

lautet. Wenn wir von dem für $M = 0$ gültigen Potential

$$\varphi_0 = (r + r^{-1}) \cos \Theta \quad \text{(inkompressibler Fall)}, \quad . \; . \quad (13)$$

ausgehen, so ergibt sich als allgemeine Lösung von Gl. (11) eine nach Potenzen der Machschen Zahl fortschreitende Reihe von der Form

$$\Phi = v_0 (\varphi_0 + \varphi_1 M^2 + \varphi_2 M^4 + \varphi_3 M^6 + \; . \; . \; .), \quad . \; . \quad (14)$$

wo für die ersten drei Funktionen von φ zu setzen ist:

$$\varphi_1 = \left(\frac{13}{12} r^{-1} - \frac{1}{2} r^{-3} + \frac{1}{12} r^{-5}\right)\cos \Theta + \left(-\frac{1}{4} r^{-1} + \frac{1}{12} r^{-3}\right)\cos 3\Theta; \quad . \; . \; . \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 = (\gamma - 1) \Big\{ &\left(\frac{17}{60} r^{-1} - \frac{1}{8} r^{-3} + \frac{1}{12} r^{-5} - \frac{1}{16} r^{-7} + \frac{1}{80} r^{-9}\right)\cos \Theta \\
&+ \left(-\frac{61}{240} r^{-3} + \frac{3}{16} r^{-5} - \frac{1}{40} r^{-7}\right)\cos 3\Theta \\
&+ \left(\frac{1}{16} r^{-3} - \frac{3}{80} r^{-5}\right)\cos 5\Theta \Big\} \\
&+ \left(\frac{137}{80} r^{-1} - \frac{4}{3} r^{-3} + \frac{13}{16} r^{-5} - \frac{5}{16} r^{-7} + \frac{11}{240} r^{-9}\right)\cos \Theta \\
&+ \left(-\frac{19}{48} r^{-1} - \frac{5}{48} r^{-3} + \frac{3}{16} r^{-5} - \frac{1}{24} r^{-7} + \frac{1}{144} r^{-9}\right)\cos 3\Theta \\
&+ \left(\frac{1}{16} r^{-1} + \frac{1}{16} r^{-3} - \frac{1}{20} r^{-5}\right)\cos 5\Theta; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 = (\gamma - 1)^2 \Big[&\left(\frac{59}{420} r^{-1} + \frac{1}{48} r^{-5} - \frac{1}{16} r^{-7} + \frac{3}{80} r^{-9} - \frac{1}{60} r^{-11} \right. \\
&\left. + \frac{3}{336} r^{-13}\right)\cos \Theta + \left(-\frac{29}{210} r^{-3} + \frac{1}{16} r^{-5} - \frac{1}{40} r^{-7} + \frac{1}{24} r^{-9} \right. \\
&\left. - \frac{1}{112} r^{-11}\right)\cos 3\Theta + \left(\frac{169}{1680} r^{-5} - \frac{1}{12} r^{-7} + \frac{1}{112} r^{-9}\right)\cos 5\Theta \\
&+ \left(-\frac{1}{48} r^{-5} + \frac{5}{336} r^{-7}\right)\cos 7\Theta \Big] \\
&+ (\gamma - 1) \Big[\left(\frac{44}{35} r^{-1} - \frac{163}{240} r^{-3} + \frac{149}{192} r^{-5} - \frac{869}{960} r^{-7} + \frac{173}{320} r^{-9} \right. \\
&\left. - \frac{7}{40} r^{-11} + \frac{51}{2240} r^{-13}\right)\cos \Theta + \left(-\frac{17}{240} r^{-1} - \frac{899}{700} r^{-3} \right. \\
&\left. + \frac{427}{320} r^{-5} - \frac{1613}{2400} r^{-7} + \frac{401}{1440} r^{-9} - \frac{123}{2240} r^{-11} + \frac{1}{240} r^{-13}\right)\cos 3\Theta \\
&+ \left(\frac{97}{240} r^{-3} - \frac{1457}{11200} r^{-5} - \frac{5}{48} r^{-7} + \frac{53}{2240} r^{-9} - \frac{1}{240} r^{-11}\right)\cos 5\Theta \\
&+ \left(-\frac{1}{16} r^{-3} - \frac{1}{192} r^{-5} + \frac{41}{1344} r^{-7}\right)\cos 7\Theta \Big] \\
&+ \left(\frac{10571}{3360} r^{-1} - \frac{281}{90} r^{-3} + \frac{9613}{2880} r^{-5} - \frac{787}{288} r^{-7} + \frac{1949}{1440} r^{-9} \right. \\
&\left. - \frac{533}{1440} r^{-11} + \frac{853}{20160} r^{-13}\right)\cos \Theta + \left(-\frac{77}{120} r^{-1} - \frac{22291}{20160} r^{-3} \right. \\
&\left. + \frac{143}{96} r^{-5} - \frac{1211}{1440} r^{-7} + \frac{319}{864} r^{-9} - \frac{659}{6720} r^{-11} + \frac{17}{1440} r^{-13}\right)\cos 3\Theta \\
&+ \left(\frac{25}{192} r^{-1} + \frac{109}{192} r^{-3} - \frac{13067}{30240} r^{-5} + \frac{5}{96} r^{-7} - \frac{1}{1344} r^{-9} \right. \\
&\left. - \frac{1}{288} r^{-11} + \frac{1}{1728} r^{-13}\right)\cos 5\Theta + \left(-\frac{1}{64} r^{-1} - \frac{3}{32} r^{-3} \right. \\
&\left. + \frac{1}{24} r^{-5} + \frac{17}{1344} r^{-7}\right)\cos 7\Theta. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)
\end{aligned}$$

§ 11. Geschwindigkeitsverteilung längs des Profils.

Die Geschwindigkeit v_M längs der Mantelfläche des kreiszylindrischen Profils ist durch $v_M = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}\right)_{r=1}$ gegeben. Mit Berücksichtigung der 3. Näherung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{v(1, \Theta)}{v_0} = 2 \sin \Theta &+ \left(\frac{2}{3}\sin \Theta - \frac{1}{2}\sin 3\Theta\right) M^2 + (\gamma - 1)\left(\frac{23}{120}\sin \Theta \right. \\
&\left. - \frac{11}{40}\sin 3\Theta + \frac{1}{8}\sin 5\Theta\right) M^4 + \left(\frac{37}{40}\sin \Theta - \frac{25}{24}\sin 3\Theta \right. \\
&\left. + \frac{3}{8}\sin 5\Theta\right) M^4 + (\gamma - 1)^2\left(\frac{103}{840}\sin \Theta - \frac{57}{280}\sin 3\Theta \right. \\
&\left. + \frac{11}{84}\sin 5\Theta - \frac{1}{24}\sin 7\Theta\right) M^6 + (\gamma - 1)\left(\frac{2813}{3360}\sin \Theta \right. \\
&\left. - \frac{23441}{16800}\sin 3\Theta + \frac{1591}{1680}\sin 5\Theta - \frac{25}{96}\sin 7\Theta\right) M^6 \\
&+ \left(\frac{139}{84}\sin \Theta - \frac{2467}{1008}\sin 3\Theta + \frac{9503}{6048}\sin 5\Theta \right. \\
&\left. - \frac{37}{96}\sin 7\Theta\right) M^6. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)
\end{aligned}$$

Die auftretende maximale Geschwindigkeit ergibt sich für $\Theta = \pi/2$. Die Geschwindigkeit längs der Y-Achse, die senkrecht durchströmt wird, ist gegeben durch $v_x(r, \pi/2)$ bzw.

$$v_x(0, y) = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}\right)_{\Theta = \pi/2}.$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{v_x(0, y)}{v_0} = 1 + y^{-2} &+ \left(\frac{11}{6} y^{-2} - \frac{3}{4} y^{-4} + \frac{1}{12} y^{-6}\right) M^2 + (\gamma - 1)\left(\frac{17}{60} y^{-2} \right. \\
&\left. + \frac{19}{20} y^{-4} - \frac{2}{3} y^{-6} + \frac{1}{80} y^{-8} + \frac{1}{80} y^{-10}\right) M^4 \\
&+ \left(\frac{257}{80} y^{-2} - \frac{17}{24} y^{-4} - \frac{3}{16} y^{-8} + \frac{1}{40} y^{-10}\right) M^4 \\
&+ (\gamma - 1)^2 \left(\frac{59}{420} y^{-2} + \frac{29}{70} y^{-4} + \frac{27}{56} y^{-6} - \frac{61}{120} y^{-8} \right. \\
&\left. - \frac{3}{70} y^{-10} + \frac{17}{1680} y^{-12} + \frac{1}{336} y^{-14}\right) M^6 + (\gamma - 1)\left(\frac{823}{560} y^{-2} \right. \\
&+ \frac{47309}{8400} y^{-4} - \frac{2151}{560} y^{-6} + \frac{113}{300} y^{-8} - \frac{593}{3360} y^{-10} \\
&\left. - \frac{209}{6720} y^{-12} + \frac{23}{2240} y^{-14}\right) M^6 + \left(\frac{9797}{1680} y^{-2} + \frac{4649}{1260} y^{-4} \right. \\
&- \frac{216707}{60480} y^{-6} - \frac{109}{2880} y^{-8} + \frac{1627}{6720} y^{-10} - \frac{209}{2240} y^{-12} \\
&\left. + \frac{37}{3780} y^{-14}\right) M^6. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)
\end{aligned}$$

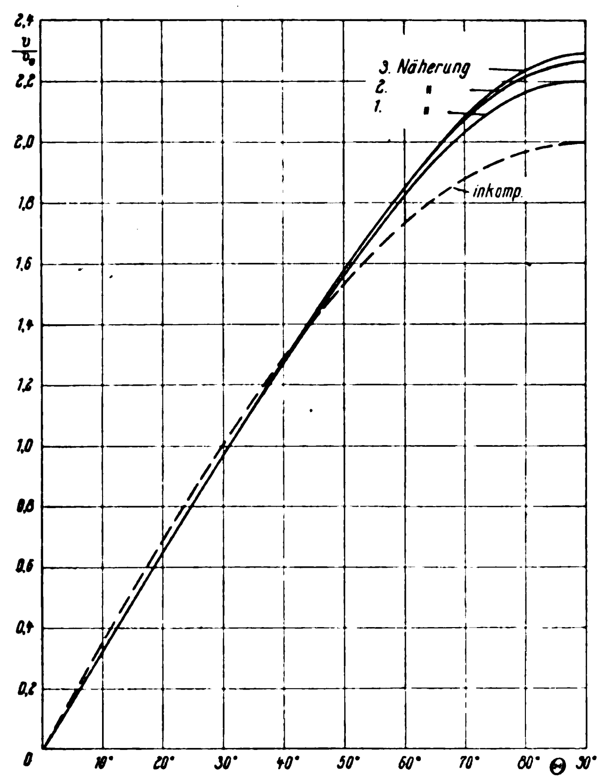


Bild 1. Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche des Kreiszylinders.

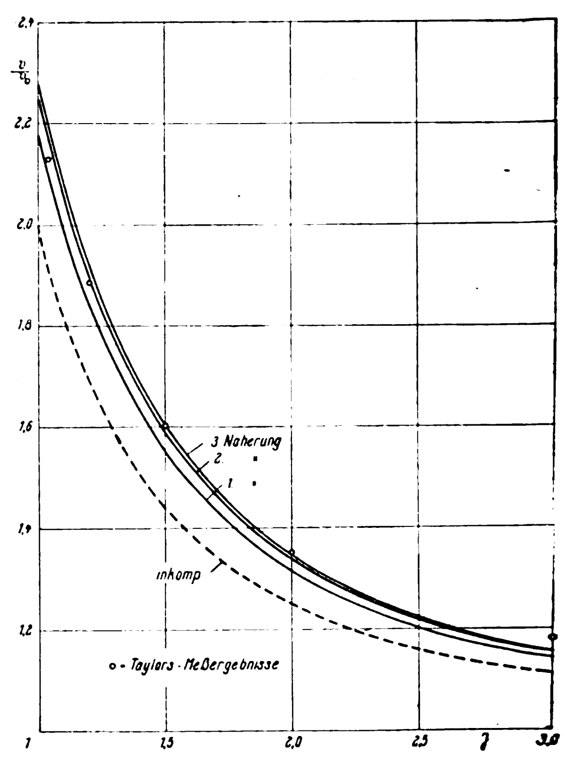


Bild 2. Geschwindigkeitsverteilung längs der y-Achse. ($\gamma = 1{,}405$; $M = 0{,}4$.)

In Bild 1 ist die Geschwindigkeitsverteilung längs des Profils graphisch dargestellt. Bild 2 zeigt die Strömungsgeschwindigkeit v/v_0 in Abhängigkeit von y, dem Abstand vom Zylindermittelpunkt.

§ 12. Die kritische Machsche Zahl.

Die kritische Machsche Zahl, bei der die örtliche Schallgeschwindigkeit

$$c = c_0 \left[\frac{1}{M^2} - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(q^2 - 1)\right]^{\frac{1}{2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (20)$$

erstmals erreicht wird, ergibt sich aus der Bedingung

$$v_x(1, \pi/2) = c.$$

Die errechneten Werte sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt und in Bild 3 schaubildlich dargestellt.

Zahlentafel 1. Kritische Machsche Zahl (Kreiszylinder).

	0. Näherung	1. Näherung	2. Näherung	3. Näherung	Tamada (Hodogr. M.)	Braun (Variat. R.)
M_{krit}	0,4659	0,4206	0,4090	0,4043	0,400	0,415

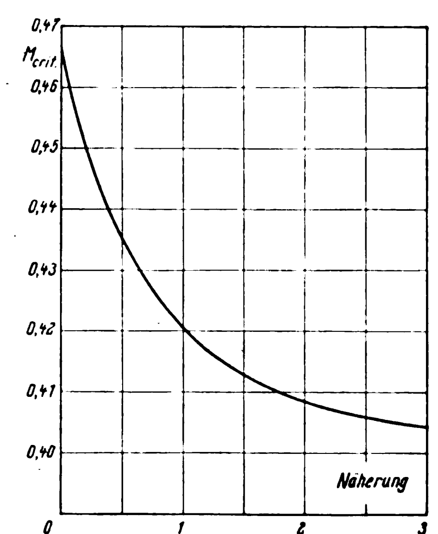


Bild 3. Kritische Machsche Zahl (Kreiszylinder).

§ 13. Methode von Poggi, Berücksichtigung der Zirkulation.

1. Nach dem Gedanken von L. Poggi [39] wird die Grundgleichung (4) als Kontinuitätsgleichung einer inkompressiblen Strömung aufgefaßt, wobei über das gesamte Strömungsfeld ein System von Quellen gelagert ist, deren Ergiebigkeit durch die rechte Seite unserer Gl. (4) dargestellt wird. In einem Element $dx\,dy$ der Ebene beträgt dann die Ergiebigkeit

$$-\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial v^2}{\partial y}\right) dx\,dy \quad . \; . \; . \quad (21)$$

Da wir später die zu untersuchenden Profile der ζ-Ebene durch eine Transformation $\zeta = F(z)$ konform auf den Kreis in der z-Ebene mit dem Radius R abbilden, so ist hier zu bemerken, daß in zwei entsprechenden Punkten der beiden Ebenen die Ergiebigkeit des Quellsystems denselben Wert behält, es sei denn, daß an den Punkten irgendwelche Singularitäten gelten.

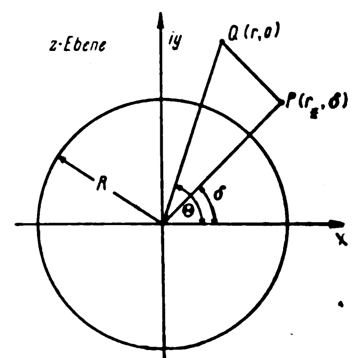


Bild 4.

Mit Polarkoordinaten r, Θ und mit der neuen Variablen $\lambda = R/r$ ergibt sich für (21) folgender Ausdruck:

$$-\frac{1}{4\pi c^2}\left(v_r \frac{\partial v^2}{\partial \lambda} - \frac{v_\Theta}{\lambda}\frac{\partial v^2}{\partial \Theta}\right)\frac{R}{\lambda}\, d\lambda\, d\Theta \quad . \; . \quad (22)$$

Betrachten wir nun eine einfache Quelle mit der Ergiebigkeit Eins und im Punkte $Q\,(r,\Theta)$ bzw. $Q\,(re^{i\Theta})$ der z-Ebene gelegen (s. Bild 4), so lautet bei Vorhandensein eines kreiszylindrischen Profils an irgendeinem Punkte außerhalb der Kontur $P\,(r_*,\delta)$ bzw. $P\,(=re^{i\delta})$ oder auf der Kontur $P\,(R,\delta)$ das komplexe Geschwindigkeitspotential

$$w = \log(z-z_Q) + \log(z-z_s) - \log z = \log(z - r\,e^{i\Theta}) + \log\left(z - \frac{R^2}{r}\,e^{i\Theta}\right) - \log z. \quad (23)$$

Der Punkt S liegt invers zu $Q\ (=z_Q)$ in bezug auf das Profil; seine komplexe Koordinate ist $z_S = \frac{R^2}{r}\,e^{i\Theta}$.

Setzen wir $z = r_*\,e^{i\delta}$ auf der rechten Seite von Gl. (23) ein und trennen wir Real- und Imaginärteil, so finden wir das Geschwindigkeitspotential Φ_* in der Form

$$\Phi_* = \Re(w) = \frac{1}{2}\log\left\{r^2 - 2\,r\,r_*\cos(\Theta-\delta) + r_*^2\right\} + \frac{1}{2}\log\left\{1 - 2\frac{R^2}{r\,r_*}\cos(\Theta-\delta) + \left(\frac{R^2}{r\,r_*}\right)^2\right\}. \quad (24)$$

Führen wir noch $\lambda_* = \frac{R}{r_*}$ ein, so ergibt sich ohne weiteres die gesuchte erste Näherungslösung der Grundgleichung zu

$$\Phi_1 = \frac{R}{4\pi c_0^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(v_r\frac{\partial v^2}{\partial\lambda} - \frac{v_\Theta}{\lambda}\frac{\partial v^2}{\partial\Theta}\right)\Phi_*\,\frac{d\lambda}{\lambda}\,d\Theta \quad . \ (25)$$

mit

$$\Phi_* = \log\frac{R}{\lambda_*} + \frac{1}{2}\log\left(1 - 2\frac{\lambda_*}{\lambda}\cos(\Theta-\delta) + \left(\frac{\lambda_*}{\lambda}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 - 2\,\lambda\,\lambda_*\cos(\Theta-\delta) + (\lambda\,\lambda_*)^2\right). \quad (26)$$

In Gl. (25) ist c^2 durch c_0^2 ersetzt, was für eine erste Näherung keine allzu große Vernachlässigung bedeutet. Für v_r, v_Θ, und v^2 sind in Gl. (25) wieder die Werte einzusetzen, die sich für eine inkompressible Strömung ergeben; die Integration ist hierauf durchzuführen.

Beschränken wir uns auf die Vorgänge an der Profilfläche, so ergibt sich für die durch die Kompressibilität bedingte zusätzliche Geschwindigkeit v_z folgender Wert:

$$v_z = \frac{1}{4\pi c_0^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{v_r\frac{\partial v^2}{\partial\lambda} + v_\Theta/_\lambda\,\frac{\partial v^2}{\partial\Theta}}{1-2\lambda\cos(\Theta-\delta)+\lambda^2}\sin(\Theta-\delta)\,d\lambda\,d\Theta. \quad (27)$$

2. In § 12 haben wir die Kreisströmung mit Vernachlässigung der Zirkulation betrachtet. Nehmen wir nun eine zirkulatorische Strömung Γ in der üblichen Weise an, so lautet im inkompressiblen Fall das Potential

$$\Phi_0 = v_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\Phi + \frac{\Gamma}{2\pi}\Phi. \quad (28)$$

Die Ausdrücke für v_r und v_Θ und v^2 sind daraus zu bilden und gemeinsam mit Gl. (26) in die Gl. (25) einzusetzen. Die Integration ergibt schließlich

$$\Phi_1 = R\,M^2 v_0\Bigg[\left\{\left(-\frac{13}{12} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 v_0^2}\right)\frac{R}{r_*} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 v_0^2}\frac{R}{r_*}\log\frac{r_*}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_*}\right)^3 - \frac{1}{12}\left(\frac{R}{r_*}\right)^5\right\}\cos\delta - \left\{\frac{\Gamma}{8\pi R v_0} + \frac{\Gamma}{6\pi R v_0}\left(\frac{R}{r_*}\right)^2 + \frac{\Gamma}{2\pi R v_0}\left(\frac{R}{r_*}\right)^2\log\frac{r_*}{R} + \frac{\Gamma}{24\pi R v_0}\left(\frac{R}{r_*}\right)^4\right\}\sin 2\delta + \left\{\frac{1}{4}\frac{R}{r_*} - \frac{1}{12}\left(\frac{R}{r_*}\right)^3\right\}\cos 3\delta\Bigg]; \quad (29)$$

Dieser Ausdruck, wie er von S. Tamatiko und H. Umemato gegeben wurde, stimmt mit dem Ergebnis von H. Lamb überein, der nach der Methode von Janzen-Rayleigh vorging.

Für die zusätzliche Geschwindigkeit v_z an der Oberfläche ergibt sich

$$v_z = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\delta}\right)_{r_*=R} = \left\{\left(\frac{2}{3} + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R v_0^2}\right)\sin\delta - \frac{2}{3\pi}\frac{\Gamma}{R v_0}\cos 2\delta - \frac{1}{2}\sin 3\delta\right\}M^2, \quad (30)$$

so daß wir für die totale Geschwindigkeit

$$\frac{v}{v_0} = 2\sin\delta + \frac{\Gamma}{2\pi R v_0} + v_z \quad (31)$$

erhalten. Bestimmen wir schließlich den Wert der durch die Kompressibilität bedingten zusätzlichen Zirkulation Γ_z zu

$$\Gamma_z = \Gamma_{\text{inkomp}}\left(\frac{11}{12} + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)M^2, \quad (32)$$

so ergibt sich für die Zirkulation einer kompressiblen Kreisströmung

$$\Gamma_{\text{komp}} = \Gamma_{\text{inkomp}} + \Gamma_z,$$

wobei

$$\Gamma_{\text{inkomp}} = 4\pi R v_0 \sin\alpha$$

ist; die Staupunkte treten dabei dort auf, wo $\delta = -\alpha$ und $\delta = \pi + \alpha$ ist.

IV. Strömung um die Kugel.

§ 14. Eine erste Näherung wurde ebenfalls von Lord Rayleigh [12] berechnet. Er verwendet dabei vorteilhafter für den cos von ungeraden Vielfachen von Θ die Legendresche Funktion $P_n(\cos\Theta)$. Die zweite Näherung wurde von Kô Tamada [52] nach dem Verfahren von Poggi durchgeführt. — Es sind dieselben Überlegungen anzustellen wie oben für den Kreiszylinder. Die erzielten Ergebnisse lauten:

$$\varphi_0 = \left(r + \frac{1}{2}r^{-2}\right)\cos\Theta; \quad (33)$$

$$\varphi_1 = \left(\frac{1}{3}r^{-2} - \frac{1}{5}r^{-5} + \frac{1}{24}r^{-8}\right)P_1(\cos\Theta) + \left(-\frac{3}{10}r^{-2} + \frac{27}{55}r^{-4} - \frac{3}{10}r^{-5} + \frac{3}{176}r^{-8}\right)P_3(\cos\Theta); \quad (34)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 = (\gamma-1)\Bigg[&\left(\frac{599}{16800}r^{-2} - \frac{3}{70}r^{-5} + \frac{1}{24}r^{-8} - \frac{13}{560}r^{-11} + \frac{13}{2800}r^{-14}\right)P_1(\cos\Theta) + \left(\frac{83133}{3665200}r^{-4} - \frac{1}{10}r^{-5} + \frac{15}{176}r^{-8}\right.\\ &\left. - \frac{57}{1960}r^{-11} + \frac{23}{6800}r^{-14}\right)P_3(\cos\Theta) + \left(\frac{1}{7}r^{-5} - \frac{50517}{276640}r^{-6} + \frac{3}{52}r^{-8} - \frac{9}{1120}r^{-11} + \frac{5}{8512}r^{-14}\right)P_5(\cos\Theta) + \left(\frac{1325953}{4065600}r^{-2}\right.\\ &- \frac{49}{150}r^{-5} - \frac{243}{1925}r^{-7} + \frac{1049}{3080}r^{-8} + \frac{5589}{84700}r^{-10} - \frac{3049}{18480}r^{-11}\\ &\left. + \frac{7789}{369600}r^{-14}\right)P_1(\cos\Theta) + \left(-\frac{53}{150}r^{-2} + \frac{70620063}{95295200}r^{-4} - \frac{61}{150}r^{-5} - \frac{156}{275}r^{-7} + \frac{28}{55}r^{-8} + \frac{1137}{7150}r^{-10} - \frac{12631}{64680}r^{-11}\right.\\ &\left. + \frac{929}{56100}r^{-14}\right)P_3(\cos\Theta) + \left(\frac{5}{42}r^{-2} - \frac{6}{11}r^{-4} + \frac{2}{3}r^{-5} + \frac{135921}{640640}r^{-6} - \frac{66}{77}r^{-7} + \frac{253}{728}r^{-8} + \frac{87}{1540}r^{-10} - \frac{997}{18480}r^{-11}\right.\\ &\left. + \frac{85}{29568}r^{-14}\right)P_5(\cos\Theta). \quad (35)\end{aligned}$$

Das gesuchte Potential ergibt sich zu

$$\Phi = v_0(\varphi_0 + \varphi_1 M^2 + \varphi_2 M^4).$$

Die Strömungsgeschwindigkeit $v(1,\Theta)$ an der Oberfläche der Kugel beträgt

$$\begin{aligned}\frac{v(1,\Theta)}{v_0} = -\frac{3}{2}\frac{d P_1}{d\Theta} + \left(-\frac{7}{40}\frac{d P_1}{d\Theta} + \frac{81}{880}\frac{d P_3}{d\Theta}\right)M^2 + \Bigg\{&-(\gamma-1)\left(\frac{89}{5600}\frac{d P_1}{d\Theta} - \frac{1863}{104720}\frac{d P_3}{d\Theta} + \frac{1161}{110656}\frac{d P_5}{d\Theta}\right) - \frac{46041}{338800}\frac{d P_1}{d\Theta} + \frac{1318059}{13613600}\frac{d P_3}{d\Theta}\\ &- \frac{1047}{40040}\frac{d P_5}{d\Theta}\Bigg\}M^4. \quad (36)\end{aligned}$$

Die Maximalgeschwindigkeit ergibt sich für $\Theta = \pi/2$ zu:

$$\frac{v\,(1, \pi/2)}{v_0} = \frac{3}{2} + \frac{551}{1760} M^2 + (\gamma - 1) \frac{36803843}{591219200} M^4 + \frac{3803091}{11519200} M^4 .$$

Für die kritische Machsche Zahl findet sich der Wert 0,574. Für die Geschwindigkeit $v_x\,(r, \pi/2)$ ergibt sich schließlich:

$$\frac{v_x\,(r, \pi/2)}{v_0} = \left(1 + \frac{1}{2} r^{-3}\right) + \left(\frac{47}{60} r^{-3} - \frac{81}{110} r^{-5} + \frac{1}{4} r^{-6} + \frac{17}{1056} r^{-9}\right) M^2 + (\gamma - 1) \left(\frac{599}{16800} r^{-3} - \frac{249399}{7330400} r^{-5} + \frac{3}{8} r^{-6} - \frac{151551}{442624} r^{-7} + \frac{151}{6864} r^{-9} + \frac{67}{12544} r^{-11} + \frac{2773}{4134400} r^{-15}\right) M^4 + \left(\frac{4388221}{4065600} r^{-3} - \frac{406782189}{190590400} r^{-5} + \frac{23}{15} r^{-6} + \frac{407763}{1025024} r^{-7} - \frac{81}{110} r^{-8} + \frac{10459}{45760} r^{-9} - \frac{16767}{251680} r^{-11} + \frac{5543}{206976} r^{-12} + \frac{23333}{14361600} r^{-15}\right) M^4. \quad (37)$$

Interessant sind in diesem Zusammenhange C. Pasqualinis [52, 53] experimentelle Untersuchungen über den Widerstand einer in Luft sehr schnell bewegten Kugel. Für die kritische Machsche Zahl findet er den Wert 0,55.

V. Strömung um den elliptischen Zylinder.

§ 15. Vorliegendes Schrifttum.

S. G. Hooker [54] gab eine erste Näherung für das Geschwindigkeitspotential, wobei er den besonderen Fall behandelt, daß die größere Achse der Ellipse parallel zur ungestörten Strömung liegt. Brauchbare Lösungen erzielt er nur bei bestimmten Halbachsenverhältnissen. C. Kaplan [42, 61], der nach dem Verfahren von Poggi vorgeht, beschränkt sich auf die Untersuchung der Geschwindigkeitsverteilung längs des Profils. In seiner ersten Arbeit ist der Anströmwinkel Null und von Zirkulation ist abgesehen. Die kritische Machsche Zahl berechnet er für verschiedene Profile. — Auf Grund der Molenbröck-Tschapliginschen Transformation hatte der Japaner H. S. Tsien [64] eine Theorie entwickelt, die es ihm gestattete, bei bekannter Strömung in der inkompressiblen Flüssigkeit die kompressible Strömung um eine Kontur zu berechnen, die nur sehr wenig von der elliptischen Form abweicht.

I. Imai und T. Aihara [56] rechnen nach Janzen-Rayleigh mit konjugiert komplexen Variablen und finden den exakten Ausdruck für das Potential, soweit er der ersten Näherung entspricht. Die kritische Machsche Zahl geben sie für den Fall, daß die kleinere Achse parallel zur ungestörten Strömung liege. — Eine letzte Behandlung des Problems stammt ebenfalls von zwei japanischen Autoren, S. Tamatiko und Kô Tamada [57]. Sie führen die Theorie ganz allgemein durch; der Anstellwinkel des Profils ist beliebig, die kritische Machsche Zahl finden sie in Abhängigkeit von der Form des Profils und vom Anstellwinkel.

§ 16. Geschwindigkeitspotential.

Bekannt ist die konforme Abbildung eines Kreises mit dem Radius a durch die Transformation

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

auf ein doppelberandetes Geradenstück von $(-2a, 0)$ bis $(2a, 0)$ in der ζ-Ebene. Der Mittelpunkt des Kreises liegt im Ursprung der z-Ebene. Konzentrische Kreise mit den Radien $R > a$ gehen dabei in konfokale Ellipsen über, deren gemeinsame Brennpunkte in $(-2a, 0)$ und $(2a, 0)$ liegen. Das Verhältnis der Halbachsen lautet mit

$$\sigma = \frac{a}{R}$$

$$t = \frac{R - {a^2}/{R}}{R + \frac{a^2}{R}} = \frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2}, \text{ woraus } \sigma^2 = \frac{1 - t}{1 + t} \quad (39)$$

folgt. Ist w das komplexe Geschwindigkeitspotential in der z-Ebene, so lautet der Ausdruck für die Geschwindigkeit einer inkompressiblen Strömung in der ζ-Ebene (Profil-Ebene)

$$v^2_{\text{inkomp}} = \left|\frac{d\,w}{d\,\zeta}\right|^2 = \left|\frac{d\,w}{d\,z}\frac{d\,z}{d\,\zeta}\right|^2 = v_0^2 \frac{1 - 2\,\lambda^2 \cos 2\,(\Theta - \alpha) + \lambda^4}{1 - 2\,\sigma^2\,\lambda^2 \cos 2\,\Theta + \sigma^4\,\lambda^4}; \quad . \quad . \quad (40)$$

α bedeutet den Anstellwinkel des Profils. — Wenden wir Poggis Methode an, so ist als nächstes der Ausdruck [40] in einer Fourierschen Reihe zu entwickeln, was mittels der Formel

$$\frac{1}{1 - 2\,\sigma^2\,\lambda^2 \cos 2\,\Theta + \sigma^4\,\lambda^4} = \frac{1}{1 - \sigma^4\,\lambda^4} \left\{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma\,\lambda)^{2n} \cos 2\,n\,\Theta\right\} \quad . \quad (41)$$

ohne Schwierigkeiten geschehen kann. Die Geschwindigkeitskomponenten v_r und v_Θ folgen aus dem komplexen Potential w; die Produkte $v_r\,(\partial v^2/\partial\lambda)$ und $v_\Theta^2/\lambda\,(\partial v^2/\partial\Theta)$ sind zu bilden und in Gl. (25) einzusetzen. Die Integration dieser Gleichung ist dann durchzuführen und es ergibt sich schließlich als 1. Näherungswert für das Potential

$$\Phi_1 = \frac{R\,v_0^3}{4\,c_0^2} \left[\frac{1 + \lambda_*^2}{\lambda_*} \left\{\cos(\delta - \alpha) - \frac{1}{\sigma^2} \cos(\delta - 3\,\alpha)\right\} + \frac{F}{2\,\sigma^4\,(1 - 2\,\sigma^2\,\lambda_*^2 \cos 2\,\delta + \sigma^4\,\lambda_*^4)} + \frac{G}{2\,\sigma^4\,(\sigma^4 - 2\,\sigma^2\,\lambda_*^2 \cos 2\,\delta + \lambda_*^4)} - \frac{1 + \sigma^2}{2\,\sigma^3} \sin\alpha \sin 2\,\alpha \log \frac{1 + 2\,\sigma\,\lambda_* \cos\delta + \sigma^2\,\lambda_*^2}{1 - 2\,\sigma\,\lambda_* \cos\delta + \sigma^2\,\lambda_*^2} + \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^3} \cos\alpha \sin 2\,\alpha \tan^{-1} \frac{2\,\sigma\,\lambda_* \sin\delta}{1 - \sigma^2\,\lambda_*^2} + \frac{(1 - \lambda_*^2)\,(1 - \sigma^4\,\lambda_*^4)}{\sigma^2\,\lambda_*\,(1 - 2\,\sigma^2\,\lambda_*^2 \cos 2\,\delta + \sigma^4\,\lambda_*^4)} \sin 2\,\alpha \sin(\delta - \alpha); \quad . \quad (42)$$

Dabei ist:

$$F = \lambda^*\,(1 - 2\,\sigma^2 \cos 2\,\alpha + \sigma^4)\,[(1 + \sigma^4\,\lambda_*^2) \cos(\delta + \alpha) - \sigma^2\,(1 + \lambda_*^2) \cos(\delta - \alpha)] \log \frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2}$$
$$+ \frac{\sigma}{4} [\sigma^2\,(1 + \sigma^2)\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta + 3\,\alpha) - \{\sigma^2\,(1 + 2\,\sigma^4) + 2 + \sigma^4\}\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta + \alpha) + 3\,\sigma^2\,(1 + \sigma^2)\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta - \alpha) - \sigma^2\,(1 + \sigma^2)\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta - 3\,\alpha) + (1 - \sigma^2)\,(1 - \sigma^4\,\lambda_*^4) \cos 3\,\alpha + (1 - \sigma^2)\,\{\sigma^2\,(2 - \sigma^2)\,\lambda_*^4 + (1 - 2\,\sigma^2)\} \cos\alpha] \log \frac{1 + 2\,\sigma\,\lambda_* \cos\delta + \sigma^2\,\lambda_*^2}{1 - 2\,\sigma\,\lambda_* \cos\delta + \sigma^2\,\lambda_*^2}$$
$$+ \frac{\sigma}{2} [\sigma^2\,(1 - \sigma^2)\,\lambda_*^2 \sin(2\,\delta + 3\,\alpha) + \{\sigma^2\,(1 + 2\,\sigma^4) - 2 - \sigma^4\}\,\lambda_*^2 \sin(2\,\delta + \alpha) + 3\,\sigma^2\,(1 - \sigma^2)\,\lambda_*^2 \sin(2\,\delta - \alpha) + \sigma^2\,(1 - \sigma^2)\,\lambda_*^2 \sin(2\,\delta - 3\,\alpha) + (1 + \sigma^2)\,(1 - \sigma^4\,\lambda_*^4) \sin 3\,\alpha + (1 + \sigma^2)\,\{\sigma^2\,(2 + \sigma^2)\,\lambda_*^4 - 1 - 2\,\sigma^2\} \sin\alpha] \times \tan^{-1} \frac{2\,\sigma\,\lambda_* \sin\delta}{1 - \sigma^2\,\lambda_*^2}$$
$$+ \frac{\sigma^2\,(1 - \lambda_*^2)}{\lambda_*} [\{1 - \sigma^4\,\lambda_*^4 - 2\,(1 - \sigma^4)\,\lambda_*^2\} \cos(\delta + \alpha) - 2\,\sigma^2\,(1 - \lambda_*^4) \cos(\delta - \alpha) + (1 - \sigma^4\,\lambda_*^4 \cos(\delta - 3\,\alpha)];$$

und

$$G = \lambda_*\,(1 - 2\,\sigma^2 \cos 2\,\alpha + \sigma^4)\,[(\sigma^4 + \lambda_*^2) \cos(\delta + \alpha) - \sigma^2\,(1 + \lambda_*^2) \cos(\delta - \alpha)] \log \frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2}$$
$$+ \frac{\sigma}{4} [\sigma^2\,(1 + \sigma^2)\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta + 3\,\alpha) - \{\sigma^2\,(1 + 2\,\sigma^4) + 2 + \sigma^4\}\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta + \alpha) + 3\,\sigma^2\,(1 + \sigma^2)\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta - \alpha) - \sigma^2\,(1 + \sigma^2)\,\lambda_*^2 \cos(2\,\delta - 3\,\alpha) - (1 - \sigma^2)\,(\sigma^4 - \lambda_*^4) \cos 3\,\alpha + (1 - \sigma^2)\,\{(1 - 2\,\sigma^2)\,\lambda_*^4 + \sigma^2\,(2 - \sigma^2)\} \cos\alpha] \times \log \frac{1 + 2\,\sigma\,\lambda_* \cos\delta + \sigma^2\,\lambda_*^2}{1 - 2\,\sigma\,\lambda_* \cos\delta + \sigma^2\,\lambda_*^2}$$

$$+\frac{\sigma}{2}[\sigma^2(1-\sigma^2)\lambda_*^3\sin(2\delta+3\alpha)+\{\sigma^2(1+2\sigma^4)-2$$
$$-\sigma^4\}\lambda_*^3\sin(2\delta+\alpha)+3\sigma^2(1-\sigma^2)\lambda_*^3\sin(2\delta-\alpha)$$
$$+\sigma^2(1-\sigma^2)\lambda_*^3\sin(2\delta-3\alpha)$$
$$-(1+\sigma^2)(\sigma^4-\lambda_*^4)\sin 3\alpha-(1+\sigma^2)\{(1+2\sigma^2)\lambda_*^4$$
$$-\sigma^2(2+\sigma^2)\}\sin\alpha]\tan^{-1}\frac{2\sigma\lambda_*\sin\delta}{1-\sigma^2\lambda_*^2}.$$

In einfacher Weise ergibt sich aus Gl. (42) die zusätzliche Geschwindigkeit an der Profiloberfläche. Es ist

$$v_z=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\delta}(\Phi_1)_{\lambda_*=1} \quad \ldots\ldots (43)$$

Nehmen wir zur Erleichterung der Rechnung an, daß $\alpha = 0$ ist, so ergibt Gl. (43) für v_z folgenden Wert, wie er übereinstimmend von C. Kaplan und den japanischen Autoren gegeben wird.

$$\frac{v_z}{v_0}=\frac{M^2}{2}\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2}\Bigg[\sin\delta$$
$$-\frac{1-\sigma^2}{(1-2\sigma^2\cos 2\delta+\sigma^4)^2}\Bigg\{\frac{(1-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}[(1+3\sigma^2+\sigma^4)\sin\delta$$
$$+\sigma^2\sin 3\delta]\log\frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2}$$
$$-\frac{(1+\sigma^2)(1-\sigma^2)^2}{2\sigma}\sin 2\delta\log\frac{1+2\sigma\cos\delta+\sigma^2}{1-2\sigma\cos\delta+\sigma^2}$$
$$+\frac{1-\sigma^2}{\sigma}\{(1+\sigma^4)\cos 2\delta-2\sigma^2\}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\sigma\sin\delta}{1-\sigma^2}$$
$$+2[(1-\sigma^2+\sigma^4)\sin\delta-\sigma^2\sin 3\delta]\Bigg\}\Bigg] \quad \ldots\ldots (44)$$

Mittels Gl. (44) ist der Übergang zum Kreisprofil durchzuführen, indem man $\sigma=\frac{a}{R}\to 0$ gehen läßt. Unter Vernachlässigung einiger Terme, in denen σ mit einer höheren als der zweiten Potenz auftritt, ergibt sich dabei die totale Geschwindigkeit längs des elliptischen Profils zu

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)_{\text{Ellipse}}=\frac{1}{(1-2\sigma^2\cos 2\delta+\sigma^4)^{1/2}}\left(\frac{v}{v_0}\right)_{\text{Kreis}} \quad (45)$$

wobei

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)_{\text{Kreis}}=2\sin\delta+\frac{(v_z)_{\text{Kreis}}}{v_0}$$

ist.

Die Werte für $v/v_0)_{\text{Ellipse}}$, wie sie sich aus Gl. (45) errechnen, sind für zwei Profile ($t = 1/2$ und $t = 1/10$) in Bild 5 und 6 graphisch ausgewertet. In Bild 7 ist die kritische Machsche Zahl in Abhängigkeit vom Halbachsenverhältnis t dargestellt, und zwar für die Anströmungswinkel $\alpha = 0°$, $\alpha = 5°$, $\alpha = 10°$, $\alpha = 90°$.

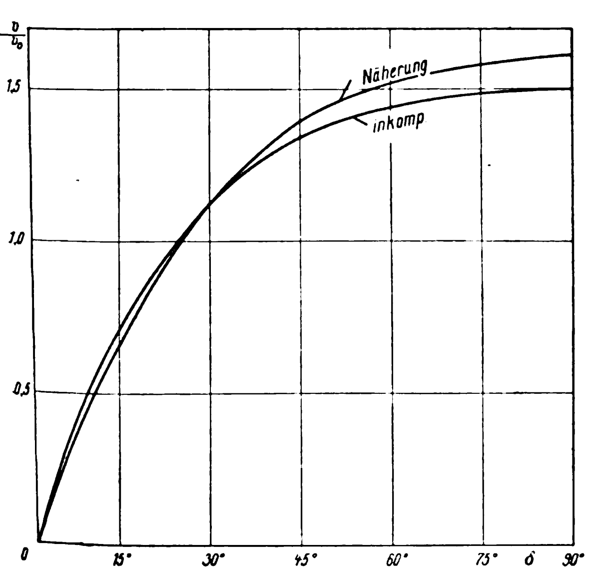


Bild 5. Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche der Ellipse. $M = 0{,}5$; $t = 1/2$.

§ 17. Annahme einer Zirkulation.

Nehmen wir schließlich zu dem im letzten § 16 behandelten Fall noch eine Zirkulationsströmung hinzu, so ist die Berechnung des Potentials und der Geschwindigkeit in derselben Art durchzuführen. Von besonderer Bedeutung ist dabei der Wert für $v_z/v_0)\ \delta = \pi$.

Es ergibt sich dafür nach Kaplan [60, Anhang B]

$$\left(\frac{v_z}{v_0}\right)_{\delta=\pi}=\frac{M^2}{2}\Bigg\{\sin\alpha-\frac{1}{\sigma^2}\sin 3\alpha+\frac{1}{\sigma^2}[(1+\sigma)^2\log(1+\sigma)$$
$$-(1-\sigma)^2\log(1-\sigma)](\sin\alpha+\sin 3\alpha)$$
$$-\frac{1}{\sigma^4}[(1+\sigma^2)^2\log(1+\sigma^2)-(1-\sigma^2)^2\log(1-\sigma^2)]\sin\alpha$$
$$+\frac{8\log(1-\sigma^4)}{\sigma^2}\sin^2\alpha-\frac{12}{\sigma^2}\sin\alpha\log(1+\sigma^2)\Bigg\} \quad (46)$$

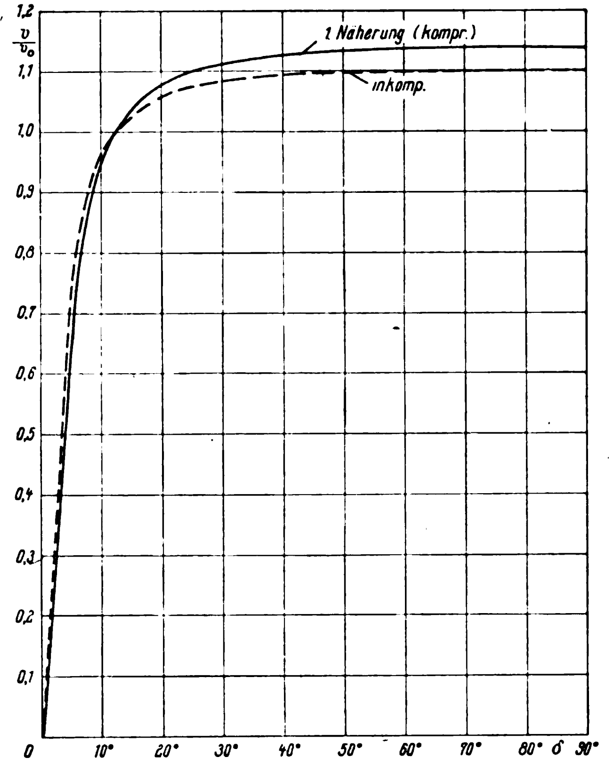


Bild 6. Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche der Ellipse $M = 0{,}857$; $t = 1/10$.

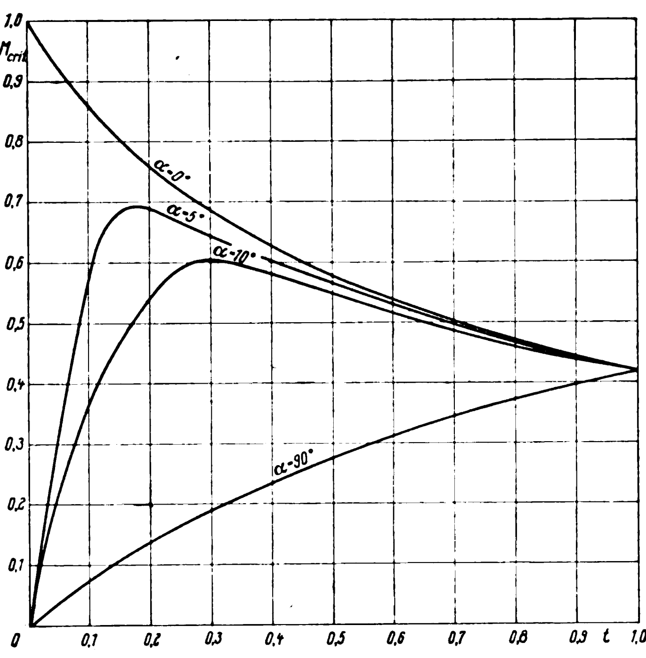


Bild 7. Kritische Machsche Zahl (elliptischer Zylinder).

Hieraus ist die zusätzliche Zirkulation Γ_z zu bestimmen, die zu $\Gamma_{\text{inkomp.}}$ hinzugefügt werden muß, damit auch für die kompressible Strömung die Kutta-Bedingung gewahrt bleibt. Es ist:

$$\Gamma_z = -\left(\frac{v_z}{v_0}\right)_{\delta = \pi}$$

Aus Gl. (46) ergibt sich dafür der Wert

$$\Gamma_z = \frac{M^2}{2}(A + B\sin^2\alpha)\,\Gamma_{\text{inkomp}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

wobei

$$A = \frac{3-\sigma^2}{2\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2}\log(1+\sigma^2) + \frac{1+6\sigma^2+\sigma^4}{4\sigma^4}\log\frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2} - \frac{1+\sigma^2}{\sigma^3}\log\frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2}$$

und

$$B = \frac{1+\sigma^2}{\sigma^3}\log\frac{1+\sigma}{1-\sigma} - \frac{2}{\sigma^2}[1-\log(1+\sigma^2)]$$

ist. — Vollziehen wir wiederum den Grenzübergang zum Kreisprofil, indem wir $\sigma \to 0$ gehen lassen, so ergibt Gl. (47)

$$(\Gamma_z)_{\text{Kreis}} = \frac{M^2}{2}\left(\frac{11}{6} + \frac{2}{3}\sin\alpha^2\right)\Gamma_{\text{inkomp}}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem in Gl. (32) gegebenen. L. Poggi (39) hatte folgenden Näherungswert gegeben:

$$\left(\frac{\Gamma_z}{\Gamma_{\text{inkomp}}}\right)_{\text{Kreis}} = \frac{11}{2}M^2$$

Setzen wir schließlich in der Gl. (47) $\sigma = 1$, so handelt es sich um ein umströmtes Geradenstück, d. h. um ein unendlich dünnes Profil und es ergibt sich

$$\left(\frac{\Gamma_z}{\Gamma_{\text{inkomp}}}\right)_{\text{Geradenst.}} = \frac{1}{2}M^2$$

Zum Vergleich sei der Wert beigefügt, der sich nach der Prandtl-Glauertschen linearisierten Theorie ergibt. Es ist

$$\Gamma_{\text{komp}} = 1/\sqrt{1-M^2}\cdot\Gamma_{\text{inkomp}}$$

VI. Strömung um ein symmetrisches Joukowski-Profil.

§ 18. Vorliegendes Schrifttum.

Die ersten Ansätze zur Behandlung dieses Problems finden sich bereits bei Poggi. C. Kaplan [42, 61] hat dann in zwei Arbeiten Poggis Resultate wesentlich erweitert. Er beschränkt sich allerdings auf die Vorgänge an der Oberfläche des Profils. Er gibt eine erste Näherung für die zusätzliche Geschwindigkeit. Die Zirkulation bestimmt er nach der Kutta-Bedingung. Um diese Beziehung in der kompressiblen Strömung aufrecht zu erhalten, d. h. um die Zirkulationsströmung so zu bestimmen, daß die Strömung auf beiden Seiten des Profils glatt abfließt, ist zur Zirkulation $\Gamma_{\text{inkomp.}}$ die Hinzunahme eines Wertes Γ_z nötig, der dem Einfluß der Kompressibilität entspricht. Für sehr dünne Profile mit kleinen Anstellwinkeln gibt Kaplan grobe Näherungswerte für Γ_z. — In Anlehnung an Kaplans Arbeiten gaben die Japaner S. Tomatiko und H. Umemato [63] eine vollständige, exakte Behandlung des Problems. Sie stellen den Ausdruck für das Potential auf, entwickeln daraus den Wert für v_z und für Γ_z. Schließlich führen sie die äußerst langwierige numerische Berechnung von Γ_z für neun Profile bei verschiedenem Anstellwinkel und die Berechnung der kritischen Machschen Zahl für sechs Profile in Abhängigkeit vom Anstellwinkel durch.

§ 19. Die Transformation

$$\zeta = z' + \frac{a^2}{z}$$

bildet den Grundkreis mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Ursprung 0′ der z'-Ebene in das doppelberandete Geradenstück von (—2a, 0) bis (2a, 0) in der ζ-Ebene ab, den exzentrischen Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung 0 der z-Ebene in ein symmetrisches Joukowsky-Profil mit verschwindendem Kantenwinkel in der ζ-Ebene.

Bezeichnen wir die Radiendifferenz 00′ mit $a\varepsilon$, so haben wir in ε ein Maß für die Dicke des Profils, während a dessen Größe bestimmt.

Da die Beziehung zwischen der z- und der z'-Ebene durch

$$z' = \varepsilon a + z$$

gegeben ist, läßt sich aus dem komplexen Potential w der z-Ebene die komplexe Geschwindigkeit in der ζ-Ebene finden. Es ist

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{dz'}\,\frac{dz'}{d\zeta}.$$

Mit Berücksichtigung eines Anstellwinkels α ergibt sich dann für die Geschwindigkeit in der Profilebene

$$v^2 = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^2 = v_0^2\,\frac{(1+2h\lambda\cos\Theta + h^2\lambda^2)^2\,[1-2\lambda\cos(\Theta+2\alpha)+\lambda^2]}{1-2k\lambda\cos\Theta + k^2\lambda^2}$$

mit $h = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$; $k = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$;

Der weitere Verlauf der Berechnung ist klar. v^2 ist wiederum in einer Fourierschen Reihe darzustellen; damit sind für die Ausdrücke der rechten Seite von Gl. (25) die Werte zu bilden, sie sind dort einzusetzen und die Integration ist auszuführen. Von der Zitierung der weitläufigen Ergebnisse müssen wir an dieser Stelle absehen. Wir beschränken uns auf die Angabe einiger numerischer Ergebnisse, die die Einwirkung der Kompressibilität klar erkennen lassen.

In Bild 8 ist zunächst nach Kaplan die Geschwindigkeitsverteilung längs zweier Profile ($\varepsilon = 0{,}05$ und $\varepsilon = 0{,}15$) schaubildlich dargestellt. Die beiden erwähnten Profile sind in Bild 9 gezeichnet. Die Werte für $\Gamma_z/2\pi R v_0 M^2$ sind in der Zahlentafel 2 für einige Profile und für die Anstellwinkel $\alpha = 5^0$, $\alpha = 10^0$, und $\alpha = 15^0$ berechnet. Die Größe t, die uns die Form des Profils eindeutig charakterisiert, ist dabei als Verhältnis der größten Dicke zur Tiefe des Profils definiert. Die kritische Machsche Zahl ist für verschiedene Profilformen und für die Anstellwinkel $\alpha = 0^0$, $\alpha = 2^0$, $\alpha = 5^0$ und $\alpha = 10^0$ im Bild 10 graphisch dargestellt.

Aus Bild 10 ist zu ersehen, daß für das Kreisprofil, d. h. für $t = 1$ und für $\alpha = 0^0$ der Wert $M_{\text{krit}} = 0{,}421$ mit dem

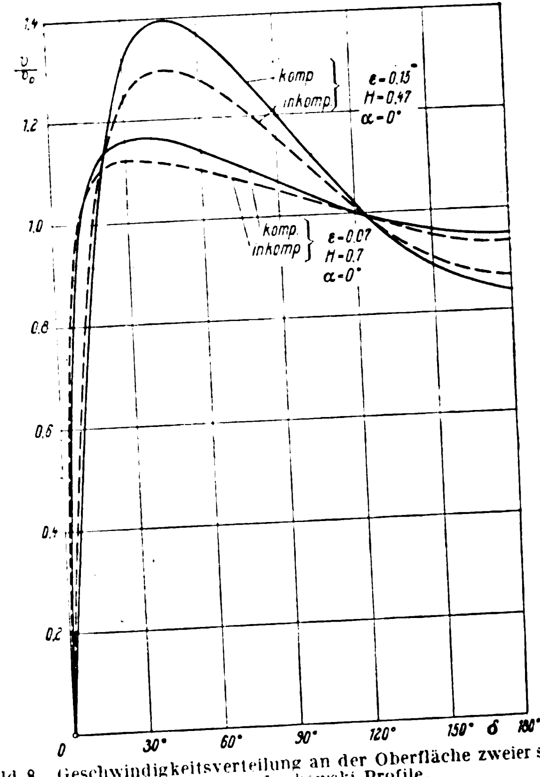


Bild 8. Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche zweier symmetrischer Joukowski-Profile.

in Zahlentafel 1 gegebenen identisch ist. Die Zahlentafel 1 zeigt auch, daß der Wert für M_{krit} in der ersten Näherung rd. 5% höher liegt als der Wert der dritten Näherung. Es ist zu schließen, daß auch alle übrigen in Bild 10 dargestellten Ergebnisse rd. um 5% über dem exakten Werte liegen.

§ 20. Schluß.

Die Geschwindigkeitspotentiale bzw. die durch die Kompressibilität bedingten Zusatzgeschwindigkeiten sind für eine Reihe von einfachen Profilen näherungsweise berechnet. Die mathematischen Schwierigkeiten sind dabei zum Teil erheblich und die durchzuführenden Rechenarbeiten oft äußerst langwierig. Über die auftretenden Kräfte liegen Ergebnisse vor, die gleichfalls mehr oder weniger den Charakter von Näherungswerten haben. Auf eine eingehendere Betrachtung muß im Rahmen dieser Arbeit verzichtet werden.

Zahlentafel 2. Zusätzliche Zirkulation (sym. Joukowski-Profil). (Nach S. Tamatiko — H. Umemato)

ε	t	$\Gamma_z/2\pi R r_0 \frac{1}{M^2}$		
		α = 5°	α = 10°	α = 15°
0,005	0,0065	0,0925	—	—
0,01	0,0129	0,0922	0,2080	0,3692
0,015	0,0192	0,0922	—	—
0,03	0,0378	0,0929	0,2025	0,3442
0,04	0,0499	—	0,2022	—
0,05	0,0618	0,0943	0,2025	0,3374
0,07	0,0849	—	0,2040	0,3355
0,10	0,1179	0,0983	0,2072	0,3364
0,15	0,1687	—	—	0,3418
0,20	0,2150	0,1061	0,2200	0,3490
0,30	0,2958	0,1129	0,2322	0,3638
0,50	0,4210	0,1235	0,2519	0,3897

Angestellte Experimente führten vor allem auf zwei Resultate von grundlegender Bedeutung:

1. Bis zu Geschwindigkeiten von etwa dem 0,5- bis 0,6-fachen Betrag der Schallgeschwindigkeit bleibt der Widerstand klein, der Auftrieb nimmt zu. Mathematisch können dabei die Ergebnisse hinreichend genau durch die Prandtl-Glauertsche Linearisierungsmethode dargestellt werden, die sich auf die Annahme gründet, daß die wirkliche physikalische Strömung durch eine Potentialströmung dargestellt werden kann und daß die durch das Profil verursachten Störungen klein bleiben im Vergleich mit der Geschwindigkeit im ungestörten Bereich.
2. Erreicht die Geschwindigkeit einen bestimmten Wert, der vom umströmten Profil und dessen Anstellwinkel abhängig ist, so tritt ein plötzliches Ansteigen des Widerstandes ein, der Auftrieb fällt rasch ab. Diese Vorgänge zwingen zu der Annahme, daß die wirkliche Strömung aufhört, sich auch nur angenähert durch eine Potentialströmung beschreiben zu lassen. Es liegt die Vermutung nahe, daß ein Zusammenbruch der kompressiblen Potentialströmung (compressibility burble) dann erfolgt, wenn die Geschwindigkeit erstmals die Schallgeschwindigkeit erreicht, was bei einem bestimmten Wert der Machschen Zahl, der sog. kritischen Machschen Zahl eintritt.

Anderseits ist es F. Ringleb [28, 29] und vor allem W. Tollmien [34, 35, 37] gelungen, in theoretischen Untersuchungen zu zeigen, daß »Grenzlinien« existieren, über die hinaus die Strömung nicht mehr adiabatisch und wirbelfrei fortgesetzt werden kann. Denn es ergibt sich, daß die »Fortsetzungsströmung«, falls eine solche existieren sollte, an einer Grenzlinie ohne Unstetigkeiten in der Geschwindigkeit an die ankommende Strömung nicht anschließen kann, daß aber Geschwindigkeitssprünge nicht auftreten. Daraus ist zu folgern, daß die adiabatische Potentialströmung nicht nur nicht jenseits der Grenzlinien stationär und eben weitergeführt werden kann, sondern daß die ankommende Strömung schon stromaufwärts zusammenbrechen muß.

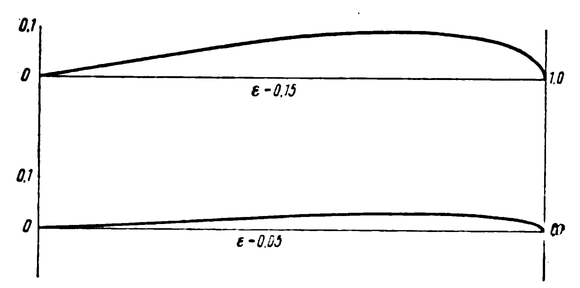


Bild 9. Gestalt der Joukowski-Profile für ε = 0,05 und ε = 0,15.

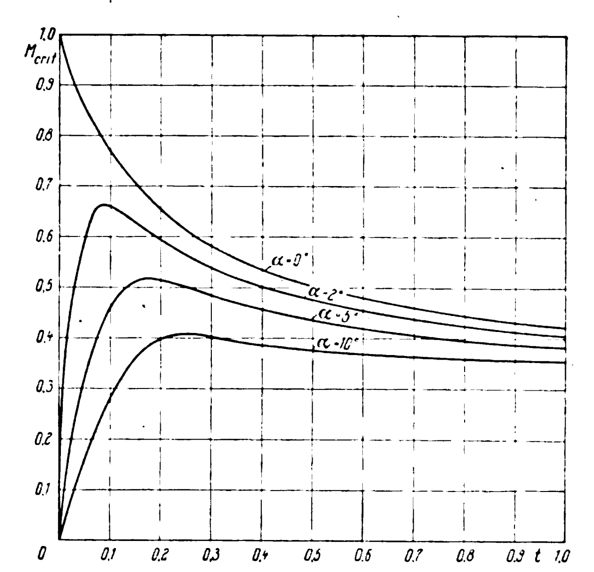


Bild 10. Kritische Machsche Zahl symmetrischer Joukowski-Profile.

Herr Professor W. Müller, Vorstand des Instituts für theoretische Physik und angewandte Mechanik der Universität München hat mir die Anregung und zahlreiche wertvolle Ratschläge zu dieser Arbeit gegeben. Es ist meine Pflicht, dem hochverehrten Lehrer an dieser Stelle den aufrichtigen Dank auszusprechen.

Schrifttum.

[1] L. Prandtl, Abriß der Strömungslehre bei Springer-Berlin (1935).
[2] L. Prandtl, Journ. of the Aeron. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ. Nr. 65 (1930).
[3] L. Prandtl, Z. angew. Math. Bd. 16 (1936), S. 129.
[4] H. Glauert, Proc. Roy. Soc., A, Bd. 118 (1928), S. 113.
[5] J. Ackeret, Helv. Phys. Act. Bd. 1 (1928), S. 301/322.
[6] H. Görtler, Z. angew. Math. Bd. 20 (1940), S. 254.
[7] T. Meyer, Diss. Göttingen 1907; ebenso: Mitt. u. Forsch. a. d. Geb. d. Ing.Wes., H. 62 (1908).
[8] A. Busemann, Handb. d. Phys. v. Wien-Harms, Bd. IV, 1 (1931), S. 421.
[9] G. I. Taylor und J. W. Maccoll, Proc. Roy. Soc., A, Bd. 139 (1939), S. 278 und S. 298.
[10] Th. v. Kármán und N. B. Moore, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Juni 1932.
[11] O. Janzen, Phys. Z. Bd. 14 (1913), S. 639.
[12] Lord Rayleigh, Phil. Mag. Bd. 32 (1916), S. 1; ebenso: Scient. Paper Bd. 6, S. 402.
[13] G. I. Taylor und C. F. Sharman, Proc. Roy. Soc., A., Bd. 121 (1928), S. 194; Rep. & Mem. Nr. 1195.
[14] G. I. Taylor, J. London Math. Soc., Bd. 5 (1930), S. 224 bis 240; Deutsch: Z. angew. Math. Bd. 10 (1930), S. 334.
[15] G. Braun, Ann. d. Phys., (5), Bd. 15 (1932), S. 645 bis 676.
[16] H. Bateman, Proc. Roy. Soc., A, Bd. 125 (1929), S. 598.

[17] M. Pinl, Z. angew. Math. Bd. 21 (1941), S. 80 bis 85.
[18] H. Behrbohm und M. Pinl, Z. angew. Math. Bd. 21 (1941), S. 193 bis 203.
[19] H. Behrbohm, und M. Pinl, Z. angew. Math. Bd. 21 (1941), S. 341 bis 350.
[20] A. Busemann, Atti dei Convegni Fondazione Alessandro Volta (Roma), Bd. 5 (1936), S. 328 bis 360.
[21] A. S. Tschapligin, Ucenjia Zapiski Imperatorskago Universiteta: Otdel fisiko-mathematiceskij (Moskau), Bd. 21 (1904), S. 1 bis 121.
[22] A. Steichen, Diss. Göttingen 1909.
[23] H. Bateman, National Res. Counc. Bulletin Nr. 84, Report of the Comm. on Hydrodynamics, Teil 4, Washington 1932.
[24] A. Busemann, Z. angew. Math. Bd. 17 (1937), S. 73 bis 79.
[25] W. F. Durand, Aerodynamic Theory bei Springer-Berlin, Bd. III, Div. H, S. 209 bis 250.
[26] W. Tollmien, Z. angew. Math. Bd. 17 (1937), S. 117 bis 136.
[27] C. Ferrari, Aerotecnica Bd. 18 (1938), S. 400 bis 411.
[28] F. Ringleb, Z. angew. Math. Bd. 20 (1940), S. 185 bis 198.
[29] F. Ringleb, Deutsche Mathematik, Bd. 5 (1940), S. 377 bis 384.
[30] P. Molenbröck, Archiv d. Math. u. Phys., Grunnert-Hoppe, Reihe 2, Bd. 9 (1890), S. 157.
[31] D. Riabouchinsky, C. R. Paris Bd. 194 (1932), S. 1215; C. R. Paris Bd. 199 (1934), S. 632.
[32] B. Demtschenko, C. R. Paris Bd. 194 (1932), S. 1218.
[33] B. Demtschenko, C. R. Paris Bd. 194 (1932), S. 1720.
[34] W. Tollmien, Z. angew. Math. Bd. 16 (1936), S. 370.
[35] W. Tollmien, Z. angew. Math. Bd. 20 (1940), S. 295.
[36] F. Ringleb, Z. angew. Math. Bd. 20 (1940), S. 295.
[37] W. Tollmien, Z. angew. Math. Bd. 21 (1941), S. 140 bis 152.
[38] H. Lamb, Rep. & Mem. Nr. 1156; Techn. Rep. of the Aeronaut. Res. Comm. Bd. 1 (1928/29), S. 76.
[39] L. Poggi, Aerotecnica, Bd. 12 (1932), S. 1579 bis 1593.
[40] L. Poggi, Aerotecnica, Bd. 14 (1934), S. 532 bis 550.
[41] E. Pistolesi, Atti dei Convegni, Fondazione Alessandro Volta (Roma) Bd. 5 (1936), S. 283 bis 328.
[42] C. Kaplan, NACA Rep. 621 (1938).
[43] I. Imai, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, III s. Bd. 20 (1938), S. 636.
[44] Kô Tamada und J. Saito, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, III s. Bd. 21 (1939), S. 403 bis 409.
[45] E. Pistolesi, Aerotecnica Bd. 19 (1939), S. 1064 bis 1068.
[46] Kô Tamada, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, III s. Bd. 22 (1940), S. 208.
[47] I. Imai, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, III s. Bd. 23 (1941), S. 180.
[48] F. Eser, Diss. München 1942.
[49] E. Lamla, Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 329; Bd. 18 (1941), S. 37.
[50] C. Pasqualini, Atti 4° Congresso Internazionale di Navigazione Aerea (Roma), Bd. 4 (1927).
[51] C. Pasqualini, Rivista Aeronautica Bd. 7 (1931), S. 443 bis 457.
[52] Kô Tamada, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, III s. Bd. 21 (1939), S. 743.
[53] Kô Tamada, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, III s. Bd. 22 (1940), S. 519.
[54] S. G. Hooker, Rep. & Mem. Nr. 1684 (1936).
[55] C. Kaplan, NACA Rep. 624 (1938).
[56] I. Imai und T. Aihara, Rep. of the Aeronaut. Res. Inst. Imp. Univ. (Tokyo), Bd. 15 (1940), H. 194.
[57] S. Tamatiko und Kô Tamada, Rep. of the Aeronaut. Res. Inst. Imp. Univ. (Tokyo) Bd. 16 (1940), S. 481 bis 551.
[58] P. A. Walther, C. R. Acad. Sci. URSS N. S. Bd. 4 (1936), S. 117 bis 120.
[59] P. A. Walther, Trans. Centr. Aero. Hydrodyn. Inst. (Moskau), Nr. 301 (1937), S. 7 bis 13.
[60] L. Prandtl, Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 313 bis 319.
[61] C. Kaplan, NACA Rep. 671 (1939).
[62] W. Hantsche und H. Wendt, Z. angew. Math. Bd. 22 (1942), S. 72 bis 86.
[63] S. Tamatiko und H. Umemato, Rep. of the Aeronaut. Res. Inst. Imp. Univ. (Tokyo) Bd. 16 (1941), S. 35 bis 125.
[64] H. S. Tsien, Aeronaut. Sci. Bd. 6 (1939), S. 399 bis 407.

Untersuchung an Al-Zn-Mg-Knetlegierungen.

III. Festigkeitseigenschaften und Spannungskorrosionsverhalten im warmausgehärteten Zustand.

Berichtigung.

In der Arbeit von A. Mühlenbruch und H. J. Seemann in dieser Schriftenreihe Bd. 19 (1942), Lfg. 10/12, S. 337/343, sind auf Seite 338 und 339 unter Beibehaltung der Bildnummern und Unterschriften, Bild 2 mit Bild 4 und Bild 3 mit Bild 5 auszutauschen.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 16. Oktober 1943 Lfg. 8/9

Schweißrissigkeit, Schweißempfindlichkeit, Schweißnahtrissigkeit und Prüfverfahren für diese Fehlererscheinungen*).

Von K. L. Zeyen VDI**).

Reichswerke Aktiengesellschaft für Berg- und Hüttenbetriebe »Hermann Göring«, Berlin.

Auf dem Gebiete des Schweißens, auf dem in den Jahren nach dem ersten Weltkrieg eine stürmische und auch heute noch durchaus nicht abgeschlossene Entwicklung zu verzeichnen war, sind wie bei den meisten Neuerungen in der Technik auch Fehlschläge nicht ausgeblieben. Von Stahlherstellern und -verbrauchern wurden daraufhin umfangreiche Untersuchungen unter Beteiligung und vielfach auf Veranlassung behördlicher Stellen durchgeführt. Dadurch ist es in den meisten Fällen gelungen, die Ursachen der Fehlschläge aufzudecken und abzustellen oder zum mindesten ein weiteres Auftreten durch die Einführung neuer Prüfverfahren auszuschließen.

Gliederung.

A. Kennzeichnende Unterschiede verschiedener Fehlererscheinungen.

Bei der Schmelzschweißung von Stählen wurden in den letzten Jahren vor allem drei Fehlererscheinungen beobachtet, deren Erscheinungsform verschieden ist und die auch verschiedene Ursachen haben. Die Schweißrissigkeit wirkt sich ebenso wie die Schweißempfindlichkeit in Rißbildungen im geschweißten Grundwerkstoff in der Nähe der Schweißnähte aus. Im ersteren Fall treten die Risse nur bei Gasschweißung von Stählen mit höherer Festigkeit in dünnen Abmessungen auf. Sie entstehen bei hoher Temperatur während des Schweißens. Schweißempfindlichkeit zeigt sich dagegen im allgemeinen nur bei Lichtbogenschweißung besonders von dicken Werkstoffabmessungen und auch bei weichen Stählen. Die hier im geschweißten Grundwerkstoff auftretenden Risse entstehen entweder bei der Abkühlung nach dem Schweißen, nach beendeter Schweißung oder auch erst bei der späteren Betriebsbeanspruchung der Schweißstücke. Die Ursachen sowohl der Schweißrissigkeit als auch der Schweißempfindlichkeit sind in erster Linie in dem verschweißten Grundwerkstoff zu suchen. Bei der Schweißnahtrissigkeit, die wie die Schweißempfindlichkeit fast nur bei Lichtbogenschweißung beobachtet wird, ist dagegen meist der Schweißzusatzwerkstoff für die hier in den Schweißnähten entstehenden Risse verantwortlich zu machen.

B. Schweißrissigkeit.

Für das Auftreten von Rissen im geschweißten Grundwerkstoff bei der Gasschweißung von Stählen mit höherer Festigkeit in dünnen Abmessungen ist jetzt die Bezeichnung Schweißrissigkeit festgelegt worden, während hierfür vorher auch andere Benennungen wie Schweiß-, Hitze- oder Wärmeempfindlichkeit benutzt wurden. Die Neigung zu Schweißrissigkeit nimmt allgemein zu mit abnehmender Werkstoffdicke, mit zunehmender Werkstoffestigkeit und mit zunehmender Verwickeltheit der Schweißverbindungen (und damit mit der Höhe der entstehenden Schweißspannungen). Bei weichem, unlegiertem Stahl mit Kohlenstoffgehalten bis zu etwa 0,2% und mit Festigkeiten bis zu etwa 42 kg/mm² ist Schweißrissigkeit bisher noch nicht festgestellt worden. Das in verschiedenen Industriezweigen wie z. B. im Flugzeugbau in Deutschland und auch im Ausland erfolgte und etwa in das Jahr 1928 fallende Übergehen von weichen, unlegierten Stählen auf solche mit höherer Festigkeit hatte jedoch zunächst ein starkes Auftreten von Schweißrissigkeit zur Folge und zwar besonders bei Kehlschweißungen, bei denen der Werkstoff ja auch im allgemeinen höher als bei Stumpfschweißungen beansprucht wird. Zur Aufklärung und Abstellung der Ursachen mußten neuartige Prüfverfahren entwickelt werden, die das Erzwingen ähnlicher Schweißspannungen ermöglichen, wie sie bei schwierigen Betriebsschweißungen eintreten.

Bild 1 gibt einen eigenen Versuch zur Entwicklung eines solchen Prüfverfahrens wieder. Die Ansichtsaufnahme links zeigt eine Gasschweißung, bei der auf ein Blech von 1,2 mm Dicke ein anderes gleicher Dicke mit so angeordneten Kehlnähten aufgeschweißt wurde, daß hohe Schweißspannungen die Folge sind. Die daneben dargestellten Rückseiten solcher Schweißungen lassen erkennen, daß bei einem unlegierten Stahl mit etwa 0,35% C der Werkstoff an den mit Pfeilen bezeichneten Stellen stark angerissen ist, während ein Werkstoff gleicher Festigkeit, der niedrigen Kohlenstoffgehalt hatte und mit Silizium und Mangan legiert war, rißfrei blieb.

Im Flugzeugbau, für den schweißrißunempfindliche Stähle eine besondere Rolle spielen, sind verschiedene neue Prüfverfahren für die Schweißrissigkeit entwickelt worden. Bild 2 zeigt die sogenannten Anschmelz- oder Einbrennproben, und zwar links die einfache oder Fokkerprobe, rechts die Zickzack- oder Focke-Wulf-Probe. Bei ersterer wird an einem Blechstück von 100 × 100 mm² Größe und 1 bis 2,5 mm Dicke der Werkstoff, von der Mitte einer Blechkante beginnend, bis zur Probenmitte mit einem Gasbrenner angeschmolzen, aber noch nicht durchgeschmolzen. So einfach diese Probe aussieht, sie stellt mit die schärfste, überhaupt denkbare Werkstoffbeanspruchung dar. Bei der den Werkstoff etwas weniger hoch beanspruchenden Zickzackprobe beginnt das Anschmelzen an den Blechecken, wird nicht ganz bis zur Probenmitte geführt und endigt in der Mitte der Blechkanten. Beide Anschmelzproben können in ihrer Wirkung dadurch gemildert werden, daß die Brennerflamme nicht nur zum Anschmelzen der Bleche benutzt wird,

*) J 31.
**) Nach Vorträgen, gehalten vor den Ortsgruppen Berlin, Essen, Hannover und Hindenburg des Deutschen Verbandes für Schweißtechnik und Azetylen e. V.

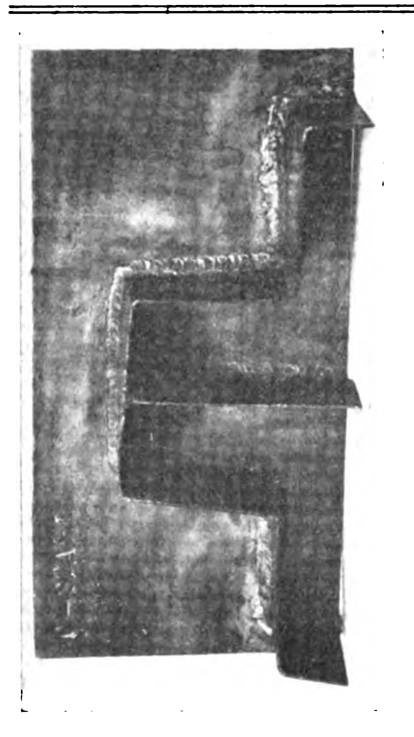


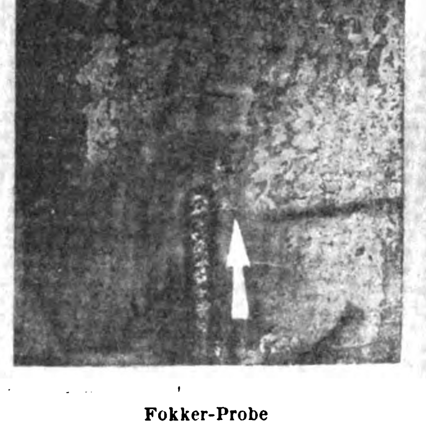


Bild 1.

sondern gleichzeitig Schweißraupen mit Zusatzdraht aufgetragen werden. Die zahlenmäßige Auswertung erfolgt bei den Anschmelz- oder Einbrennproben ohne und mit Verwendung von Zusatzdraht durch Ausmessung der Länge der Risse, die neben oder unter den Anschmelzungen oder Auftragungen entstanden sind.

Eine weitere, im Flugzeugbau entwickelte Schweißrissigkeitsprobe zeigt Bild 3. Diese sogenannte Kreuzschweißprobe wird so ausgeführt, daß zwei Bleche von 50 × 200 mm² Größe und im allgemeinen 1 bis 2,5 mm Dicke durch ringsumlaufende, unmittelbar aneinander anschließende Kehlnähte verbunden werden (Darstellung links in Bild 3). Die Proben müssen also beim Schweißen dreimal umgewendet werden. Nach dem Erkalten der Proben wird die Länge der Anrisse gemessen, die im Werkstoff neben oder unter den Kehlnähten eingetreten sind, und eine nochmalige Ausmessung der Rißlängen erfolgt nach dem Umschlagen der freien Schenkel der Proben im Schraubstock um 90°, wobei sich die schon beim Schweißen entstandenen Risse meist noch erweitern. Das Umschlagen der freien Schenkel der Proben soll so geschehen, daß die Kehlnähte im Inneren des Winkels von 90° liegen, wie es Bild 3 rechts erkennen läßt.

Gegen die in Bild 2 und 3 dargestellten Proben wird eingewendet, daß sie überschärft sind, weil sie auch Werkstoffe

Fokker-Probe (Einfache Einbrenn- oder Anschmelzprobe)

Focke-Wulf-Probe (Zickzack-Einbrenn- oder Anschmelzprobe)

Bild 2. Schweißrissigkeitsproben aus dem Flugbau.

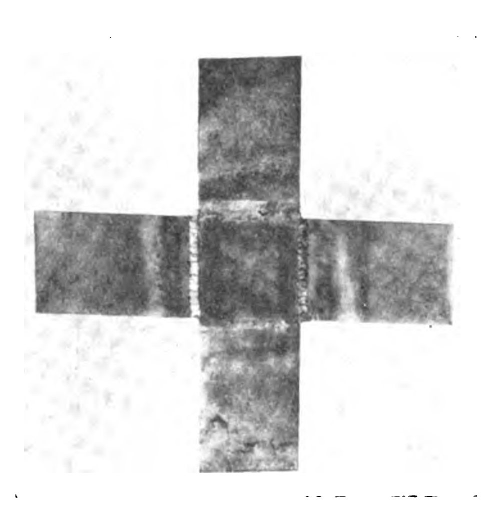



Bild 3.

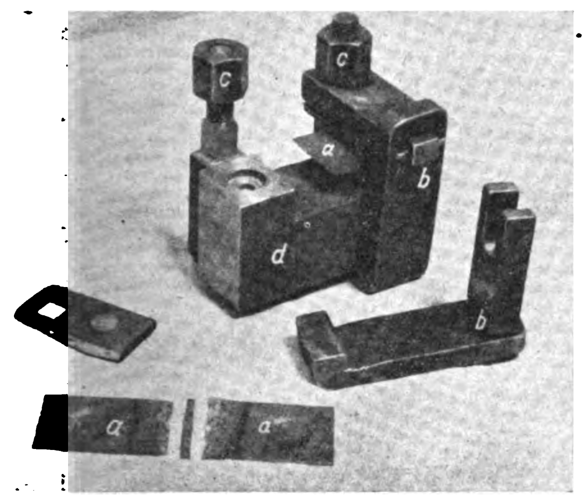


Bild 4. Einspannschweißvorrichtung.
a Schweißprobe, *b* Klemmvorrichtung, *c* Muttern, *d* Einspannbügel.

als schweißrissig kennzeichnen, die betrieblich mit gutem Erfolg verschweißt werden.

J. Müller [1] hat die Einspannschweißprobe entwickelt, für die Bild 4 die Vorrichtung und eine geschweißte Probe zeigt. Zwei gleiche Probestücke von 50 × 75 mm² Größe und in Dicken bis zu 2,5 mm werden in der Vorrichtung fest eingespannt, so daß zwischen ihnen ein Spalt gleich der Blechdicke bleibt, der autogen mit Zusatzdraht so verschweißt wird, daß die beiden Blechstücke darnach durch Stumpfschweißung verbunden sind. Die Proben sollen unter Einspannung erkalten, und dann wird bei ihnen die Schweißnaht aus der Stumpfverbindung herausgebrochen. Die Längen der Flächenanteile der Bruchflächen, in denen oxydierte Stellen infolge von Rißbildungen beim Schweißen aufgetreten sind, werden ausgemessen und in Verhältnis gesetzt zu der gesamten Schweißnahtlänge, woraus sich das Maß für die Schweißrissigkeit in % ergibt. Eine neuerdings angewendete verschärfte Prüfung erfolgt in der Weise, daß ein meist bis zu 2,5 mm dickes Prüfblech stumpf gegen ein wesentlich dickeres (im allgemeinen 5 mm dickes) Blech verschweißt wird [2]. Die bei der Einspannschweißprobe erhaltenen Prüfwerte stimmen mit betrieblichen Schweißerfahrungen gut überein. Die Probe wurde durch Anordnung des Reichsluftfahrtministeriums vom 4. Februar 1936 bei den deutschen Flugzeugfabriken eingeführt.

Bei den in Bild 1 bis 4 wiedergegebenen Schweißrissigkeitsproben wird übereinstimmend eine abnehmende Neigung zu Schweißrissigkeit mit zunehmender Werkstoffdicke festgestellt. Der Werkstoff ist um so gefährdeter, je kleiner seine bei der Gasschweißung verwendete Dicke ist.

Die neu entwickelten Prüfverfahren haben es ermöglicht, die Ursachen der Schweißrissigkeit so aufzudecken, daß diese Fehlererscheinung abgestellt werden konnte. Als Fehlerquellen ergaben sich einmal solche, die nicht im Werkstoff begründet lagen, wie Umstände schweißtechnischer und konstruktiver Art (fehlerhafte Werkstattarbeit und Konstruktion). Bemerkenswert ist, daß der Reinheitsgrad des verwendeten Azetylengases, der bei Flaschen- und Entwicklerazetylen verschieden ist, sich als ohne Einfluß erwies [3]. Die Hauptfehlerquelle fand sich in dem verschweißten Werkstoff. Zahlentafel 1 [4] gibt eine Zusammenstellung von Prüfwerten, die bei den verschiedenen Schweißrissigkeitsproben aus dem Flugzeugbau gefunden wurden. Es genügt hier, die Werte für die Einspannschweißprobe zu vergleichen, die ja auch den Erfahrungen bei der betrieblichen Schweißung am nächsten kommen. Zu den anderen, an sich überschärften Schweißrissigkeitsproben, kann bemerkt werden, daß sie als Abnahmeproben zwar nicht geeignet sind, jedoch bei der Entwicklung von Stählen mit besonders hoher Schweißrißunempfindlichkeit sehr wertvolle Dienste geleistet haben. Die Werte der Zahlentafel 1 lassen erkennen, daß bei unlegiertem Stahl unter Voraussetzung gleicher Herstellungsart der Kohlenstoffgehalt ausschlaggebend dafür ist, ob ein Stahl schweißrissig ist oder nicht. Ein Stahl mit nur 0,11% C war ebenso schweißrißfrei wie niedriggekohlte, mit Silizium und Mangan legierte Sonderstähle mit höherer Festigkeit. Dagegen zeigten unlegierte Stähle mit 0,3 und 0,68% C bei gleicher Festigkeit, wie sie die letztgenannten Sonderstähle hatten, hochgradige, mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt ansteigende Schweißrissigkeit. Bei Chrom-Molybdänstahl ergab sich, wie Zahlentafel 2 [4] zeigt, zunächst ein überragender Einfluß des Schmelzverfahrens. Normal hergestellter Elektrostahl blieb bei der Einspannschweißprobe rißfrei, während normal hergestellter SM-Stahl bei gleicher Analyse Schweißrissigkeitsgrade von 20 bis 28% ergab. Bei dem gleichen Schmelzverfahren fand sich dann aber noch ein erheblicher Einfluß einer besonderen Schmelzbehandlung, die im wesentlichen darin besteht, eine zu Feinkornstahl führende verstärkte Desoxydation anzuwenden. Die wiedergegebene, besonders behandelte SM-Schmelzung zeigte trotz eines für die Schweißrissigkeit ungünstigen sehr hohen Kohlenstoffgehaltes geringere Schweißrissigkeit bei

Zahlentafel 1. Schweißrissigkeitsversuche, durchgeführt von K. L. Zeyen bei der Firma Krupp.
1,2 mm dicke Bleche aus unlegierten und niedriggekohlten, mit Silizium und Mangan legierten Stählen.
(Mittelwerte aus je 6 Versuchen.)

Werkstoff	Festigkeit kg/mm²	Einfache Anschmelzprobe		Zickzack-Anschmelzprobe		Kreuzschweißprobe		Einspannschweißprobe Schweißrissigkeit in %
		ohne Zusatzdraht	mit Zusatzdraht	ohne Zusatzdraht	mit Zusatzdraht	nur geschweißt	geschweißt und gebogen	
		Länge der festgestellten Anrisse in mm						
unlegierter Stahl mit 0,11% C	40	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei
unlegierter Stahl mit 0,30% C	55	50	45	167	119	57	2 Schenkel ganz, 2 Schenkel fast abgebrochen	51
unlegierter Stahl mit 0,68% C	78	50	50	297	160	125	alle 4 Schenkel abgebrochen	63
niedriggekohlter mit Silizium u. Mangan legierter Sonderstahl (Jzett 50, j. Flw. 1263)	56	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei
niedriggekohlter mit Silizium u. Mangan legierter Sonderstahl (Jzett 70, j. Flw. 1265)	78	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei	rißfrei

Zahlentafel 2. Schweißrissigkeitsversuche, durchgeführt von K. L. Zeyen bei der Firma Krupp.
1,2 mm dicke Bleche aus Chrom-Molybdän-Stählen (Mittelwerte aus je 6 Versuchen).

Werkstoff								Einfache Anschmelzprobe		Zickzack-Anschmelzprobe		Kreuzschweißprobe		Einspannschweißprobe
Art	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Cr %	Mo %	ohne Zusatzdraht	mit Zusatzdraht	ohne Zusatzdraht	mit Zusatzdraht	nur geschw.	geschweißt und gebogen	Schweiß. rissigkeit in %
								Länge der festgestellten Anrisse in mm						
normaler SM-Stahl	0,28	0,31	0,71	0,011	0,015	0,90	0,21	50	27	73	28	24	Risse stark erweitert	20
	0,28	0,27	0,52	0,011	0,017	1,00	0,21	50	21	80	56	22		24
	0,29	0,23	0,42	0,010	0,015	1,11	0,25	50	35	113	61	24		28
normaler Elektrostahl	0,27	0,25	0,49	0,016	0,010	1,08	0,21	38	19	8	34	3	Risse kaum erweitert	rißfrei
	0,28	0,24	0,54	0,015	0,010	1,00	0,23	50	17	15	4	9		rißfrei
	0,29	0,21	0,50	0,016	0,010	1,00	0,23	50	31	13	16	11		rißfrei
SM-Stahl (mit besonderer Schmelzbehandlung)	0,33	0,32	0,70	0,011	0,015	1,08	0,21	50	17	24	rißfrei	15	Risse stark erweitert	11
Elektrostahl (mit besonderer Schmelzbehandlung)	0,24	0,18	0,48	0,011	0,010	1,06	0,21	4	1	rißfrei	rißfrei	2	2	rißfrei

der Einspannschweißprobe als die normal hergestellten SM-Schmelzungen. Selbst bei Elektrostahl konnte durch metallurgische Maßnahmen bei der Erschmelzung noch eine Verbesserung erreicht werden. Um das zu erkennen, dürfen in Zahlentafel 2 aber nicht mehr die Prüfwerte der Einspannschweißprobe betrachtet werden, die bei Elektrostahl in allen Fällen Rißfreiheit ergaben. Aber die Prüfwerte der an sich überschärften anderen Schweißrissigkeitsproben lehren, daß durch besondere Maßnahmen bei der Stahlherstellung auch im Elektroofen hergestellter Chrom-Molybdänstahl in bezug auf Schweißrißunempfindlichkeit noch weiter verbessert werden kann. Es sei hier noch erwähnt, daß auch bei unlegierten Stählen ein erheblicher Einfluß des Schmelzverfahrens und der Schmelzbehandlung im Ofen insofern festgestellt worden ist, als höhergekohlte Stähle, die als normal hergestellte SM-Stähle stets stark schweißrissig sind, diese Erscheinung bei Elektroofen-Herstellung mit und auch ohne besondere Schmelzbehandlung weniger ergaben [5].

Auf die zahlreichen, an verschiedenen Stellen durchgeführten Untersuchungen, die zur Klärung der Ursachen der Schweißrissigkeit wertvolle Beiträge geliefert haben, soll hier nicht näher eingegangen werden. Sie erstreckten sich außer auf die Prüfung der Höhe der zulässigen Gehalte an Legierungselementen wie Kohlenstoff und Chrom oder Verunreinigungen wie Phosphor und Schwefel und auf den Einfluß der Schmelzofenart und der Schmelzbehandlung noch auf den Einfluß einer Wärmebehandlung und damit des Gefüges des Stahles, den Einfluß der Walzrichtung und den der Art des verwendeten Zusatzwerkstoffs. Wichtig ist die übereinstimmend gemachte Feststellung, daß die Schweißhärte, d. h. die Härte der durch die Schweißhitze beeinflußten Zonen neben der Schweißnaht, die von der Stahlzusammensetzung weitgehend abhängt, in keinem Zusammenhang mit der Neigung eines Stahles zu Schweißrissigkeit steht. Aus den Ergebnissen der durchgeführten Versuche sind von Stahlherstellern und Verbrauchern sofort die praktischen Nutzanwendungen gezogen worden. In Deutschland durfte Chrom-Molybdänstahl für Schweißungen im Flugzeugbau seit der Anordnung des Reichsluftfahrtministeriums vom 1. Januar 1936 nur noch im Elektroofen mit festgelegten oberen Analysengrenzwerten für den Phosphor- und Schwefelgehalt hergestellt werden, bis dieser Stahl durch sparstoffärmere Stähle ersetzt werden mußte. Interessant sind in diesem Zusammenhang Angaben aus dem Jahre 1941 aus den USA [6], wonach der amerikanische Fluzeugbaustahl SAEX 4130, der dem in Deutschland verwendeten Stahl in der Zusammensetzung weitgehend entspricht, ursprünglich nur im Elektroofen hergestellt worden ist, neuerdings aber auch als SM-Stahl, aber nur mit kleinen Einsatzgewichten, erschmolzen wird. Dabei wird als Vor-

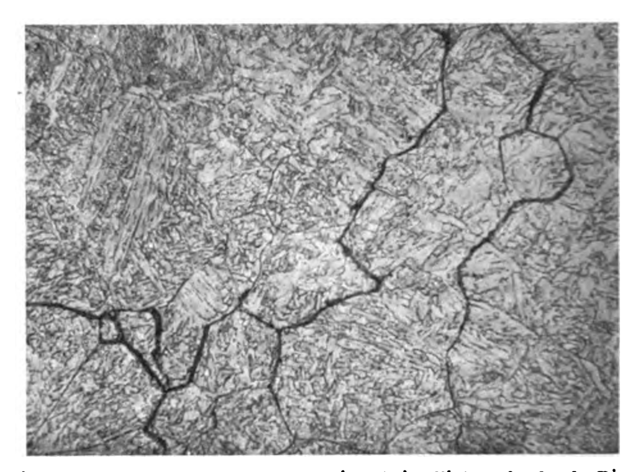


Bild 5. Entlang den Korngrenzen (interkristallin) verlaufende Risse (Warmrisse) bei gasgeschweißtem Chrom-Molybdänstahl (Schweißrissigkeit).

bedingung für gute Schweißbarkeit, besser gesagt für Schweißrißunempfindlichkeit, eine einwandfreie Desoxydation bezeichnet, die in einer kleinen Korngröße zum Ausdruck kommt. Hier decken sich demnach amerikanische Erfahrungen durchaus mit deutschen.

Bild 5 läßt erkennen, daß bei Chrom-Molybdänstahl Schweißrisse entlang den Korngrenzen (interkristallin) verlaufen. Dies ist auch bei anderen Stählen mit Neigung zu Schweißrissigkeit, wie bei unlegierten Stählen mit höherer Festigkeit, der Fall. Als Entstehungstemperatur von Schweißrissen wurde bis zum Jahre 1941 das Gebiet zwischen 600 und 1000° C ermittelt. A. Antonioli [7] wies aber 1942 nach, daß die meisten bisher im Schrifttum mitgeteilten

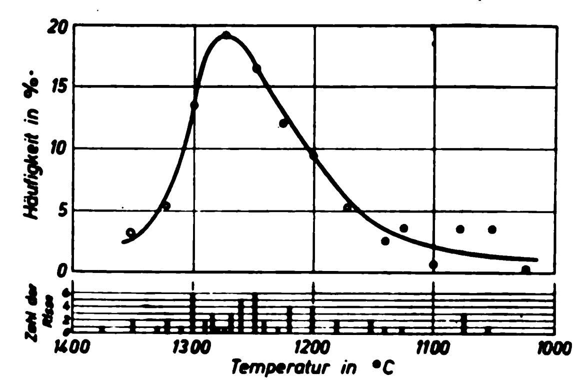


Bild 6. Häufigkeitskurve der Rißbildungstemperatur bei Chrom-Molybdän-Stahlblechen nach A. Antonioli.





Bild 7.

Zahlenwerte wegen unzulänglicher Meßeinrichtungen als zu niedrig angesehen werden müssen. Mit Hilfe eines neu entwickelten physikalischen Meßverfahrens bestimmte Antonioli den Temperaturbereich der Rißbildung bei der Schweißrissigkeit von Chrom-Molybdänstahl bei 1350 bis 1000° C mit einem Höchstwert für die Häufigkeit bei 1275°, wie es Bild 6 zeigt.

Die Frage der Schweißrissigkeit bei Gasschweißung dünner Abmessungen von Stählen mit höherer Festigkeit kann heute als gelöst angesehen werden. Es ist in erster Linie eine Werkstoffrage. Bei schweißrissigem Werkstoff treten unter dem Einfluß der Schweißspannungen bei Rotglut Warmrisse neben gasgeschweißten Nähten auf, die interkristallin verlaufen. Für die Herstellung schweißrißunempfindlicher Stähle ist einmal ihre chemische Zusammensetzung, zum anderen ihr Herstellungsverfahren maßgebend, wobei sich eine verstärkte, zu Feinkornstahl führende Desoxydation als besonders erfolgbringend erwiesen hat.

Schweißrissigkeit in der Art, wie sie bei Gasschweißung auftreten kann, wird bei Lichtbogenschweißung nicht beobachtet. Dies hängt wohl einmal mit der anders gearteten Wärmeeinwirkung des elektrischen Lichtbogens gegenüber der Brennerflamme zusammen, zum anderen aber damit, daß bei Lichtbogenschweißung die Werkstoffdicke im allgemeinen größer ist als bei Gasschweißung. Bei letzterer wird Schweißrissigkeit ja auch um so eher gefunden, je dünner die Werkstoffe sind.

C. Schweißempfindlichkeit.

Bei Lichtbogenschweißung besonders von mittleren und großen Werkstoffdicken können Fehlererscheinungen auftreten, die sich ähnlich äußern wie die Schweißrissigkeit bei Gasschweißung dünner Abmessungen, jedoch haben diese andere Ursachen. Wenn Stähle, die infolge ihrer Gehalte an Legierungselementen zu starker Aufhärtung neben der Schweißnaht neigen, lichtbogengeschweißt werden, dann werden auch bei sachgemäßer Konstruktion und Schweißarbeit manchmal Risse neben oder auch in Schweißnähten festgestellt, bevor die geschweißten Teile beansprucht werden. Die Risse verlaufen durch die aufgehärtete Zone, parallel oder senkrecht zur Schweißnaht, aber nicht wie bei der Schweißrissigkeit entlang den Korngrenzen, sondern durch die Kristallkörner (intrakristallin), wie es Bild 7 zeigt. Sie kommen entweder erst nach beendeter Abkühlung der Schweißung zur Auslösung und zeigen metallisch blanke Bruchflächen, oder sie entstehen bei der Abkühlung nach dem Schweißen und sind dann durch Anlauffarben kenntlich. Die Entstehungstemperatur liegt aber stets wesentlich tiefer als bei der Schweißrissigkeit. Solche Risse werden am besten als Schweißhärtungs- oder Aufhärtungsrisse bezeichnet, die so zu erklären sind, daß die aufgehärtete Zone in ihrer Verformungsfähigkeit stark beeinträchtigt ist und unter dem Einfluß der Schweiß- und Schrumpfspannungen anreißt, bevorzugt ausgehend von Einbrandkerben. Abhilfe kann hier die Wahl eines weniger aufhärtungsfähigen Werkstoffs bringen oder manchmal auch die Verwendung von Schweißdrähten mit hoher Dehnung, z. B. austenitischen [8], die infolge der großen Verformungsfähigkeit des Schweißgutes einen wesentlichen Teil der Schrumpfspannungen aufzunehmen und von der aufgehärteten Zone abzulenken in der Lage sind. Es scheint nach betrieblichen Erfahrungen, daß bei härtungsempfindlichen Stählen mit höherer Festigkeit dünne Abmessungen, beispielsweise Bleche unter etwa 5 mm Dicke, sich in bezug auf die Ausbildung von Schweißhärtungsrissen empfindlicher zeigen als stärkere Abmessungen, so daß also insofern hier eine gewisse Gleichartigkeit mit der nur bei Gasschweißung auftretenden Schweißrissigkeit vorläge. Nach den vorliegenden Erfahrungen muß erstrebt werden, die Wärmebeeinflussung von dünneren, härtungsempfindlichen Stählen durch den Lichtbogen und damit die entstehenden Schweißspannungen niedrig zu halten, was z. B. durch die Wahl kleiner Elektrodenabmessungen und Stromstärken und Verwendung von Elektroden, die beim Verschweißen möglichst wenig Hitze entwickeln (nackte, Seelen- oder dünn umhüllte) erreicht werden kann. Bei dickem Werkstoff würde jedoch bei kleiner Wärmezufuhr infolge der schnellen Wärmeableitung eine sehr starke Aufhärtung mit hohen örtlichen Spannungsspitzen auftreten, so daß hierbei zur Vermeidung von Schweißhärtungsrissen umgekehrt wie bei dünnen Werkstoffen eine große Wärmezufuhr (durch Vorwärmung, Verwendung stärkerer Elektrodenabmessungen und höherer Stromstärken sowie dick umhüllter Elektroden) ratsam ist.

Ein Stahl, der durch die Schweißhitze stark aufhärtet und zur Ausbildung von Schweißhärtungsrissen schon durch die Schweiß- und Schrumpfspannungen ohne das Hinzutreten von Betriebsbeanspruchungen neigt, ist schweißempfindlich, aber er würde besser noch als für Schweißungen wenig oder nur unter besonderen Maßnahmen geeignet bezeichnet werden. Von H. Buchholtz und P. Bettzieche [9] wird Schweißempfindlichkeit als die Neigung eines Werkstoffs bezeichnet, bei der Lichtbogenschweißung, vorzugsweise bei Einlagenschweißung, Eigenschaftsänderungen in einem Umfang zu erleiden, daß die während des Schweißens auftretenden Spannungen nicht mehr durch Verformung aufgenommen werden, sondern zu Spannungsrissen führen, wobei unter sonst gleichen Bedingungen ein Stahl um so empfindlicher ist, je mehr er auf Grund seiner Zusammensetzung und Herstellungsbedingungen zur Abschreckhärtung neigt.

Von E. H. Schulz und W. Bischof [10] wird Schweißempfindlichkeit allgemein als die Neigung eines Werkstoffs zur Rißbildung beim Schweißen definiert.

Der Begriff Schweißempfindlichkeit muß jedoch noch weiter gefaßt werden. Bisher wurde die Eignung eines Stahles für die Zwecke der Schmelzschweißung nur dadurch geprüft, daß ziemlich kleine Proben in 10 bis 12 mm Dicke geschweißt und untersucht wurden. Bei solchen Proben sind die entstehenden Schweißspannungen nur gering, besonders dann, wenn, wie es meist erfolgt, die Proben ohne Einspannung geschweißt werden und der Schrumpfung frei nachgeben können. Ergab die Probenprüfung die Erreichung bestimmter mechanischer Gütewerte, dann war damit bisher die Schweißbarkeit des Werkstoffs nachgewiesen. In neuerer Zeit hat sich nun aber gezeigt, daß die durch eine solche Prüfung nachgewiesene grundsätzliche Eignung eines Stahles für die Schmelzschweißung noch keine fehlerfreie betriebsmäßige Verschweißung besonders eines Stahles mit höherer Festigkeit unter ungünstigen Bedingungen, wie bei starrer Einspannung der Teile oder bei sehr großen oder sehr unterschiedlichen Werkstoffdicken, gewährleistet. Es hat sich ferner ergeben, daß selbst bei anscheinend fehlerfreier Schweißung noch keine Gewähr dafür vorhanden ist, daß die Schweißungen nicht unter Betriebsbeanspruchungen nach einiger Zeit Bruchererscheinungen zeigen.

Bei den bekannten Schadensfällen an geschweißten Brücken handelte es sich um Abmessungen über 30 mm Dicke aus St 52, an denen verformungslose Brüche aufgetreten sind. Die Bedeutung dieser Fehlschläge sollte nicht

überschätzt werden; denn es handelt sich um Einzelfälle unter Tausenden mit einwandfreier Bewährung [11].

Über die Ursachen dieser und ähnlicher Schadensfälle sind sehr viele Untersuchungen durchgeführt worden, von denen die von G. Bierett [12] und O. Graf [13] besonders eingehend sind. Die Deutsche Reichsbahn nahm zunächst und sicherlich auch mit gewisser Berechtigung an, daß das Auftreten verformungsloser Brüche bei Schweißungen an dicken Querschnitten aus St 52 in Zusammenhang mit der durch härtende Legierungselemente bedingten Aufhärtungsfähigkeit beim Schweißen stehe. Sie schrieb deshalb im Jahre 1937 Analysengrenzen vor, die nach Kriegsausbruch nochmals in der nachstehend wiedergegebenen Form geändert wurden:

Von der deutschen Reichsbahn am 28. 12. 39 festgelegte Analysen-Grenzwerte für schweißbaren Baustahl St 52

C	höchstens	0,2 %	dazu zusätzlich
Si	,,	0,6 %	bis 0,2 % Si
Mn	,,	1,2 %	oder 0,4 % Mn
P	,,	0,06 %	Sonstige Legierungs-
S	,,	0,06 %	elemente wie
P und S zusammen	,,	0,1 %	Cr, Mo und Cu sind nicht zugelassen.

Aus zahlreichen Untersuchungen geht jedoch hervor, daß andere Einflußgrößen wie die chemische Zusammensetzung noch viel ausschlaggebender dafür sind, ob ein Stahl sich bei Prüfungen gut verhält, aus denen Rückschlüsse auf den sich beim Schweißen dicker Profile ausbildenden mehrachsigen Spannungszustand und dessen Auswirkungen auf die Bewährung eines Bauwerks gezogen werden sollen. Solche Einflußgrößen sind die konstruktive Ausbildung und die Ausführungsart der Schweißungen und die Erschmelzung und der Wärmebehandlungszustand des Stahls. Bild 8 gibt als ein Beispiel hierfür die von E. H. Schulz [14] festgestellte Aufhärtung beim Schweißen eines Nasen- und eines Wulstprofiles, wie sie neben einer Reihe

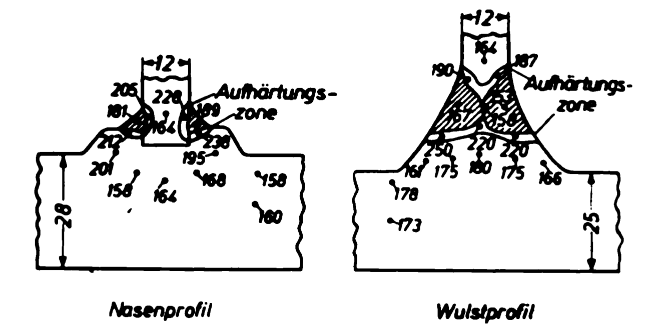


Bild 8. Aufhärtung beim Schweißen eines Nasen- und eines Wulstprofils aus St 52 (nach R. Kühnel).

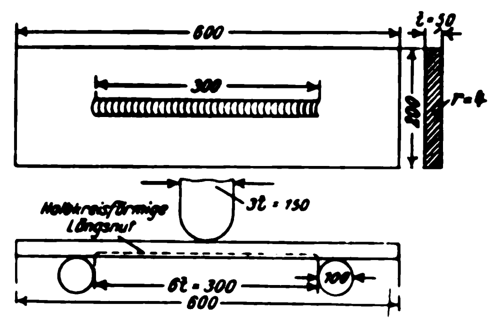
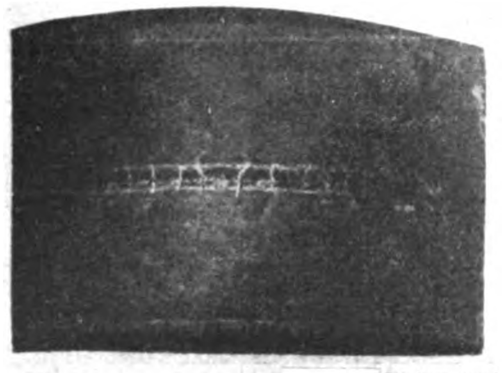


Bild 9. Abmessungen der Aufschweißbiegeprobe.

anderer Profile für Schweißungen im Brückenbau verwendet werden [15], in Querschliffen wieder. Bei diesen beiden Profilen sind die Aufhärtungsbänder sehr verschieden ausgebildet. Im ersteren Falle verlaufen sie voneinander getrennt beiderseits einer noch unbeeinflußten Werkstoffzone, die wie der Spalt im Grunde der Schweißverbindung beim Spannungsabbau mitwirken kann. Im letzteren Fall sind jedoch zwei ineinander übergehende Härtungsbänder vorhanden, die das Schweißgut vom unbeeinflußten Grundwerk-





Verformungsbruch.



Mischbruch.



Trennbruch.

Bild 10. Verschiedene Brucharten bei der Aufschweißbiegeprobe an 50 mm dickem Baustahl St 52 (nach H. Buchholtz).

stoff abtrennen und wegen ihrer hochliegenden Streckgrenze einen Spannungsabbau behindern.

Von der Deutschen Reichsbahn wurde die Aufschweißbiegeprobe oder Schweißraupenbiegeprobe nach Bild 9 als Prüfverfahren für die Fähigkeit eines Stahlwerkstoffs eingeführt, bei der Schweißung dicker Profile den unter dem Einfluß der Schweißspannungen und der späteren Betriebsbeanspruchung auftretenden mehrachsigen Spannungszustand so aufzunehmen, daß keine verformungslosen Brüche auftreten [16]. Je nach der Stahlart wird dabei die Erreichung bestimmter Mindestbiegewinkel und außerdem verlangt, daß die Probe beim Bruch eine deutliche Verformung zeigen muß und nicht verformungslos durchschlagen darf. Für St 37 wird bei 50 mm Dicke ein Mindestbiegewinkel von 50°, bei 40 mm Dicke von 40° und bei 30 mm Dicke von 50° beim Durchschlagen der Probe gefordert, während für St 52 zahlenmäßige Festlegungen noch nicht gemacht worden sind. Die Aufschweißbiegeprobe entspricht keinem idealen, genau definierten Prüfverfahren, und es konnte bisher auch nicht nachgewiesen werden, daß zwischen ihren Prüfwerten und der praktischen Bewährung eines Stahles in einem geschweißten Bauwerk Beziehungen bestehen. Die Meinungen darüber, ob es nicht zweckmäßiger wäre, statt des Biegewinkels beim Durchschlagen der Probe den beim ersten Anriß im Grundwerkstoff zu bestimmen, sind auch geteilt [17]. Die Aufschweißbiegeprobe ermöglicht jedoch, bei Stählen ebensolche verformungslosen Brüche zu erzwingen, wie sie bei geschweißten Brücken aus St 52 großer Dicke aufgetreten sind und hat zu der Entwicklung von St 52- und auch weicher Stahlsorten geführt, die dabei auf Grund von schmelztechnischen oder Wärmebehandlungsmaßnahmen beim Bruch gute Verformung und kein verformungsloses Durchschlagen ergeben.

Bild 10 zeigt nach H. Buchholtz [18] oben einen ausgesprochenen Verformungsbruch, unten einen typischen Trennbruch. Bei ersterem ist das Bruchaussehen mattsehnig ohne kristalline Flächen, bei letzterem überwiegend kristallin, ohne jede Verformung auf den Kristallgrenzen verlaufend. Bei einem Mischbruch, wie ihn Bild 10 in der Mitte wiedergibt, wird ein kristalliner Bruchverlauf durch Verformungsflächen aufgefangen. Diese Bruchart sieht die Deutsche Reichsbahn noch als Verformungsbruch an.

Die bei der Aufschweißbiegeprobe gefundenen Biegewinkel hängen von zahlreichen Einflußgrößen ab, die mit dem geschweißten Grundwerkstoff nichts zu tun haben, nämlich der Probendicke, der Lage der Aufschweißung, dem ver-

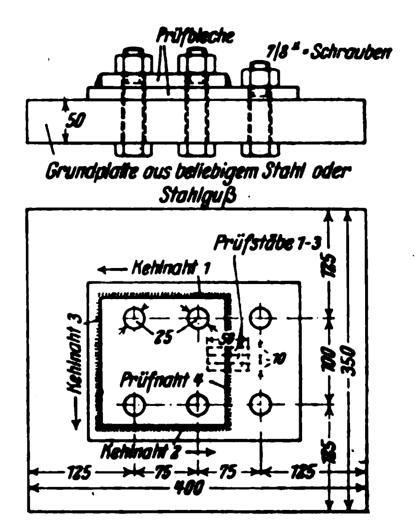


Bild 12.

wendeten Schweißdraht nach Art und Durchmesser, der Schweiß- und Prüftemperatur, einer etwa angewendeten nachträglichen Wärmebehandlung und der Prüfstelle [19]. Erst nach genauer Festlegung aller dieser Einflußgrößen war es möglich, Untersuchungen mit dem Ziele durchzuführen, den Einfluß des Grundwerkstoffs auf die Höhe des erreichten Biegewinkels zu untersuchen.

Es sind an vielen Stellen und in großem Umfang Versuche durchgeführt worden, um an die Stelle der viel Werkstoff und große Prüfmaschinen erfordernden Aufschweißbiegeprobe eine einfachere Probe zur Prüfung der Schweißempfindlichkeit zu setzen. Diese Versuche haben jedoch bisher noch zu keinem vollen Erfolg geführt. An einzelnen Prüfstellen wurden gewisse Beziehungen zwischen den Prüfwerten der Aufschweißbiegeprobe und denen von Scharfkerbschlagproben aus nicht geschweißten Werkstoff, der Abschreckhärte nicht geschweißter Proben, der Austenitkorngröße des Stahles, der Größe des Umwandlungsbereiches $A_{C1} - A_{R1}$ und den Prüfwerten noch anderer Verfahren festgestellt. Diese Feststellungen bedürfen aber sicherlich noch umfangreicher Nachprüfungen an anderen Stellen und mit anderen Stählen, bevor sie als gesetzmäßige Beziehungen anerkannt werden können. H. Hauttmann [20] schlug als Ersatz für die Aufschweißbiegeprobe den Nut-

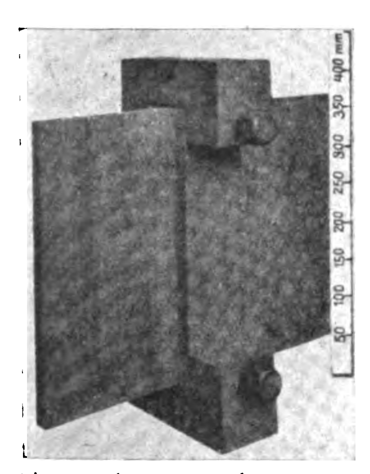
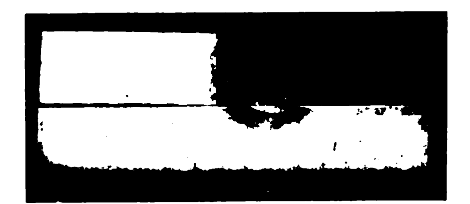


Bild 11. Einspannschweißprobe nach T. Wilkinson und H. O'Neill. (LMS-Versuch.)

Sichtbarkeit der Risse	Note
Keine Risse	1
Nur bei magnetischer Prüfung	2
Nur bei Polieren mit Schmirgelpapier	3
Nach dem Feilen	4
Nach dem Sägen	5



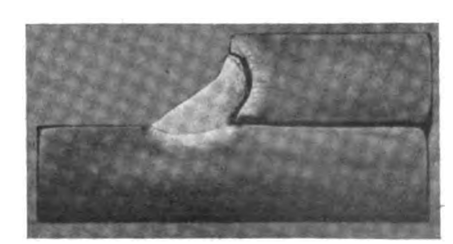
Riß in der Nahtwurzel



Riß durch die ganze Naht gehend



Riß neben der Naht



Riß ganz in der Übergangszone

Bild 13. Verschiedene Arten des Auftretens von Rissen bei Swinden-Reeve-Proben (geätzt).

preßbiegeversuch vor, bei dem durch Einpressen einer Längsnut mit zusätzlichem Querkerb eine Härtesteigerung und ein Eigenspannungszustand in der Übergangszone der Probe erreicht wird wie beim Schweißen. Vor der Prüfung wird die Probe noch künstlich gealtert. Die Prüfergebnisse sollen mit denen der Aufschweißbiegeprobe in etwa übereinstimmen, aber eine Vereinfachung stellt der Nutpreßbiegeversuch nicht dar, weil zum Einpressen der Nut eine 500 t-Presse erforderlich ist, die wohl nur wenige Werke besitzen.

Auch in den USA sind zahlreiche Prüfverfahren für die Schweißbarkeit oder die Schweißempfindlichkeit entwickelt worden, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Über sie ist in einem nach einer amerikanischen Arbeit vom Verfasser dieses Aufsatzes bearbeiteten Referat eingehend berichtet worden [21]. Es ist unwahrscheinlich, daß eines dieser Prüfverfahren, die alle an ziemlich dünnen Blechen durchgeführt werden, Zusammenhänge ergibt mit den Werten der Aufschweißbiegeprobe einerseits und den Erfahrungen der Praxis anderseits, weil dabei der Einfluß großer Werkstoffdicken, der beim Schweißen im allgemeinen erst zu mehrachsigen Spannungszuständen und dem Auftreten verformungsloser Brüche führt, nicht in Erscheinung treten kann. Dies gilt auch für einige in England entwickelte Prüfverfahren. Bild 11 stellt die sogenannte LMS-Probe [22] dar, bei der stumpf aneinandergelegte Blechstücke mit einem darübergelegten dritten Blechstück unter starrer Einspannung durch Kehlnähte verbunden werden. Daraus entnommene Querschliffe werden auf Risse geprüft und in verschiedene Beurteilungsstufen unterteilt. Ähnlich ist die Swinden-Reeve-Probe [23] nach Bild 12. Auch hierbei werden Kehlnähte unter starrer Einspannung geschweißt, wobei durch Verspannen der Probebleche auf einer 50 mm dicken Grundplatte eine sehr schnelle Wärmeableitung beim Schweißen und damit eine hohe Aufhärtung bei härtbaren Stählen erreicht wird. Bild 13 stellt vier verschiedene Arten von Rissen dar, wie sie in Querschliffen aus Swinden-Reeve-Proben gefunden werden können.

Bei den zahlreichen Versuchen zur Erforschung der Aufschweißbiegeprobe hat sich ergeben, daß auch weicher Stahl wie St 37 je nach seiner Erschmelzung und Wärmebehandlung bei 50 mm dicken Proben verformungslose Brüche ergeben kann. Wie bei der betrieblichen Schweißung dicker Profile kann demnach auch der Aufschweißbiegeversuch die Verformbarkeit selbst weicher Stähle stark beeinflussen. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang die Veröffentlichung von H. Busch und W. Reulecke [24] und der Zuschriftenwechsel mit G. Bierett [25] über die vermutlichen Bruchursachen bei einer belgischen geschweißten Brücke aus weichem unberuhigtem Thomasstahl. Busch und Reulecke weisen darauf hin, daß bei dem Begriff Schweißempfindlichkeit scharf unterschieden werden sollte zwischen

a) der Dehnfähigkeit eines geschweißten Werkstoffs während seiner Prüfung, nachgewiesen z. B. durch die Prüfung eines in mehrachsigem Spannungszustand befindlichen geschweißten Werkstoffs wie bei der Aufschweißbiegeprobe,

b) dem Auftreten von Rissen während des Schweißens, einer Erscheinung, auf die H. Buchholtz und P. Bettzieche [9]. wie auch E. H. Schulz und W. Bischof [10] bisher nur den Begriff Schweißempfindlichkeit angewendet wissen wollten.

Es sei auch nicht angängig, die unter a) und b) gekennzeichneten verschiedenen Werkstoffeigenschaften durch einen übergeordneten Ausdruck wie »Schweißeignung« oder »Schweißbarkeit« zu verbinden. Dann könne sich nämlich wie im Falle der belgischen Brücke ergeben, daß der dabei verwendete weiche Thomasstahl zwar nach b) als schweißunempfindlich bezeichnet werden muß, während er nach a) geschweißt im mehrachsigen Spannungszustand versagt hat. G. Bierett [25] betont demgegenüber, daß der Begriff Schweißempfindlichkeit als Verhältnisbegriff aufgefaßt werden muß, der aussagt, ob ein Werkstoff mehr oder weniger große bedenkliche Änderungen seiner für die praktische Verwendung wichtigen Eigenschaften erfährt. Bei dieser Erklärung ordnet sich der Aufschweißbiegeversuch als eines der Mittel zur Feststellung der Schweißempfindlichkeit zwanglos ein.

K. Brückner [26] gab eine Zusammenstellung der Erkenntnisse, die durch die Aufschweißbiegeprobe in bezug auf die Werkstoffe und Abmessungen, die für geschweißte Bauwerke in Frage kommen, gewonnen worden sind. Im Jahre 1942 konnte O. Kommerell [27] feststellen, daß das Schweißen vollwandiger Brücken auch aus St 52 nach dem Kriege sicher wieder in vollem Umfang aufgenommen werden wird, da die seinerzeit erlittenen Rückschläge heute als überwunden gelten können.

Die Frage der Schweißempfindlichkeit spielt bei mittleren Werkstoffdicken (etwa zwischen 6 und 20 mm) eine weniger große Rolle, was schon dadurch bewiesen wird, daß im Fahrzeug- und Schiffbau sehr große Mengen St 52 verschweißt worden sind, ohne daß Fehlschläge größeren Ausmaßes eintraten. Auch die Fehlschläge im Brückenbau ergaben sich erst bei der Schweißung großer Werkstoffdicken, die zu sehr hohen Schweißspannungen führen können. Immerhin sollte auch bei der Schweißung kleinerer Werkstoffdicken von Stählen mit höherer Festigkeit sorgfältig darauf geachtet werden, daß durch die konstruktive Ausbildung und die Ausführungsart der Schweißungen die Schweißspannungen niedrig gehalten werden.

Nach den wiedergegebenen Unterlagen besteht einmal bisher noch keine einheitliche Auffassung darüber, wie weit der Begriff Schweißempfindlichkeit gefaßt werden muß. Zum anderen fehlt es noch an einer geeigneten Probe, die für die Beurteilung der Schweißempfindlichkeit eines Stahles allgemein in Frage kommen könnte; denn letztere hängt zu sehr von den Querschnittsabmessungen des Werkstoffs ab. Auch im ausländischen Schrifttum wird diese Ansicht geteilt [28].

H. Buchholtz [18] kommt zu der Folgerung, daß bisher noch keines der bekannten Prüfverfahren den Nachweis seiner praktischen Gültigkeit zur Bewertung der Schweißbarkeit eines Stahles erbracht hat. Neben den geläufigen Kennwerten eines Stahles wie chemische Zusammensetzung und Festigkeitseigenschaften müßten deshalb zunächst mehrere, je nach der Art der Schweißungen ausgewählte Verfahren zur Prüfung der Schweißempfindlichkeit herangezogen werden.

D. Schweißnahtrissigkeit.

Während es sich bei der Schweißrissigkeit und der Schweißempfindlichkeit um Risse im Werkstoff neben Schweißnähten handelt, wird mit Schweißnahtrissigkeit die Erscheinung bezeichnet, daß in den Schweißnähten beim Erkalten Längs- oder Querrisse entstehen, die sich u. U. in den Grundwerkstoff fortsetzen. Schweißnahtrissigkeit, bei der Querrisse seltener als Längsrisse sind, tritt fast nur bei Lichtbogenschweißung besonders von Stählen mit höherer Festigkeit auf und auch hier meist nur bei Verschweißung dick umhüllter Elektroden. C. Stieler [29] hat sich mit dieser Erscheinung eingehend befaßt. Die Tatsache, daß vor allem Kehlnähte und nur selten Stumpfnähte davon betroffen werden, erklärt er damit, daß Kehlnähte praktisch immer in eingespanntem Zustand geschweißt werden und die Verbindung bei einer doppelseitigen Kehlnaht besonders

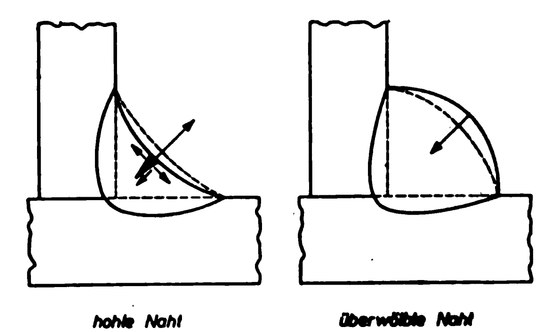


Bild 14. Schematische Wiedergabe des Einflusses der Nahtform auf die in Kehlnähten auftretenden Spannungen (nach C. Stieler).

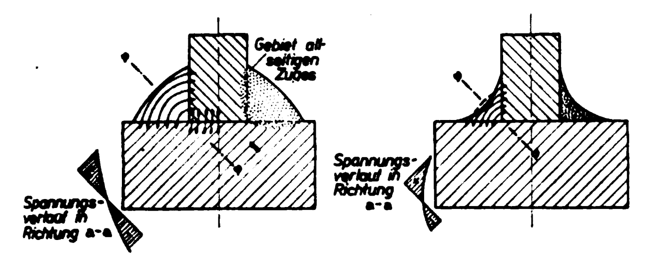


Bild 15. Schrumpfung bei Kehlnähten nach G. Bierett.

starr wird. Ein Schrumpfen der zweiten Naht ist dabei nicht möglich, und diese wird durch das Schrumpfen der ersten Naht noch gereckt. Nackte, Seelen- und dünn umhüllte Elektroden ergeben im allgemeinen überwölbte (konvexe), Mantelelektroden dagegen hohle (konkave) oder allenfalls ebene Kehlnähte. Die bei Kehlnähten zuletzt erkaltende Zone ist im letzteren Falle gleichzeitig die schwächste. Außerdem zieht nach Stieler, wie es in Bild 14 angedeutet ist, bei einer überwölbten Kehlnaht das Schrumpfen des gesamten Nahtquerschnitts die äußere Nahtschicht zwar nach innen, verkürzt sie dabei aber und setzt sie dadurch unter Druckspannungen, während umgekehrt bei einer Hohlkehlnaht die äußerste Schicht unter Zugspannungen gesetzt wird. Es sei dahingestellt, ob die Stielersche Erklärung zutrifft, daß bei überwölbten Kehlnähten die äußere Nahtschicht in der Tat unter Druckspannungen gesetzt wird, denn die Naht schrumpft je auch senkrecht zu der in Bild 14 rechts durch den Pfeil angezeigten Richtung. G. Bierett [30] führt die bei Hohlkehlnähten vielfach vorhandene Rißgefahr auf den Verlauf der Hauptspannungslinien infolge der Schrumpfkräfte zurück, der bei Kehlnähten mit etwa geradliniger Begrenzung ungestört ist, wie es in Bild 15 links dargestellt ist. Bei Hohlkehlnähten tritt jedoch eine Störung des Kraftlinienverlaufs nahe der Oberfläche mit entsprechenden Spannungsspitzen ein, wie dies Bild 15 rechts wiedergibt. Hierauf führt Bierett auch den häufig zu beobachtenden Rißansatz bei hohlen Kraterenden zurück.

Einerlei, welche der beiden angeführten Erklärungen als zutreffender angesehen wird, schon die Nahtform erklärt jedenfalls, daß bei Mantelelektroden Schweißnahtrissigkeit häufiger, bei anderen Elektroden selten oder nie beobachtet wird. Versuche von Stieler ergaben, daß unter den im Jahre 1937 auf dem Markt befindlichen Mantelelektroden auch solche waren, die sich selbst an St 37 in Kehlnähten rißanfällig erwiesen (vgl. Zahlentafel 3). Die wiedergegebenen Analysenwerte geben insofern einen Hinweis, als das Schweißgut einer besonders rißanfälligen Elektrode 0,071 % P aufwies bei einem gleichzeitig vorhandenen verhältnismäßig hohen C-Gehalt von 0,14 %. Durch Einbringen von Schwefel in die Umhüllung vorher nicht rißanfälliger Mantelelektroden konnte Stieler diese auch rißanfällig machen. Der Verfasser hat bei zahlreichen Versuchen mit unlegierten oder schwachlegierten Elektroden festgestellt, daß Kehlnahtrißanfälligkeit vielfach dann auftritt, wenn im Schweißgut hohe Phosphorgehalte (über 0,06 %) oder hohe Schwefelgehalte (über 0,05 %) vorhanden sind. Nicht ohne Grund werden deshalb in Vornorm DIN 1913 die Phosphor- und Schwefelgehalte bei Schweißzusatzwerkstoffen für Verbindungsschweißungen im Draht begrenzt. Es muß nämlich noch berücksichtigt werden, daß im Schweißgut gegenüber dem Schweißdraht durchweg höhere Phosphor- und Schwefelgehalte gefunden werden, was bei der Gasschweißung durch Aufnahme aus den Brenngasen, bei der Lichtbogenschweißung mit umhüllten Elektroden durch Aufnahme aus den Umhüllungsrohstoffen zu erklären ist. Diese Tatsache darf bei Schweißzusatzwerkstoffen bei den derzeitigen Bestrebungen, Siemens-Martinstahl soweit wie möglich durch Thomasstahl zu ersetzen, nicht außer Acht gelassen werden.

Bei den Versuchen von Stieler fanden sich aber auch rißanfällige Mantelelektroden, bei denen gegen die Analysen des Schweißgutes Einwendungen nicht zu machen waren. Eine Erklärung hierfür gab Stieler nicht, aber es ist wahrscheinlich, daß hohe Gehalte des Schweißgutes an Eisenoxyd einen schädlichen Einfluß ausüben. Mit einiger Sicherheit kann auch gesagt werden, daß die Ursachen für die Schweißnahtrissigkeit bei Mantelelektroden in erster Linie in den Umhüllungsrohstoffen zu suchen sind. Es ist deshalb große Vorsicht geboten, wenn ein Umhüllungsrohstoff, der lange Zeit mit bester Bewährung aus einer bestimmten Quelle bezogen worden ist, von einem anderen Lieferanten oder aus einem anderen Fundort genommen werden muß.

Nach den Versuchsergebnissen von Stieler ist das Auftreten von Schweißnahtrissigkeit bei Mantelelektroden auch stark von den Schweißbedingungen abhängig und wird bei Kehlnähten durch zu hohe Stromstärke und zu geringe Dicke der ersten Lage begünstigt.

E. Helin [31] machte auf Grund eigener Versuche bemerkenswerte Ausführungen über das Auftreten und die Ursachen der Schweißnahtrissigkeit. Danach müssen die Elektroden auf den zu schweißenden Stahl abgestimmt werden, weil die Zusammensetzung beider bei dem Auftreten von Schweißnahtrissigkeit zusammenwirken kann. Kehlnähte reißen infolge ihres Spannungszustandes leichter als Stumpfnähte. Schweißnahtrissigkeit wird besonders bei Mantelelektroden beobachtet, aber selten bei Stahl St 37 und meist erst bei Stählen ab 44 kg/mm² Festigkeit, wobei unberuhigter Stahl weniger anfällig als beruhigter ist. Helin folgert, daß vor allem die beim Schweißen entstehenden Schlackeneinschlüsse, wie Kieselsäure, die Rißgefahr fördern. Schweißnahtrisse verlaufen stets in der Nahtrichtung unter Bevorzugung der Korngrenzen. Sie verlaufen bei Verwendung dick umhüllter Elektroden in der Regel bis an die Nahtoberfläche, während sie bei nackten, Seelen- oder dünn umhüllten Elektroden nicht so weit gehen, von außen

Zahlentafel 3. Untersuchungen an Mantelelektroden nach C. Stieler [29].

	Mantelelektrode .... Nr.	1	2	3	4	5
	Zugelassen für Reichsbahn-Güteklassen:	E 34 z b.E 52 z	E 34 z b.E 52 z	E 37 z u.E 52 z	E 34 z	E 34 z b.E 52 z
	Befund bei der Kehlnahtprobe:	rissig	rißfrei	sehr rissig	rißfrei	rißfrei
Chemische Zusammensetzung des Schweißgutes	C %	0,11	0,10	**0,14**	0,10	0,10
	Si %	0,04	0,03	0,03	0,04	0,03
	Mn %	0,55	0,50	0,58	0,43	0,32
	P %	0,046	0,046	**0,071**	0,035	0,033
	S %	0,029	0,029	0,035	0,030	0,039
	Cu %	0,14	0,14	0,13	0,12	0,15
	Ni %	0,05	0,04	0,05	0,05	0,04
	Cr %	0,04	0,04	0,02	0,04	0,03
	Mo %	0,23	0,22	—	—	Sp.
	N_2 %	0,031	0,040	0,025	0,024	0,032
	O_2 %	0,150	0,140	0,140	0,140	0,130
	H_2 %	0,0004	0,0006	0,0006	0,0004	0,0011

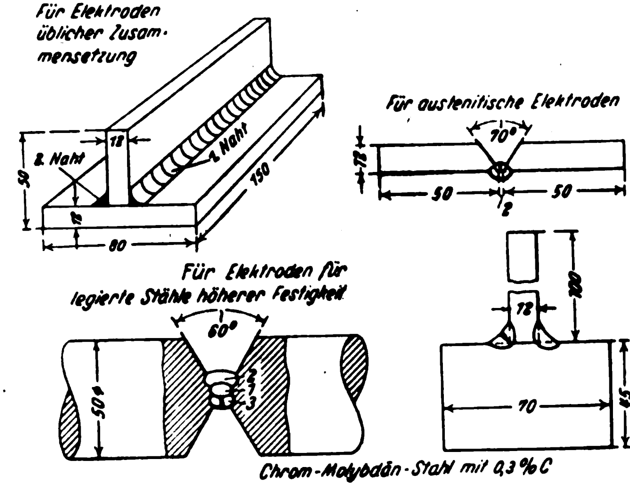


Bild 16. Verfahren zur Prüfung der Schweißnahtrissigkeit (nach Stieler).

deshalb auch nicht erkannt werden können und aus diesem Grunde besonders gefährlich sind.

Die Deutsche Reichsbahn hat eine besondere Kehlnahtschweißprobe zur Prüfung von Mantelelektroden auf Schweißnahtrißanfälligkeit entwickelt, deren Anwendung heute in gleicher oder ähnlicher Form in den verschiedenen Schweißdrahtzulassungs- und abnahmevorschriften zur Bedingung gemacht wird. In Bild 16 ist diese Probe oben wiedergegeben, bei der 12 mm dicke Bleche aus St 00 bis St 52 durch Kehlnähte verbunden werden. Die erste Naht soll in normaler Dicke geschweißt werden, die Gegennaht unmittelbar danach und etwas dünner. Dabei wird die erste Naht, die noch recht heiß ist, stark gereckt. Bei sehr rißanfälligen Elektroden reißt u. U. schon die erste Naht, bei weniger anfälligen erst die zweite. Es sei hier bemerkt, daß die Deutsche Reichsbahn die Probenlänge zuerst mit 150 mm festgelegt hatte, sie dann aber im Jahre 1940 aus Werkstoff-Einsparungsgründen auf 120 mm verringerte. Hierdurch wird die Probe noch schärfer als vorher, weil die zweite Naht dabei an einer noch heißeren Probe gelegt wird. Diese Tatsache erklärt auch, wie es kam, daß einige Schweißelektrodenhersteller die unangenehme Beobachtung machen mußten, daß die Deutsche Reichsbahn von einem gewissen Zeitpunkt ab ihre Elektroden als nahtrissig bezeichnete, während vorher keine Beanstandungen erhoben worden waren. Ähnliche Proben wie die beschriebene Kehlnahtprobe der Deutschen Reichsbahn sind bei den meisten Elektrodenherstellern von jeher benutzt worden. Sie sind wertvolle Hilfsmittel für die Weiterentwicklung und die Kontrolle der Fertigung.

In Bild 16 sind drei weitere Proben zur Prüfung der Rißanfälligkeit nach Stieler wiedergegeben, die für legierte Mantelelektroden verwendet werden. Mit der an zweiter Stelle dargestellten Probe prüft die I. G. Ludwigshafen Elektroden für legierte Stähle höherer Festigkeit durch Kehlnähte an dickem Rundstahl, wobei der Prüfwerkstoff ein entsprechend legierter Stahl ist. Die beiden anderen Proben unten in Bild 16 sind bei der Fa. Krupp verwendete zur Prüfung austenitischer Elektroden. Bei der an vorletzter Stelle dargestellten Probe wird an einem nichtaustenitischen oder austenitischen Stahl (je nach der Stahlsorte, für die die Elektrode verwendet werden soll, Blechdicke 12 mm), zunächst eine dünne Lage in die Wurzel einer Stumpffuge geschweißt. Unmittelbar darauf erfolgt von der Gegenseite eine Rückschweißung mit einer beliebigen austenitischen Elektrode, die sehr stark gehalten wird, um die noch heiße Prüflage durch die Schrumpfung stark auf Zug zu beanspruchen. Nach Säuberung und Abbeizen wird die Prüflage mit einer binokularen Lupe auf Risse geprüft. Die unten dargestellte, bei der Kriegsmarinewerft Wilhelmshaven entwickelte Probe dient zur Prüfung austenitischer Elektroden für die Verschweißung sehr dicker Querschnitte aus nichtaustenitischem Stahl. Dabei wird auf ein 50 mm dickes Blechstück aus Chrom-Molybdän-Stahl mit etwa 0,3% Kohlenstoff ein nur 12 mm dickes Blech aus St 52 durch unmittelbar hintereinandergelegte doppelseitige Kehlnähte aufgeschweißt, wobei die zweite Kehlnaht die rißempfindlichste ist.

E. Zusammenfassung.

Für die Schweißrissigkeit und die Schweißnahtrissigkeit stehen heute einwandfreie Prüfverfahren zur Verfügung, durch deren Anwendung das Auftreten dieser beiden Fehlererscheinungen im praktischen Betrieb verhindert werden kann. Ein Prüfverfahren, das ebenso einwandfreie Ergebnisse liefert, gibt es dagegen für die Schweißempfindlichkeit bisher noch nicht. Ein solches wird wohl auch nie gefunden werden können, weil die Schweißempfindlichkeit außerordentlich stark von den Abmessungen der geschweißten Grundwerkstoffe abhängt, so daß ein auf eine bestimmte Werkstoffdicke gut ansprechendes Prüfverfahren für die Schweißempfindlichkeit für andere Dicken nicht anwendbar ist.

Die Ausführungen sollten zeigen, daß bei einem Auftreten von Fehlschlägen, wie sie bei allen Neuentwicklungen in der Technik fast unvermeidlich sind, zielbewußte Forschungsarbeit nicht nur die Ursachen aufzudecken, sondern auch die Abhilfemittel anzugeben vermag. Engste Zusammenarbeit von Forschung und praktischem Betrieb ist heute mehr denn je das Gebot der Stunde[1]).

F. Schrifttum.

[1] J. Müller, Schweißbarkeit von Stählen höherer Festigkeit nach den Erfahrungen des Flugzeugbaus, mit besonderer Berücksichtigung der Schweißrissigkeit. Luftf.-Forschg. Bd. 11 (1934) S. 93/103.

[2] W. Eilender, H. Arend und E. Schmidtmann, Hochfeste schweißbare Chrom-Mangan-Baustähle. Stahl u. Eisen Bd. 61 (1941) S. 392/96.

[3] J. Müller, Bedeutung des Schweißgases und seiner Zusammensetzung für die Schweißrissigkeit von Flugzeugbaustählen. Autogene Metallbearb. Bd. 33 (1940) S. 277/81.

[4] K. L. Zeyen, Zur Frage der Schweißempfindlichkeit. Techn. Mitt. Krupp Bd. 4 (1936) S. 115/22; Z. VDI Bd. 80 (1936) S. 969/73; Stahl u. Eisen Bd. 56 (1936) S. 1213.

[5] K. L. Zeyen, Disk.-Beitrag zu der Arbeit von W. Eilender und R. Prybil: Zur Frage der Schweißempfindlichkeit von Chrom-Molybdän-Stählen. Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 11 (1937/38) S. 443/48.

[6] H. Lawrence, Lichtbogenschweißung von Chrom-Molybdän-Stahl im Flugzeugbau. Steel Bd. 109 (1941) Nr. 18 S. 90 u. 93/94. Vgl. Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942) S. 886/87.

[7] A. Antonioli, Die Ursachen der Schweißrissigkeit von Chrom-Molybdän-Baustählen. Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942) S. 540/45 u. 863/64.

[8] K. L. Zeyen, Verwendung von Schweißdrähten, die austenitisches Gefüge ergeben, für die Schweißung unlegierter und niedriglegierter (nichtaustenitischer) Stähle. Techn. Mitt. Krupp Bd. 5 (1937) S. 89/102; Autogene Metallbearb. Bd. 30 (1937) S. 130/38; Bd. 31 (1938) S. 139.

[9] H. Buchholtz, u. P. Bettzieche, Die Prüfung der Schweißempfindlichkeit von Baustählen. Stahl u. Eisen Bd. 60 (1940) S. 1145/51.

[10] E. H. Schulz und W. Bischof, Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52. Stahlbau Bd. 14 (1941) S. 41/47 u. 57/62.

[11] C. Stieler, Schweißerfahrungen mit Stahl St 52. Stand der Erkenntnisse nach neueren Veröffentlichungen. Masch.-Bau Betrieb Bd. 20 (1941) S. 117/20.

[12] G. Bierett, Untersuchungen zur Ermittlung günstiger Herstellungsbedingungen für die Baustellenstöße geschweißter Brückenträger. Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, Ausg. B., Heft 10, Berlin 1940. Vgl. Elektroschweißg. Bd. 12 (1941) S. 94/101 u. 114/18.

[13] O. Graf, Versuche und Feststellungen zur Entwicklung der geschweißten Brücken. Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, Ausg. B, Heft 11. Berlin 1940. Vgl. Z. VDI Bd. 85 (1941) S. 357/60.

[14] R. Kühnel, Schweißbarkeit von Stahl. Stahl u. Eisen Bd. 60 (1940) S. 381/90 u. 405/12.

[15] A. Dörnen, Die Durchbildung der Verbindung des Steges mit der Gurtung in geschweißten Stahlbauten. Bautechn. 20 (1942) S. 61/67.

[16] O. Kommerell, Die neuen Lieferbedingungen für St 52 als Folge neuerer Versuche und Erfahrungen. Stahlbau Bd. 11 (1938) S. 49/54. Vgl. Stahl u. Eisen Bd. 57 (1937) S. 421.

[1]) Die beschriebenen Fehlererscheinungen sind in ausführlicher Weise in dem soeben erschienenen Stahleisenbuch von K. L. Zeyen und W. Lohmann, »Schweißen der Eisenwerkstoffe« behandelt worden. Zu eingehender Orientierung insbesondere über das bisher erschienene umfangreiche Schrifttum sei auf dieses Buch verwiesen. Verlag Stahleisen m. b. H., Düsseldorf.



[17] W. Kuntze, Prüftechnische Erfassung der Ursachen zum spröden Bruch des Baustahls. Stahlbau Bd. 14 (1941) S. 97/103.

[18] H. Buchholtz, Zur Prüfung der Schweißempfindlichkeit von Baustählen. Bautechn. Bd. 19 (1941) S. 386/92.

[19] E. Houdremont, K. Schönrock und H.-J. Wiester, Der Aufschweißbiegeversuch und seine Eignung zur Prüfung von Baustählen. Stahl u. Eisen Bd. 59 (1939) S. 1241/48 u. 1268/73. Techn. Mitt. Krupp, A. Forsch.-Ber. Bd. 2 (1939) S. 191/205.

[20] H. Hauttmann, Der Preßnutbiegeversuch. Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42) S. 331/38.

[21] C. E. Jackson, und G. G. Luther, Vergleich von Schweißbarkeitsprüfverfahren an zwanzig Stählen mit niedrigem Kohlenstoffgehalt. Weld. J. Bd. 19 (1940) Nr. 10 (Suppl.: Engng. Found. Weld. Res.Com.) S. 351/64. Vgl. Elektroschweißg. Bd. 12 (1941) S. 79/83.

[22] T. B. Wilkinson, und H. O'Neill, Beobachtungen bei der Lichtbogenschweißung und beim Brennschneiden von niedriglegierten, hochfesten Baustählen. Proc. Inst. mech. Engrs., Lond., Bd. 141 (1939) Nr. 6 S. 497/518.

[23] T. Swinden, und L. Reeve, Metallurgische Gesichtspunkte beim Schweißen niedriglegierter Baustähle. Quart. Trans. Inst. Weld. Bd. 1 (1938) Nr. 1, S. 7/24.

[24] H. Busch, und W. Reulecke, Untersuchungen über Rißerscheinungen an einer geschweißten Brücke. Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942) S. 66/72.

[25] Zuschriftenwechsel mit G. Bierett zu der vorerwähnten Arbeit. Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942) S. 844/46.

[26] K. Brückner, Die Entwicklung der Brückenschweißung in den letzten drei Jahren. Z. VDI Bd. 85 (1941) S. 460/62.

[27] O. Kommerell, Vorwort zur 5. Auflage der Erläuterungen zu den Vorschriften für geschweißte Stahlbauten. Berlin 1942.

[28] D. Sèférian, Die Schweißbarkeitsuntersuchungen. Rev. Soud.autog. Bd. 31 (1939) S. 702/07.

[29] C. Stieler, Ursachen der Schweißnahtrissigkeit. Stahl u. Eisen Bd. 58 (1938) S. 346/50 u. 430/31.

[30] Buchveröffentlichung Schweißtechnik im Stahlbau, hrsg. von K. Klöppel und C. Stieler, Berlin 1939. Kapitel von G. Bierett.

[31] E. Helin, Schweißnahtrissigkeit. Elektroschweißg. Bd. 11 (1940) S. 162/69. (Aus Zeitschrift »Svetsaren«, Göteborg).

Biegeversuche über die statische Beanspruchungsfähigkeit von großen Leichtmetall-Doppel-T-Trägern*)[1].

Von A. Thum und R. Zoege von Manteuffel.

Bericht aus der Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Darmstadt.

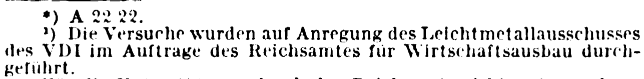
Versuche an 150 mm hohen und 1600 mm langen vollgepreßten, genieteten und geschweißten Trägern aus verschiedenen Aluminium- und Magnesiumlegierungen bei mittiger Einzellast mit unterschiedlicher Krafteinleitung zur Beurteilung der Verwendbarkeit großer Leichtmetallprofile.

Gliederung.

1. Einleitung.

Während die Biegefestigkeit von Trägern aus einfachen Vollquerschnitten nahezu eine einfache Werkstoffkennzahl darstellt und bei Kenntnis des Werkstoffverhaltens im elastischen und plastischen Bereich aus der Werkstoffestigkeit verhältnismäßig leicht berechnet werden kann [1, 2], ist die Belastungsfähigkeit von Profilträgern nicht mehr ausschließlich von der Werkstoffestigkeit sondern in weitgehendem Maße auch von der Knicksteifigkeit abhängig. Namentlich bei dünnen Wandungsquerschnitten und bei großen Trägerlängen finden Knickvorgänge vorwiegend im Bereich elastischer Verformungen statt. In diesem Fall lassen sich die Tragfähigkeiten rechnerisch ebenfalls einigermaßen erfassen [3 bis 10]. Sie werden aber von den Steifigkeitsverhältnissen (Elastizitätskonstanten und Flächengrößen bzw. Trägheitsmomenten) bestimmt und stehen in keinem Zusammenhang mit der Werkstoffestigkeit. Dagegen können genauere Voraussagen über die Tragfähigkeit von Trägern nicht gemacht werden, die Knickbeanspruchungen im Bereich plastischer Verformungen ausgesetzt sind und teils durch Knickvorgänge, teils durch örtliche über die Werkstoffestigkeit hinausgehende Beanspruchungen zerstört werden. Hier lassen sich die Belastungsfähigkeit und die Beanspruchungen nur experimentell bestimmen. Die Tragfähigkeit ist nicht nur von den Steifigkeitsverhältnissen und der Werkstoffestigkeit, sondern auch in hohem Maße von der Verformungsfähigkeit des verwendeten Werkstoffes abhängig.

Bei Stahl wurden bereits früher einige derartige Biegeversuche an den für den Leichtbau besonders wichtigen Doppel-T-Trägern durchgeführt [9 bis 13]. Diese Versuche



*) A 22 22.

[1]) Die Versuche wurden auf Anregung des Leichtmetallausschusses des VDI im Auftrage des Reichsamtes für Wirtschaftsausbau durchgeführt.

Für die Unterstützung durch das Reichsamt sei hiermit ergebens gedankt.

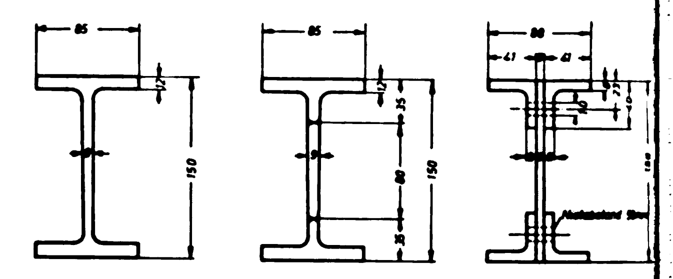


Bild 1. Querschnittabmessungen der Träger, die je 1600 mm lang waren.

zeigten schon das grundsätzliche Verhalten von derartigen Trägern bei Biegebeanspruchung. Die Zerstörung erfolgte bei Biegenennspannungen oberhalb der Streckgrenze des verwendeten Werkstoffes zumeist durch ein Ausknicken.

Die Belastungs-Durchbiegungskurven zeigten dabei ein den Zerreißdiagrammen verwandtes Aussehen. Bei einer mangelhaften Verformbarkeit des verwendeten Trägerwerkstoffes erfolgte die Zerstörung auch durch Anrisse oder durch einen Bruch der Träger.

Über das Verhalten der verschiedenen Leichtmetalle bei den entsprechenden Beanspruchungen sind ausreichende Unterlagen im Schrifttum noch nicht vorhanden. Insbesondere fehlen hier noch Kenntnisse über die Eignung von großen Profilquerschnitten, deren Anwendung für den Leichtbau größerer Einheiten von zunehmender Bedeutung erscheint.

An 150 mm hohen und 1600 mm langen vollgepreßten, genieteten und geschweißten Leichtmetall-Doppel-T-Trägern aus Aluminium- und Magnesiumlegierungen wurden daher Biegeversuche vorgenommen, die einen Anhalt über die Herstellbarkeit und die Eignung und Verwendbarkeit derartiger Träger aus verschiedenen Werkstoffen für statische Belastungen ergeben sollten. Weitere Versuche über die Brauchbarkeit gleichartiger großer Doppel-T-Träger bei schwingender Beanspruchung sind vorbereitet.

2. Versuchseinrichtung und Versuchsdurchführung.

Zur Untersuchung kamen eine Reihe von Aluminium- und Magnesiumlegierungen, die in Zahlentafel 1 angegeben sind[2]). Die Träger waren teilweise aus einem Stück vollgepreßt, teilweise aus vollgepreßten und auseinandergeschnittenen Trägern durch doppelte Stegschweißung wieder zusammengefügt und teilweise aus fünf Einzelstücken zusammengenietet, Bild 1. Die Profile waren flächengleich bemessen und besaßen auch praktisch ein gleiches Trägheitsmoment und Widerstandsmoment. Sie wurden einzeln nachgemessen, so daß geringe durch die Fertigung bedingte Maßabweichungen in der Auswertung berücksichtigt werden konnten.

[2]) Das Versuchsmaterial wurde von den Vereinigten Leichtmetallwerken GmbH Hannover und der Wintershall A.G. Kassel in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt.

Zahlentafel 1. Eigenschaften der Trägerwerkstoffe[1]).

Entnahme aus Träger	Bondur 17/39 v			Pantal 19 v				BSS 63/05 p			Magnewin 3510			Magnewin 3512			Magnewin 3501		
	vollgepreßt		genietet	vollgepreßt		genietet	geschweißt	vollgepreßt		geschweißt	vollgepreßt		genietet	vollgepreßt		genietet	vollgepreßt		geschweißt
für Biegeversuch mit	Rolle	Fl.-St.[2])	Rolle	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Rolle	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Rolle	Fl.-St.	Rolle
Zugfestigkeit σ_B [kg/mm²]	49,2	48,7	49,8[3])	34,0	35,8	30,2[3])	15,5	26,6	27,6	27,0	29,7	31,2	29,5[3])	24,2	26,5	25,7[3])	20,8[3])	27,5	24,4
Fließgrenze $\sigma_{0,2}$ [kg/mm²]	32,0	32,3	35,4[3])	29,9	32,7	25,0[3])	9,9	11,2	11,2	11,8	19,4	20,9	20,4[3])	13	15,7	<18	13,9[3])	19,1	15,3
Elastizitätsgrenze $\sigma_{0,02}$ [kg/mm²]	28,0	30,7	31,0	23,0	30,5	25,0	$\lessapprox 9$	$\lessapprox 10$	10,0	$\lessapprox 10$	11,5	14,3	12,5	≈ 7	8,9	<12	8	9—11	8,5
Dehnung δ_{10} [%] . .	16,2	17,2	16,3[3])	8,3	8,1	13,0[3])	9,0	28,7	27,0	20,8	10,3	16,0	10,0[3])	10,0	14,9	9,1[3])	2,3[3])	3,6	3,5[3])
» δ_5 [%] . .	18,0	19,0	18,3[3])	11,5	11,3	17,2[3])	14,7	32,0	31,4	21,3	10,3	16,3	10,7[3])	11,3	15,4	11,2[3])	3,4[3])	4,7	3,6[3])
Einschnürung ψ [%]	23,6	22,3	23,9[3])	26,3	28,1	27,3[3])	39,4	44,7	48,3	25,6	12,2	22,0	14,3[3])	16,8	18,5	13,5[3])	6,8[3])	8,3	9,8
Brinellhärte $H_{10/1000/30}$ [kg/mm²]	120			101				67			64			59			61		

[1]) Die Zerreißversuche wurden an Stäben mit einem rechteckigen Querschnitt von etwa 100 mm² und einem Seitenverhältnis $a/b = 1/2$ ausgeführt.
[2]) Fl.-St. = Flachstempel.
[3]) Mittel aus 2 Versuchen an aus dem Stegblech und aus dem Flansch (L-Profil) entnommenen Proben.

Die Träger wurden in einer hydraulischen Presse an beiden Enden auf Stahlrollen gelagert und gemäß Bild 2 in der Mitte entweder durch eine Rolle oder durch einen Flachstempel belastet. Die Stahlrollen waren gegen seitliches Kippen gesichert, d. h. in ihrer Achse horizontal festgelegt. Der Belastungsstempel konnte ebenfalls seitlich nicht kippen. Dagegen war der Kolben der hydraulischen Maschine gegen eine Drehung nicht gesichert, so daß eine Drehung der Endauflager gegenüber dem mittigen Kraftangriff um die vertikale Maschinenachse möglich blieb.

Die Belastung erfolgte stufenweise. Anfangs wurde nach je 2 t Laststeigerung auf eine niedrige Vorlast von 1,5 t entlastet. Da in einigen Fällen aber starke Unstetigkeiten und ein verstärktes Ausknicken durch das Entlasten entstanden, wurde bei den späteren Versuchen ohne Zwischenentlastung bis zur Zerstörung der Träger belastet. Lediglich zur Bestimmung der Biegesteifigkeit (elastischen Federkennlinie) wurde anfangs im Bereich niedriger Lasten auf Vorlast entlastet.

Die Messungen erstreckten sich auf eine Bestimmung der Belastung und der Verformungen. Nachdem auf Grund von Vorversuchen mit dem Auftreten von Ausbeulungen, Ausknickungen und Verwerfungen unter dem Einfluß der Last zu rechnen war, wurde versucht, auch diese verschiedenen Knickvorgänge durch Messung der Verformungen an den verschiedensten maßgeblich erscheinenden Punkten festzuhalten. Die Verformungswerte wurden hierbei mittels Meßuhren, Mikrometerschrauben und Tastlehren gemessen.

Die Lage der Meßpunkte und die Anordnung der Meßuhren ist aus Bild 2 und 3 zu entnehmen. Bild 4 und 5 zeigen noch einmal den Versuchsaufbau ohne Meßeinrichtungen mit einem über die Höchstlast beanspruchten Träger.

Die Trägerbiegeversuche wurden ergänzt durch Zerreißversuche an Proben, die aus dem Flansch bzw. dem Steg der Träger entnommen waren und ein Bild über die Eigenschaften der Trägerwerkstoffe geben sollten. Ihre Ergebnisse sind in Zahlentafel 1 enthalten.

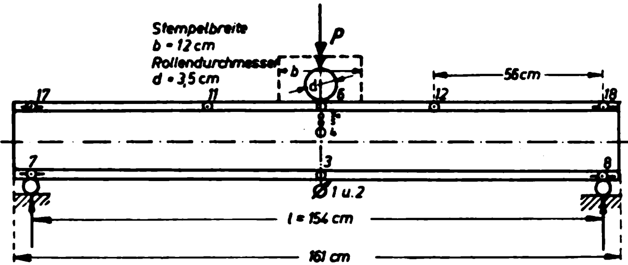
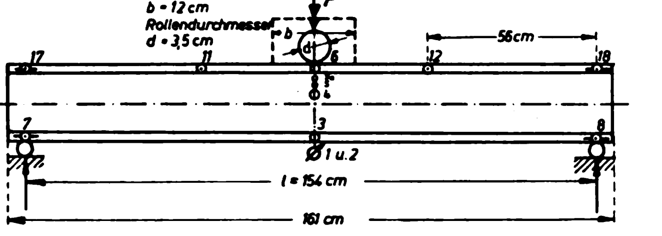
8. Versuchsauswertung.

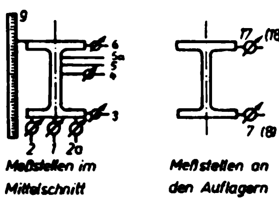
Zur Veranschaulichung der Knick- und Verformungsvorgänge wurden neben den Kraft-Durchbiegungskurven auch noch die Kraft-Verformungskurven der einzelnen Meßpunkte aufgezeichnet. Hierbei wurden jeweils Gruppen von Meßpunkten zusammengefaßt, die einen Knickvorgang kennzeichnen. Als Beispiel für derartige Knickkurven sind in Bild 6 und 7 die Durchbiegungs- und Knickkurven für einen Träger bei Belastung durch eine Rolle und bei Belastung durch einen Flachstempel aufgezeichnet.

Die Auswertung der Biegeversuche erfolgte nun in der Weise, daß neben der Höchstlast und der bei der Höchstlast gemessenen Durchbiegung des Trägers auch noch verschiedene Durchbiegungs- und Knickgrenzen und der Elastizitätmodul ermittelt wurden. Da kleinste bleibende Verformungen bereits bei den niedrigsten Lasten zu messen waren, wurde als Grenze der elastischen Durchbiegung der Punkt angesehen, bei dem sich in der Last-Durchbiegungskurve erstmalig ein eindeutiges Abweichen von der Anfangsgeraden zeigte. Entsprechend der 0,2-Grenze im Zerreißversuch wurde eine weitere Dehngrenze bei 1,25 mm bleibender Durchbiegung bestimmt. Bei den Versuchen mit der durch den Flachstempel eingeleiteten Belastung entspricht dieser Wert etwa der bleibenden Durchbiegung der Träger, die sich ergeben müßte, wenn die Außenfasern unter der ganzen Länge des Flachstempels gleichmäßig um 0,2% fließen würden.

In den Last-Durchbiegungsschaubildern wurde ferner noch der Beginn eines verstärkten Fließens abgelesen, der größenmäßig etwa der Fließgrenze im Zerreißversuch entspricht, aber nicht so scharf ausgeprägt war und der genormten Definition einer Fließgrenze in keinem Fall entsprach.

Als Knickbeginn wurde der Punkt angesehen, an dem eine Unstetigkeit in dem seitlichen Ausweichen des Trägers gemessen wurde. Als deutliches Ausknicken wurde die



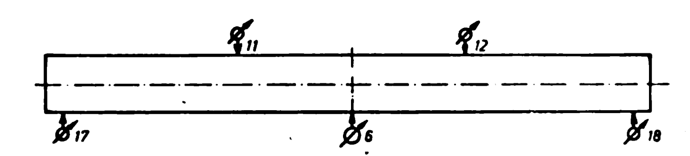


Bild 2. Versuchsschema.

Bild 3. Anordnung der Meßuhren und Mikrometerschrauben.

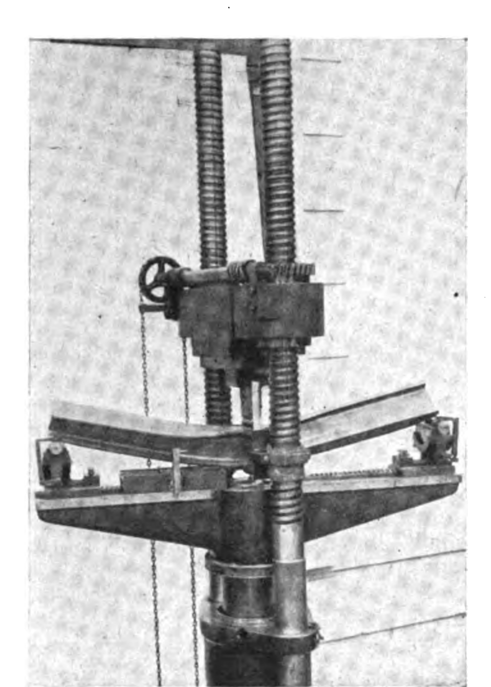


Bild 4. Magnewinträger 3512 in der Druckpresse.

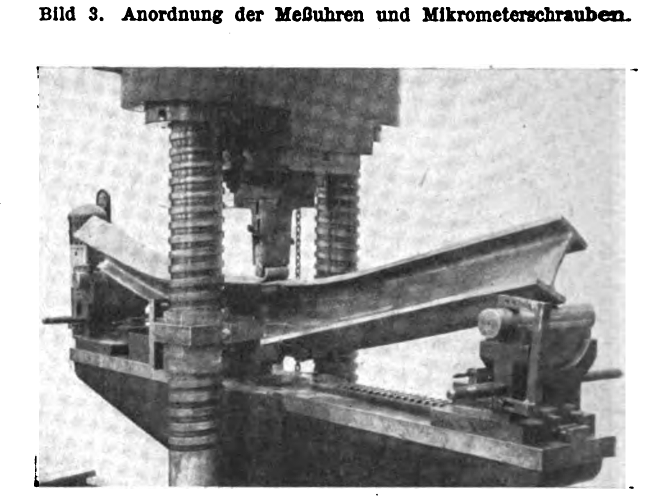


Bild 5. Magnewinträger 3512 in der Druckpresse.

Grenze angesehen, bei der der Knickvorgang sich deutlich abzuzeichnen begann, der später die Zerstörung des Trägers hervorrief.

Viele der angeführten Grenzen waren nicht immer objektiv einwandfrei zu bestimmen und können auf Grund ihrer subjektiven Ermittlung nur als Vergleichswerte für die vorliegenden Versuche angesehen werden. Dies gilt sowohl für den Beginn des verstärkten Fließens und für einige Grenzen der elastischen Durchbiegung als auch für eine Anzahl von Knickgrenzen, da ein geringes elastisches Ausknicken zuweilen bereits bei Beginn der Belastung einsetzte.

Die Spannungen für die Verformungsgrenzen und für die Höchstlast wurden im Falle der Belastung mit einer Rolle als Nennspannungen für mittigen Kraftangriff berechnet

$$\sigma = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W}.$$

Für den Fall der Belastung mit dem Flachstempel wurde die Spannung als Nennspannung so berechnet, als ob die Last in zwei Einzelkräften an den Stempelkanten wirksam wäre und somit ein konstantes Biegemoment über der ganzen Stempellänge auftreten würde.

$$\sigma = \frac{P \cdot (l - b)}{4 \cdot W}.$$

Diese Rechnungsweise, die häufig in der Praxis angewendet wird, deckt sich nicht mit den tatsächlichen Verhältnissen, da der Flächendruck sich in Wirklichkeit über die ganze Stempelfläche verteilt. Dies gilt namentlich für kleinere Belastungen. Bei Höchstlast und starker Krümmung des belasteten Trägers wird aber tatsächlich der Hauptteil der Last in Nähe der Stempelkanten übertragen.

Der E-Modul wurde unter den gleichen Annahmen nach den bekannten Formeln errechnet.

Zum Vergleich zwischen der Belastung mittels Rolle und mittels Flachstempel wurde die Spannung bei der Belastung mit dem Flachstempel auch noch unter der gleichen Annahme wie bei der Belastung mittels Rolle, d. h. unter der Annahme einer in der Trägermitte angreifenden Einzellast berechnet. $\sigma = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W}$. Da die so errechnete Spannung einen Vergleich der Tragfähigkeit eines über eine Platte oder einen Flachstempel belasteten Trägers mit der eines durch eine Rolle belasteten Trägers ergibt, wurde sie als Tragfähigkeit bezeichnet.

4. Versuchsergebnisse.

Die hauptsächlichen Versuchsergebnisse sind in Zahlentafel 2 enthalten.



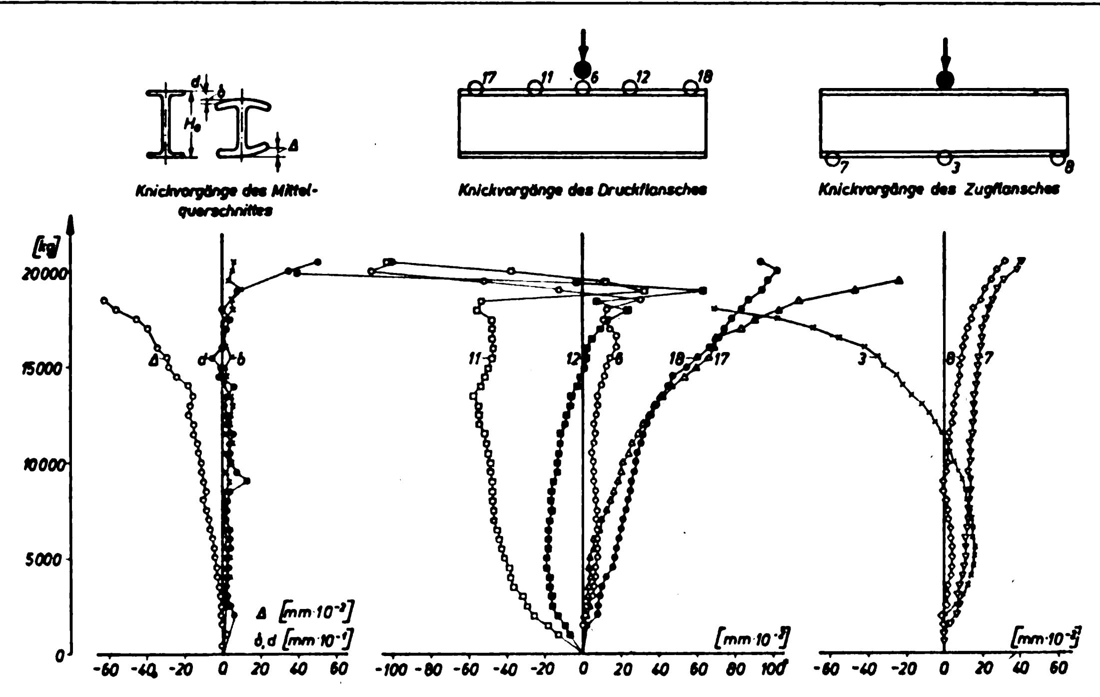


Bild 6. Knickvorgänge eines vollgepreßten Bondurträgers bei Belastung mittels Rolle. (Verformungswege des Trägers an den einzelnen jeweils für einen Knickvorgang maßgeblichen Meßstellen in Abhängigkeit von der Belastung.)

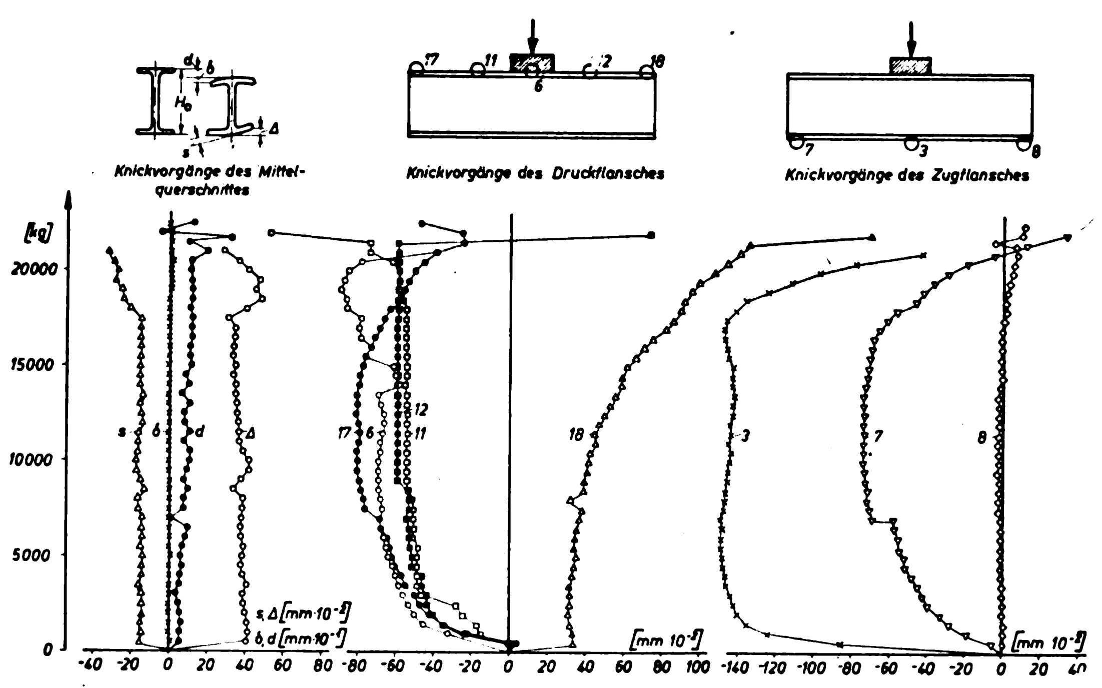


Bild 7. Knickvorgänge eines vollgepreßten Bondurträgers bei Belastung mittels Flachstempel. (Verformungswege in Abhängigkeit von der Belastung.)

Die Zerstörung sämtlicher Träger erfolgte durch Ausknicken. Nach dem Erreichen der Höchstlast wurde noch weiter belastet bis sie anfingen sich von den seitlichen Auflagern abzuheben, Bild 4, 5, oder infolge einer örtlich nicht ausreichenden Verformbarkeit des Werkstoffes zu Bruch zu gehen.

Ein vollgepreßter Träger aus Magnewin 3510 brach an der Kraftangriffsstelle des Druckflansches, Bild 5, 9, 20, unmittelbar nach dem Erreichen der Höchstlast dadurch, daß der Träger von einer Knickform, einem W-förmigen Ausknicken des Druckflansches, in eine andere Knickform, ein V-förmiges Ausknicken, übersprang, so daß die Kanten des starr in der Presse gehaltenen Stempels sich übermäßig in den Flansch eindrückten.

Bei einem vollgepreßten Träger aus Magnewin 3501 trat als Folge der durch das Knicken bedingten Verwindung und einseitigen Lagerung eine einseitige Aufbeulung des Unterflansches an einem seitlichen Auflager auf, die so stark wurde, daß hier lange nach dem Überschreiten der Höchstlast schließlich ein kleiner Anriß entstand, Bild 10.

Zwei steggeschweißte Träger, bei denen die Belastung mit einem Flachstempel aufgebracht wurde, gingen bei der weitgehenden Verformung nach dem Überschreiten der Höchstlast infolge örtlich nicht ausreichender Dehnbarkeit des Werkstoffes zu Bruch:

Bei einem Träger aus Magnewin 3501 trat ein Bruch im zugbeanspruchten Flansch unter der mittigen Kraftangriffsstelle ein, Bild 11, 12, während ein Träger aus BSS durch Riß längs der Schweißnaht, vom Trägerende ausgehend, zerstört wurde, Bild 13.

Bei dem steggeschweißten Träger aus Pantal kamen Querrisse in der Schweißnaht nach weitgehender Verfor-

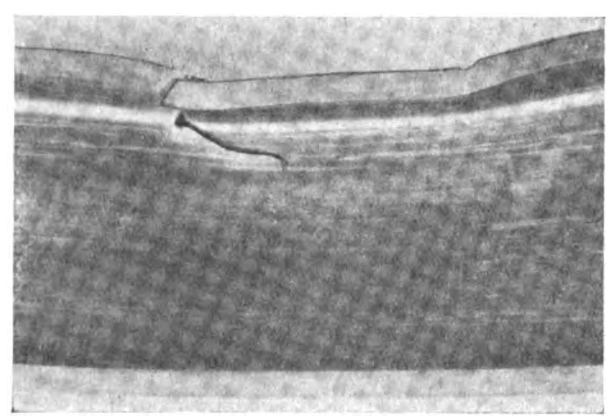


Bild 8. Ansicht von der Seite.

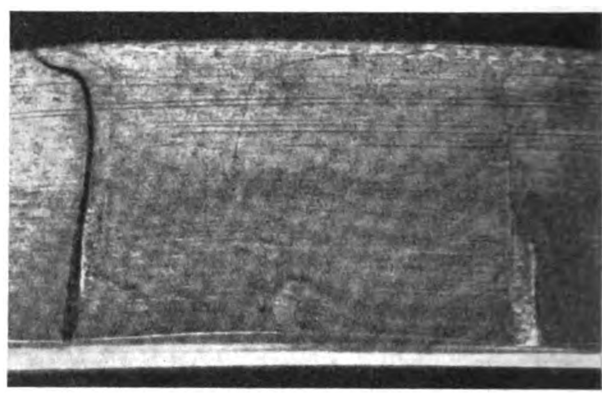


Bild 9. Ansicht von oben.

Bild 8 und 9. Anrisse bei einem vollgepreßten Magnewinträger 3510 unter dem Druckstempel nach dem Umspringen von einer W-förmigen auf eine V-förmige Knickform des Druckflansches.

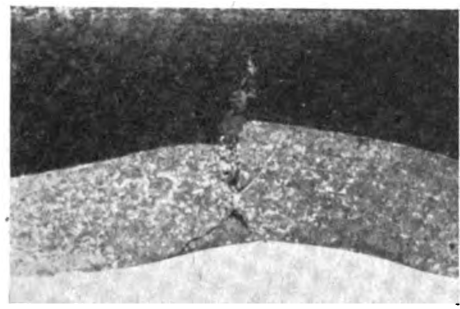


Bild 10. Kleiner Anriß über einer seitlichen Auflagerrolle bei einem vollgepreßten Träger aus Magnewin 3501.

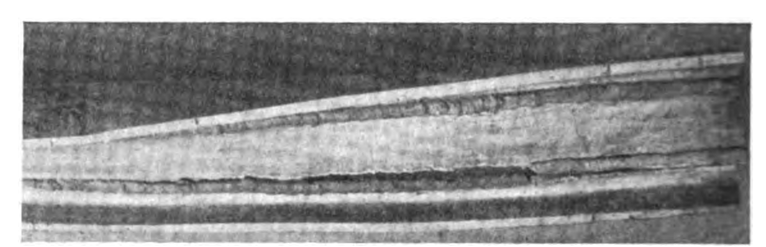


Bild 13. Riß längs der Schweißnaht eines Trägers aus BSS, ausgehend vom Trägerende.

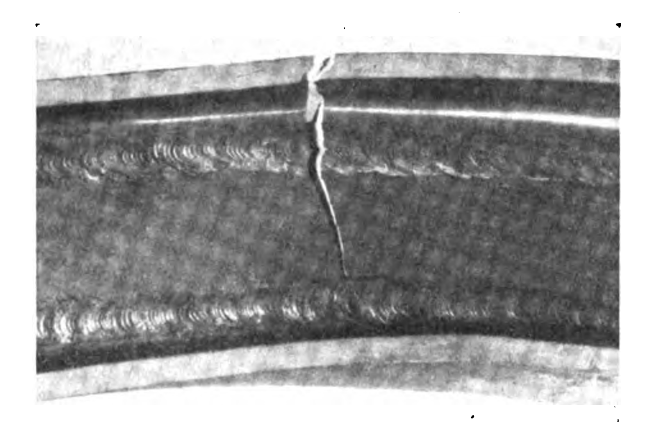


Bild 11. Ansicht von der Seite.

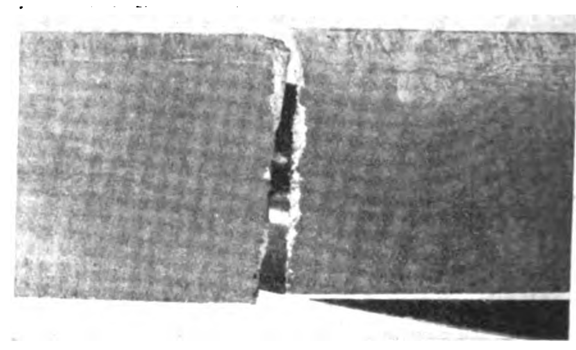


Bild 12. Ansicht von unten.

Bild 11 und 12. Anriß (Bruch des Zugflansches) eines steggeschweißten Trägers aus Magnewin 3501.

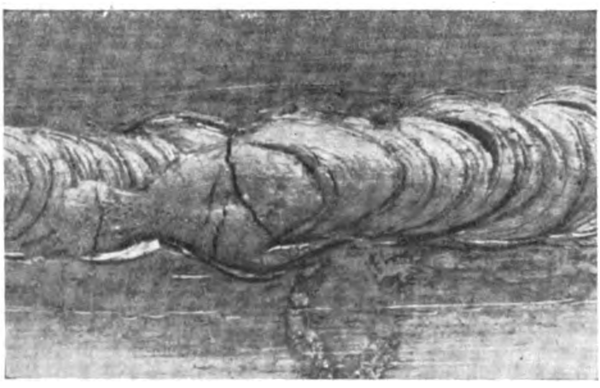


Bild 14. Risse in der Schweißnaht bei einem Pantalträger.

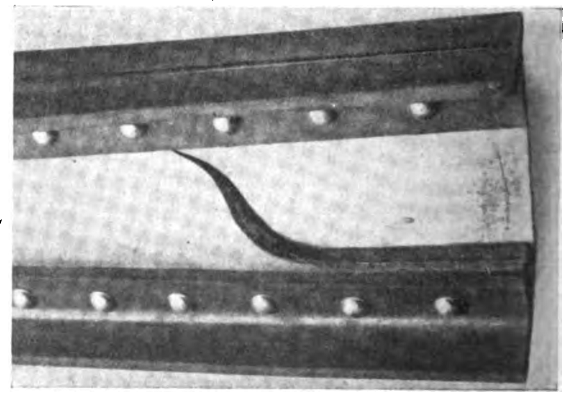


Bild 15. Riß im Stegblech eines genieteten Trägers aus Magnewin 3510 über einem seitlichen Auflager, ausgehend vom Trägerende.



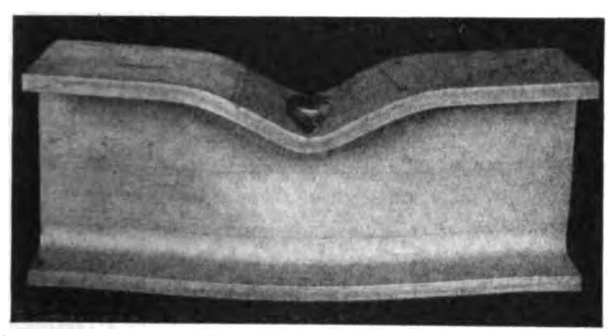


Bild 16 a. Zerstörung eines Trägers bei kurzer Stützweite von 31 cm bei Biegenennspannungen $\sigma_P \approx \sigma_{0,2} \approx 15$ kg/mm² und $\sigma_{max} = 20{,}5$ kg/mm² durch Einbeulen des Druckflansches und Ausknicken des Trägersteges (Pantal vollgepreßt).

mung zum Vorschein, die an einzelnen Stellen besonders augenfällig wurden, Bild 14, aber am Übergang zum Grundmaterial aufhörten und so anscheinend ohne jeden Einfluß auf die Belastbarkeit und Verformbarkeit des genannten Trägers blieben.

Bei den genieteten Trägern traten während bzw. nach dem Erreichen der Höchstlast vorwiegend unter dem Einfluß von Zugspannungen Zerstörungen an einigen Nieten in Nähe der Auflager auf. Bei dem genieteten Träger aus Magnewin 3510 erfolgte nach starker Verformung ein Biegebruch über einem seitlichen Auflager im Stegblech, Bild 15.

Bei allen übrigen nicht erwähnten Trägern traten keine Anrisse auf, obwohl als Folge der Knickvorgänge örtliche Dehnungen gemessen wurden, die 6% überschritten, wie in den beiden nachfolgenden Abschnitten näher beschrieben wird.

5. Art der Knickvorgänge.

Während bei Vorversuchen mit kürzeren Trägerlängen die Zerstörung durch ein Einbeulen des Druckflansches nach unten und ein Ausweichen des Stegbleches unter dem mittigen Lastangriff eingetreten war, Bild 16, 17[3]), erfolgte das Ausknicken bei dem vorgegebenen Verhältnis von Trägerhöhe zu Biegestützweite von $\gtrapprox$ 1 : 10 in keinem Falle zuerst durch diesen Vorgang. Die Zerstörung trat vielmehr sowohl bei den Belastungen mittels Rolle als auch bei den Belastungen mittels Flachstempel mit verbreiteter Auflage durch ein seitliches Ausknicken des druckbeanspruchten Oberflansches auf. Dieses Ausknicken, das entweder mit einer, zwei oder auch drei Ausbeulungen (V-, S- oder W-förmig, Bild 18, 19, 20) erfolgte, war in wiederholten Fällen gleichzeitig mit einem Kippen des Mittelquerschnittes vereint. Bei Belastung durch eine Rolle trat während der Höchstlast oder

[3]) Für die Ausführung von Vorversuchen und Dehnungsmessungen danken die Verfasser an dieser Stelle Frau Dipl.-Ing. S. Lange-Zehnder und Dipl.-Ing. E. Körber.

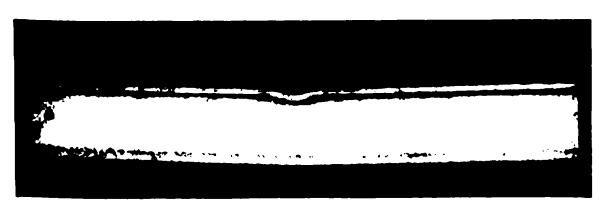


Bild 17 a.

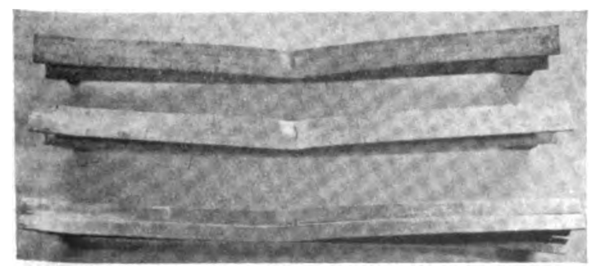


Bild 18. V-förmiges Ausknicken des Druckflansches (Pantalträger mittels Rolle belastet).

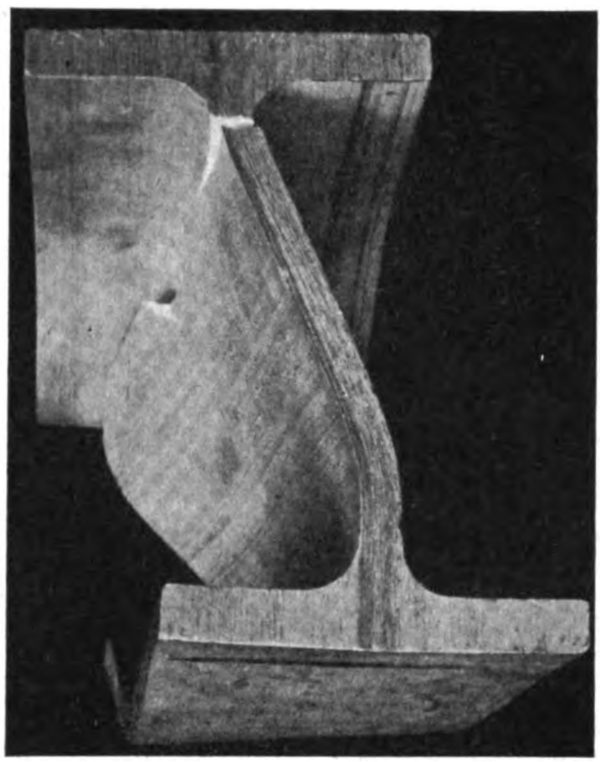


Bild 16 b. Seitliches Ausweichen des gesamten Druckflansches mit der Lastangriffsstelle gegenüber dem Zugflansch mit dem unteren Auflager, derart daß die Beanspruchung im Querschnitt des Trägersteges der eines beiderseitig an den Enden in der Richtung festgelegten Stabes auf Knickung ähnelt (der gleiche Träger wie Bild 16 a).

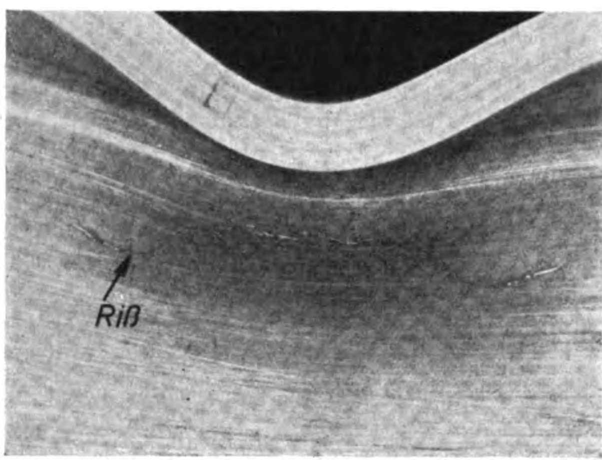


Bild 17 b.

Bild 17 a und 17 b. Zerstörung eines Bondurträgers 17/39 v bei verringerter Stützweite $l = 100$ cm bei Biegenennspannungen $\sigma_P \approx \sigma_{0,2} \approx 31$ kg/mm² und $\sigma_{max} = 44{,}4$ kg/mm² durch Einbeulen des Druckflansches und Steges und anschließend durch seitliches V-förmiges Ausweichen des Druckflansches.



Bild 19. S-förmiges Ausknicken des Druckflansches (Magnewinträger 3512 mittels Rolle belastet).

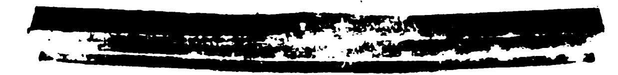


Bild 20. V-förmiges Ausknicken mit Anzeichen des vorhergehenden W-förmigen Ausknickens des Druckflansches. Das Überspringen von einer in die andere Knickform verursachte die Risse im Druckflansch und damit die Zerstörung dieses aus Magnewin 3510 vollgepreßten mittels Flachstempel belasteten Trägers.



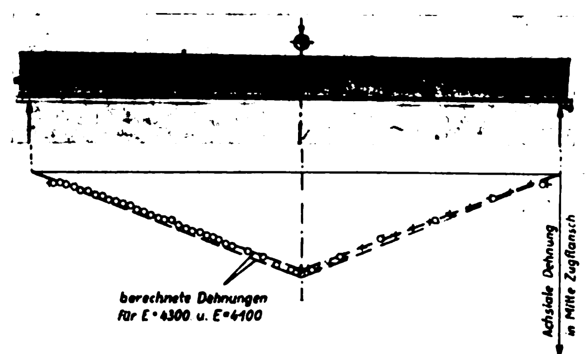


Bild 21. Bei der Belastung eines vollgepreßten Trägers aus Magnewin 3512 mittels Rolle im elastischen Bereich nach dem Dehnlinienverfahren von Maybach [14] im Steg ermittelte Hauptspannungslinien und in der Mitte des Zugflansches errechnete sowie mit Tensometern gemessene Dehnungen.

danach noch zusätzlich ein schwaches Ausbeulen des Steges und ein Eindrücken des Oberflansches unter dem Einfluß der Kraftangriffsstelle bei den meisten Trägern aus Al-Legierungen auf. Bei der Belastung durch den Flachstempel wurde dieses Eindrücken dagegen fast gänzlich vermieden.

Weitere Knickvorgänge wie beispielsweise das Einbeulen der Außenkanten des Zugflansches (Zurückbleiben der Außenkanten gegenüber der Mitte), das seitliche Ausbeulen des Zugflansches, das Einbeulen der Außenkanten des Druckflansches unter der Kraftangriffsstelle hatten in einigen Fällen zusätzliche geringe Einflüsse auf die Verformungskurven. Das Ausknicken erfolgte zumeist erst nach dem Auftreten plastischer Biegeverformungen. Das ist ein Zeichen dafür, daß der Anteil der reinen Biegespannungen gegenüber den Knickspannungen im Bereich der unteren Biegegrenzen vorherrschend war.

6. Elastische und plastische Dehnungen.

Die elastischen Dehnungen des Werkstoffes wurden am Unterflansch in der Mittelebene eines Trägers gemessen. Sie entsprachen der theoretischen Spannungsverteilung, d. h. der Nennspannung an dieser Stelle, Bild 21. Der Unterschied in der Höhe der Spannung in der Flanschmitte gegenüber der Flanschkante war im elastischen Bereich sehr gering. Bei den vollgepreßten Trägern war er nicht größer als der Streubereich einer Meßreihe, Bild 22. Es heißt dies, daß die Steifigkeit des Flansches bei den vollgepreßten Profilen ausreichend bemessen wurde.

Die plastischen Werkstoffdehnungen als Folge der Knickverformungen sind für den Zug- und Druckflansch

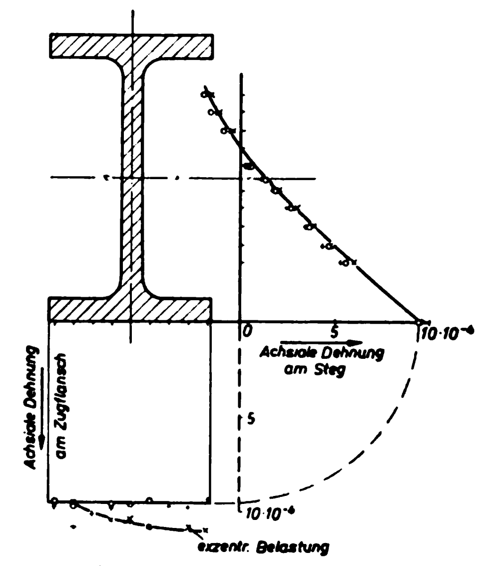


Bild 22. Bei der Belastung eines vollgepreßten Trägers aus Magnewin 3512 im elastischen Bereich gemessene axiale Dehnungen des Mittelquerschnittes, der unter dem Lastangriff einer Rolle stand.

eines S-förmig ausgeknickten Trägers in Bild 23, 24 wiedergegeben.

Nach diesen Untersuchungen traten die größten Zugspannungen im elastischen Bereich bei niedrigen Lasten in der Mitte des zugbeanspruchten Flansches auf. Die größten Gesamtdehnungen wurden dagegen an den Kanten dieses Flansches gemessen. Sie setzen sich aus zugbedingten Dehnungen infolge der Längung des Flansches und aus biegebedingten Dehnungen infolge der seitlichen Ausbiegung des Flansches zusammen. Die zugbedingten Dehnungen wurden bei den Trägern aus Magnewinlegierungen in der Mitte des Zugflansches zu 2,5 bis 4% gemessen, die biegebedingten Dehnungen betrugen bis zu etwa 2,5%, so daß die bleibenden Gesamtdehnungen Beträge bis zu etwa 6% erreichten. Unvoraussehbar traten größere örtlich begrenzte Dehnungen bei einigen Trägern durch die Krafteinleitung auf und verursachten teilweise die bereits erwähnten Anrißbildungen.

Die Biegeverformungen des Druckflansches waren erheblich größer als am Zugflansch. Die Dehnungen an seinen Kanten erreichten zwar die Dehnwerte am Zugflansch nicht ganz, dafür waren die hinsichtlich einer Bruchgefahr unschädlicheren Stauchungen am Druckflansch zahlenmäßig

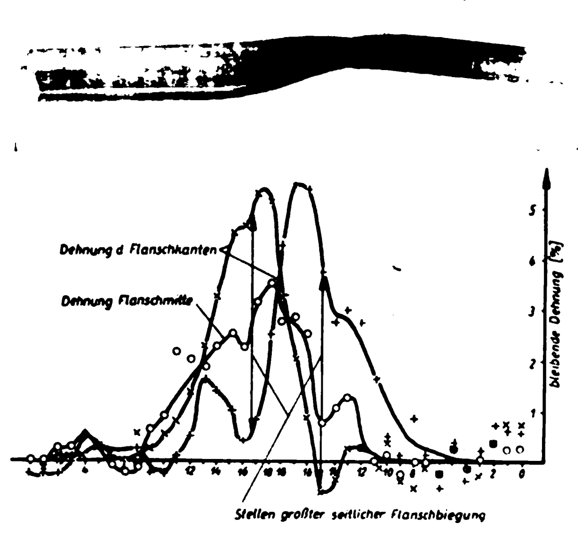


Bild 23. Bleibende Dehnungen am Zugflansch eines mittels Flachstempel belasteten und durch S-förmiges Ausknicken zerstörten vollgepreßten Trägers aus Magnewin 3512.

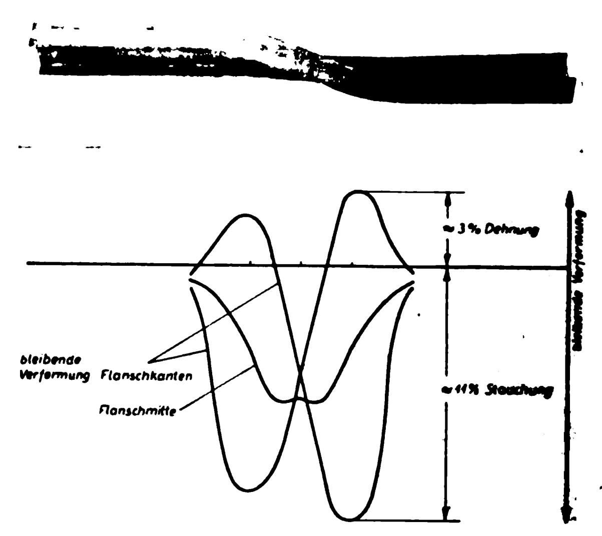
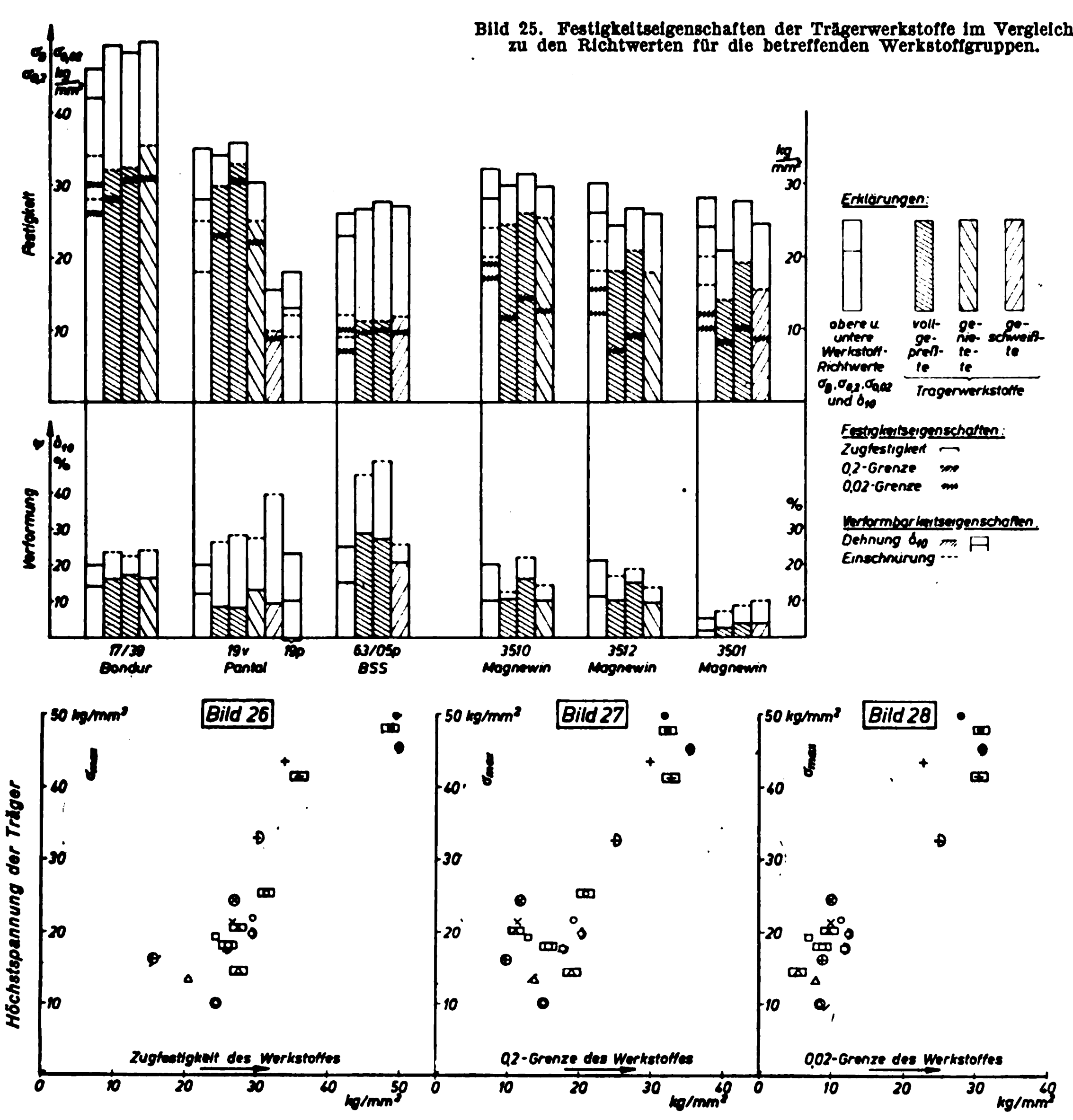


Bild 24. Bleibende Dehnungen und Stauchungen am Druckflansch des gleichen Trägers (schematisch).



Bild 25. Festigkeitseigenschaften der Trägerwerkstoffe im Vergleich zu den Richtwerten für die betreffenden Werkstoffgruppen.



Erklärung:	mittels Rolle belastet			mittels Flachstempel
	vollgepreßt	genietet	geschweißt	vollgepreßt
Kennzeichen des Zustandes		D	O	▭
Bondur	•	◆		⊟
Pantal	+	D	⊕	⊟
BSS	×		⊗	⊟
3510	∘	◆		⊟
3512	▫	◆		⊟
3501	▵		⊗	⊟

Bild 26 bis 28. Zusammenhänge zwischen den Höchstnennspannungen der Träger im Biegeversuch σ_{max} und den Festigkeitseigenschaften des Werkstoffes.

Bei den genieteten Trägern wurde die Spannung unter Berücksichtigung der Querschnittsschwächung durch die Nietlöcher berechnet.

wesentlich höher und überschritten den Betrag von 10% teilweise beträchtlich.

7. Güte der Trägerwerkstoffe.

Das Ertragen der in den Versuchen übersteigert starken Verformungen ist ein Beweis dafür, daß die Verformbarkeit des Werkstoffes der großen I-Träger den an Profilwerkstoffe üblicherweise zu stellenden Anforderungen entspricht. Abgesehen von den angeführten Herstellungsmängeln bei geschweißten Trägern, die die erwähnten Rißbildungen verursachten, lagen Werkstoffehler nicht vor.

Um festzustellen, ob die Werkstoffgüte in den vorliegenden großen Profilen den für die betreffenden Werkstoffe zu erwartenden und in den Handbüchern für kleine Querschnitte aufgeführten Richtwerten entsprachen, wurden die Festigkeitswerte, die an den Trägern entnommenen Proben ermittelt waren, Zahlentafel 1, mit den Richtwerten verglichen, Bild 25. Es zeigte sich, daß die Trägerwerkstoffe gleichmäßig waren und den für kleine Querschnitte angegebenen Güten nicht nachstanden. Zu beachten sind hierbei aber die stark bis auf den nur preßharten Zustand verringerte Werkstoffestigkeit des geschweißten Pantalträgers, die eine erneute Bestätigung der Unzweckmäßigkeit des Schweißens von vergüteten Aluminiumlegierungen liefert, und die gegenüber den Sollwerten niedrigen Elastizitätsgrenzen (0,02-Grenzen) bei den Magnesiumlegierungen.

Die Abweichungen in der Elastizitätsgrenze erscheinen deswegen beachtlich, weil zwischen der Elastizitätsgrenze und der Biege(knick)festigkeit besondere Zusammenhänge zu bestehen scheinen, wie im folgenden Abschnitt angeführt wird.

8. Zusammenhänge zwischen den Höchstspannungen im Biegeversuch und den Werkstoffeigenschaften.

Die Zusammenhänge der gemessenen Höchstnennspannungen mit den zugehörigen Werkstoffestigkeiten sind in Bild 26 bis 28 graphisch zusammengestellt. Es ist eine gewisse Abhängigkeit festzustellen. Proportionalität scheint am ehesten zwischen der Elastizitätsgrenze und der Höchstspannung im Biegeversuch zu bestehen. Die Höhe der

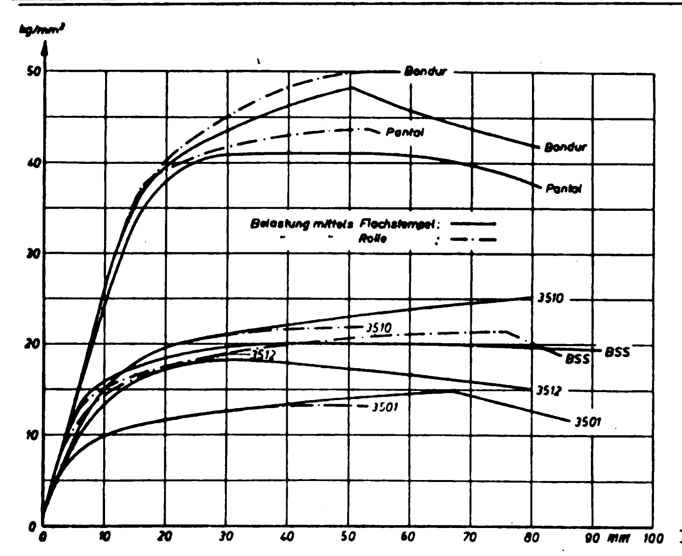


Bild 29. Nennspannungs-Durchbiegungskurven von vollgepreßten Trägern.

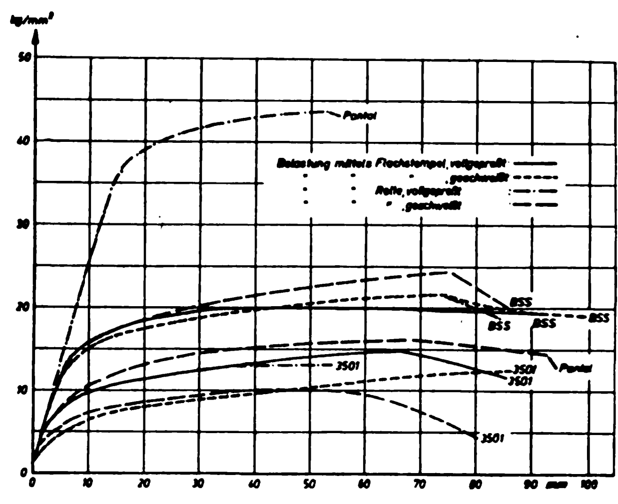


Bild 30. Nennspannungs-Durchbiegungskurven von geschweißten und vollgepreßten Trägern aus jeweils den gleichen Werkstoffen.

Elastizitätsgrenze scheint demnach von großer Wichtigkeit bei auf Biegung beanspruchten knickgefährdeten Trägern zu sein. Die Zahl der Einzelversuche ist aber nicht so groß, daß mit Sicherheit angegeben werden kann, ob der Zusammenhang zwischen E-Grenze und Höchstspannung allgemein gültig ist oder nur zufällig im vorliegenden Beanspruchungsfall gilt. Einen Vergleich der 0,25 mm-Biegegrenzen, die etwa als zulässige Betriebsbelastungen anzusehen wären, mit den 0,2-Grenzen der Werkstoffe gibt Bild 35. Auch hier scheint bemerkenswert, daß die Biegegrenzen bei den Magnesiumlegierungen niedriger liegen als die 0,2-Grenzen.

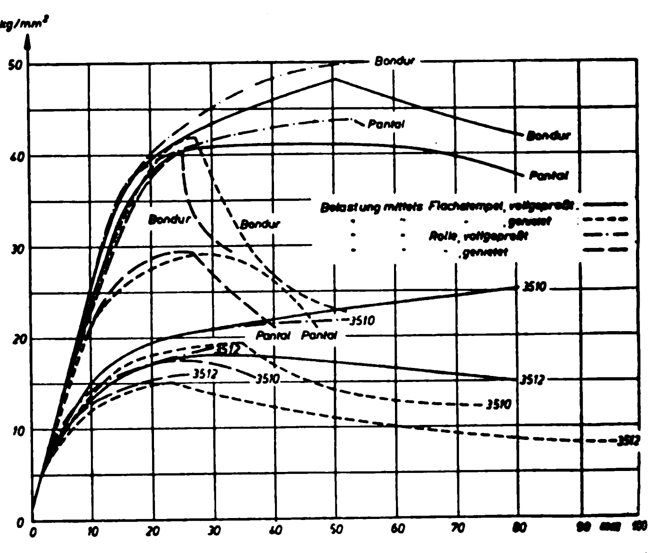


Bild 31. Nennspannungs-Durchbiegungskurven von genieteten und vollgepreßten Trägern aus jeweils den gleichen Werkstoffen.

9. Vergleich der Belastungsfähigkeit der verschiedenen Träger bei verschiedener Krafteinleitung durch Rolle oder Flachstempel.

Überraschenderweise ergaben die Belastungen mit dem Flachstempel nach der Rechnungsweise Abschnitt 3 nur etwa bei der Hälfte der Versuche, und zwar vorwiegend bei den Mg-Legierungen eine Erhöhung der größten ertragenen Nennspannung der Träger, dagegen in den meisten Fällen eine Erhöhung der verschiedenen Biegegrenzen, Zahlentafel 2, Bild 32, 34. Einzelne Knickvorgänge wie beispielsweise das Eindrücken des Oberflansches traten in starkem Maße überhaupt nicht auf. Da diese Knickvorgänge aber auch bei der Belastung mit der Biegerolle keinen maßgeblichen, sondern höchstens einen zusätzlichen Einfluß auf den Zerstörungsvorgang ausübten, kann wohl gefolgert werden, daß die Unterschiede in der Krafteinleitung sich nur bei kürzeren Trägern auf die Höchstnennspannung stärker auswirken werden. Hinsichtlich der Tragfähigkeit, d. h. hinsichtlich der auf die gleiche Stützweite bezogenen Höchstlast ergab sich wohl eine Überlegenheit der Belastung mit dem Flachstempel, da durch diese Belastung die wirksame Momentenlänge verkürzt wird, Bild 34. Für praktische Verhältnisse, bei denen im allgemeinen kein starrer Stempel, sondern eine zwar starke aber doch verformbare Platte verwendet wird, ist demnach doch stets mit einem gewissen Vorteil bei der Verwendung einer verbreiterten Auflage zu rechnen. Dies scheint besonders für die Magnesiumlegierungen zu gelten und kann vielleicht als Folge der hier zu erwartenden niedrigen Quetschgrenze erklärt werden [15].

Die Durchbiegungen bei der Höchstlast waren bei der Verwendung des Flachstempels meist größer. Das bedeutet, daß eine Belastung mittels Flachstempel trotz des verringerten Momentenhebelarmes sich auch auf die Aufnahme von Zwangsverformungen und gemäß Bild 29 bis 31 auf die mögliche Arbeitsaufnahme (von den Durchbiegungskurven umschriebene Fläche) hinsichtlich der aufnehmbaren Lasten günstig auswirkt.

Wie die Versuche bestätigten, wirkt sie aber hinsichtlich der Werkstoffanstrengung und damit hinsichtlich der Gefahr einer Anrißbildung bei gleich großer Durchbiegung andererseits wiederum ungünstig. So empfiehlt sich bei einer Gefährdung durch Überlastung infolge von Zwangsverformungen besonders auf die Verwendung ausreichend verformungsfähiger Werkstoffe zu achten.

10. Vergleich der verschieden hergestellten Träger.

Der Vergleich der vollgepreßten, geschweißten und genieteten Träger läßt eindeutig eine Überlegenheit der vollgepreßten Träger erkennen; demnach wäre, soweit dies fertigungstechnisch möglich ist, unbedingt eine Anwendung von vollgepreßten Trägern in der Praxis anzustreben. Das Vollpressen wird für die untersuchten Größenabmessungen, wie die Versuche zeigen, vollkommen beherrscht.

In Fällen, in denen vollgepreßte Träger nicht verwendet werden können, sollten für höchstbeanspruchte Konstruktionen stets genietete Träger gewählt werden. Die Versuche zeigen nämlich, daß die genieteten Träger, die aus hochwertigen Legierungen hergestellt werden können, eine höhere Tragfähigkeit besitzen als die geschweißten. Als Nachteil der genieteten Träger ist aber ihre geringe Verformbarkeit bei starken Überlastungen anzusehen, Bild 31, die sich in einigen Fällen beispielsweise im Flugzeug- oder Fahrzeugbau unangenehm auswirken könnte. Die genieteten Träger erreichten auch bei Berücksichtigung der Querschnittsschwächung durch die Nietlöcher noch nicht ganz die Festigkeit der vollgepreßten Träger, Bild 33, obwohl die Werkstoffeigenschaften der kleineren Einzelprofile meist besser waren. Die



Zahlentafel 2. Ergebnisse der Trägerbiegeversuche.

Belastungsart	Bondur 17/39 v				Pantal 19 v					BSS 63/05 p				Magnewin 3510				Magnewin 3512				Magnewin 3501			
	vollgepreßt		genietet[2])		vollgepreßt		genietet		geschweißt	vollgepreßt		geschweißt		vollgepreßt		genietet		vollgepreßt		genietet		vollgepreßt		genietet	
	Rolle	Fl.-St.[1])	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.	Rolle	Fl.-St.
Knickform des Druckflansches	V und Beginn S	S	V	V	V	S	V	S	V	S	S	S	S	S	W dann V	S	W dann S	S	S	S	S	S	W dann S	S	S
Deutliches Ausknicken d. Steges	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein	Spur	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
Kippen des Mittelquerschnittes	ja	schwach	schw.	nein	ja	nein	schw.	schw.	ja	nein	nein	schw.	ja	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	schw.	nein	nein
Bruchbildungen			nach Höchstlast Niete zerstört				n. Höchstlast Niete zerstört		kl. Risse i. Schw.-naht				Längsriß in Schw.-naht		Zerstörg. dch. Änderg. d. Knickform		Steganriß am Auflager			n. Höchstlast Niete gerissen			kl. Anriß am Auflager		Zugflansch eingerissen
Trägheitsmoment J [cm⁴]	1238,3	1214	1175,6 [1048,2]	1140 [1022]	1175,0	1208	1158,6 [1035]	1180 [1060]	1169,1	1235,2	1222	1151,8	1130	1201,4	1204	1194,7 [1061,5]	1196 [1071]	1204,8	1212	1166,0 [1039]	1193 [1067]	1212,9	1174	1092,9	1069
Widerstandsmoment W [cm³]	163,7	161,7	156,0 [139,0]	151,6 [136,0]	157,5	161,1	153,2 [137,0]	156,0 [140,1]	158,5	162,9	161,8	155,9	154,7	158,7	159,4	159,1 [141,4]	159,1 [142,5]	160,9	160,2	155,5 [138,6]	158,6 [141,8]	161,2	157,5	151,0	149,2
Nennspannungen[3])																									
Elastizitätsgrenze σ_E [kg/mm²]	15,3	21,3	11,1 [12,5]	19,3 [21,5]	14,7	13,9	8,8 [9,8]	7,3 [8,1]	4,9	9,5	11,7	6,2	12,3	5,8	9,7	5,1 [5,7]	7,6 [8,5]	4,8	8,6	3,7 [4,2]	6,5 [7,3]	2,9	6,4	2,3	3,7
1,25 mm-Biegegrenze $\sigma_{1,25} \approx \sigma_{0,2}$ [kg/mm²]	34,3	35,4	27,6 [31,0]	32,6 [36,3]	34,7	33,4	21,4 [23,9]	20,1 [22,4]	9,2	13,3	14,3	12,9	14,7	14,1	15,4	12,1 [13,6]	14,3 [16,0]	12,5	12,9	10,6 [11,9]	11,2 [12,5]	6,9	8,9	4,8	5,3
Grenze verstärkt Fließen σ_F [kg/mm²]	38,8	40,5	37,0 [41,5]	38,7 [43,1]	37,9	39,6	26,4 [29,5]	24,3 [27,1]	9,5	13,0	13,9	13,6	13,4	15,8	16,2	14,0 [15,8]	15,2 [16,9]	13,2	14,0	12,4 [13,9]	12,0 [13,4]	8,4	9,4	7,7	5,2
Untere Knickgrenze σ_{Kn_u} [kg/mm²]	33,0	37,3	29,7 [33,3]	28,4 [31,7]	37,9	30,0	22,6 [25,3]	23,2 [25,9]	9,7	15,4	19,2	13,6	13,4	14,5	15,1	12,1 [13,6]	13,0 [14,5]	10,8	15,1	12,4 [13,9]	13,0 [14,6]	7,2	8,8	6,4	6,9
Obere Knickgrenze σ_{Kn_o} [kg/mm²]	44,8	46,9	37,1 [41,6]	36,4 [40,6]	39,1	38,9	25,1 [28,1]	27,6 [30,8]	12,1	17,8	19,8	18,5	17,8	18,2	20,6	14,5 [16,3]	17,3 [19,4]	12,0	17,2	13,6 [15,3]	15,2 [17,0]	8,4	13,1	7,7	9,2
Höchstspannung σ_{max} [kg/mm²]	49,9	48,0	40,4 [45,3]	41,9 [46,7]	43,5	41,3	29,2 [32,6]	28,8 [32,0]	16,0	21,3	20,3	24,2	21,6	21,8	25,3	17,5 [19,7]	19,3 [21,5]	19,2	18,0	15,9 [17,8]	15,2 [17,0]	13,3	14,1	10,0	12,4
Tragfähigkeiten $\sigma = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W}$ (entsprechen der Nennspannungen bei Belastung mittels Rolle)																									
bei Elastizitätsgrz. σ_E [kg/mm²]		23,2		20,8		15,1		7,9			12,7		13,4		10,5		8,3		9,4		7,1		7,0		4,0
bei 1,25 mm Biegegrenze $\sigma_{1,25} \approx \sigma_{0,2}$ [kg/mm²]		38,5		35,4		36,3		21,9			15,6		16,0		16,7		15,6		14,0		12,2		9,7		5,8
bei Höchstlast σ_{max} [kg/mm²]		52,1		45,5		44,9		31,3			22,0		23,4		27,5		21,0		19,6		16,6		15,5		13,5
Durchbieg. in Mitte Zugflansch bei Höchstlast f [mm]	56,9	50,9	25,9	28,2	53,8	57,2	27,6	35,4	69,6	77,2	36,3	68,0	76,3	52,0	81,2	27,8	35,5	30,6	33,7	26,9	23,8	53,1	49,1	43,1	87,8
Elastizitätsmodul im Biegeversuch E[4]) [kg/mm²]	6700	6700	6100 [6800]	6100 [6800]	6800	6500	6300 [7000]	6000 [6700]	6800	6100	6300	6600	6300	4400	4100	3900 [4400]	3900 [4400]	4500	4100	4200 [4700]	3900 [4300]	4500	3900	4100	3600

[1]) Fl.-St. = Flachstempel. [2]) Die Werte in eckigen Klammern sind unter Berücksichtigung der Flächenverminderung der Profilquerschnitte durch die Nietlöcher berechnet. [3]) Bei Belastung mittels Rolle $\sigma = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W}$, bei Belastung mittels Flachstempel $\sigma = \frac{P\,(l-b)}{4 \cdot W}$. [4]) Berechnet nach den Hütteformeln unter Zugrundelegung des für die Nennspannungsrechnung berücksichtigten Belastungsfalles.

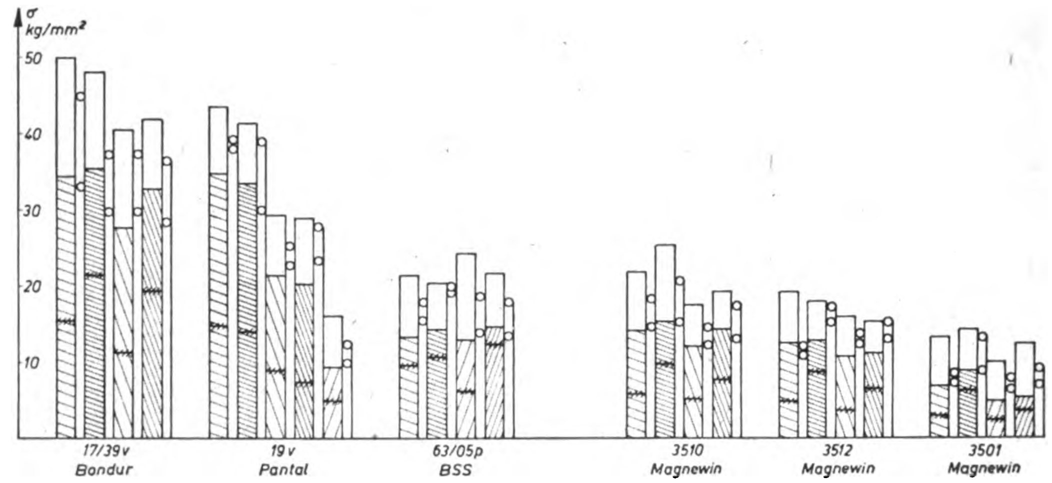
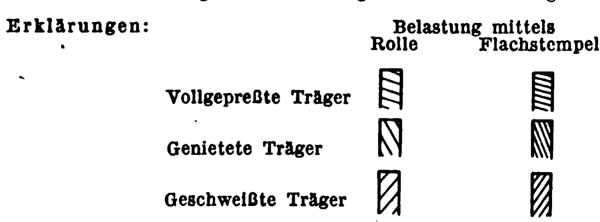


Bild 32. Ergebnisse der Biegeversuche an den großen I-Trägern. (Zusammenstellung der ertragenen Nennspannungen.)



Versuchsträger waren sehr sauber winkelig, dementsprechend wurden die Knickgrenzen gegenüber den vollgepreßten Trägern nur wenig erniedrigt. Ihre im Verhältnis zu den vollgepreßten Profilen niedrigere Tragfähigkeit ist dadurch zu erklären, daß die Nietung die einzelnen Teilprofile eben doch nur unvollkommen verbindet. Dies machte sich in den Versuchen auch bereits bei niedrigen Lasten durch ein hörbares Knacken bemerkbar, das auf einem Gleiten der zusammengenieteten Flächen beruhte, so daß bereits frühzeitig bleibende Durchbiegungen und Abweichungen von den Durchbiegungskurven vollgepreßter Träger auftraten. Eine Erhöhung der Tragfähigkeit ließe sich vielleicht mit einer festeren Verbindung durch ein Aufreiben der Nietlöcher, ein Versetzen gegeneinander und durch die Anordnung einer etwas vergrößerten Anzahl von Nieten erreichen. Die Verbesserung wäre allerdings nur sehr gering, denn die Absolutwerte der erreichten Knickfestigkeit liegen bei den genieteten Trägern ebenfalls sehr hoch und über der Fließgrenze der betreffenden Werkstoffe.

Die geschweißten Träger aus Al-Legierungen zeigten eine besonders gute Verformbarkeit. Ihre Knickgrenze und ihre Tragfähigkeit sind dadurch begrenzt, daß hochfeste aushärtbare Legierungen sich weniger zum Schweißen eignen, da sie durch eine Schweißbehandlung an Festigkeit verlieren, so daß nur Legierungen mittlerer Festigkeit zur Verfügung stehen. Die Versuche mit dem geschweißten Pantalträger bestätigen diese an sich für vergütete Al-Legierungen allgemein bekannte Tatsache auch für den hier untersuchten Verwendungszweck. Obwohl die Schweißnähte in günstiger Anordnung nicht an Stellen hoher Beanspruchung lagen, wurden die Biegeknickfestigkeit und die Biegegrenzen des Trägers durch das Schweißen gegenüber dem genieteten und vollgepreßten Zustand ähnlich wie die Werkstofffestigkeitswerte, Abschnitt 8, Zahlentafel 1, so weit erniedrigt, daß das vergütete Pantal nur noch einer Leichtmetalllegierung im unvergüteten Preßzustand entspricht. Allgemein sind als Nachteile des Schweißens starke Verwerfungen und mögliche Schweißrisse und Bindefehler anzusehen, die teilweise auch bei den untersuchten Trägern auftraten und die Belastbarkeit erniedrigten. Wenn auch derartige Herstellungsschwächen bei sehr sorgfältiger Herstellung und in der fabrikmäßigen Großserie mit Sicherheit zu vermeiden sein werden, so scheint es doch nötig auf sie hinzuweisen,

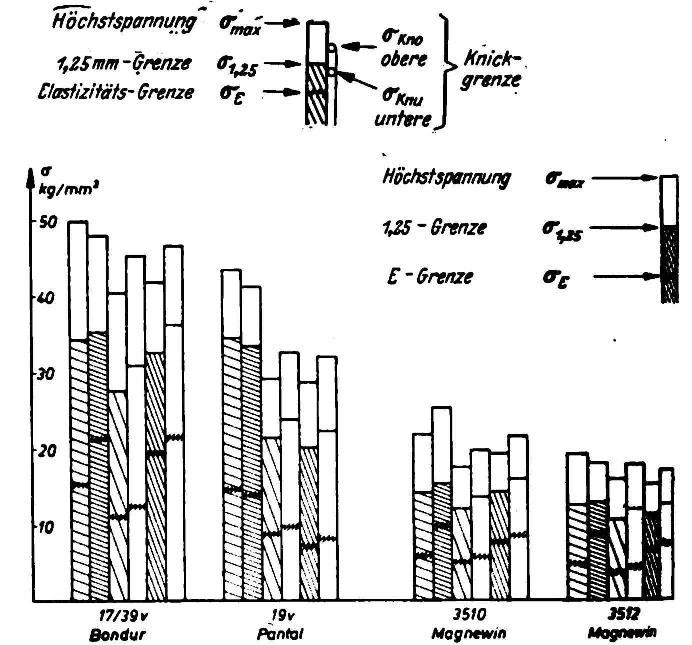
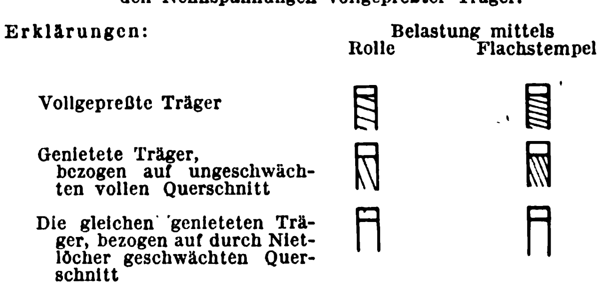


Bild 33. An den Biegegrenzen ertragene Nennspannungen genieteter Träger σ_{max}, $\sigma_{1,25}$, σ_E bei Vernachlässigung und bei Berücksichtigung der Querschnittsschwächung durch die Nietlöcher im Vergleich zu den Nennspannungen vollgepreßter Träger.



da sie besonders bei montagemäßigen Arbeiten an geschweißten Großkonstruktionen schwer auszuschließen sein dürften.

11. Vergleich der untersuchten Legierungen.

Ein Vergleich der untersuchten Legierungen untereinander zeigt, daß die in der Praxis für hochfeste Bauteile des Flugzeugbaues am meisten verwendeten Legierungen der Gruppe Al-Cu-Mg und Al-Mg-Si auch die besten Belastbarkeitswerte ergeben, Bild 32. Die Magnewinlegierungen erreichen diese hohen Werte nicht. Bei Berücksichtigung des geringen Gewichtes der Magnesiumlegierungen kann aber unter Umständen die Verwendung von Trägern auf

Magnewin 3510 bei den vorliegenden statischen Biegebeanspruchungen festigkeits- und gewichtsmäßig doch ebenso vorteilhaft sein wie die von Bondur. Es ist aber zu berücksichtigen, daß die Verformbarkeit geringer ist. Zur Erläuterung dieser Feststellung sind in Bild 36 verschiedene unter Zugrundelegung der 1,25-mm-Biegegrenze und Biegeknickfestigkeit (Tragfähigkeit) der Versuche rechnerisch ermittelte Gütevergleichszahlen aufgetragen: Die Gütezahl σ/γ wird in der Flugzeugindustrie häufiger angewendet und gibt ein Maß für das Verhältnis von Tragfähigkeit zu Gewicht bei gleichen Abmessungen. Die Gütezahl $\sigma/\gamma^{3/2}$ liefert einen Vergleich der Tragfähigkeit der Träger bei gleichem Gewicht unter der angenähert zutreffenden Annahme, daß die Biegehöchstspannung auch bei verschiedenen Querschnittsgrößen bei dem gleichen Werkstoff unverändert bleibt. Die Gütezahl $\gamma/\sigma^{2/3}$ entspricht unter der gleichen Annahme den für gleiche Tragfähigkeit aufzuwendenden Gewichten.

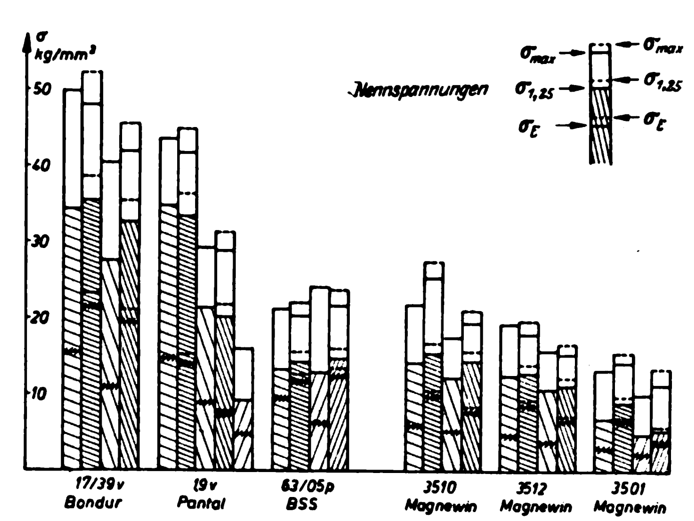


Bild 34. Vergleich der an den Biegegrenzen ertragenen Nennspannungen $\sigma = \frac{P \cdot (l-b)}{4\,W}$ und Tragfähigkeiten $\sigma = \frac{P \cdot l}{4\,W}$ von mittels Flachstempel belasteten Trägern mit den Nennspannungen (= Tragfähigkeiten $\sigma = \frac{P \cdot l}{4\,W}$) von mittels Rolle belasteten Trägern.

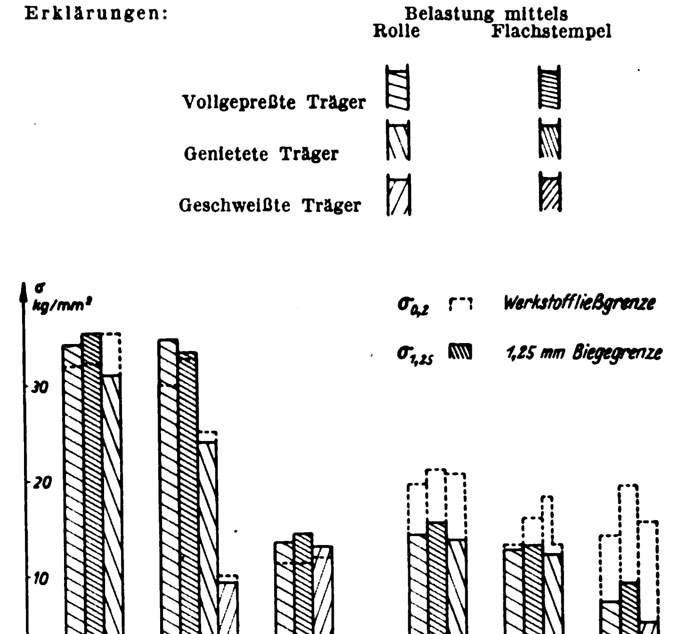
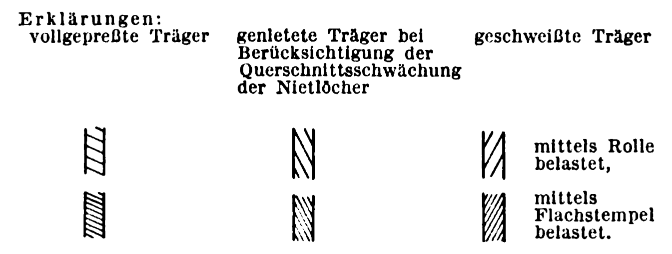


Bild 35. Vergleich der 0,2-Grenzen der Werkstoffe bei den Aluminium- und Magnesiumlegierungen mit den 1,25-mm-Biegegrenzen, die als Maß für eine zulässige Betriebsbelastung der Träger unter ruhender Last angesehen werden können.



12. Vergleich der untersuchten Leichtmetallegierungen mit Stahl und anderen Baustoffen für den Leichtbau.

In Bild 36 sind unter Zugrundelegung der Ergebnisse der eingangs (Abschnitt 1) erwähnten Biegeversuche an Stahlträgern auch Vergleichswerte eingezeichnet, wie sie für einen Baustahl mittlerer Festigkeit (St. 52) etwa erwartet werden können. Ein Vergleich mit den im Flugzeug- und Fahrzeugbau verwendeten Profilen aus Stahl mit hoher Festigkeit [16] ist mangels von in der Literatur mitgeteilten Versuchsunterlagen nicht möglich, so daß ein Urteil nicht darüber abgegeben werden kann, bis zu welcher Stahlfestigkeit die untersuchten Leichtmetalle dem Stahl in den Gewichtsgütezahlen überlegen sind. Auch kann ein Vergleich der Leichtmetallträger mit Konstruktionen aus anderen Leichtbauwerkstoffen wie Holz, Schichtholz und Kunststoffen aus dem gleichen Grunde nicht gegeben werden. Es ist aber sicher, daß die untersuchten Leichtmetalle den letztgenannten Baustoffen in ihrer plastischen Verformbarkeit weit überlegen sind.

Der Vergleich der Versuchsergebnisse mit den erwähnten Biegeversuchen an Stahlträgern zeigt ein grundsätzlich ähnliches Verhalten der Leichtmetall- und Stahlträger. Die Zerstörungen erfolgten in beiden Fällen durch ähnliche Knickvorgänge. Hierbei scheint es wesentlich darauf hinzuweisen, daß die großen Leichtmetallträger, die in der Praxis noch nicht in dem Maße erprobt sind wie die Stahlträger, ebenfalls erst oberhalb des Bereiches der Werkstofffließgrenze, bei den vollgepreßten Pantalträgern sogar erst oberhalb der Werkstoffestigkeit ihre Höchstspannung im Biege(knick)versuch erreichten. Die Abmessungen der Trägerprofile scheinen demnach zweckentsprechend gewählt. Die Ausbeulungen der Flansche und des Stegbleches traten sogar später auf als dies bei Stahlträgern, die dünnere Querschnitte besitzen, zu erwarten gewesen wäre. Auch die Verformbarkeit aller Arten der untersuchten Leichtmetallträger war im Vergleich zu den Stahlträgern ausreichend groß. Die Träger aus Aluminiumlegierungen scheinen bei vorliegenden Versuchen in ihrer Verformbarkeit überhaupt noch nicht erschöpft.

13. Zusammenfassung.

Es wurden Biegeversuche über die statische Belastbarkeit von großen Leichtmetall-Doppel-T-Trägern durchgeführt, die durch Zerreißversuche an aus den Trägern herausgearbeiteten Proben ergänzt wurden. Die Zerstörung der Träger trat durch Ausknicken ein. Bei einem weitergehenden Belasten entstanden bei Trägern aus Al-Legierungen lediglich Anrisse in den Schweißnähten und Zerstörungen einiger vereinzelter Niete. Bei den Magnesiumlegierungen wurden in einigen Fällen an Stellen starker Verformung auch Anrisse im Grundwerkstoff beobachtet. Die Knickvorgänge wurden gemessen. Unstetigkeiten in der Durchbiegung und im seitlichen Ausknicken wurden als Biegegrenzen und Knickgrenzen angesehen. Bei der Untersuchung von Einflüssen unterschiedlicher Krafteinleitung zeigte sich, daß die Höchstlast durch eine Verbreiterung der Krafteinleitungsstelle bei größeren Längen nur in geringerem Maße erhöht wird. Auf die Biegegrenzen wirkt sich die Verbreiterung der Krafteinleitung günstiger aus.

Die vollgepreßten Träger nehmen besonders große Belastungen auf. In einigen Fällen überschreiten die erreichten Biegenennspannungen die Zugfestigkeit der Werkstoffe.

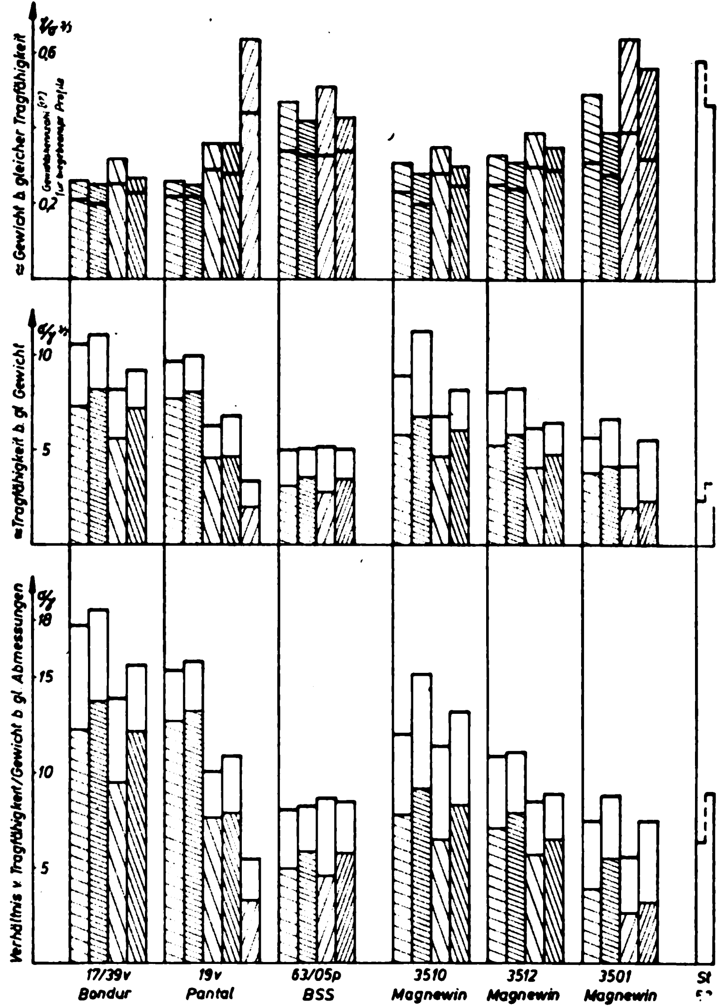


Bild 36. Gütezahlen σ/γ, $\sigma/\gamma^{2/3}$, $\gamma/\sigma^{2/3}$ über die Tragfähigkeit ($\sigma = \frac{P \cdot l_{gesamt}}{4\,W}$) der verschiedenen Legierungen unter Zugrundelegung von Höchstlast und von 1,25 mm bleibender Durchbiegung. γ = spezifisches Gewicht (Gesamtgewicht bezogen auf die tragende Fläche ohne Berücksichtigung von Nietlöchern).

Erklärungen:

	Belastung mittels Rolle	Belastung mittels Flachstempel
Vollgepreßter Träger		
Genietete Träger		
Geschweißte Träger		

Tragfähigkeit bei Höchstlast →

Tragfähigkeit bei der 1,25 mm-Grenze →

Hinsichtlich des niedrigen Wertes ihrer Gewichtskennzahl [17], d. h. ihres Baugewichtes, bezogen auf die Tragfähigkeit können einige der untersuchten Legierungen nur noch durch wenige Baustoffe, wie vielleicht durch Stahl mit besonders hoher Festigkeit übertroffen werden.

Bei genieteten und geschweißten Trägern ist auf Grund der Versuche mit einer geringeren Belastbarkeit gegenüber den vollgepreßten zu rechnen. Bei einer erforderlichen hohen Belastungsfähigkeit ist im allgemeinen den genieteten Trägern aus hochfesten Werkstoffen der Vorzug vor geschweißten Trägern zu geben. Die geschweißten Träger haben aber im Bereich starker Überlastungen eine größere Verformbarkeit als genietete Träger.

Die Versuche liefern einige grundsätzliche Unterlagen über die Wertigkeit der einzelnen Legierungen und Herstellarten, so daß ein Überblick über die Austauschmöglichkeit der verschiedenartigen Konstruktionsmittel erleichtert wird. Sie ergaben, daß die Herstellung der großen Trägerprofile beherrscht werden kann. Die gemessenen Werte in der Belastbarkeit und Verformung waren so gut, daß eine Anwendung von großen Leichtmetallträgern bei Berücksichtigung ihres geringen Gewichtes in der weiteren Zukunft auf vielen Gebieten technisch vorteilhaft erscheinen dürfte, die bisher ausschließlich für zusammengesetzte Konstruktionen, für den Holzbau und für Stahlträger vorbehalten waren. Neben der Verwendung im Flugzeugbau z. B. für Holme u. ä. ist hierbei beispielsweise auch an Anwendungsgebiete im Schiff- und Bootsbau, Großfahrzeugbau aller Art, im Hallen- und Gerüstbau, insbesondere vielleicht für transportable Hallen, Brücken u. ä. gedacht.

14. Schrifttum.

[1] J. Cassens, Der Biegefaktor. Luftwissen Bd. 9 (1942), S. 242/44.

[2] J. Fritsche, Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Der Bauingenieur (1930) S. 851, 873, 888.

[3] S. Timoschenko, Z. Mathematik und Physik (1910) S. 360 u. f.

[4] S. Timoschenko, E. M. Lessels, Festigkeitslehre. Berlin (1928), Springer.

[5] A. Föppl, L. Föppl, Drang und Zwang. München-Berlin (1920), Oldenbourg. Bd. II, S. 347.

[6] Th. Pöschl, Elementare Festigkeitslehre. Berlin (1936) Springer. S. 101.

[7] F. Auerbach, W. Hort, Handbuch der physikal. u. techn. Mechanik. Leipzig (1931), Barth. Bd. IV, S. 123.

[8] H. Geiger, K. Scheel, Handbuch der Physik. Berlin (1928), Springer. Bd. IV, S. 284.

[9] H. Maier-Leibnitz, Versuche mit eingespannten und einfachen Balken von Doppel-T-Form. Bautechnik (1929) S. 313 u. (1938) Heft 1 und 2.

[10] H. Maier-Leibnitz, Versuche zur weiteren Klärung der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender Träger aus Baustahl. Stahlbau (1936) S. 153.

[11] F. Hartmann, Sollen genietete Träger mit Berücksichtigung der Nietschwächung berechnet werden? Stahlbau (1939) S. 25.

[12] K. Schreiner, Biegeversuche der Obersten Bauleitung Dresden mit geschweißten Trägern. Stahlbau (1938) S. 156.

[13] H. Bühler, Belastungs-Dehnungsmessungen an Doppel-T-Trägern mit und ohne Aussteifungen. Stahl und Eisen Bd. 55 (1935) S. 520.

[14] DRP. Nr. 534158 der Maybach Motorenwerke G.m.b.H.

[15] H. Möchel, J. Koch, Knickfestigkeit von Magnesiumlegierungen. Metallwirtschaft Bd. 21 (1942), S. 39.

[16] R. Oettel, Werkstoffauswahl bei hochbeanspruchten Leichtbauteilen. Metallwirtschaft Bd. 21 (1942), S. 195/97.

[17] A. Erker, Werkstoffausnutzung durch festigkeitsgerechtes Konstruieren. Z. VDI Bd. 86 (1942), S. 385/95.

Vergleich einiger Eigenschaften schweißbarer, chromarmer und chromfreier Stähle höherer Festigkeit*).

Von Heinrich Cornelius.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Orientierende Versuche über die Festigkeitseigenschaften, die Durchhärtung und Durchvergütung von Stangen sowie über die Festigkeitseigenschaften und die Schweißbarkeit von 1 mm-Blechen aus Stählen mit rd. 0,3% C, 0,27 bis 0,45% Si, 0,6 bis 1,6% Mn, 0 bis 1,6% Ni, 0 bis 0,75% Cr und 0 bis 0,19% V.

Gliederung.

Über die Festigkeitseigenschaften und die Schweißbarkeit von Stählen höherer Festigkeit, die wie der verbreitete Stahl mit rd. 0,25% C, 1% Cr und 0,2% Mo in Form von Stangen mit 50 mm Dmr. noch auf Zugfestigkeiten über 90 kg/mm² vergütet werden können, ist bereits mehrfach berichtet worden. Untersuchungen an Stählen mit 0,28 bis 0,32% C, 0,55 bis 1,35% Si, 0,7 bis 1,2% Mn, 0 bis 1,1% Cr und 0 bis 0,3% Mo[1]) sowie vor allem an molybdänfreien Stählen mit rd. 0,3% C, 0,6 bis 1,2% Mn, 0,5 bis 1,0% Cr und 0 bis 0,4% V sowie mit 0,3% C, 1,2 bis 1,6% Mn und 0,25 bis 0,55% V[2]) gaben den Anstoß zur eingehenden Erprobung und anschließenden Einführung eines Stahles mit 0,24 bis 0,30% C, bis 0,4% Si, 1,0 bis 1,3% Mn, bis 0,025% P, bis 0,020% S, 0,6 bis 0,9% Cr und 0,1 bis 0,2% V für Bleche, nahtlose Rohre, Stangen und Schmiedestücke[2]). Die Mindestschweißfestigkeit dieses Stahles beträgt 60 kg je mm². Ein sehr ähnlicher Stahl mit nur etwas höherem Mangangehalt und ohne Vanadiumzusatz ist später vorgeschlagen worden[3]). Unbeabsichtigte, aus dem Schrott herrührende Nickelgehalte bis zu 0,5% beeinflussen die im Zerreißversuch erhaltenen Festigkeitswerte und die Kerbschlagzähigkeit dieses Stahles nicht, während sie die Tiefziehfähigkeit etwas beeinträchtigen. Hinsichtlich der Schweißhärte und Schweißrissigkeit wirken sich kleine Nickelgehalte nur bei überhitzungsempfindlich hergestellten, nicht aber bei Feinkornstählen ungünstig aus[4]). Dieses Ergebnis läßt sich unbedenklich auch auf den in praktischer Anwendung befindlichen, oben angeführten Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl übertragen. Ein ähnliches Anwendungsgebiet wie dieser hat ein Mangan-Stahl[5]) mit kleinem Kohlenstoff- und leicht erhöhtem Siliziumgehalt (0,12 bis 0,20% C, 0,3 bis 0,6% Si, 2,0 bis 2,3% Mn) gefunden, dessen Mindestschweißfestigkeit 70 kg/mm² beträgt, während die gebräuchlichen Vergütungsfestigkeiten im Gegensatz zu dem Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl unter 90 kg/mm² liegen.

Die hier behandelten Untersuchungen befassen sich mit dem Vergleich chromarmer und chromfreier Stähle ohne Nickel mit ebenfalls chromarmen und chromfreien Stählen, die Nickel als Hauptlegierungselement enthalten. An die Stähle wurden hinsichtlich Vergütbarkeit und Schweißbarkeit die für den Chrom-Molybdän- und Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl geltenden, einleitend dargelegten Forderungen gestellt. Die die Festigkeitseigenschaften von Stangen und Blechen sowie die Schweißbarkeit der Bleche betreffenden Versuche sollen klären, ob die häufiger anzutreffende Auffassung zutrifft, daß Nickelstähle unter den hier behandelten Gesichtspunkten den nickelfreien Stählen, insbesondere dem Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl überlegen seien. Außerdem war festzustellen, ob Vanadiumgehalte bis zu 0,1% ausreichen, um die Überhitzungsunempfindlichkeit und Anlaßbeständigkeit hervorzurufen, die als besondere Eigenschaften der meist erheblich mehr als 0,1% V enthaltenden Baustähle höherer Festigkeit bekannt sind.

*) A 221, E 2113. J 315.

[1]) H. Cornelius und F. Bollenrath, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 12 (1938/39), S. 335/39.

[2]) H. Cornelius, Stahl u. Eisen Bd. 60 (1940), S. 684/87; Autog. Metallbearb. 33 (1940), S. 245/56.

[3]) W. Eilender, H. Arend und E. Schmidtmann, Stahl u. Eisen Bd. 61 (1941), S. 392/96.

[4]) W. Eilender, H. Arend und E. Schmidtmann, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1942), S. 473/74.

[5]) K. L. Zeyen, Techn. Mitt. Krupp Bd. 4 (1936), S. 115/22; vgl. Stahl u. Eisen Bd. 56 (1936), S. 1191.

1. Versuchsstähle.

Die mit einer größeren Zahl von Versuchsstählen erhaltenen Ergebnisse lassen sich gut an Hand weniger Stähle auseinandersetzen, deren chemische Zusammensetzung und Härtetemperaturen Zahlentafel 1 enthält. Da nur ein kleiner, einen Liter fassender Hochfrequenzinduktionsofen für die Herstellung der Versuchsstähle zur Verfügung stand, mußten diese gesondert für die Bleche (in Zahlentafel 1 mit *B* bezeichnet) und Stangen (mit *S* bezeichnet) erschmolzen werden. Die Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung der gleichen Stahlart für die Bleche und Stangen sind unbedeutend. Stahl 1 entspricht dem schon mehrfach erwähnten Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl. Der Manganstahl 3 enthält einen kleinen Vanadiumzusatz. Während diese beiden Stähle nickelfrei sind, sind die Stähle 7, 8 und 10 mit Nickel legiert. Der Stahl 7 weist neben 1,1% Ni einen Chromgehalt von 0,4% auf. Von diesem Stahl unterscheidet sich der Stahl 8 bei gleichem Nickelgehalt durch einen etwas erhöhten Silizium- und einen kleinen Vanadiumzusatz. Der Stahl 10 enthält Nickel als einziges Legierungselement.

Die Versuchsstähle wurden ohne besondere Maßnahmen, also auch ohne Aluminiumzugabe erschmolzen und zu Blöck-

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Stangen und Bleche aus den Versuchsstählen.

Stahl[1]) Nr.	C %	Si %	Mn %	P %	S %	Ni %	Cr %	V %	Härtetemp. °C
1 *B*	0,29	0,35	1,1	0,011	0,024	—	0,72	0,15	870
1 *S*	0,29	0,30	1,0	0,011	0,023	—	0,75	0,19	
3 *B*	0,30	0,38	1,6	0,011	0,017	—	—	0,09	850
3 *S*	0,28	0,33	1,6	0,010	0,023	—	—	0,10	
7 *B*	0,30	0,30	0,71	0,011	0,018	1,1	0,4	—	850
7 *S*	0,31	0,28	0,80	0,010	0,017	1,1	0,4	—	
8 *B*	0,27	0,45	0,60	0,011	0,018	1,1	—	0,09	870
8 *S*	0,29	0,44	0,84	0,012	0,017	1,1	—	0,08	
10 *B*	0,29	0,29	0,60	0,011	0,019	1,6	—	—	845
10 *S*	0,30	0,27	0,80	0,010	0,018	1,6	—	—	

[1]) *B* = Bleche, *S* = Stangen.

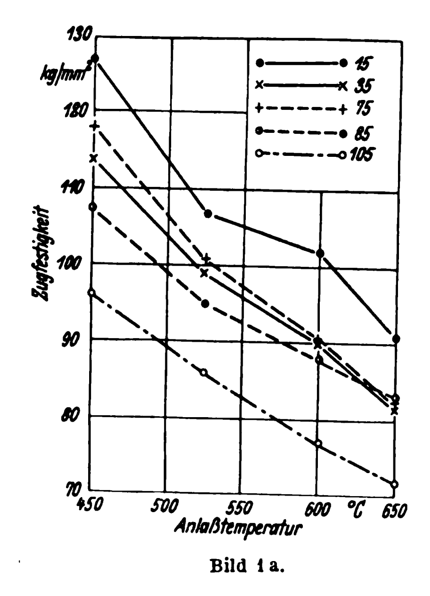


Bild 1 a.

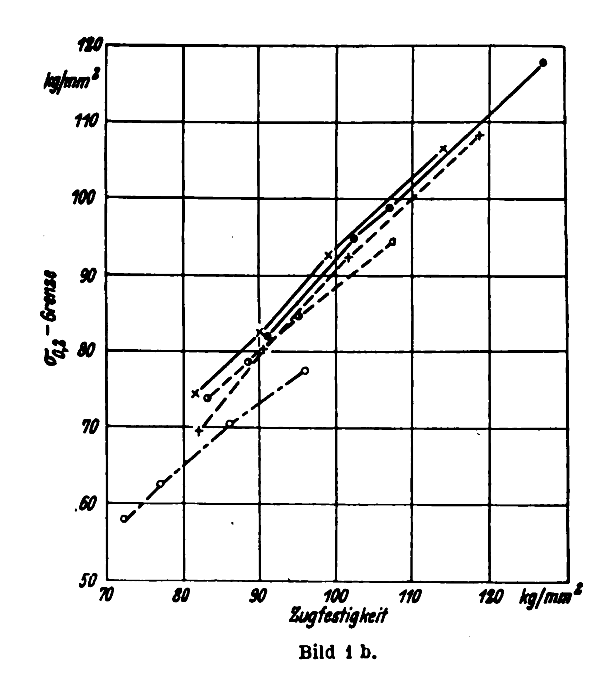


Bild 1 b.

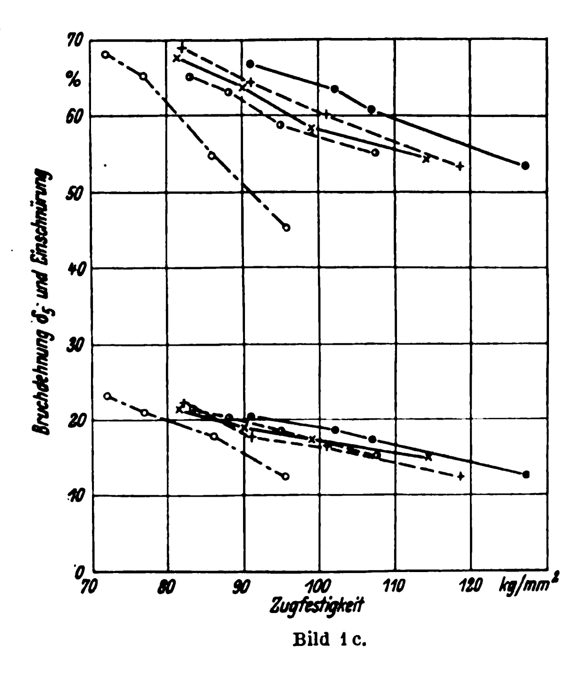


Bild 1 c.

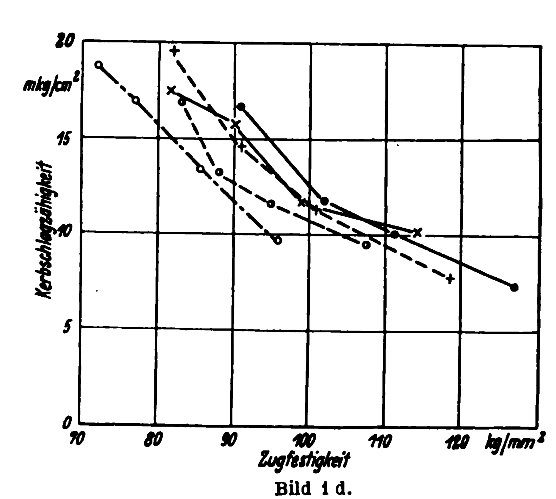


Bild 1 d.

Bild 1. Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Anlaßtemperatur der Streckgrenze, Bruchdehnung und Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit von der Zugfestigkeit der vergüteten Versuchsstähle.

chen mit 70 bis 80 mm Dmr. und 200 bis 220 mm Länge vergossen. Ein Blöckchen jeder Stahlart wurde zu 1 mm dicken Blechen ausgewalzt[6]. Ein weiteres Blöckchen wurde z. T. zu Stangen mit 16 mm Dmr., z. T. zu einem rd. 150 mm langen Stangenabschnitt mit 45 mm Dmr. ausgeschmiedet. Im letzten Falle wurde also nur eine schwache Verschmiedung erreicht. Die Stangen wurden nach dem Schmieden normal geglüht. Die in diesem Zustand gemäß Zahlentafel 2 vorliegenden Festigkeitseigenschaften der 18-mm-Stangen und die Rand- und Kernhärte der 45-mm-Stangen lassen erkennen, daß die Stähle 1, 3, 7 und 8 etwa gleichwertig legiert sind, während der Stahl 10 entsprechend seiner kleineren Festigkeitsannahme beim Abkühlen an Luft vergleichsweise etwas zu schwach legiert ist.

2. Versuchsergebnisse an Stangen.

Ein Vergleich der Versuchsstähle hinsichtlich ihrer Festigkeitseigenschaften ist in Bild 1 durchgeführt: Die nach dem Härten der 16-mm-Stangen in Öl erhaltene Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Anlaßtemperatur (Anlaßdauer ½ h, Abkühlen nach dem Anlassen in warmem Wasser) zeigt große Unterschiede in der Anlaßbeständigkeit

[6]) Die Blechherstellung übernahmen die Deutschen Edelstahlwerke, Krefeld. Für dieses Entgegenkommen wird hier noch einmal der verbindliche Dank ausgesprochen.

Zahlentafel 2. Festigkeitseigenschaften von Stangen mit 18 mm Durchmesser und Brinellhärte von Stangen mit 45 mm Durchmesser im normalgeglühten Zustand.

Stahl Nr.	Stangen mit 18 mm Dmr.				Stangen mit 45 mm Dmr. Brinellhärte mkg/mm²	
	$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ_B kg/mm²	δ_5 %	%	Rand	Kern
1 *S*	—	73,1	28,3	69	195	195
3 *S*	53,2	76,0	26,8	60	207	201
7 *S*	45,0	72,0	25,5	61	190	184
8 *S*	56,2	71,6	29,0	63	190	190
10 *S*	46,0	65,7	28,5	61	178	178

der Versuchsstähle an. Die größte Anlaßbeständigkeit hat naturgemäß der Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl 1, die kleinste der von karbidbildenden Elementen freie Nickel-Stahl 10. Zwischen diesen beiden Stählen liegen die Stähle 3, 7 und 8 mit kleinen Zusätzen von Vanadium oder Chrom. Die Versuche lassen schließen, daß die Anlaßbeständigkeit durch 0,4% Cr (Stahl 7) bei den niedrigeren Anlaßtemperaturen etwas stärker erhöht wird als durch rd. 0,1% V (Stähle 3 und 8).

Aus der ebenfalls in Bild 1 wiedergegebenen Abhängigkeit der Streckgrenze, Bruchdehnung, Einschnürung und Kerb-



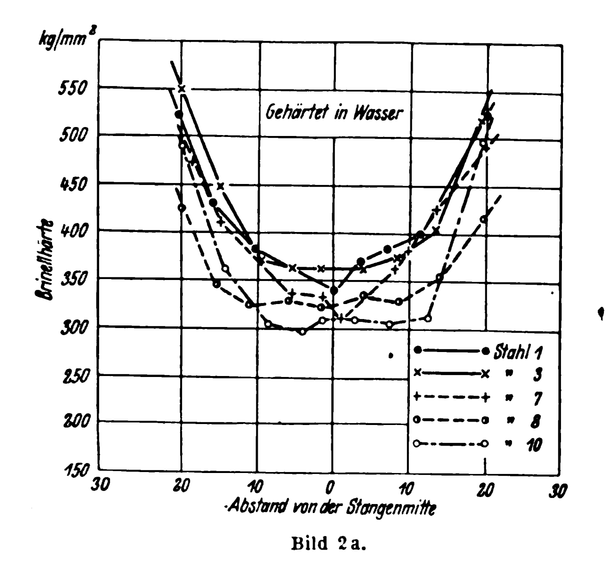


Bild 2a.

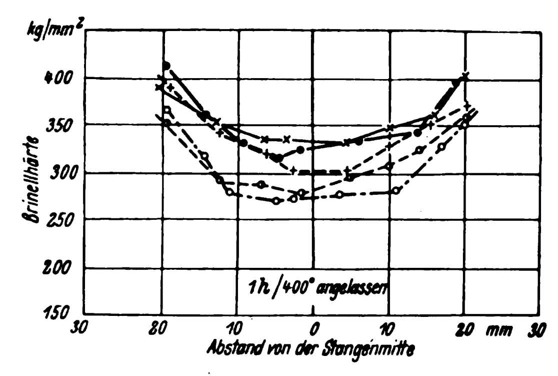


Bild 2b.

Bild 2. Durchhärtung und Durchvergütung von Stangen mit 45 mm Durchmesser aus den Versuchsstählen beim Härten in Wasser.

schlagzähigkeit der vergüteten 16-mm-Stangen von der Zugfestigkeit ist zu entnehmen, daß der Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl 1 besonders dem Nickel-Stahl 10 in den genannten Eigenschaften bei gleichen Zugfestigkeiten überlegen ist. Die Stähle 3, 7 und 8 kommen bei gleicher Zugfestigkeit in ihren übrigen Festigkeitseigenschaften dem Stahl 1 ziemlich nahe.

Einen Überblick über die Durchhärtung und Durchvergütung der Stangen mit 45 mm Dmr. aus den Versuchswerkstoffen vermittelt Bild 2. Keiner der Versuchsstähle besitzt in dieser Hinsicht grundsätzliche, legierungsbedingte Vorteile vor den anderen Stählen, wenn auch Unterschiede in der Durchhärt- und -vergütbarkeit vorliegen.

Die Neigung der Versuchsstähle zur Anlaßsprödigkeit wurde durch Anlassen bei 600° und 650° mit nachfolgender, langsamer Abkühlung geprüft. Wie Zahlentafel 3 zu entnehmen ist, erfuhr keiner der Versuchsstähle nach dem Anlassen bei 650° eine nennenswerte Versprödung. Nach dem Anlassen bei 600° war lediglich für Stahl 1 eine mäßige, für

Zahlentafel 3. Neigung der Versuchsstähle zur Anlaßsprödigkeit.

Stahl	Kerbschlagzähigkeit in mkg/cm² nach dem Anlassen bei 600° und anschließender Abkühlung		Kerbschlagzähigkeit in mkg/cm² nach dem Anlassen bei 650° und anschließender Abkühlung			
Nr.	Wasser $K1$	0,3°/min $K2$	Wasser $K3$	0,3°/min $K4$	$\frac{K1}{K2}$	$\frac{K3}{K4}$
1 S	11,8	7,0	16,7	14,7	1,68	1,14
3 S	15,8	12,4	17,5	16,4	1,27	1,07
7 S	14,6	17,0	19,6	18,6	0,86	1,05
8 S	13,2	13,1	16,8	15,3	1,01	1,10
10 S	17,0	15,8	18,8	15,9	1,08	1,18

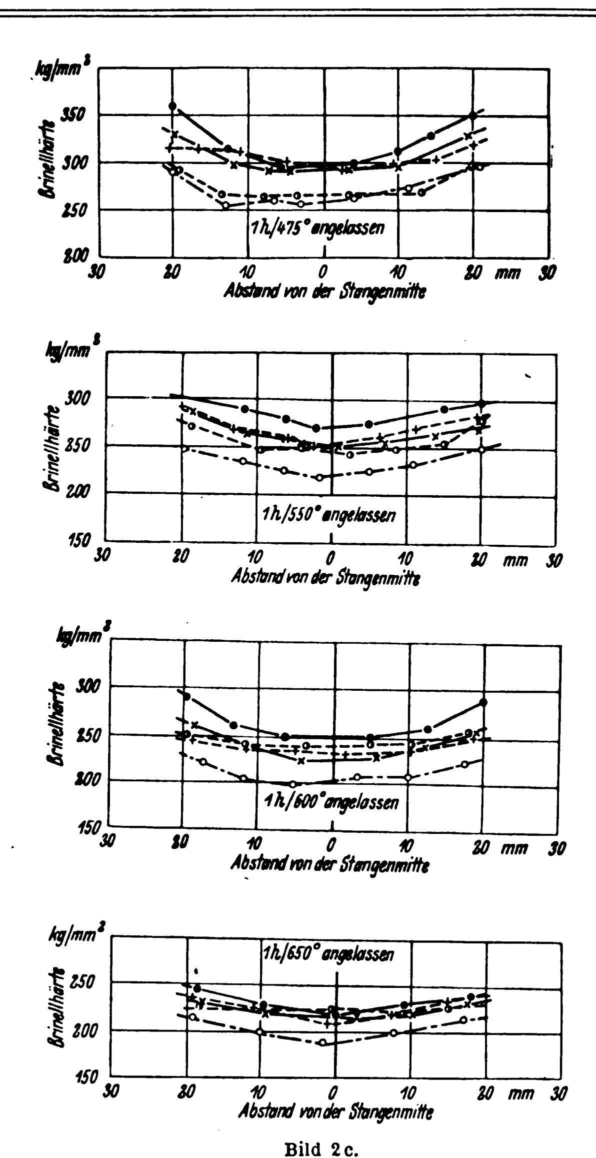


Bild 2c.

Stahl 3 eine geringfügige Versprödung nachweisbar. Die nickellegierten Stähle bleiben auch nach diesem Anlassen kerbzäh.

Die für Stangen aus den Versuchsstählen mitgeteilten Ergebnisse lassen im wesentlichen eine Überlegenheit des Chrom-Mangan-Vanadium-Stahles 1 über die nickellegierten Stähle erkennen. Der Mangan-Vanadium-Stahl 3 kommt dem Stahl 1 in den untersuchten Eigenschaften sehr nahe. Die bei 600° Anlaßtemperatur kleine, bei niedrigerer Anlaßtemperatur vielleicht etwas ausgeprägtere Anlaßversprödung der Stähle 1 und 3 läßt sich im allgemeinen durch bekannte Mittel vermeiden.

3. Versuchsergebnisse an Blechen.

An den 1-mm-Blechen wurden eingehende Gefügeuntersuchungen auch nach dem Stumpfschweißen mit Azetylen-Sauerstoff durchgeführt. Im Walzzustand sowie nach zusätzlichem Weichglühen hatten die Bleche aus den verschiedenen Stählen ein fast völlig, besonders auch hinsichtlich der Korngröße des Ferrits übereinstimmendes Gefüge. Nach dem Härten und Vergüten haben die vanadiumhaltigen Stähle 1, 3 und 8 erwartungsgemäß ein bedeutend feineres Gefüge, Bild 3 und 4, als die vanadiumfreien Stähle 7 und 10. Hieraus ergibt sich, daß die 0,08 bis 0,10% V entsprechende Vanadiumkarbidmenge bei der Härtetemperatur noch nicht vollständig vom Austenit gelöst wird. Auf die Gefügeausbildung neben der Schweißnaht, also im Gebiet starker Überhitzung, sind die kleinen Vanadiumgehalte ohne Einfluß, ebenso wie nach früheren Versuchen[2]) auch erhebliche größere.

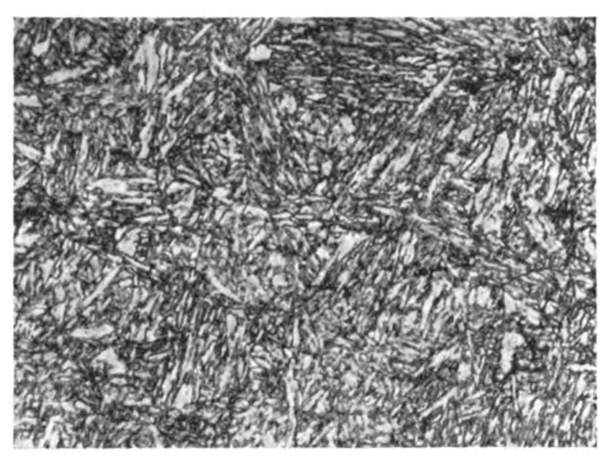


Bild 3. Stahl 7 ohne Vanadium. Vergr. 500fach.

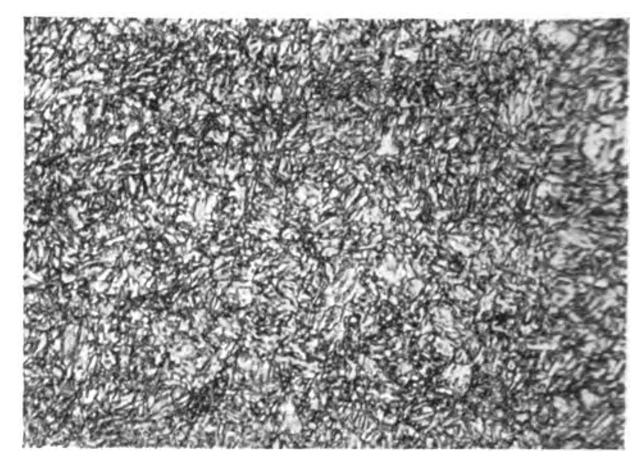


Bild 4. Stahl 8 mit 0,09 % V. Vergr. 500fach.

Bild 3 und 4. Einfluß eines kleinen Vanadiumgehaltes auf das Vergütungsgefüge nach Härten von üblicher Temperatur: Geätzt mit alkoholischer Salpetersäure.

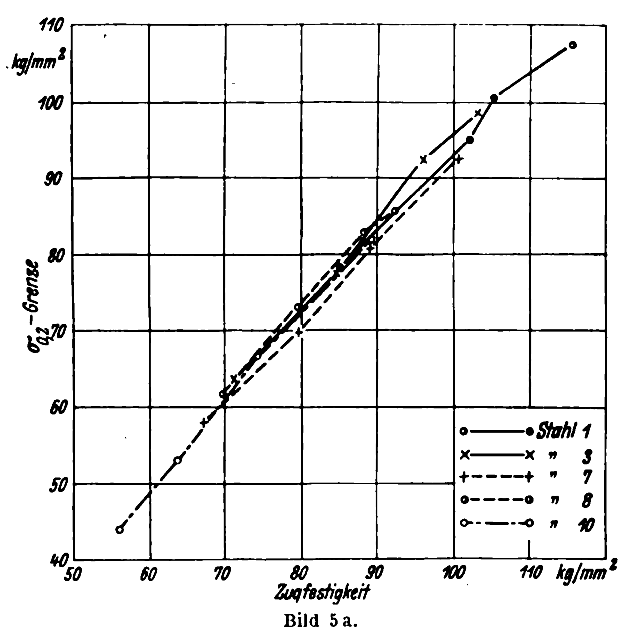


Bild 5a.

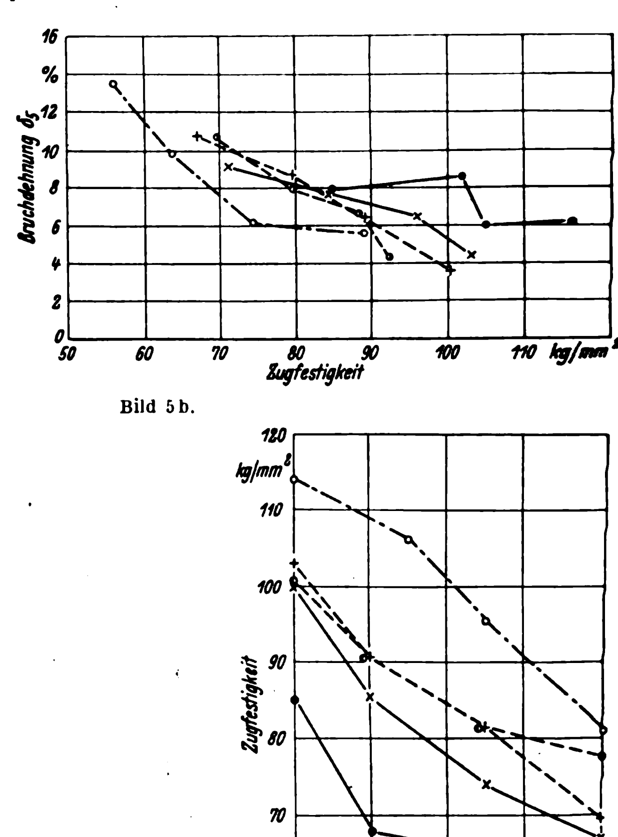


Bild 5c.

Bild 5. Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Anlaßtemperatur der Streckgrenze und Bruchdehnung von der Zugfestigkeit der vergüteten 1-mm-Bleche aus den Versuchsstählen.

Die Auflegierung der Schweißnaht durch den Grundwerkstoff hängt naturgemäß von dessen Zusammensetzung ab. Die bei den verschiedenen Versuchsstählen nach dem Schweißen mit weichem unlegiertem Zusatzwerkstoff beobachtete Gefügeausbildung der Naht war jedoch nicht eindeutig vom Grundwerkstoff beeinflußt.

Einen Überblick über die Festigkeitseigenschaften der vergüteten 1-mm-Bleche vermittelt Bild 5. Die Zugfestigkeit der Bleche hängt nach dem Härten in Öl in ähnlicher Weise wie die der Stangen (Bild 1) von der Anlaßtemperatur ab. Infolge der gleichmäßigen Durchvergütung sind die Streckgrenzen der verschiedenen Bleche bei gleichen Zugfestigkeiten praktisch gleich. Die Dehnungswerte sind bei Stahl 1 besser, bei dem Nickelstahl 10 kleiner als bei den übrigen Stählen, bezogen auf jeweils gleiche Zugfestigkeit.

Aus der beim Härten von üblicher Temperatur beobachteten, gefügeverfeinernden Wirkung kleiner Vanadiumgehalte von 0,08 bis 0,10% wurde bereits geschlossen, daß die diesem Vanadiumgehalt entsprechende Vanadiumkarbidmenge kurz oberhalb Ac_3 noch nicht vollständig vom Austenit gelöst wird. Eine Bestätigung für diese Folgerung gab die Feststellung einer erhöhten Anlaßbeständigkeit auch der nur wenig Vanadium enthaltenden Versuchsbleche im Temperaturgebiet der Vanadiumkarbidausscheidung nach dem Abschrecken von Temperaturen 150° oberhalb Ac_3 im Vergleich zu dem Abschrecken von üblicher Härtetemperatur. Somit genügen Vanadiumgehalte von 0,08 bis 0,10% um in Baustählen von der Art der Versuchswerkstoffe die spezifische, gefügeverfeinernde und die Anlaßbeständigkeit erhöhende Wirkung des Vanadiums zu erhalten, da die Anlaßbeständigkeit, soweit sie durch das Vanadium bedingt ist, nur von dessen tatsächlich in Lösung gegangenem Anteil abhängt.

Die Schweißbarkeit der Versuchsbleche wurde mit weichem, unlegiertem Schweißdraht und mit Streifen des jeweiligen Bleches als Zusatzwerkstoff geprüft. Geschweißt wurde mit der Azetylen-Sauerstofflamme. Mit beiden Zu-

Zahlentafel 4. Härtemessungen an den geschweißten Versuchsblechen.

Stahl	Ausgangszustand: weichgeglüht				Nach dem Schweißen vergütet[1])			
	Härte[2]) des Bleches	Höchsthärte des Bleches neben d. Naht	Härte der Naht geschweißt mit unlegiertem, weichem Draht	Härte der Naht geschweißt mit Blechwerkstoff	Härte des Bleches	Höchsthärte des Bleches neben d. Naht	Härte der Naht geschweißt mit unlegiertem, weichem Draht	Härte der Naht geschweißt mit Blechwerkstoff
1 *B*	238	420	250	380	378	380	234	360
3 *B*	225	415	220	—	340	360	225	—
7 *B*	218	410	185	320	340	340	174	320
8 *B*	210	325	172	230	330	355	200	270
10 *B*	205	320	172	244	305	320	175	234

[1]) Abschrecken in Öl/500 l/h Luft. [2]) Vickershärte.

Zahlentafel 5. Mittlere Festigkeitswerte der ungeschweißten und geschweißten Versuchsbleche im weichgeglühten Zustand (650 °/₀ h).

Stahl	Ungeschweißt			Geschweißt mit unlegiertem, weichem Draht				Geschweißt mit dem jeweiligen Blechwerkstoff			
				A[1])		*B*[2])		*A*[1])		*B*[2])	
	$\sigma_{0,2}$ kg/mm²	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	σ_B kg/mm²	δ_{10} %	σ_B kg/mm²	δ_{10} %
1 *B*	59,5	72,2	15,4	72,2	10,6	65,0	11,8	71,0	—[3])	68,0	—[3])
3 *B*	53,9	62,4	19,0	68,3	11,0	62,8	11,3	70,5	—[3])	66,5	—[3])
7 *B*	50,5	59,3	15,1	66,1	11,2	63,8	12,8	63,4	10,9	60,7	9,5
8 *B*	47,0	55,7	14,1	59,2	10,3	56,6	11,7	65,0	10,1	59,9	9,4
10 *B*	44,3	51,7	17,2	60,0	10,0	54,2	14,0	58,0	10,0	57,0	10,1

[1]) *A*: vor dem Schweißen weichgeglüht. [2]) *B*: vor und nach dem Schweißen weichgeglüht. [3]) Bruch am Übergang von der Naht zum Grundwerkstoff.

sätzen lassen sich der Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl 1 und der Mangan-Vanadium-Stahl 3 am leichtesten schweißen. Durch einen schlechteren Fluß ist die Schweißung der Nickelstähle, besonders bei Verwendung des Bleches selbst als Zusatzwerkstoff, gegenüber den nickelfreien Stählen erschwert. Dies war im kleinsten Maße bei dem Nickel-Vanadium-Stahl 8, in höherem Maße bei dem Nickel-Chrom-Stahl 7 und ausgeprägt bei dem Nickelstahl 10 der Fall. — Die Schweißrißneigung der Bleche wurde mit der Focke-Wulf-Einspannschweißvorrichtung[7]) untersucht. Es wurden mit den verschiedenen Zusätzen sowohl 1 mm-Bleche miteinander, wie auch 1 mm dicke Bleche aus den Versuchsstählen mit 2 mm dicken Chrom-Molybdän-Stahlblechen verschweißt. Im ersten Falle waren alle Versuchsschweißungen mit beiden Zusatzwerkstoffen schweißrißfrei. Die verschärfte Prüfung mit Blechen verschiedener Dicke ergab keine Schweißrissigkeit bei Verwendung der Blechstreifen als Zusatzwerkstoff. Dagegen trat bei den Nickelstählen eine schwache Schweißrissigkeit — im Mittel 15% bei Stahl 8 und 7% bei Stahl 10 — auf, wenn mit dem unlegierten Zusatzdraht gearbeitet wurde. In Übereinstimmung mit bereits angeführten Versuchen[4]) zeigt sich also bei den nicht als Feinkornstähle erschmolzenen Nickelstählen z. T. eine gewisse Neigung zur Schweißrissigkeit.

An den mit unlegiertem, weichem Draht und mit dem jeweiligen Blechwerkstoff als Zusatz hergestellten Stumpfschweißverbindungen der weichgeglühten Versuchsbleche wurden Härtemessungen im nicht nachbehandelten und im vergüteten Zustand (Anlaßtemperatur 500°) durchgeführt, Zahlentafel 4. Die Bleche aus den Stählen 1, 3 und 7 erreichen mit 410 bis 420 kg/mm² die gleiche Höchsthärte neben der Naht. Die Stähle 8 und 10 haben eine viel geringere Härteannahme beim Schweißen. Die Härte der mit dem unlegierten Zusatzwerkstoff hergestellten, nicht nachbehandelten Naht erreicht bei den nickelfreien Stählen 1 und 3 die Härte der weichgeglühten Bleche. Dies ist bei den nickellegierten Stählen nicht der Fall. Man kann daraus auf eine stärkere Auflegierung der Naht bei den nickelfreien Stählen schließen. Trotzdem erreichen auch die Nähte der nickelfreien Stähle nach dem Vergüten keine höhere Festigkeit als im Schweißzustand. Die mit dem jeweiligen Blechwerkstoff hergestellten Nähte sind bei dem Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl 1 ähnlich vergütbar wie der Blechwerkstoff selbst. Das gleiche gilt auch für den Nickel-Chrom-Stahl 7, nicht aber für den Nickel-Vanadium-Stahl 8 und noch weniger für den Nickel-Stahl 10. Es ist also anzunehmen, daß besonders der Kohlenstoffgehalt von zweien der Nickelstähle beim Schweißen in höherem Maße abbrennt, als es z. B. für den Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl der Fall ist. Die Härtemessungen führen zu dem Schluß, daß sich die Nickelstähle von den nickelfreien Versuchsstählen beim Schweißen insofern abheben, als sie als Grundwerkstoff offenbar weniger zum Auflegieren der Naht und als Zusatzwerkstoff stärker zum Abbrand des Kohlenstoffs neigen.

Zur Ermittlung der Mindestschweißfestigkeit wurden die weichgeglühten (650°/1 h) Versuchsbleche mit unlegiertem, weichem Draht und mit dem jeweiligen Blech als Zusatzwerkstoff autogen geschweißt. Außerdem wurden Schweißverbindungen geprüft, die noch nach dem Schweißen weichgeglüht (650°/1 h) wurden. Nach Zahlentafel 5 liegt die Mindestschweißfestigkeit des Mangan-Chrom-Vanadium-Versuchsstahles 1 über 65, die des Mangan-Vanadium-Stahles 3 über 60 kg/mm². Die letzte Mindestfestigkeit erreicht auch noch der Nickel-Chrom-Stahl 7, während der Nickel-Vanadium-Stahl 8 und der Nickel-Stahl 10 darunter bleiben. Die in Zahlentafel 5 angegebenen Schweißdehnungswerte dienen vorwiegend zur Kennzeichnung der Lage des Bruches, erst in zweiter Linie zur Beschreibung der Werkstoffeigenschaften. Schweißdehnungen, die nicht sehr viel kleiner als die Bruchdehnungen der ungeschweißten Bleche sind, zeigen die Lage des Bruches außerhalb der Naht und ihres Überganges, also im vollen Blech an. Im Gegensatz zu den Nickel-Stählen hatten die nickelfreien Stähle eine gelegentlich auftretende Neigung zum Bruch im Übergang von der Naht zum Grundwerkstoff. Diesem Vorteil der Nickelstähle steht der Nachteil gegenüber, daß sie bei gegebenem Kohlenstoffgehalt erhebliche Nickelgehalte zum Erreichen einer genügend hohen Mindestschweißfestigkeit erfordern.

Nach dem Schweißen mit unlegiertem und legiertem Zusatzwerkstoff durch Härten in Öl und Anlassen bei 450 bis 600° vergütete Stumpfschweißverbindungen der Versuchsbleche erreichten stets die in Bild 5 enthaltenen Zugfestigkeiten der ungeschweißten Bleche. Die Brüche traten bei den Schweißverbindungen aus den Nickelstahl-Blechen immer im vollen Blech, bei den Verbindungen der nickelfreien Bleche in einigen Fällen auch am Übergang von der Naht zum Grundwerkstoff ein. Hierbei ist zu beachten, daß

[7]) Vgl. Stahl u. Eisen Bd. 55 (1935), S. 903.

die nickelfreien Schweißverbindungen bei gleichen Anlaßtemperaturen höhere Zugfestigkeiten als die nickellegierten aufweisen.

4. Zusammenfassung.

In schweißbaren, chromarmen bzw. chromfreien Stählen, die als Stangen mit 50 mm Dmr. auf Zugfestigkeiten über 90 kg/mm² vergütbar sind, ruft Nickel als Hauptlegierungselement nach den durchgeführten, orientierenden Versuchen keine Eigenschaften hervor, die nicht auch mit Stählen auf der Legierungsgrundlage Mangan bzw. Mangan und Chrom erreicht werden. Vielmehr haben letztere Stähle in den Festigkeitseigenschaften und der Schweißbarkeit eher Vorteile vor den nickellegierten Stählen. — Dem in praktischer Anwendung bewährten Mangan-Chrom-Vanadium-Stahl 1 kommt in den geprüften Eigenschaften der Mangan-Versuchsstahl 3 mit nur kleinem Vanadiumgehalt sehr nahe. — Die Vanadiumgehalten von 0,08 bis 0,1% entsprechende Vanadiumkarbidmenge löst sich bei den üblichen Härtetemperaturen von Stählen von der Art der Versuchsstähle nur zu einem Teil im Austenit. Derart kleine Vanadiumgehalte reichen daher aus, um die spezifische Wirkung des Vanadiums in Baustählen, nämlich Gefügeverfeinerung und erhöhte Anlaßbeständigkeit zu bewirken.

Für die Durchführung der Versuche danke ich Ing. W. Trossen und Ing. W. Schmidt.

Zur Ableitung des Croccoschen Wirbelsatzes*).

Von Kl. Oswatitsch.

Bericht des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung, Göttingen.

Der Satz über den Zusammenhang des Wirbelvektors der Geschwindigkeit mit dem Entropiegradienten wird für beliebige Medien, deren Zustand durch zwei thermodynamische Funktionen allein vollkommen bestimmt ist, nach einer Umformung des Energiesatzes kurz abgeleitet.

Für reibungsfreie stationäre Strömungen idealer Gase wurde unter Voraussetzung des Energiesatzes von L. Crocco[1]) ein Satz abgeleitet, der den Wirbelvektor in Zusammenhang mit dem Entropieanstieg bringt. W. Tollmien[2]) hat eine andere Ableitung des Satzes gegeben. Auf seine Bedeutung für reibungsfreie Strömungen mit Verdichtungsstößen soll hier nicht weiter eingegangen werden, doch soll eine besonders kurze Ableitung gegeben werden, wobei auch auf die Voraussetzung, es handele sich um ideale Gase, verzichtet wird. Außerdem sollen äußere Kräfte, welche ein Potential haben, zugelassen werden, eine Verallgemeinerung, die wir ihrer Einfachheit wegen gleich mitberücksichtigen wollen.

Bezeichnen wir den Geschwindigkeitsvektor mit $\mathfrak{w}$, Druck und Dichte in üblicher Weise mit p und ϱ und das Potential der äußeren Kräfte mit V, so lauten die Eulerschen Gleichungen für stationäre Strömung in vektorieller Schreibweise

$$\operatorname{grad}\frac{\mathfrak{w}^2}{2}+\operatorname{rot}\mathfrak{w}\times\mathfrak{w}+\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad}p+\operatorname{grad}V=0\quad . \; . \; (1)$$

Im ganzen Raum soll ferner der Energiesatz gelten

$$\frac{\mathfrak{w}^2}{2}+i+V=\text{const},$$

wobei i die Enthalpie oder den »Wärmeinhalt« der Masseneinheit, im Arbeitsmaß gemessen, bedeutet und die Konstante im ganzen Raum, also nicht nur längs einer Stromlinie, ein und denselben Wert hat. Diese Festsetzung trifft insbesondere für ungestörte parallele Anströmung des Mediums zu, wobei auch Verdichtungsstöße auftreten dürfen.

Wollen wir nun einen Zusammenhang von Wirbelvektor und Entropie erhalten, so müssen wir aus unseren Gleichungen den Druck eliminieren und die Entropie einführen. Wir setzen von unserem strömenden Medium daher voraus, daß es im Sinne der klassischen Thermodynamik »homogen« sei, daß sein Zustand also durch zwei Veränderliche allein eindeutig bestimmt sei, gleichgültig ob und welche inneren chemischen Umwandlungen bei den betrachteten Zustandsänderungen vor sich gehen (siehe etwa M. Planck[3])). Als Veränderliche wählen wir zweckmäßig neben dem Druck die auf die Masseneinheit bezogene Entropie s und geben dem Energiesatz durch Gradientbildung folgende Gestalt:

$$\operatorname{grad}\frac{\mathfrak{w}^2}{2}+\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_s\operatorname{grad}p+\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p\operatorname{grad}s+\operatorname{grad}V=0\quad (2)$$

Die Entropieänderung eines homogenen Körpers läßt sich bekanntlich durch die Änderung der inneren Energie e der Masseneinheit und die Volumenänderung ausdrücken. Führen wir anstatt der inneren Energie auch hier die Enthalpie $i = e + p/\varrho$ ein, so können wir mit T als absoluter Temperatur schreiben:

$$T\,ds=de+p\cdot d\left(\frac{1}{\varrho}\right)=di-\frac{1}{\varrho}\,dp,$$

woraus sich sofort zwei der zahlreichen Differentialbeziehungen thermodynamischer Funktionen ergeben, nämlich die beiden uns interessierenden Ableitungen

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_s=\frac{1}{\varrho}\ \text{und}\ \left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p=T\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Setzt man die Beziehungen (3) in Gl. (2) ein, so erhält man eine neue Form des Energiesatzes. Diese gibt zusammen mit Gl. (1) sofort den Croccoschen Wirbelsatz in der für »homogene Körper« verallgemeinerten, also auch für nicht ideale Gase gültigen, Form:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{w}\times\mathfrak{w}=T\operatorname{grad}s.$$

Der Zusammenhang mit der von Crocco für ideale Gase angegebenen Form ist leicht herzustellen, indem man die absolute Temperatur durch das Quadrat der Schallgeschwindigkeit ausdrückt. Bezüglich der Folgerungen aus dem abgeleiteten Satz sei auf die beiden erstzitierten Arbeiten und auf das Buch von Sauer[4]) hingewiesen.

Auch im Wirbelsatz von Bjerknes läßt sich unter Voraussetzung stationärer Strömung und Gültigkeit des Energiesatzes anstatt des Produktes $\operatorname{grad}p\times\operatorname{grad}1/\varrho$ das Produkt $\operatorname{grad}T\times\operatorname{grad}s$ einführen, doch erzielt man dadurch anscheinend keinen Fortschritt.

*) A 35 2.

[1]) L. Crocco, Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 1 bis 7.

[2]) W. Tollmien, Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 145 bis 147.

[3]) M. Planck, Einführung in die Theorie der Wärme. 2. Auflage (1932), S. 26 bis 27.

[4]) R. Sauer, Theoretische Einführung in die Gasdynamik. (1943), S. 132 bis 133.

Die Fehlerfortpflanzung beim Multhoppschen Verfahren*).

Von J. Kleinwächter.

Bericht des Flugtechnischen Instituts der Technischen Hochschule Danzig (FID).

Beim Multhoppschen Verfahren führen Rechenfehler zu falschen Auftriebsverteilungen, wenn man, wie meist üblich, die Differenzen iteriert. Es wird mitgeteilt, wie man solche Fehler schnell auffindet und wie man die fehlerhafte Verteilung ohne Wiederholung der Rechnung korrigieren kann.

Das heute allgemein übliche Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung über die Spannweite ist das von Multhopp[1]). In den meisten Fällen wird dabei die gesuchte Verteilung in der 3. Näherung mit $m = 15$ ermittelt. Die 8 Iterationsgleichungen[2]) sind dann z. B. für den symmetrischen Fall:

$$\begin{aligned}
b_1\gamma_1 &= \alpha_1 + B_{12}\gamma_2 + B_{14}\gamma_4 + B_{16}\gamma_6 + B_{18}\gamma_8 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_7\gamma_7 &= \alpha_7 + B_{72}\gamma_2 + B_{74}\gamma_4 + B_{76}\gamma_6 + B_{78}\gamma_8 \\
b_2\gamma_2 &= \alpha_2 + B_{21}\gamma_1 + B_{23}\gamma_3 + B_{25}\gamma_5 + B_{27}\gamma_7 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_8\gamma_8 &= \alpha_8 + B_{81}\gamma_1 + B_{83}\gamma_3 + B_{85}\gamma_5 + B_{87}\gamma_7
\end{aligned}$$

In bekannter Weise geht man von einer schon vorhandenen Näherungslösung $\gamma_2^{(0)}$, $\gamma_4^{(0)}$, $\gamma_6^{(0)}$, $\gamma_8^{(0)}$ aus, erhält im ersten Durchgang aus den ersten vier Gleichungen $\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_7^{(1)}$ und aus den letzten vier $\gamma_2^{(1)}, \dots, \gamma_8^{(1)}$. Im zweiten Durchgang würden sich die $\gamma_\nu^{(2)}$ ergeben und man kann nun das Verfahren so lange fortsetzen, bis bei der vorher festgelegten Rechengenauigkeit keine Unterschiede mehr entstehen. Man erhält so die endgültigen Werte γ_ν, die das obige System befriedigen. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß sich Rechenfehler auf das Resultat nicht auswirken, sondern lediglich die Konvergenz verlangsamen. Von Nachteil ist es aber, daß man immer mit den vollen γ-Werten rechnen muß, was bei den üblicherweise notwendigen 3 bis 4 Iterationsschritten ziemlich viel Zeit und Mühe beansprucht. Deshalb wird meist so vorgegangen, daß man nach dem ersten Durchgang die Differenzen $\Delta^{(1)}\gamma_2 = \gamma_2^{(1)} - \gamma_2^{(0)}, \dots, \Delta^{(1)}\gamma_8 = \gamma_8^{(1)} - \gamma_8^{(0)}$ bildet und diese im obigen System iteriert, wobei alle $\alpha_\nu = 0$ gesetzt werden müssen. Es ergibt sich so der Reihe nach $\Delta^{(2)}\gamma_\nu$, $\Delta^{(2)}\gamma_\nu$, ... und schließlich $\gamma_\nu = \gamma_\nu^{(1)} + \Delta^{(2)}\gamma_\nu + \Delta^{(3)}\gamma_\nu + \dots$ Da die $\Delta^{(i)}\gamma_\nu$ bezüglich der letzten Dezimale höchstens zweistellige Zahlen sind, kann die ganze Rechnung mit dem Rechenschieber ausgeführt werden und geht daher sehr flott vonstatten. Dieses Verfahren hat aber dafür den Nachteil, daß Rechenfehler natürlich nicht mehr verschwinden können und, obwohl das Verfahren auch jetzt wieder schnell konvergiert, ein u. U. völlig falsches Resultat gewonnen werden kann.

Da die Differenzen $\Delta^{(i)}\gamma_\nu$ nach einigen Schritten verschwinden, wird aber beim Rechner der Eindruck entstehen, daß sein Resultat richtig ist. Ist er vorsichtig, so wird er seine Ergebniswerte doch für alle Fälle auf der rechten Seite des Gleichungssystems einsetzen und untersuchen, ob links auch wirklich seine Werte herauskommen. Bei der Betrachtung des Systems stellt er fest, daß z. B. schon in den letzten vier Gleichungen sämtliche γ-Werte vorkommen, daß diese also für die Probe genügen müßten. Trotzdem nun diese Probe innerhalb der Rechengenauigkeit genau stimmt, können aber seine Resultatwerte völlig falsch sein. Ist nämlich z. B. bei der Berechnung von γ_5 ein Fehler gemacht worden, so wird die Probe nur in der dritten Gleichung einen Unterschied ergeben, während sie bei den anderen sieben Gleichungen genau stimmen wird.

Anläßlich der Ausarbeitung neuer Rechenvordrucke[3]) für das Multhoppsche Verfahren haben wir diese Verhältnisse näher untersucht. Im folgenden sind mit γ_ν die richtigen, mit $\gamma_{\nu,f}$ die fehlerhaften γ-Werte bezeichnet. Es werde nun an irgendeiner Stelle der Rechnung der Fehler $b_n \cdot F_n$ gemacht (z. B. durch falsche Addition oder Multiplikation). Wir wollen dabei der leichteren Übersehbarkeit wegen $n = 5$ setzen. Nun untersuchen wir, wie sich dieser Fehler fortpflanzt, indem wir die Fehlerverteilung $F_1^{(0)} = F_3^{(0)} = F_7^{(0)} = 0$, $F_5^{(0)} = F_5$ in die Iterationsgleichungen mit $\alpha_\nu = 0$ einsetzen. Da diese Gleichungen die Auftriebsverteilung des unverwundenen Flügels beim Anstellwinkel $\alpha = 0$ beschreiben, ist zunächst zu sehen, daß im Laufe der Rechnung die fortgepflanzten Fehler gegen Null konvergieren müssen. Es ergibt sich im ersten Durchgang

$$\begin{matrix} f_2^{(1)} & f_4^{(1)} & f_6^{(1)} & f_8^{(1)} \\ f_1^{(1)} & f_3^{(1)} & f_5^{(1)} & f_7^{(1)}, \end{matrix}$$

d. h. der anfängliche Einzelfehler beeinflußt alle anderen γ-Werte. Iteriert man jetzt weiter, so folgt

$$\begin{matrix} f_2^{(2)} & f_4^{(2)} & f_6^{(2)} & f_8^{(2)} \\ f_1^{(2)} & f_3^{(2)} & f_5^{(2)} & f_7^{(2)} \end{matrix}$$

usw. mit $f_\nu^{(i)} \to 0$. Somit resultiert die Fehlerverteilung

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_1^{(1)} + f_1^{(2)} + \dots \\
f_3 &= f_3^{(1)} + f_3^{(2)} + \dots \\
f_5 &= F_5^{(0)} + f_5^{(1)} + f_5^{(2)} + \dots \\
f_7 &= f_7^{(1)} + f_7^{(2)} + \dots \\
f_2 &= f_2^{(1)} + f_2^{(2)} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
f_8 &= f_8^{(1)} + f_8^{(2)} + \dots
\end{aligned}$$

und die fehlerhafte γ-Verteilung als $\gamma_{\nu,f} = \gamma_\nu + f_\nu$.

Setzt man diese Verteilung zur Kontrolle der Rechnung wieder in die Iterationsgleichungen ein, so folgt z. B. auf der rechten Seite der fünften Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 + B_{21}\gamma_1 + B_{23}\gamma_3 + B_{25}\gamma_5 + B_{27}\gamma_7 \\
&\qquad + B_{25}F_5^{(0)} \\
&\quad + B_{21}f_1^{(1)} + B_{23}f_3^{(1)} + B_{25}f_5^{(1)} + B_{27}f_7^{(1)} \\
&\quad + B_{21}f_1^{(2)} + \dots\dots\dots \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots \\
&= b_2(\gamma_2 + f_2^{(1)} + f_2^{(2)} + f_2^{(3)} + \dots) = b_2\gamma_{2,f},
\end{aligned}$$

d. h. die Probe stimmt trotz der fehlerhaften γ-Werte! Gleiches gilt für die anderen Gleichungen. Lediglich in der

*) P 3111.

[1]) Multhopp, Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln, Luftf.-Forschg. Bd 15 (1938), S. 153.

[2]) In den bei Schwabe, Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 174 aufgestellten Gleichungen ist der Wert B[illegible] fehlerhaft.

[3]) FID-Schrift 6 und 7, zu beziehen durch FID.

dritten Gleichung folgt rechts $b_5(\gamma_5 + f_5^{(1)} + f_5^{(2)} + \ldots)$, auf der linken Seite dagegen $b_5\gamma_{5,f} = b_5(\gamma_5 + F_5^{(0)} + f_5^{(1)} + f_5^{(2)} + \ldots)$, d. h. in dieser Gleichung ergibt die Probe einen Unterschied um den Betrag $b_5 F_5$, aus dem der Fehler in voller Größe resultiert.

Demnach folgt: Wird bei der Probe in der Gleichung für γ_n eine Differenz $\Delta\gamma_n$ festgestellt, die oberhalb der Rechengenauigkeit liegt, so ist im Laufe der Rechnung nur an solchen Stellen fehlerhaft gerechnet worden, die zur Ermittlung von γ_n notwendig sind. Der Fehler hat die Größe $\Delta\gamma_n$ = (Sollwert — Probewert)$_n$, die fehlerhafte Rechengröße differiert um den Betrag $b_n \cdot \Delta\gamma_n$ gegen die richtige. Die ganze γ-Verteilung ist fehlerhaft, und zwar gilt mit dem Fehler »$+ \Delta\gamma_n$« für alle Werte: $\gamma_{\nu,f} > \gamma_\nu$.

Die Rechnung läßt sich nachträglich schnell kontrollieren, da man den Betrag der fehlerhaften Rechengröße kennt und genau weiß, an welchen Stellen man suchen muß. Es liegt aber auch nahe, die fehlerhafte γ-Verteilung durch Überlagerung mit einer Korrekturverteilung zu korrigieren, um eine nochmalige Durchrechnung zu vermeiden. Wenn man bedenkt, daß normale Flügelumrisse nicht erheblich vom elliptischen Umriß abweichen und in den meisten Fällen die verwendete Flügelstreckung $\Lambda = b^2/F \sim 7$ ist, so kann man wie folgt vorgehen: Man iteriert für einen elliptischen Flügel das Gleichungssystem mit der Fehlerverteilung

$$F_\nu^{(0)} = 0, \quad F_n^{(0)} = 1 \; (\nu \neq n),$$

also z. B. mit einem Fehler von der Größe einer Einheit der letzten Dezimalstelle bei $\nu = n$. Es ergibt sich so die Fehlerverteilung

$$\delta_{\nu,n} = F_\nu^{(0)} + f_\nu^{(1)} + f_\nu^{(2)} + \ldots$$

und die zu überlagernde Korrekturverteilung als

$$-\Delta\gamma_n \cdot \delta_{\nu,n}, \text{ d. h., es ist } \gamma_\nu \approx \gamma_{\nu,f} - \Delta\gamma_n \cdot \delta_{\nu,n}.$$

In Zahlentafel 1 ist die Korrekturverteilung $\delta_{\nu,n}$ für den symmetrischen und antisymmetrischen Fall tabuliert, Zahlentafel 2 zeigt das Ergebnis einer Beispielrechnung, bei der absichtlich ein grober Fehler gemacht wurde[4]). Die Werte in Zahlentafel 1 gelten für $l = \Lambda/\eta = 7$ mit $2\pi\eta = dc_a/d\alpha_\infty = 2\,c_{\nu\,\text{mittel}}$.

Für $l + \Delta l = 7 + \Delta l$ würde sich eine andere Fehlerverteilung $\delta_{\nu,n} + \Delta\delta_{\nu,n}$ ergeben. Es ist $b_\nu = b_{\nu\nu} + \dfrac{b}{c_\nu t_\nu}$ mit $b_{\nu\nu} = \dfrac{4}{\sin\vartheta_\nu}$. Hat der Flügel elliptische Tiefenverteilung, so ist $\dfrac{2 \cdot t_\nu}{b} = \dfrac{8}{\pi\Lambda} \cdot \sin\vartheta_\nu$ und damit wegen $c_\nu = \pi\eta$ und $l = \Lambda/\eta$: $b_\nu = \dfrac{1}{4\cdot\sin\vartheta_\nu}\cdot(16 + l)$. Also ist $\Delta b_\nu = \dfrac{\Delta l}{4\cdot\sin\vartheta_\nu}$ und $\dfrac{1}{b_\nu + \Delta b_\nu} \sim \dfrac{1}{b_\nu}\cdot\left(1 - \dfrac{\Delta l}{16 + l}\right)$. Iteriert man jetzt wieder die Fehlerverteilung $F_\nu^{(0)} = 0$, $F_n^{(0)} = 1$ $(\nu \neq n)$, so ergibt sich im ersten Durchgang gegen früher die Abweichung $\Delta f_\nu^{(1)} \sim -\dfrac{\Delta l}{16 + l}\cdot F_\nu^{(0)}$, im zweiten analog $\Delta f_\nu^{(2)} \sim -\dfrac{\Delta l}{16 + l}\Delta f_\nu^{(1)}$ usw. Also ist jetzt die Fehlerverteilung $\delta_{\nu,n} + \Delta\,\delta_{\nu,n} \sim \delta_{\nu,n} - \dfrac{\Delta l}{16 + l}\cdot\delta_{\nu,n}$, wobei Glieder von höherer Ordnung in $\left(\dfrac{\Delta l}{16 + l}\right)$ vernachlässigt sind.

Ist also $l = 7 + \Delta l$, so ist die tabulierte Fehlerverteilung mit dem Faktor $\left(1 - \dfrac{\Delta l}{23}\right)$ zu multiplizieren. Schreibt man z. B. vor, daß dabei der Fehler gegenüber der genauen Fehlerverteilung $\leq 10\%$ sein soll, so ist $\Delta l \leq 2{,}3$.

[4]) Die Rechnungen führte K. H. Groddeck aus.

Zahlentafel 1 für die Korrekturverteilung $\delta_{\nu,n}$ ($l = 7$).

Symmetrische Auftriebsverteilung:

$n \downarrow$ \ $\nu \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,08	0,30	0,10	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01
2	0,30	1,17	0,35	0,12	0,08	0,05	0,04	0,03
3	0,10	0,36	1,21	0,38	0,15	0,10	0,07	0,07
4	0,06	0,13	0,38	1,23	0,40	0,17	0,13	0,10
5	0,04	0,08	0,15	0,40	1,24	0,43	0,20	0,18
6	0,03	0,05	0,10	0,17	0,43	1,27	0,48	0,30
7	0,02	0,04	0,07	0,13	0,20	0,48	1,37	0,78
8	0,01	0,02	0,03	0,05	0,09	0,15	0,39	1,22

Antisymmetrische Auftriebsverteilung:

$n \downarrow$ \ $\nu \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7
1	1,08	0,30	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
2	0,30	1,17	0,35	0,13	0,09	0,04	0,02
3	0,10	0,35	1,20	0,37	0,13	0,07	0,03
4	0,05	0,12	0,37	1,20	0,37	0,12	0,05
5	0,03	0,07	0,13	0,37	1,20	0,35	0,10
6	0,01	0,03	0,07	0,11	0,35	1,17	0,30
7	0,01	0,01	0,03	0,05	0,10	0,30	1,08

Anmerkung. Der Zeiger n gibt die Stelle des Fehlers 1 an.

Zahlentafel 2. Zahlenbeispiel für die Korrekturverteilung.

$c_\nu = \pi\eta = 3{,}0159$ = konstant, $\alpha_\nu = 1$ = konstant, $F_5^{(0)} = \Delta\gamma_5$ = (Sollwert — Probewert) = 0,0115.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_\nu \Big/ \dfrac{b}{2}$	0,1460	0,1862	0,2134	0,2498	0,2944	0,3400	0,3400	0,3400
b_ν	25,0451	14,0140	10,3074	8,3115	7,0633	6,2800	6,0291	5,9505
$\gamma_{\nu,\text{richtig}}$ . . .	0,1069	0,1877	0,2489	0,3032	0,3540	0,3950	0,4112	0,4153
$\gamma_{\nu,\text{falsch}}$ . . .	0,1064	0,1866	0,2471	0,2986	0,3399	0,3901	0,4088	0,4131
$\gamma_{\nu,\text{korr.}}$ . . .	0,1067	0,1875	0,2488	0,3032	0,3542	0,3950	0,4111	0,4152

Kraftstoff-Vorratmesser für Flugzeuge*).

Von E. Czerlinsky, Berlin-Adlershof, und J. Zeyns, VDI-Hamburg[1]).

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Elektrophysik.

Es wird ein Gerät beschrieben, mit dem eine zeitlich sich ändernde Masse, die in einem ungleichförmig bewegten System aufgehängt ist, gemessen wird. Ein Anzeigeinstrument gibt ihr jeweiliges Gewicht an, bezogen auf den Ruhezustand des Systems.

Das Gerät wurde zur lage- und beschleunigungsunabhängigen Feststellung des Kraftstoffvorrates im Flugzeug entwickelt. Die Anzeigengenauigkeit soll ± 3% des Gesamtvorrates betragen bei Beschleunigungsänderungen bis 2 g (g = 9,81 m/s²) und Lagenänderungen bis 30° aus der Horizontalen.

Gliederung.

I. Auswahl des Meßverfahrens.

Um den veränderlichen Kraftstoffvorrat im Fluge zu bestimmen, wurde unter verschiedenen grundsätzlich anwendbaren Meßverfahren einer Kraftstoffmessung durch Wägung der Vorzug gegeben. Die jeweils vorhandene Kraftstoffmasse, deren Gewicht mit dem Bewegungszustand des Flugzeuges veränderlich ist, kann beispielsweise auf einer Hebelwage bestimmt werden, die auch im beschleunigten Zustand den Vergleich mit einer bekannten Masse ermöglicht. Wir verwenden nun zwei Federwagen, die nahe beieinander in der Zelle aufgehängt werden. Die eine, Bild 1, trägt den Kraftstoffbehälter, die zweite wird mit einem Ausgleichgewicht von nur wenigen Gramm belastet. Die Federkonstanten sind so bemessen, daß die Ausschläge a und b von gleicher Größenordnung sind. Sowohl a als auch b sind der jeweiligen Beschleunigung und dem Kosinus des Neigungswinkels verhältnisgleich. Das Quotient $a:b$ ist daher lagen- und beschleunigungsunabhängig und ein Maß für das Verhältnis beider Massen. Da die Ausgleichmasse unveränderlich, ist $a:b$ schließlich nur mehr abhängig von der Masse des Kraftstoffvorrates.

Bei der praktischen Verwirklichung dieses einfachen Meßprinzips[2]) zeigten sich mancherlei konstruktive Schwierigkeiten, deren Lösungen im folgenden geschildert werden. Erschwerend wirkte es, daß ein nachträglicher Einbau des Meßgerätes in vorhandene Flugzeuge möglich sein sollte, und daß die Gewichts- und Raumansprüche niedrig sein mußten; außerdem durfte voraussetzungsgemäß der durch Lagen-, Beschleunigungs-, Temperatur- und Druckschwankungen hervorgerufene Gesamtfehler höchstens ± 3% der maximalen Füllung betragen.

Für das hier beschriebene Wägeprinzip wurde einem elektrischen Verfahren gegenüber einem hydraulischen der Vorzug gegeben, weil zu seinen Gunsten eindeutig gewichtliche und einbaumäßige Vorteile sprechen. Überdies scheint es aussichtslos, die Temperatur- und Beschleunigungseinflüsse in einer ausgedehnten Rohrleitungsanlage zu beseitigen.

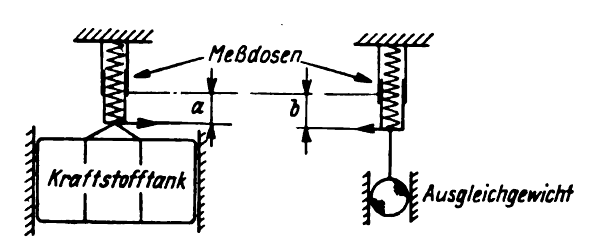


Bild 1. Erläuterung des Meßverfahrens.

Für die Umwandlung der Längenänderungen a und b in elektrische Größen wurde nun unter der Mehrzahl der physikalisch-technischen Verfahren[3]) dasjenige ausgewählt, das den mannigfachen Forderungen am besten genügt. Einen großen Vorteil der elektrischen Methode bedeutet die Möglichkeit der Verstärkung kleiner Meßgrößen, jedoch dürfen wir hier keinen wesentlichen gewichtlichen Aufwand beanspruchen, wie er bei Röhrenverstärkern unerläßlich ist.

Daher wurden zur Erzeugung der Meßgrößen der Effekt der Widerstandsänderung von Drähten bei elastischer Längenänderung und für ihre Vergrößerung der neuerdings entwickelte Bolometerverstärker angewendet. Die Quotientenbildung besorgt ein Brückenkreuzspulinstrument.

Das Widerstand-Zugmeßverfahren wurde erstmalig durch Nernst[4]) bekannt. Über seinen praktischen Einsatz lagen keine Erfahrungen vor. In vorbereitenden Arbeiten konnte es soweit entwickelt werden, daß die Verwendung im Flugzeug Erfolg versprach. Um seine grundsätzliche Eignung darzulegen, zeigt Bild 2 das Indikatordiagramm eines Einzylindermotors, aufgenommen mit einem hierfür entwickelten Drahtgeber[5]). Bild 3 stellt den Verlauf des Schweißdruckes einer Programmpunktschweißung dar, der mit einer Druckmeßdose nach Bild 4 bestimmt worden ist[6]).

Mit Gebern dieses Prinzips läßt sich der Bolometerverstärker gut vereinigen. Seine Trägheit (etwa 0,2 s bis zum Endausschlag) wirkt sich günstig aus, da die vom Motor auf die Zelle ausgeübten Schwingungen, die der belastete Geber getreulich mißt, im Verstärker so stark gedämpft werden, daß nur die von den Änderungen des Flugzustandes herrührenden Gewichtsänderungen bei der Verstärkung berücksichtigt werden.

II. Die Meßdosen.

Die für die Kraftmessung verwendeten Widerstandsdrähte bestehen aus Konstantan von 0,06 mm Dicke. Neben dem geringen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes lassen weitere Eigenschaften die besondere Eignung des Konstantans für das Widerstands-Zugmeßverfahren erkennen.

Der lineare Bereich der Widerstandszunahme ΔW, mit anderen Worten der Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes, erstreckt sich bis zu einer Belastung von etwa

*) P 521.

[1]) Für die sorgfältige Durchführung mehrerer Versuchsarbeiten sind wir Ing. Alexander Spatz, Berlin-Adlershof, zu Dank verpflichtet.

[2]) Vom Verf. C. vorgeschlagen.

[3]) Neuere Zusammenstellung derselben bei P. M. Pflier, Elektrische Messung mechanischer Größen, Berlin 1940.

[4]) G. Keinath, Die Technik elektrischer Meßgeräte II.

[5]) J. Zeyns, Unveröffentlichter Bericht der DVL des Jahres 1935.

[6]) Aus der Arbeit von E. Oßwald im Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 542.



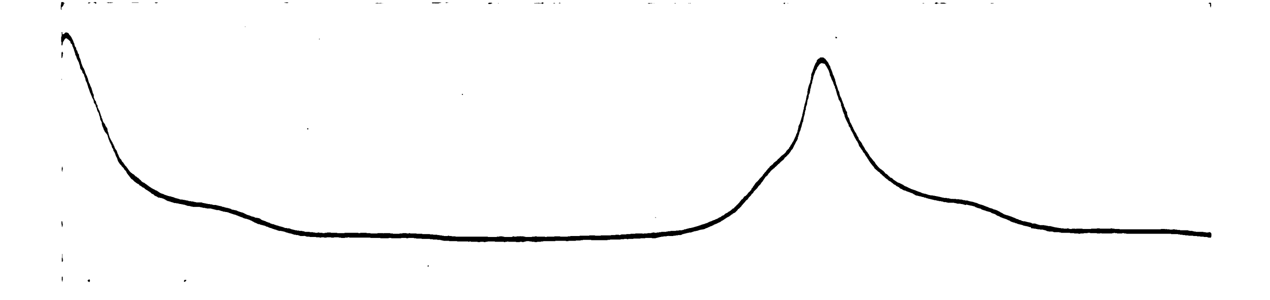


Bild 2. Indikatordiagramm eines Einzylindermotors 1500 U/min, Leistung 30 PS.

40 kg/mm² bei einer Zerreißfestigkeit von 80 kg/mm². In Bild 5 sind die gemessenen Eigenschaften dieses Materials über der Zugbelastung aufgetragen[7]).

Bemerkenswert ist, daß die Widerstandsänderung bei Konstantan fast ausschließlich durch die Formänderung erklärt ist, während bei 12 weiteren vergleichsweise untersuchten Materialien außer dem Formanteil ein von der Strukturänderung bei Belastung abhängiger Anteil, d. h. eine Änderung des spezifischen Widerstandes, bestimmend auf die Größe des Effektes einwirkt. Der letztere Anteil ist offensichtlich von der Vorgeschichte des Drahtes abhängig und daher je nach Herstellungsart und Hersteller verschieden groß. Bei Konstantan ist diese Unsicherheit nicht vorhanden[7]).

Die äußere Form der Meßdosen, in denen die Konstantandrähte ausgespannt werden, wurde weitgehendst der bisherigen Spannverschraubung des Flugzeugkraftstofftanks ähnlich gestaltet, wie ein Vergleich beider Ausführungen in Bild 6 zeigt, um das Meßgerät ohne jegliche bauliche Änderung am Tank nachträglich in das Flugzeug einbauen zu können. Den Aufbau dieser Meßdosen erläutert Bild 7.

[7]) E. Czerlinsky, Untersuchungen über die Widerstandänderungen von Drähten durch Zug. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, S. II 377.

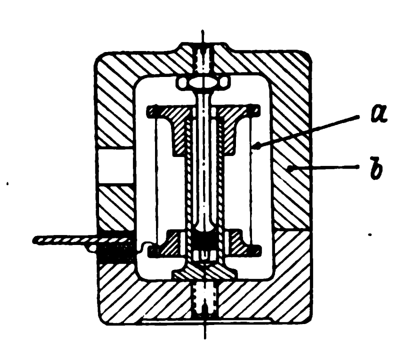


Bild 4. Elektrische Druckmeßdose. a = Draht, b = Federkörper.

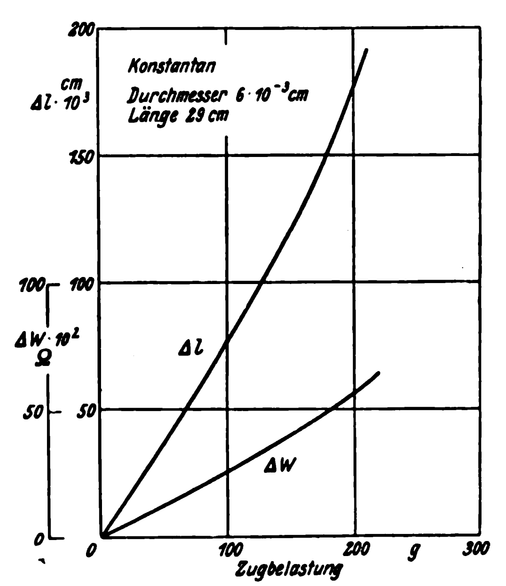
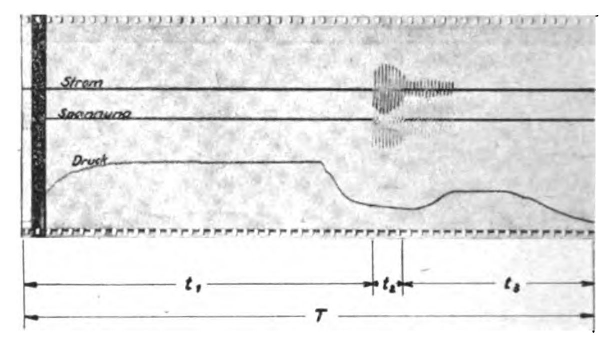


Bild 5. Widerstands- und Längenänderung in Abhängigkeit vom Zuge.



T = Gesamtdauer der Punktschweißung
t_1 = Zeit der vorbereitenden Druckgebung
t_2 = Zeit der Verschweißung
t_3 = Zeit der Nachbehandlung

Bild 3. Punktschweißung mit Programmsteuerung (Oszillogramm).

Das den Tank tragende Spannband ist in der Büchse B verschraubt, die ihrerseits durch ein Rohrstück R in der Trägerkonstruktion des Flugzeuges geführt wird. Sie überträgt das gesamte Tankgewicht in senkrechter Lage über den als Federkörper ausgebildeten Geber G auf den Träger. Dagegen hat der Geber in Schräglage nur den der Neigung entsprechenden Anteil der Last aufzunehmen. Eine richtige Spielbemessung zwischen B und R sorgt dafür, daß störende Reibungskräfte bei Neigungsänderungen nicht auftreten. Der Geber ist in einem balligen Ring gelagert und im oberen Teil der Büchse B eingeführt. Sein Federweg beträgt bei 100 kg Last etwa 0,05 mm. Diese Längenänderung wird auf die Meßdrähte übertragen, die im Inneren des Federkörpers zwischen zwei Bernsteinbüchsen derart angespannt sind, daß sie bei Belastung des Gebers eine Entlastung erfahren. Hieraus ergibt sich der wichtige Vorteil, daß die Drähte bei Überlast am Tank nicht reißen können und ihre Vorspannung bei leerem Tank bis zur Elastizitätsgrenze wachsen darf. (Die Vorspannung der Meßdrähte wird mittels der Spannschraube S eingestellt bei gleichzeitiger Messung des elektrischen Widerstandes des Drahtes.) Infolge dieser Maßnahme erreicht die Meßgröße, das ist das Verhältnis von Widerstandsänderung zu Laständerung, ihren Maximalwert. Sie beträgt bei einem Ausgangswiderstand von 36 Ω etwa $60 \times 10^{-3}\ \Omega/100$ kg.

Der Einfluß des Temperaturbeiwertes des verwendeten Widerstandsdrahtes wird dadurch aufgehoben, daß ein zweiter ungespannter Draht gleicher Eigenschaft im Innern des mit Öl gefüllten Gebers ausgelegt und mit dem Meßdraht in einer Wheatstone-Brückenschaltung vereinigt wird. — Temperaturänderungen bewirken aber außerdem Änderungen der Vorspannung des Meßdrahtes, da der Ausdehnungsbeiwert seines Werkstoffes von dem des Federkörpers ab-



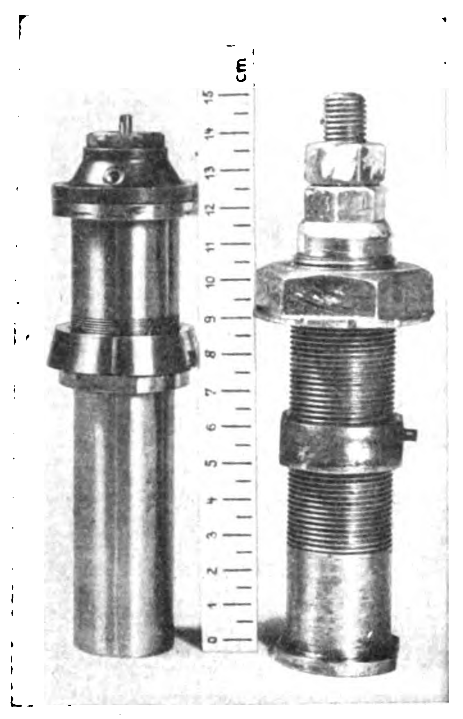


Bild 6. Meßdose und bisherige Spannbandverschraubung.

weicht. Dieser Einfluß wurde unterdrückt durch Einsetzen entsprechend bemessener Invar-Stücke in die Spannschraube der Meßdose; eingehende Versuche in der Kältekammer erwiesen die gute Wirksamkeit dieser Maßnahme. — Um schließlich das Auftreten von Thermokräften zu unterbinden, wurde für die gesamte Leitungsführung innerhalb der Meßdosen ausschließlich Konstantan verwendet und sämtliche Verbindungen durch Schweißen hergestellt. Dadurch wurde jegliche Verwendung von Lötzinn an den dünnen Drähten, die auch eine unerwünschte Veränderung des Temperaturbeiwertes der Drähte zur Folge hat, sorgfältig vermieden.

Die Nachprüfung einiger vor längerer Zeit fertiggestellter Meßdosen ergab das bemerkenswerte Resultat, daß das Verhältnis des Widerstandes des gespannten zu dem des ungespannten Drahtsystems sich nicht verändert hat (Meßgenauigkeit $1/10^0/_{00}$, Beobachtungsdauer drei Jahre).

Bild 8 zeigt den in einem schwenkbaren Versuchsrahmen aufgehängten Kraftstoffbehälter, der zur Erprobung im Labor verwendet wurde. Er wird von sechs Meßdosen ge-

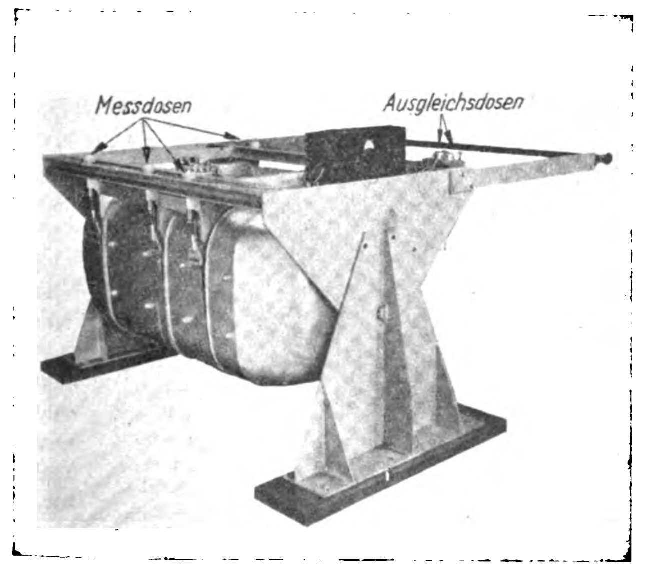


Bild 8. Versuchsaufbau.

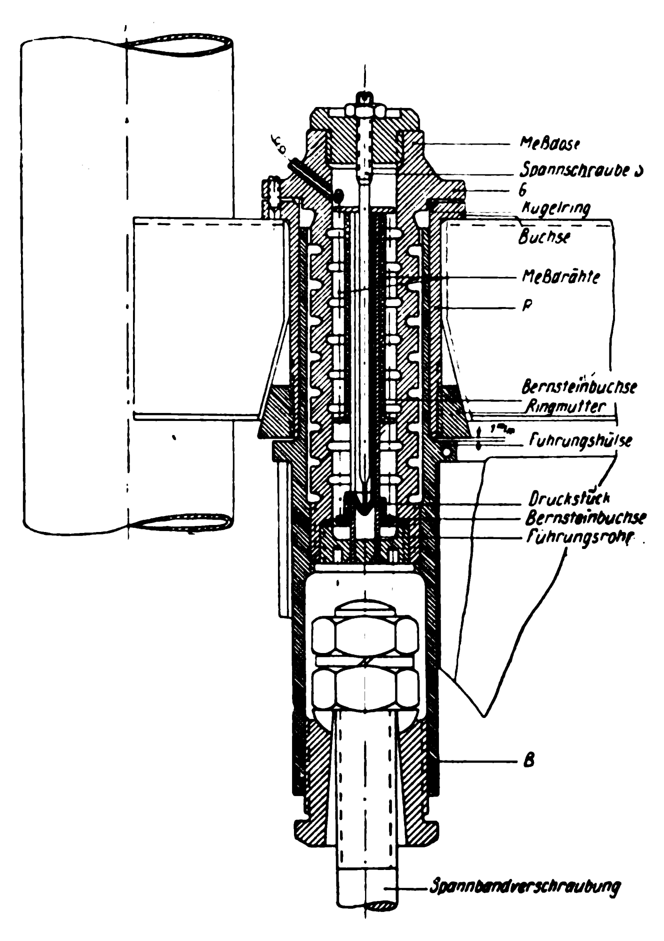


Bild 7. Aufbau der Meßdose.

tragen. Rechts sind die Deckel der beiden Ausgleichdosen sichtbar, Verstärker- und Anzeigeinstrument sind in dem schwarzen Gehäuse untergebracht. Die Kraftstoffleitungen werden elastisch an den im Bilde sichtbaren Tankkopf angeschlossen, um die störende Einwirkung äußerer Kräfte auszuschalten.

III. Die Ausgleichdosen.

Einfacher als der Aufbau der Meßdosen ist derjenige der Ausgleichdosen, die, wie bereits erläutert, Unabhängigkeit der Anzeige von Beschleunigungs- und Lageänderungen bewirken. Sie enthalten, wie Bild 9 zeigt, lediglich eine an einem Konstantandraht aufgehängte Kugel von 30 g Gewicht, die seitlich geführt ist, sowie einen gleich langen, unbelasteten Draht zur Erzielung der Temperaturunempfindlichkeit. Das Verhältnis der maximalen Kraftstoffmasse zur Ausgleichsmasse beträgt 15 000 : 1. Die Dosen sind wiederum mit einem geeigneten Öl gefüllt.

IV. Brücken, Verstärker und Quotientenbildung.

Die gesamte Anlage des Kraftstoffvorratsmessers ist im Schaltplan, Bild 10, zusammengefaßt. Die Meßdrähte der den Behälter tragenden Meßdosen sind als Widerstände R_1 dargestellt, ihre unverspannten Begleiter R_2 sind mit ihnen in der Brücke B_1 zusammengefaßt. Die von den beiden Ausgleichsdosen gebildete Brücke B_2 enthält die belasteten Drähte R_3 und die unbelasteten R_4. Beide Brücken liegen an der Gleichspannungsquelle S (Bordbatterie), die von ihnen den Eingangsklemmen E zugeführten Steuerspannungen werden mittels der Widerstände W feingeregelt, V_1 und V_2 sind Bolometerverstärker. Ein Umformer U, der an S angeschlossen ist, liefert ihnen die Relaisspannungen. Im Anzeigeinstrument I wird der Quotient der beiden von den Verstärkern abgegebenen Stromstärken gebildet.

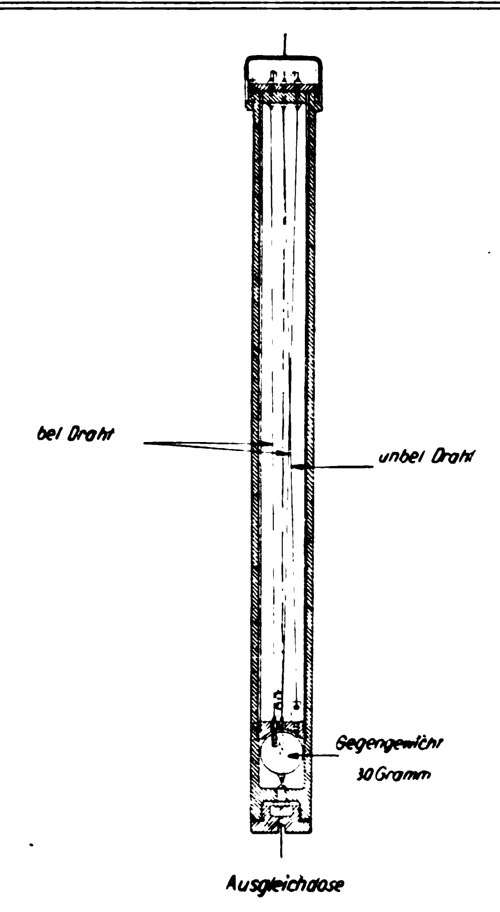


Bild 9. Ausgleichdose.

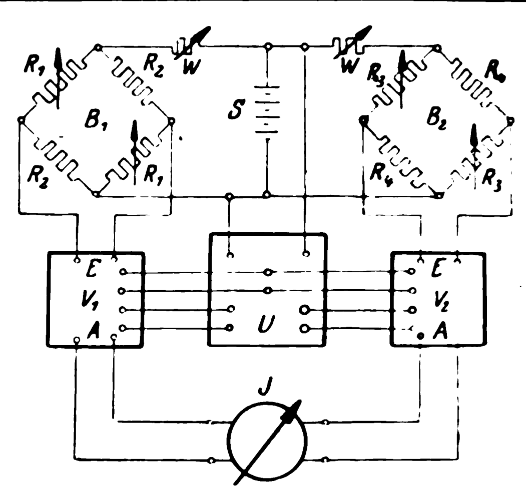


Bild 10. Schaltplan des Kraftstoffvorratsmessers.

Der Abgleich der Brücken war schon weitgehend dadurch erzielt, daß die Widerstände der beiden Drahtsysteme jeder Dose bis auf einen geringen Restbetrag einander glichen, der genauere Abgleich wurde in den Verbindungsleitungen vorgenommen. Und schließlich konnte noch an den Verstärkern eine Nullpunkt-Korrektion vorgenommen werden, so daß bei unbelasteten Gebern die Ausgangsströme beider Verstärker gleich Null waren.

Die eingesetzten Zwerg-Bolometer-Verstärker[8]) waren an Brücke und Instrument angepaßt, ihr Verstärkungsgrad betrug wahlweise 2 bis 4 mA je mV. Ihre Kennlinie ist linear, der Aussteuerbereich 15 mA. Bild 11 zeigt eine Ausführungsform des Verstärkers[9]), der Deckel trägt die Korrektionsschraube. Durch sorgfältige Austarierung der in den Verstärkern enthaltenen Drehspulinstrumente können Lagefehler vermieden werden.

Es ist bemerkenswert, daß sich diese Verstärker, die seinerzeit in den ersten Laborausführungen vorlagen, den robusten Anforderungen im Flugzeug durchaus gewachsen zeigten.

Die hier getroffene Anordnung der Verstärker hat die günstige Eigenschaft, daß die Anzeige in weiten Grenzen unabhängig ist von den Speisespannungen der Brücken und den Relaisspannungen der Verstärker.

Auf das Höhenverhalten der Bolometerverstärker wurde besondere Aufmerksamkeit gerichtet. Bis zur Höhe von 3000 m ergibt sich nach unseren Erfahrungen noch keine Veränderung des Quotienten mit der Höhe. Wie zu erwarten, zeigte sich zwar mit der abnehmenden Luftdichte eine Temperaturerhöhung der Nickeldrahtwendel der Bolometerverstärker. Da jedoch diese Erwärmung und die mit ihr verbundene Widerstandserhöhung in allen 4 Zeigen jeder Bolometerbrücke in gleichem Maße auftritt, so ist der Höheneinfluß nicht wirksam.

Jeder Bolometerverstärker benötigt zum Betriebe zwei Spannungsquellen: Eine zum Betrieb der Düse, mit deren Luftstrom die Wendel gekühlt werden (6 V, 0,1 A, 100 Hz), und eine weitere für die an der Nickeldrahtbrücke liegende Relaisspannung (6 V, 0,3 A). Da die beiden Brücken B_1 und B_2 direkt aus der Bordbatterie gespeist werden, mußte weiterhin die galvanische Trennung der beiden Meßzweige eingehalten werden. Das Umformgerät U (Bild 10) erzeugt die Betriebsspannungen der Verstärker über einen NSF-100-Hz-Zerhacker mit nachgeschaltetem Transformator. Drei getrennte Sekundärwicklungen entnehmen die Spannungen für die verschiedenen Kreise. Die unter den Düsen befindlichen Winderzeuger wurden aus einer Sekundärwicklung betrieben.

Das Anzeigeinstrument ist ein Brückenkreuzspul-Instrument. Die Anzeige des Quotienten a/b reichte von der Kraftstoffüllung 0 bis zu der bei maximaler Füllung und der Beschleunigung 3 g hervorgerufenen Belastung.

Der gesamte Leistungsbedarf der Anlage beträgt etwa 15 W und bedeutet für die Bordbatterie nur eine geringe Belastung.

V. Die Flugerprobung.

Die Flugerprobung des Gerätes wurde ergänzt durch eine Beobachtung der Zeitbeständigkeit der Anlage, die sich über ¼ Jahr erstreckte und keine Veränderungen der Anzeige nachwies. Die Flugmessungen befriedigten und zeigten, daß das Gerät bis etwa 3 g und bis etwa 50° Neigung richtig anzeigt. Lediglich beim starken Slippen des Flugzeuges

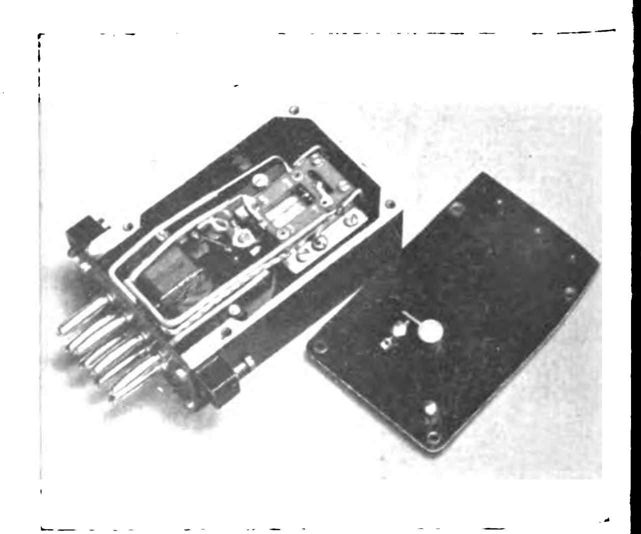


Bild 11. Bolometer-Verstärker.

[8]) L. Merz, Bolometerverstärker. ATM (1937). Z. 62—2.
L. Merz, Theorie der selbstkompensierenden Gleichstromverstärker mit direkt wirkender Steuerung. Arch. f. El.Techn. Bd. 31 (1937), S. 1.
[9]) Siemens-Werkfoto, das Herr Dr.-Ing. L. Merz freundlicherweise zur Verfügung stellte.



das bisweilen vor der Landung hervorgerufen wurde, trat eine Anzeigefälschung ein. Die Bolometer werden dann entsprechend ihrer Einbaulage um die Achse ihres Drehspulsystems geschwenkt und dieses wird zu Drehschwingungen veranlaßt.

Gelegentlich riß ein vorgespannter Draht an einer Schweißstelle infolge Dauereinwirkung der Erschütterungen. Durch gesteigerte Sorgfalt bei der Fertigung unter Berücksichtigung der mit diesen ersten Musterdosen gesammelten Erfahrungen läßt sich mit Sicherheit die befriedigende Dauerfestigkeit aller Verbindungsstellen der Drähte erreichen.

Während der Meßflüge wurde die Anzeige des Vorrates gleichzeitig mit den Anzeigen von Lagen- und Beschleunigungsmessern gefilmt.

VI. Zusammenfassung.

Das hier beschriebene Gerät ermöglicht Gewichtsbestimmungen einer veränderlichen Masse im bewegten Bezugssystem mittels ihres Vergleiches mit einer wesentlich kleineren, unveränderlichen Masse. Die Messung erfolgt mit Dehnungsmessern, die elastisch verspannte Drähte enthalten, auf elektrischem Weg.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 20 | LFG. 10 SEITE 269 BIS 300 | MÜNCHEN, 8.12.1943

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebeluft Adlershof.

Die Herren Verfasser erhalten von ihren Aufsätzen jeweils 50 Fortdrucke ohne besondere Anforderung.

Erscheinungsweise: Die Schriftenreihe erscheint in Monatslieferungen. Sie kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Halbjahresbezugspreis RM. 12.— einschließlich Zeitungs- und Verpackungsgebühr, zuzüglich Zustellgebühr.

Ausland siehe oben: Halbjährlich durch die Post (in solchen Ländern, in denen Postbezug zugelassen) oder durch den Buchhandel bei jahresweiser Bestellung.

Einzelheft: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr. Nach dem Ausland nur gegen Voreinsendung des Betrages.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangenen Bandes erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Einzellieferungen werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Schriftenreihe direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Bandes Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.

Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.

Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 8. Dezember 1943 Lfg. 10

Zur Frage der Herstellung hochbelastbarer Verbundgleitlager für Verbrennungsmotore*).

Von F. Bollenrath und W. Siedenburg.

Bericht des Instituts für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Außer den Maßnahmen zur Entgasung der Bleibronzeschmelzen sind die Abkühlungsbedingungen nach dem Guß die wesentlichsten Faktoren für die Gefügeausbildung. Mit verschiedenen Geschwindigkeiten abgekühlte Verbundguß-Bleibronze-Lager werden mit Röntgenstrahlen und metallographisch untersucht. Der Zusammenhang zwischen Ausgußdicke, Gefüge und Belastbarkeit wird ermittelt. Ferner wird die Bildung von Schichten zwischen Bleibronze und Stahlstützschale behandelt. Schließlich werden Arbeiten über die elektrolytische Herstellung von Lagermetallschichten aus Kupfer-Blei-, Silber-Blei-Legierungen und Silber angeführt und die Ergebnisse der Untersuchung auf Tragfähigkeit mitgeteilt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Unter den hochbelastbaren Gleitlagern, wie sie in Verbrennungskraftmaschinen mit geringem Leistungsgewicht verwendet werden, nehmen die Verbundgußlagerschalen und -büchsen mit Bleibronze als Lagermetall in Stahlstützschalen wegen der insgesamt guten Lagereigenschaften heute eine hervorragende Stellung ein. Ihre Entwicklung begann schon vor mehreren Jahren, kann aber auch heute noch nicht als abgeschlossen bezeichnet werden. Den stetig steigernden Anforderungen suchen fortlaufend verbesserte Herstellungsverfahren gerecht zu werden. Daneben laufen ständig Bestrebungen, Gleitlager mit noch höherer Tragfähigkeit darzustellen. So sind in letzter Zeit verschiedene andere Werkstoffe, wie z. B. Silber, Silber-Bleilegierungen, Aluminiumlegierungen gegossen, gesintert oder galvanisch erzeugt auf ihre Eignung untersucht worden. Mit einigen derartigen Arbeiten befaßt sich der folgende Bericht.

II. Kupfer-Blei-Legierungen.

In einer früheren Arbeit wurden die wesentlichsten Gesichtspunkte für metallurgische Maßnahmen zum Erzielen eines möglichst gas- und seigerungsfreien, feinkörnigen Bleibronzegusses dargelegt[1]). Wie aus weiteren Untersuchungen, über die in folgendem berichtet wird, hervorgeht, sind neben einer zweckmäßigen Schmelzführung und -zusammensetzung die Abkühlungsbedingungen für die Gefügeausbildung wesentlich. Die Versuche, die hierüber angestellt wurden, befaßten sich mit sogenannten binären Bleibronzen, denen zur Desoxydation kurz vor dem Vergießen Phosphor über eine Kupferlegierung mit 10% Phosphor zugesetzt wurde, in einer solchen Menge, daß die Schmelze ein wenig mehr Phosphor enthielt, als zur Beseitigung des Sauerstoffs notwendig war, da der Sauerstoffgehalt der Schmelze nur roh abgeschätzt werden konnte. Ferner wurden die Fragen nach dem Einfluß der Ausgußdicke in Stahlbuchsen oder -schalen auf die Gefügeausbildung und die Belastbarkeit in einer Lagerprüfmaschine sowie die manchmal an der Bindungsfläche zwischen Stahl und Bleibronze auftretenden Zwischenschichten behandelt. Alle Schmelzen wurden im kernlosen Induktionsofen mit Graphittiegel erschmolzen. Der Ausguß wurde nach dem Tauchverfahren in geschweißte Formen eingebracht.

Weitere Versuche behandelten die Herstellung der Verbundgußlager nach dem Schleuderverfahren unter elektrisch-induktiver Erhitzung[2]).

Im folgenden werden ebenfalls einige Erfahrungen mit galvanisch auf Stahl abgeschiedenen Blei-Kupferschichten mitgeteilt.

1. Einfluß der Abkühlungsbedingungen auf die Gefügeausbildung.

Der Schmelzeinsatz bestand zu 40% aus Neumaterial, davon ¾ Elektrolytkupfer, das zunächst niedergeschmolzen wurde, und ¼ Hüttenweichblei; der übrige Einsatz waren in Masseln gegossene Reste früherer Bleibronzeschmelzen mit ebenfalls rund 25% Blei. Bei einer Temperatur von 1180 bis 1200° wurden in die Schmelze die Stahlformen (34 mm Außendurchmesser, 2,5 mm Wanddicke der Stahlbuchse aus StC 10.61, Dicke des Bleibronzeausgusses 6 mm) eingetaucht, die zuvor mit einer hauptsächlich Borax enthaltenden Kupferlötpaste bestrichen und auf 900° vorgewärmt waren. Die Tauchdauer betrug eine Minute. Danach wurden die Probekörper mit verschiedener Geschwindigkeit von der Temperatur der Schmelze abgekühlt durch folgende Arten der Behandlung: a) Erkalten an ruhender Luft, b) Eintauchen in Öl, das auf 150° vorgewärmt war, c) Eintauchen in Öl mit Raumtemperatur, Abbrausen mit Wasser, wobei einmal d) 0,32 cm³, und ein anderes Mal e) 1,0 cm³ Wasser auf den Quadratzentimeter Oberfläche der Stahlstützschale aufgespritzt wurden[3]) und schließlich f) Eintauchen in Wasser. Die an Luft erkalteten Ausgüsse zeigten nach Röntgen-Schattenaufnahmen neben Bleiseigerungen und unregelmäßigem Bleinetzwerk manche, teils mit Blei aus-

[1]) F. Bollenrath, Metallwirtschaft Bd. 20 (1941), S. 1063/68.

[2]) F. Bollenrath u. W. Siedenburg, Herstellung von Bleibronzen-Verbundlagern durch elektrisch-induktive Erhitzung. Luftf.-Forschg. Bd. 20 (1943), S. 280.

[3]) s. hierzu Zahlentafel 3.

gefüllte Risse. Die gleichmäßigste Bleiverteilung wurde durch Abkühlung in Öl und in der stärkeren Wasserbrause erhalten. Bild 1 und 2 zeigen die Gefügeausbildung bei Luft- bzw. Ölabkühlung; die Korngrößen verhalten sich etwa wie 1:5 bis 1:10. Die Bindung zwischen Bleibronze und Stahl war in allen Fällen einwandfrei. Aus dieser Versuchsreihe geht hervor, daß in weit stärkerem Maße als durch Zusätze die Korngröße durch die Abkühlungsbedingungen beeinflußt werden kann.

In gleicher Weise mit größeren Probekörpern (78 mm Außendurchmesser, Wanddicke der Stahlbuchse aus StC 10.61 9,5 mm, Ausgußdicke 6,5 mm) durchgeführte Versuche ergaben bei der Abkühlung durch Eintauchen in Wasser zwar ein sehr feines Korn, aber stark geschichtete unterschiedliche Bleigehalte und einige Schwindungslunker in den oberen, bleiärmeren Schichten (die Lager wurden in Richtung der Längsachse getaucht). Bei der Abkühlung mit starker Wasserbrause wurde eine sehr gleichmäßige Bleiverteilung bewirkt, jedoch war im Gegensatz zu den kleineren zuerst beschriebenen Proben im Röntgenschattenbild eine Körnung noch erkennbar. Erwartungsgemäß muß also die Wärmeabfuhr den Abmessungen der Stahlstützschale und des Bleibronzeausgusses angepaßt werden[4]).

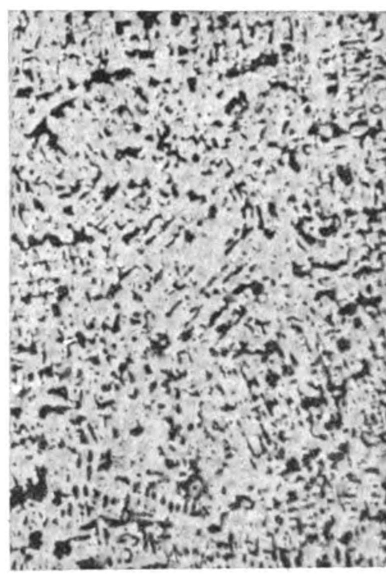


Bild 1. Gefüge einer Bleibronze bei Abkühlung in Öl (Heißdampfzylinderöl) mit Raumtemperatur. (Vergr. 100fach.)

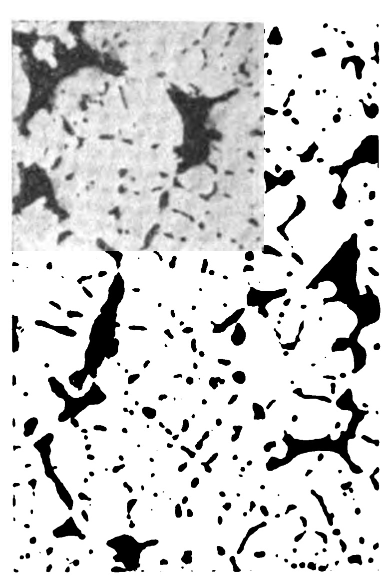


Bild 2. Gefüge der Bleibronze bei Abkühlung in ruhender Luft. (Vergr. 100fach.)

2. Einfluß der Ausgußdicke auf die Gefügeausbildung und Laufeigenschaften bei verschiedenen Abkühlungsarten.

Mit den Abkühlungsgeschwindigkeiten, die durch Eintauchen in Öl und durch die in weiteren Grenzen veränderliche Wasserbrause erreicht werden und sich als günstig erwiesen hatten, wurde in weiteren Versuchsreihen der Einfluß der Ausgußdicke bei konstanter Wanddicke der Stahlschale ermittelt. Als Versuchskörper dienten Lagerbuchsen in zwei Größen: Die Innendurchmesser der Stahlrohre betrugen 60,6 mm bei 2,7 mm Wanddicke und 29 mm bei 2,5 mm Wanddicke. Die Längen waren 75 und 50 mm. Die Dicken der Bleibronzeschichten waren 3, 5 und 7 mm. Entsprechend den Erfahrungen, die inzwischen gesammelt werden konnten, wurden die geschweißten Formen weder vorgewärmt noch mit Flußmitteln bestrichen, sondern nur entzundert, entfettet und getaucht. Die Tauchzeit, die von dem Stahlvolumen der Tauchform, der Menge und Temperatur der Bleibronzeschmelze abhängt, betrug in dieser Versuchsreihe 50 s. Durch die Untersuchung mit Röntgenstrahlen an den bis auf 1,2 mm Dicke ausgedrehten Ausgüssen wurde bei den Buchsen mit 66 mm Außendurchmesser folgendes festgestellt: Bei 7 mm Ausgußdicke tritt öfters ein ausgeprägtes Bleinetzwerk auf mit einer Maschenweite von 0,5 bis 3 mm. Im übrigen ist die Bleiverteilung gleichmäßig. Von den 5 mm dicken Ausgüssen ergibt das Röntgenschattenbild im allgemeinen ein ganz gleichmäßig geschwärztes Bild bis auf vereinzelte Schwindungsrisse in dem obersten, 15 mm breiten Teil der Lagerschalen. Bei den 3 mm dicken Ausgüssen waren in der oberen Hälfte der Buchsen einige Schwindungsrisse und in dem oberen Viertel verschiedene Schwindungslunker entstanden, die nicht mehr mit Blei ausgefüllt wurden. Im übrigen waren punktförmige Bleiansammlungen über die ganze Lagerbuchse verteilt. Danach war die gewählte Abkühlungsgeschwindigkeit also richtig für die Form mit 5 mm dickem Bleibronzeausguß. Von den Lagerbuchsen mit 34 mm Außendurchmesser zeigten die Röntgenaufnahmen der in der Wasserbrause abgekühlten Proben nur geringfügige Unterschiede, abgesehen von einem schwach ausgeprägten, engmaschigen Bleinetzwerk in dem 7 mm dicken Ausguß. Die zur Abkühlung aufgespritzte Wassermenge war nahezu doppelt so groß wie bei den größeren Buchsen. Die in Öl getauchten Lager zeigten in einer mit der Ausgußdicke zunehmenden Deutlichkeit ein feinmaschiges Bleinetzwerk mit 1 bis 2 mm Maschenweite, außerdem vereinzelte Schwindungsrisse und stellenweise unterschiedlichen Bleigehalt, erkennbar an einem wolkenartigen Schwärzungsbild.

Die metallographische Untersuchung hatte folgendes Ergebnis: Bei der Abkühlung in der Wasserbrause ist die je Einheit der Oberfläche aufgespritzte Wassermenge für die mittlere Größe der Kupferdendriten ein entscheidender Faktor. Die größeren und kleineren Lagerbuchsen zeigten z. B. bei 7 mm dickem Bleibronzeausguß Unterschiede, wie sie in Bild 3 und 6 dargestellt sind, da sich die Oberflächen wie zwei zu eins unter Verwendung der gleichen Wasserbrause verhielten.

Mit abnehmender Dicke des Ausgusses wird das Bestreben der Bleibronze zur Transkristallisation des Kupfers stärker, wie aus einem Vergleich der Bilder 3 bis 5 für die großen sowie aus den Bildern 6 bis 8 für die kleinen Lagerschalen hervorgeht. Längere, senkrecht zur Bindungsfläche gewachsene Dendriten sind für hohe schwellende Belastungen ungünstig, da sie einer Rißbildung Vorschub leisten. Die Größe der Kupferdendriten und die Feinheit der Dendritenäste schwanken etwas innerhalb derselben Probengruppe, die unter ganz gleichen Bedingungen hergestellt sind in dem Maße, wie Bild 7 und 7a zeigen. Besonders charakteristisch für die aus dem unter Strom stehenden Hochfrequenzofen geschöpften und in der Wasserbrause abgekühlten Bleibronzeausgüsse ist die Bleiverteilung z. B. nach Bild 2 und Bild 6a, das in stärkerer Vergrößerung einen Ausschnitt aus Bild 6 wiedergibt. In den Kupferdendriten findet man an vielen Stellen kleine, rundliche Bleieinschlüsse.

Bei der Ölabkühlung trat der Einfluß der Ausgußdicke auf das Gefüge nicht so deutlich hervor wie bei der Wasserbrause. Mit abnehmender Dicke der Bleibronzeschicht wird ebenfalls die Neigung zur Bildung längerer, senkrecht zur Bindungsebene wachsender Kupferdendriten stärker, wie Bild 9 von einer Lagerbuchse mit 66 mm Außendurchmesser erkennen läßt. Auch fiel die Bleiverteilung nicht so gleichmäßig aus wie bei der Abkühlung mit der Wasserbrause, s. Bild 10. Gelegentlich wurden auch flächenförmige Bleiseigerungen parallel zu und in der Nähe der Bindungsfläche beobachtet. Derartige Bleiseigerungen sind bei schwellender Lagerbeanspruchung insofern ungünstig, als sie ein Abheben der Bleibronze von der Stahlschale fördern. Ein Beispiel bringt Bild 11.

[4]) Herrn Direktor Dr. Hinzmann, Admos Bleibronze, Dr. Springorum & Co. werde für die Unterstützung der Untersuchungen durch Bearbeiten der Rohlinge und Röntgenaufnahmen auch an dieser Stelle der verbindlichste Dank ausgesprochen.

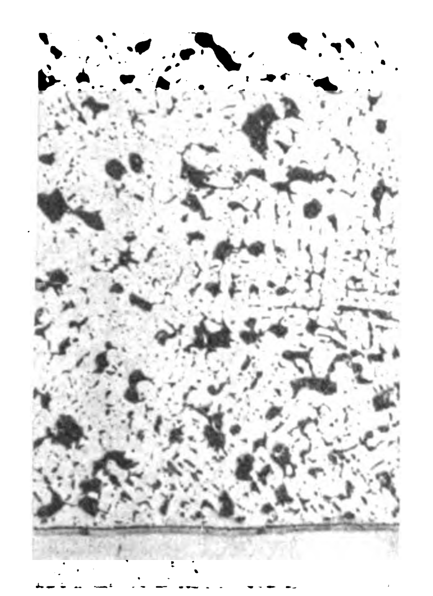


Bild 3. Gefüge der Bleibronze bei 7 mm dickem Ausguß und Abkühlung in der Wasserbrause; Außendurchmesser der Lagerbuchse 66 mm. (Vergr. 100fach.)

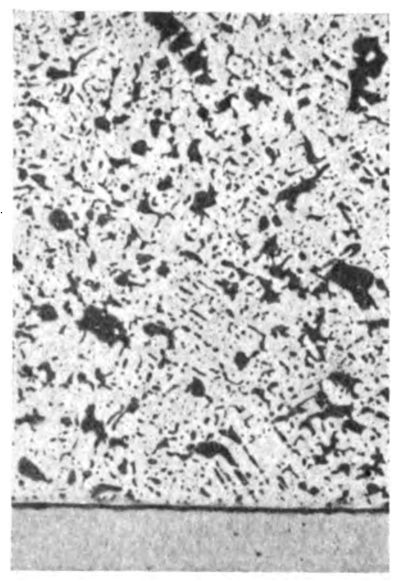


Bild 4. Gefüge der Bleibronze bei 5 mm dickem Ausguß und Abkühlung in der Wasserbrause; Außendurchmesser der Lagerschale 66 mm. (Vergr. 100fach.)

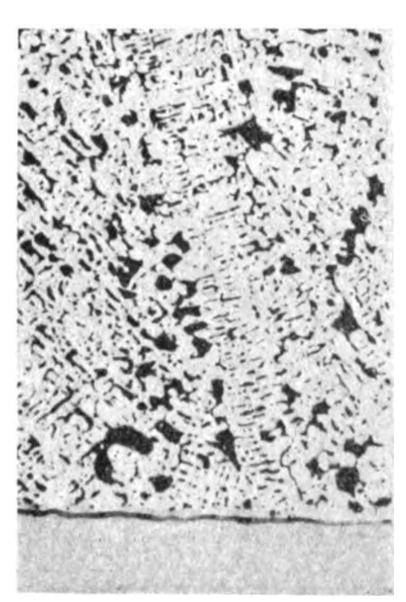


Bild 5. Gefüge der Bleibronze bei 3 mm dickem Ausguß und Abkühlung in der Wasserbrause; Außendurchmesser der Lagerschale 66 mm. (Vergr. 100fach.)

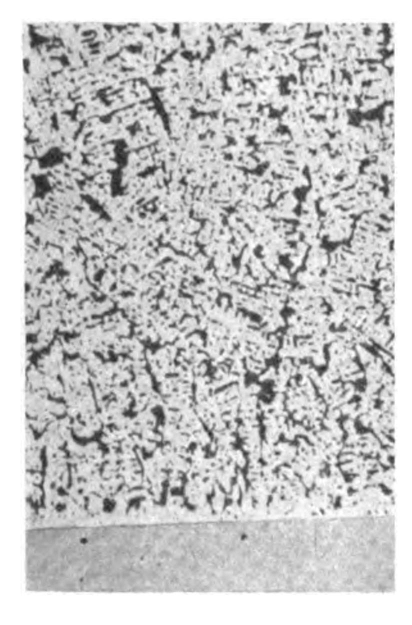


Bild 6 (links). Gefüge der Bleibronze bei 7 mm dickem Ausguß und Abkühlung in der gleichen Wasserbrause wie bei der Bleibronze in Bild 3; Außendurchmesser der Lagerbuchse 34 mm. (Vergr. 100fach.)

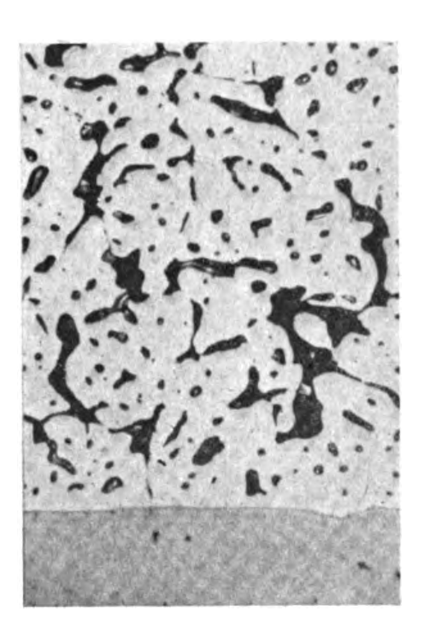


Bild 6a (rechts). Wie Bild 6. (Vergr. 500fach.)

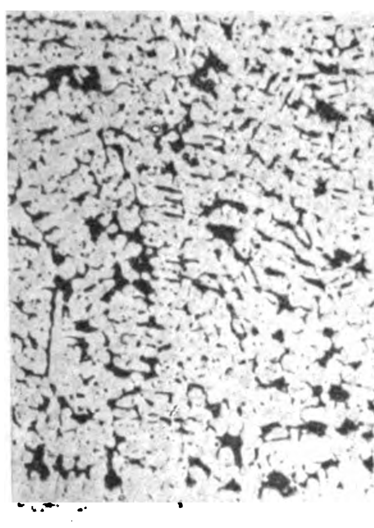


Bild 7 (links). Gefüge der Bleibronze nach Abkühlung mit Wasserbrause; Ausgußdicke 5 mm; Außendurchmesser der Lagerschale 34 mm. (Vergr. 100fach.)

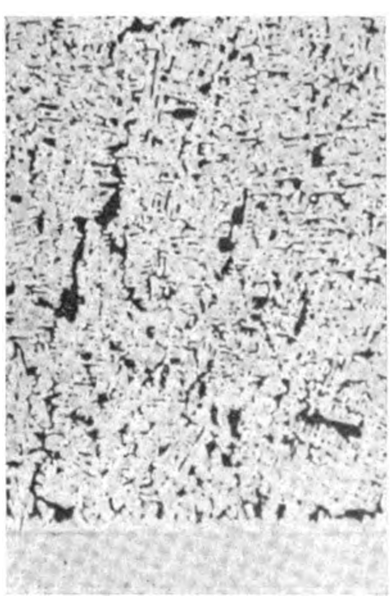


Bild 7a (rechts). Wie Bild 7. (Vergr. 100fach.)

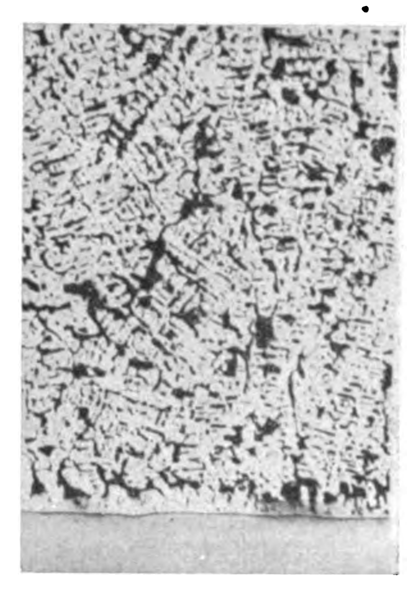
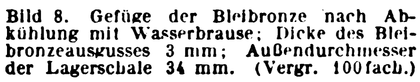



Bild 8. Gefüge der Bleibronze nach Abkühlung mit Wasserbrause; Dicke des Bleibronzeausgusses 3 mm; Außendurchmesser der Lagerschale 34 mm. (Vergr. 100fach.)

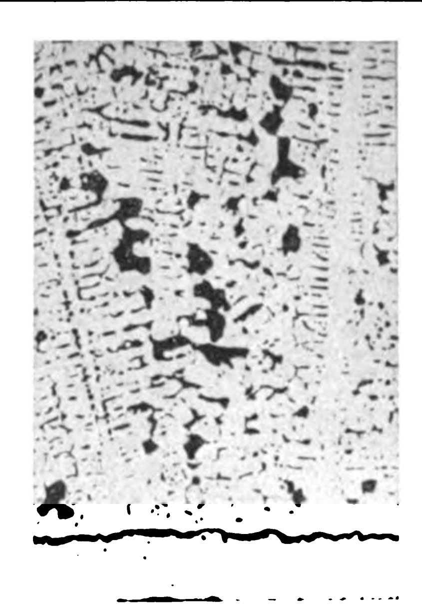


Bild 9. Gefüge der Bleibronze in einer Lagerbuchse mit 66 mm Außendurchmesser nach Ölabkühlung; Dicke des Ausgusses 3 mm. (Vergr. 100fach.)

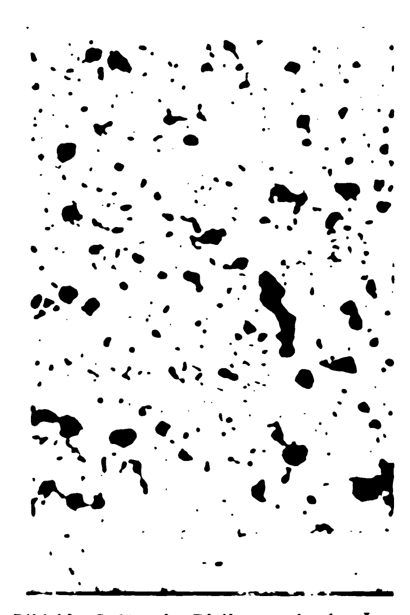


Bild 10. Gefüge der Bleibronze in einer Lagerschale mit 34 mm Außendurchmesser nach Ölabkühlung; Ausgußdicke 7 mm. (Vergr. 100fach.)

Die Bindung zwischen Stahl und Bleibronze war in allen Fällen sehr gut ausgebildet. Die Haftfestigkeit, wie sie durch Aufbiegeversuche festgestellt wird, war ebenfalls recht befriedigend. Bei den Lagerprüfläufen traten Versager, die auf mangelhafte Bindung oder Haftfestigkeit zurückzuführen wären, nicht auf. Nach den gesamten Versuchen zu urteilen, kommt eine schlechte Bindung nur bei sehr unsauberem Arbeiten vor.

Die Härte und ihre Abhängigkeit von der Temperatur bis 150° wurde nach Brinell festgestellt. Die Ergebnisse der Härtemessungen enthält Zahlentafel 1. Die Härte zeigt keine Abhängigkeit von der Ausgußdicke oder von der Abkühlungsart. Wie aus den im folgenden mitgeteilten Versuchsergebnissen (s. auch Zahlentafel 2) hervorgeht, bestand bei diesen Versuchen auch kein Zusammenhang zwischen der Brinellhärte und dem Laufverhalten.

Von den größeren Lagerschalen wurden jeweils mehrere Muster in einer Lagerprüfmaschine auf die im Dauerbetrieb ertragbaren höchsten Lagerdrücke geprüft. Die Lagerbuchsen wurden aus der unteren Hälfte jedes Rohlings herausgedreht. Bei allen Lagern betrug die Dicke des Lagermetalls bei den Versuchsläufen 0,4 bis 0,6 mm. Die Lauffläche war 20 mm breit und ohne Ölnuten. Das Öl, Rotring Eichöl, wurde durch den Wellenzapfen auf der unbelasteten Seite mit 4 Atmosphären Überdruck zugeführt. Das Lagerspiel betrug 1‰ des Durchmessers.

Die Belastung entspricht derjenigen durch eine umlaufende Unwucht, wodurch alle Teile des Lagers bei jeder Umdrehung ein Ursprungsdruckbelastungsspiel erfahren. Die Gleitgeschwindigkeit betrug dabei rund 6 m/s und die Öleintrittstemperatur 60° C. Der Wellenzapfen (rd. 59,5 mm Dmr.) war nitriert. Die Versuche verliefen ohne Pausen. Beginnend mit 250 kg/cm² wurde die Belastung stufenweise um 50 kg, nach Erreichen sehr hoher Drücke manchmal auch um 25 kg/cm² gesteigert. Jede Belastungsstufe wurde während 50 Stunden aufrechterhalten. In 50 Stunden erfährt jede Stelle der Lauffläche sechs Millionen Lastspiele. Die höchste, mindestens 50 Stunden lang ohne Schädigung ertragene Belastung wurde als höchste Tragfähigkeit angesehen. In Zahlentafel 2 sind die wichtigsten Einzelheiten der Versuchsläufe zusammengestellt.

Danach ergibt sich folgendes Bild: Die höchste Dauerbelastbarkeit — damit wird die Belastung bezeichnet, die ohne Anzeichen von Fehlerbildung während 50 Stunden ertragen wird — zeigen die 5 mm dicken Ausgüsse mit 400 bis 500 kg/cm² bei den in der Wasserbrause und 300 bis 450 kg/cm² bei den in Öl abgekühlten Rohlingen. Die



Bild 11. Bleiseigerung nahe der Bindungszone in einem Lager mit 34 mm Außendurchmesser nach Ölabkühlung. (Vergr. 100fach.)

größte Dauerbelastbarkeit ist bei den 7 mm dicken Bleibronzeschichten nach Abkühlung in der Wasserbrause bzw. in Öl 250 bis 300 kg/cm² und für die 3 mm dicken Schichten 300 bis 400 bzw. 200 bis 350 kg/cm². In fast allen Fällen wird

Zahlentafel 1. Härte verschiedener Bleibronzen in Abhängigkeit von der Temperatur.

Abkühlung in	Ausgußdicke mm	Brinellhärte H_B (2.5/15.6/180) kg/mm² bei den Temperaturen 20°	50°	100°	150°
Wasserbrause	3	43,5	38	38	33,5
		44,5	43	39	36,5
	5	45	48,5	47,5	44,5
		38,5	38	32	32
	7	47	46	46	44,5
		40	40	38	37
Öl	3	47,5	43,5	39	34,5
		41,5	40	36	35,5
	5	40	38	36	34,5
		36	35,5	32,5	31,5
	7	43,5	42	37	35,5

zur Not eine um 50 kg/cm² höhere Flächenpressung während weiterer 50 Stunden ausgehalten. Damit schält sich als klares Ergebnis heraus, daß die Abkühlung in der Wasserbrause günstiger war als die durch Öl, und daß bei 5 mm Ausgußdicke die höchste Tragfähigkeit erreicht wurde.

Zahlentafel 2. Ergebnisse der Untersuchung der Lagerbuchsen mit verschiedener Ausgußdicke und Abkühlungsart auf Dauerbelastbarkeit bei pulsierender Last*).

Lfde Nr.	Ausgußdicke mm	Abkühlung	Belastung*) kg/cm²	Versuchsdauer h	Befund
1	7	Wasserbrause	**250**	50	—
			300	40	in der Lauffläche bilden sich zahlreiche kleine Risse
2	7	»	**250**	50	—
			300	50	ein etwa 10 mm langer Querriß hat sich gebildet; eine Steigerung der Belastung auf 350 kg/cm² wurde nicht vertragen
3	5	»	250	50	—
			300	50	—
			350	50	—
			400	50	drei kleine etwa 2 mm lange Haarrisse
			425	29	unveränderter Laufspiegel
4	5	»	250	50	—
			300	50	—
			350	50	—
			400	50	—
			450	50	—
			475	50	—
			500	50	—
			550	50	vereinzelte kleine, gerade erkennbare Risse
5	3	»	250	50	—
			300	50	—
			350	18	einige Querrisse und Riefen, erste Anzeichen von Fressen
6	3	»	250	50	—
			300	50	—
			350	50	—
			400	50	—
			450	50	einige kleine Risse
7	3	Öl	250	50	drei Bruchstellen haben sich ausgebildet
8	3	»	250	50	—
			300	50	—
			350	22+68	nach 22 h Reibungsanstieg, nach kurzer Pause zur Besichtigung, bei der keine Fehler zu erkennen waren, Fortsetzung bis 90 h, danach an den Kanten feine Risse
9	5	»	250	50	—
			300	50	—
			350	45	an einer Seite mehrere kurze Anrisse (Kantenpressung?)
10	5	»	250	50	—
			300	50	—
			350	50	—
			400	50	—
			450	50	—
			500	50	in den Randzonen entstehen Querrisse
11	7	»	250	50	—
			300	50	—
			350	50	an den Kanten kurze Querrisse

*) Die im Dauerbetrieb mit Sicherheit erträgliche Höchstlast ist durch fette Ziffern besonders hervorgehoben.

Zwischen röntgenographischem und metallographischem Befund sowie Tragfähigkeit bestehen folgende Zusammenhänge: Ungünstig sind stark eingestrahlte, senkrecht zur Bindungsfläche sich erstreckende Dendriten, und zwar um so mehr, je gröber sie gewachsen sind; bei gleichen Abkühlungsbedingungen entstehen sie um so eher, je dünner der Bleibronzeausguß ist. Im Röntgenschattenbild sind sie meistens als körnige Struktur zu erkennen. Ebenfalls wirkt sich die Ausbildung einer als »Bleinetzwerk« bezeichneten Struktur ungünstig auf die Belastbarkeit aus; ein grobmaschiges Netzwerk ergibt geringere Tragfähigkeiten als ein engmaschiges. Bei Überbeanspruchungen ergeben beide Gefügearten typische Laufbilder, von denen einige Beispiele die Bilder 12 und 13 bringen. Mit der Ausbildung derartiger Laufbilder geht eine Erhöhung des Reibungskoeffizienten und der Lagertemperatur einher. Bei schwellender Belastung entstehen Risse, infolge der erhöhten Schubbeanspruchung an der Gleitfläche stärkere plastische Deformationen und Materialüberschiebung an den Rändern der Risse, wie aus einem Querschliff von der in Bild 13 dargestellten Lagerschale in Bild 14 und 15 hervorgeht. Hierdurch wurde der Lagerspalt stellenweise unzulässig eng und der Schmierölfilm zerrissen, so daß schließlich Heißlaufen und Fressen eintraten. Je kleinere, möglichst gleichachsige Kupferdendrite in unregelmäßiger Orientierung entstehen, und je feiner das Blei verteilt ist, um so besser ist die Tragfähigkeit, wie die Lagerbuchsen mit 5 mm dicken Ausgüssen zeigen.

Die Folgerungen, die sich aus den soeben beschriebenen Untersuchungen ergeben, sind folgende: Vorausgesetzt, daß eine gute, auf Gasfreiheit zielende Schmelzführung durchgeführt wird, sind die Abkühlungsbedingungen, die Ausgußdicke und in geringerem Maße das Verhältnis zwischen den Dicken der Stahlstützschale und der Bleibronzeschicht die wesentlich die Gefügeausbildung beeinflussenden Faktoren. Die Gefügeausbildung ist leichter durch die Abkühlung beeinflußbar, wenn die Stahlschale dünn ist, da die Unterschiede in der Abkühlungsgeschwindigkeit mit zunehmendem Abstand von der gekühlten Oberfläche geringer werden. Bei dünnen Stützschalen wird aber auch der Verzug während der Bearbeitung geringer. Dadurch kann der schließlich verbleibende Ausguß dünner gehalten und höher belastet werden. Wird eine höhere Festigkeit der Stützschale wegen besonders hoher örtlicher Beanspruchung, welche die Gefahr einer plastischen Deformation hervorruft, erforderlich, so erscheint es nicht abwegig, zu einer Stahllegierung zu greifen, die bei den gegebenen Abkühlungsbedingungen weit höhere Streckgrenzen hat als der vorwiegend benutzte unlegierte Kohlenstoffstahl StC 10.61. In früheren Arbeiten wurden solche Stähle entwickelt[5]). Ein wichtiger Gesichtspunkt für die Wärmeabfuhr ist ferner, daß sie möglichst senkrecht zur Bindungsfläche Stahl-Bleibronze erfolgt. Für einseitig begossene Lagerschalen kann diese Forderung immer erfüllt werden, dagegen nicht für doppelseitig begossene. Die Herstellung letzterer ist schwieriger, und der Konstrukteur wird deshalb derartige Ausführungen, wenn möglich, nicht vorsehen.

Einen Anhalt für die Abkühlungsbedingungen soll Zahlentafel 3 geben, in der für die Wasserbrausen die wichtigsten Daten aufgeführt sind. Die Abkühlungsverhältnisse sind gekennzeichnet durch die Menge Wassers, die in der Zeiteinheit auf die Einheit der äußeren Zylinderfläche des Rohlings aufgespritzt wird. Ferner sind die Wassermengen bezogen auf die Volumina des Stahls und der Bleibronze einzeln und zusammen, die der Einheit der äußeren Stahlzylinderfläche zukommen. Die spezifischen Wärmen des Stahls und der Bleibronzeschmelze geben zusammen mit der in der Zeiteinheit aufgespritzten Wassermenge einen zuverlässigen Anhalt für die bei Lagerformen mit anderen Abmessungen zu wählende Abkühlungsgeschwindigkeit.

[5]) H. Cornelius u. F. Bollenrath, Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 167/73; für eine Zugfestigkeit zwischen 110 bis 135 kg/mm² kann ein Stahl mit 0,15 bis 0,20 % C, 0,3 bis 0,45 % Si, 0,9 bis 1,1 % Mn, 0,5 bis 0,6 % Cr, rd. 0,2 % V, 0,12 bis 0,16 % Ti oder auch ein Stahl mit 0,15 bis 0,20 % C, 0,4 bis 0,65 % Si, 1,1 bis 1,3 % Mn, 0,45 bis 0,6 % V, 0,12 bis 0,16 % Ti empfohlen werden.



Bild 12 (links). Laufbild einer Verbundlagerschale mit grobem Bleinetzwerk in der Bleibronze nach dem Röntgenschattenbild. Z = Gleitrichtung. (Vergr. 2fach.)



Bild 13 (rechts). Laufbild einer Verbundlagerschale mit stark eingestrahlten Dendriten aus einem Benzinmotor. (Vergr. 1,5fach.)

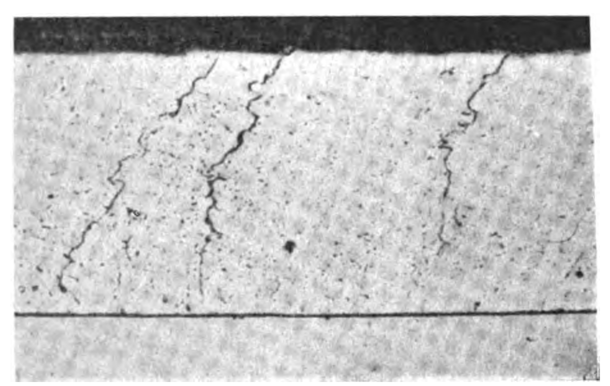


Bild 14. Querschnitt durch die in Bild 13 dargestellte Lagerschale; Risse längs der Kupferdendrite. (Vergr. 50fach.)

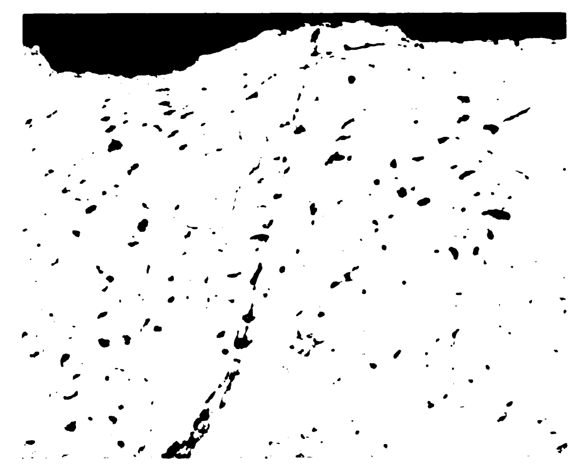


Bild 15. Plastische Verformung infolge der Reibkräfte und Materialüberschiebungen an den Rändern der Risse bei der in Bild 13 dargestellten Lagerschale. (Vergr. 200fach.)

3. Über die Zwischenschichten an der Bindungsfläche Stahlstützschale-Bleibronze.

Bei der metallographischen Untersuchung werden manchmal besondere Schichten zwischen Stahl und Bleibronze beobachtet, Bild 3 und 5. Im folgenden wird über die Umstände, die zur Bildung solcher Zwischenschichten führen, und über die Natur dieser Schichten berichtet.

Wie bei früheren, so wurden auch bei den Herstellungsversuchen zu den in den vorhergehenden beiden Abschnitten behandelten Verbundlagern wiederholt Zwischenschichten gefunden, und zwar vorwiegend bei den Lagern, die sofort nach der Desoxydation mit Phosphor geschöpft wurden. Da der Sauerstoffgehalt der Schmelze nur roh abgeschätzt werden und je nach Einsatz und Schmelzdauer wohl auch stark schwanken konnte, wurde manchmal mehr Phosphor zulegiert, als die Desoxydation erforderte, so daß zunächst Phosphor im Überschuß vorhanden war, der aber in der Zeit, die zum Schöpfen mehrerer Lager benötigt wurde, allmählich verbraucht wurde. Die mikroskopische Durchmusterung der Schliffe zeigte, daß bei den Verbundlagern von Schmelzen mit Phosphorüberschuß in der Reihenfolge des Tauchens die Dicke der Zwischenschichten abnahm, bis eine Zwischenschicht manchmal auch bei stärkster Vergrößerung nicht mehr feststellbar war und erneut auftrat, wenn nachdesoxydiert wurde. In der vierten Zahlentafel ist die Zusammensetzung einiger Bleibronzeschmelzen angegeben, die zur Untersuchung der Zwischenschichten herangezogen wurden.

Bevor die Natur der Zwischenschichten besprochen wird, sollen an Hand einiger Schliffbilder die Erscheinungsformen vorgeführt werden. Zur Untersuchung auf Zwischenschichten wird man eine stärkere Vergrößerung als meistens zur Beobachtung der Gefüge der Bleibronze wählen, etwa

Zahlentafel 8.
Abkühlungsbedingungen in den Wasserbrausen.

Vers.-Nr.	Versuchsgruppe	Durchmesser (mm) d. Stahlstützschale außen	Durchmesser (mm) d. Stahlstützschale innen	d. Bleibronzeausgusses innen	Wassermenge in cm³ je Sekunde und a[1])	b[2])	c[3])	d[4])
1	Einfluß d. Abkühlungsgeschwindigkeit auf die Gefügeausbildung a) kleinere Brause	34	29	18	0,32	1,39	0,86	0,53
	b) größere Brause	34	29	18	1,04	4,52	2,74	1,70
		78	60,8	48	0,45	0,58	1,00	0,37
2	Einfluß der Ausgußdicke	34	29	18	1,04	4,52	2,74	1,70
		34	29	22	1,04	4,52	4,12	2,14
		34	29	25	1,04	4,52	6,54	2,66
		66	60,6	55	0,53	2,09	2,18	1,06
		66	60,6	52	0,53	2,09	1,45	0,85
		66	60,6	48	0,53	2,09	1,02	0,64

[1]) bezogen auf ein cm² der äußeren Zylinderfläche der Stahlschale.
[2]) Wert unter a, bezogen auf die cm² Stahl, die zu einem cm² der äußeren Zylinderfläche der Stahlfläche gehören.
[3]) Wert unter a, bezogen auf die cm² Bleibronze, die zu einem cm² der äußeren Zylinderfläche der Stahlschale gehören.
[4]) Wert unter a, bezogen auf die Summe der cm² Stahl und Bleibronze, die zu einem cm² der äußeren Zylinderfläche der Stahlschale gehören.



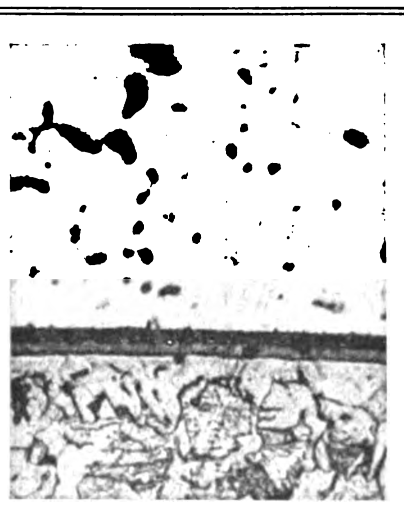
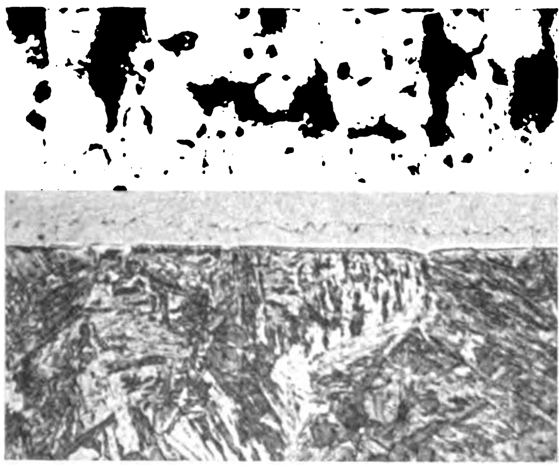


Bild 16 u. 17. Schichten zwischen Stahl und Bleibronze, s. auch Bild 3. (Vergr. 500fach.)

Bild 16 (links). Geätzt mit Essigsäure. (Vergr. 500fach.)



Bild 17 (rechts). Geätzt mit ammoniakalischer Perhydrollösung.



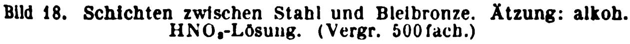


Bild 18. Schichten zwischen Stahl und Bleibronze. Ätzung: alkoh. HNO_3-Lösung. (Vergr. 500fach.)

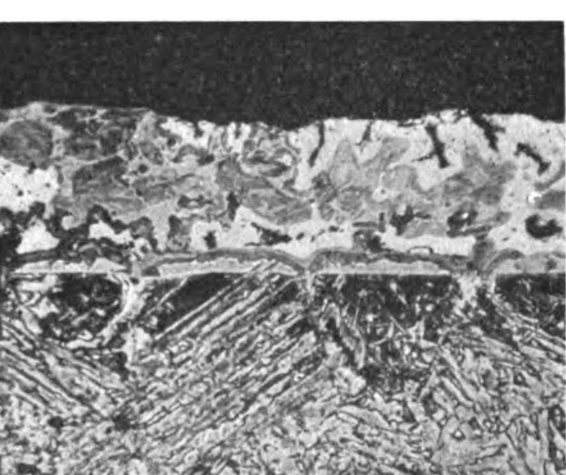
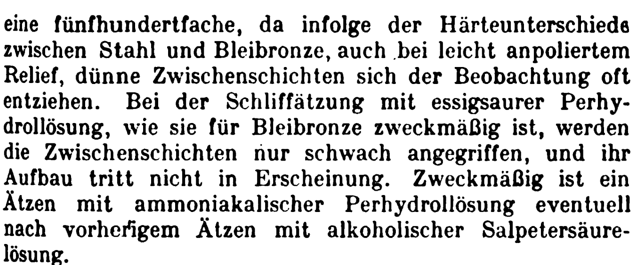


Bild 19. Schichten zwischen verzundertem Stahl und Bleibronze bei starker Schmelzüberhitzung. Ätzung: alkohol. HNO_3-Lösung. (Vergr. 500fach.)



eine fünfhundertfache, da infolge der Härteunterschiede zwischen Stahl und Bleibronze, auch bei leicht anpoliertem Relief, dünne Zwischenschichten sich der Beobachtung oft entziehen. Bei der Schliffätzung mit essigsaurer Perhydrollösung, wie sie für Bleibronze zweckmäßig ist, werden die Zwischenschichten nur schwach angegriffen, und ihr Aufbau tritt nicht in Erscheinung. Zweckmäßig ist ein Ätzen mit ammoniakalischer Perhydrollösung eventuell nach vorherigem Ätzen mit alkoholischer Salpetersäurelösung.

Eine gut ausgebildete Zwischenschicht zeigen Bild 16 und 17 von Schliffen, die in der soeben beschriebenen Weise geätzt wurden, und geben einen Ausschnitt von Bild 3 in stärkerer Vergrößerung. Zunächst stellt man durch den Nadelriß fest, daß die Zwischenschichten härter als der Stahl sind. Wie Bild 17 erkennen läßt, handelt es sich im wesentlichen um zwei übereinandergelagerte Schichten. Zum Stahl hin liegt noch eine sehr schmale helle Zone. In den benachbarten Eisenkristalliten ist über eine gewisse Breite ferner das Fehlen des Perlits bemerkenswert. Die Schmelze hatte die in Zahlentafel 4 unter Nr. 10 angegebene Zusammensetzung, u. a. einen Phosphorgehalt von 0,16%.

Auch Bild 18 zeigt stark ausgebildete Schichten zwischen Bleibronze (Leg. Nr. 9 in Zahlentafel 4) und einem etwas höher gekohlten Stahl. Von der Bleibronze ausgehend folgen aufeinander zunächst die breiteste Schicht, in der eine feine Struktur angedeutet ist, darauf eine etwas schmalere unregelmäßig gegen die erste abgegrenzte Schicht, dann ein sehr heller Saum und anschließend eine mit Kohlenstoff angereicherte Zone. In der gleichen Schmelze wurden bei stärkerer Überhitzung die in Bild 19 gezeigten Zwischenschichten an einer Stahlfläche, die vorher verzundert war, erhalten. Infolge der Überhitzung wurde viel Eisen von der Bleibronze gelöst. Bild 19 zeigt besonders deutlich die Kohlenstoffanreicherung vor dem schmalen hellen Saum, der den bei der Verzunderung stärker entkohlten Korngrenzen noch etwas in den Stahl hinein folgt. In der Bleibronze befinden sich Reste nicht vollständig gelöster Stahl-Kupferkristallite mit Zonenbildung.

Bei der Schmelze Nr. 8 mit 0,096% P ist nach Bild 6a die Zwischenschicht bereits sehr dünn, etwa 0,003 mm gegenüber einer Dicke von rd. 0,008 mm bei der Schmelze Nr. 10 und 0,014 mm bei der Schmelze Nr. 9. In Bild 4, das sich auf die Schmelze Nr. 7 bezieht, ist die Dicke der Zwischenschichten ungefähr 0,005 mm. Nimmt der Phosphorgehalt weiter ab auf 0,078 bis 0,071% bei den Schmelzen Nr. 6 bis 4, so bleibt die Zwischenschicht gerade noch erkennbar, ist zunächst noch durchwegs zusammenhängend, bildet sich dann aber bald nur noch stellenweise, wie für Schmelze 6 Bild 7a, Schmelze 5 Bild 20 und Schmelze 4 Bild 10 erkennen lassen. Sinkt der Phosphorgehalt auf 0,05% und darunter wie bei den Schmelzen Nr. 1 bis 3, so werden Zwischenschichten nicht mehr erkennbar, Kupfer und Stahl folgen unmittelbar aufeinander nach Bild 21 von Schmelze 2 und Bild 22a und b. In Bild 21 ist am Übergang ein Schlagschatten infolge Reliefpolitur. Manchmal verläuft die Grenze zwischen Stahl und Bleibronze fast geradlinig, wenn die Oberfläche glatt gedreht und unverzundert war, oder sehr

Zahlentafel 4. Chemische Zusammensetzung einiger Versuchsschmelzen.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cu %	77,0	75,9	73,8	74,9	76,2	76,4	75,0	75,3	75,1	74,4
Pb %	22,2	23,4	25,4	24,5	23,1	22,7	24,3	24,1	24,1	24,4
P %	0,040	0,050	0,052	0,071	0,073	0,078	0,095	0,096	0,11	0,16
Fe %	0,58	0,58	0,64	0,47	0,51	0,64	0,45	0,51	0,63	0,51



Bild 20 (links). Unterbrochene Zwischenschichten bei Schmelze Nr. 5, Zahlentafel 4. (Vergr. 500fach.)

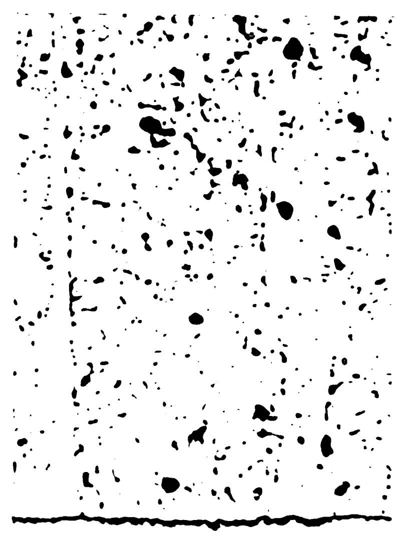


Bild 21 (rechts). Übergang Stahl-Bleibronze bei Schmelze Nr. 2, Zahlentafel 4. (Vergr. 100fach.)



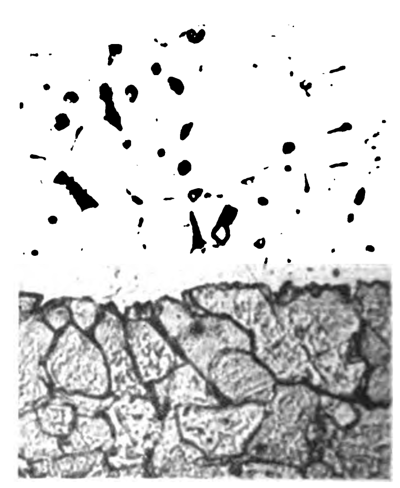


Bild 22a und 22b. Übergang Stahl-Bleibronze mit unregelmäßiger Begrenzung. (Vergr. 500fach.)
Ätzung: Bild 22a (links), essigsaure Perhydrollösung.
Ätzung: Bild 22b (rechts), zuerst ammoniakal. Perhydrollösung und anschließend alkohol. Salpetersäurelösung.

unregelmäßig, wenn die Oberfläche beim Schweißen oder Vorwärmen verzundert und durch Blankbeizen aufgerauht war wie in Bild 22a und b.

Die Zwischenschichten scheinen ziemlich spröde zu sein, da bei der Schliffherstellung zuweilen Teilchen aus ihr ausbrechen. Ihre Bedeutung für die Eignung der Lagerschalen scheint gegenüber dem Gefüge der Bleibronze von untergeordneter Natur zu sein. Bei der Aufbiegeprobe zur Feststellung der Haftfestigkeit der Bleibronze auf der Stahlstützschale machen die Zwischenschichten sich noch nicht nachteilig bemerkbar. Es ist denkbar, daß sie bei plastischer Verformung eines Verbundgußlagers und hoher Schwellbeanspruchung die Widerstandsfähigkeit gegen Dauerbrüche herabsetzen. Bei den im vorhergehenden Abschnitt behandelten Prüfläufen wurden keine Versager beobachtet, die mit Bestimmtheit den Zwischenschichten zugeschrieben werden können.

Für die Bildung der Zwischenschichten wird von den beteiligten Legierungselementen das Blei keine Rolle spielen. In Frage kommen dafür im wesentlichen Eisen, Kohlenstoff, Kupfer und Phosphor. Für die von Kupfer und Eisen miteinander sich bildenden Phasen gibt das Zustandsdiagramm Auskunft[6]). Danach löst Kupfer höchstens 3,8 bis 4% Fe bei 1094°. Mit der Temperatur nimmt die Löslichkeit des Eisens im Kupfer sehr stark ab und zwar bis 1083° bereits um rd. 1%; bei 600° sind weniger als 0,2% Fe im festen Kupfer in Lösung und bei Raumtemperatur besteht nur noch eine außerordentlich geringe Löslichkeit. Bei Abwesenheit oder sehr geringen Mengen Phosphor in der Bleibronzeschmelze ist ein Saum an der Stahlschale, soweit Kupfer eindiffundiert, bei den Temperaturen um 1200° im γ-Zustand und kann etwa 8% Kupfer enthalten. Bei der Abkühlung zerfällt die γ-Phase in $\alpha + \varepsilon$. Durch die sehr schnelle Abkühlung der Verbundgußlager können Gleichgewichte sich nicht einstellen; deshalb, und weil in Diffusionsmischkristallen ein vollständiger Gleichgewichtszustand sich noch nicht eingestellt hat, ferner das Mehrstoffsystem Fe — Cu — P nicht vollständig bekannt ist, kann über die quantitative Zusammensetzung der Zwischenschichten keine Aussage gemacht werden. Sie sind zu dünn zur Analyse.

Da die Anwesenheit von überschüssigem Phosphor eine notwendige Bedingung für das Zustandekommen der Zwischenschichten zu sein scheint, und da mehrfach eine Wanderung des Kohlenstoffs von der Bindungsfläche weg in den Stahl bemerkt wird, lassen sich in Anbetracht früherer Untersuchungen über die Diffusion verschiedener Legierungselemente in Stählen [7]) [8]) über die Zwischenschichten folgende Annahmen machen: Zunächst diffundiert vorwiegend Phosphor in den Stahl und drängt den Kohlenstoff vor sich her; anschließend folgt eine stärkere Kupferdiffusion. Zwei aufeinanderfolgende Phasen entstehen mit steigendem Kupfergehalt. Diffusionsversuche, über die demnächst berichtet wird, bestätigten diesen Mechanismus. Die kupferreiche Phase, die vermutlich bei der Abkühlung zerfällt, wird von ammoniakalischer Perhydrollösung dunkler angeätzt. Ist kein bzw. nur sehr wenig Phosphor — unter 0,06 bis 0,05% — oder Sauerstoff in der Kupfer-Bleischmelze, wird das Eisen vom Kupfer so schnell gelöst, daß eine feste Diffusionsschicht nicht mehr

[6]) H. Cornelius, Kupfer im technischen Eisen, Verlag J. Springer, Berlin 1940, s. Bild 1.

[7]) H. Cornelius u. F. Bollenrath, Arch. Eisenhüttenw. Bd. 15 (1941).

[8]) H. Cornelius, Arch. Eisenhüttenw. Bd. 16 (1942/43), S. 147 bis 152.



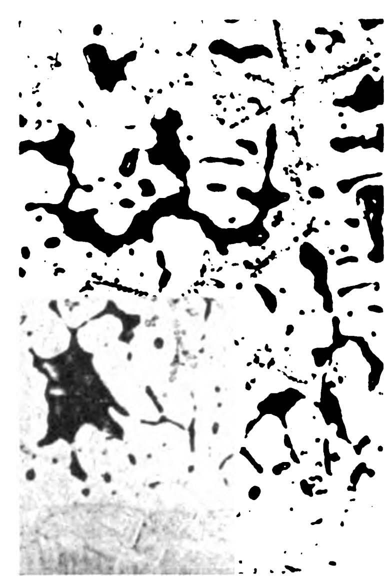


Bild 23. Primär ausgeschiedene eisenhaltige Kristallite in der Bleibronze. (Vergr. 500fach.)



Bild 24. Aufbiegeprobe eines galvanisch erzeugten Bleibronze-Verbundlagers. (Vergr. 50fach.)

erkennbar ist. Sind die Korngrenzen an der Stahloberfläche durch vorheriges Beizen oder Verzundern geschwächt, werden besonders schnell bei Anwesenheit von Phosphor Eisenkristallite herausgelöst und bei unvollständiger Auflösung in der Bleibronzeschmelze als rundliche Gebilde gefunden, um die als Kristallisationzentrum bei höherem Eisengehalt der Bleibronze Kupfer - Eisen - Phosphor - bzw. Kupfer-Eisenmischkristalle sich bilden, wie Bild 23 zeigt. Solche Bleibronzen sind nicht hoch belastbar, verursachen leicht Riefen in den Laufflächen und hohen Verschleiß des Zapfens der Welle.

4. Galvanisch hergestellte Bleibronzen auf Stahl.

Der Verzug der Verbundgußlager bei der spanabhebenden Bearbeitung infolge innerer mechanischer Spannungen, das ungünstige Verhältnis des Einsatzgewichtes zum Gewicht der einbaufertigen Lager, die Fehlerquellen und damit der gelegentlich ansteigende Ausschuß, der Bleiabbrand und der Wunsch höherer Beanspruchbarkeit gaben Veranlassung, nach weiteren Möglichkeiten zur Herstellung von Verbundgleitlagern sich umzusehen. Geringere Einsatzgewichte lassen sich schon mit dem Schleuderverfahren erzielen; aber dieses eignet sich nicht für alle Lagertypen. Einen Weg, die benötigten dünnen Lagermetallschichten zu erzeugen, bietet die Galvanotechnik. Bei hoch belasteten Lagern in Verbrennungsmotoren ist die durch Verschleiß zulässige Lagerspielvergrößerung ziemlich beschränkt. Infolgedessen bieten sich bei der elektrochemischen Erzeugung der Lagermetallschichten manche Vorteile: Der Stahl für die Stützschale kann nach den erforderlichen mechanischen Festigkeitseigenschaften ausgesucht werden; man kann z. B. Vergütungsstähle verwenden. Die Stahlstützschale kann vor dem Einbringen des Lagermetalls fertigbearbeitet werden.

Deshalb wurden im Institut für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt Untersuchungen über die elektrolytische Herstellung von Bleibronzelagern begonnen. Nach eingehendem Studium der Zusammenhänge zwischen Kathodenpotential, Stromdichte und chemischer Zusammensetzung der Bleibronze unter verschiedenen Bedingungen bezüglich Badzusammensetzung und Badbewegung durch Rühren wurde besonders die Frage der Haftfestigkeit der Bleibronze auf Stahl behandelt[9]). Bei den Vorversuchen konnte bereits durch einfache mechanische Beanspruchung die Legierungsschicht von der Stahlhülse abgelöst werden. Die wesentliche Ursache der mangelnden Haftfestigkeit wurde bald gefunden, ebenso wie die Bedingung für die galvanische Abscheidung haftfester Kupfer-Blei-Legierungen.

[9]) Die Angaben über die elektrolytische Herstellung sind einer unveröffentlichten Arbeit von A. Beerwald und L. Döhler entnommen.

Die Stahlschalen erfuhren vor dem Einsetzen in das Kupfer-Blei-Bad folgende Vorbehandlung:

Elektrolytisches Entfetten,
Ätzen in 25proz. Salzsäure während einer Minute,
Vorverkupfern in einem Zyankalibad mit einer Stromdichte von 0,1 A/dcm².

Das Vorverkupferungsbad enthielt 100 g/l KCN und 50 g/l CuCN. Die Bleibronze wurde abgeschieden in einem Bad folgender Zusammensetzung:

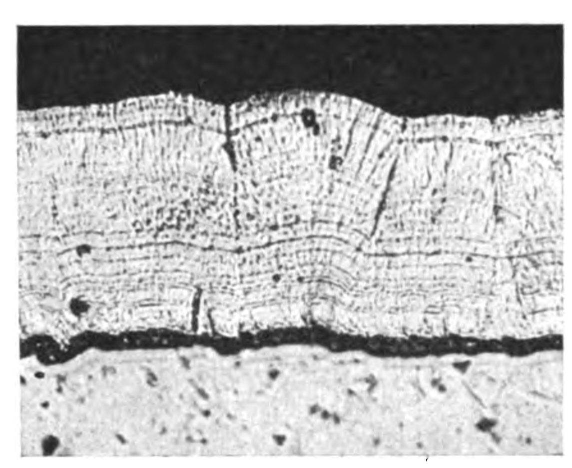
14 g/l Cu (OH),
56 » Kaliumtartrat (neutr.),
58 » Bleiazetat,
180 » Kaliumzitrat,
30 » KOH.

In 32 Stunden wurde bei einer Stromdichte von 0,7 A/dcm² und Raumtemperatur eine etwa 0,2 mm dicke Schicht mit 10 bis 12% Blei erzeugt.

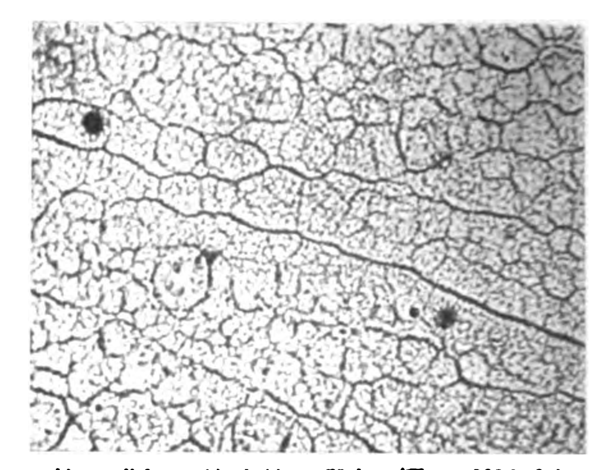
Die Untersuchung einiger von Beerwald und Döhler hergestellten Lagerschalen hatte folgende Ergebnisse: Die Haftfestigkeit war ausgezeichnet, wie Aufbiegeversuche bewiesen, trotzdem die Schicht manchmal von feinen Rissen durchsetzt war. Bild 24 zeigt in 50facher Vergrößerung die Ansicht der Bleibronze nach dem Aufbiegeversuch. Die beim Aufbiegen entstandenen Risse klaffen stärker und verlaufen vornehmlich in Richtung der Bildlängsseite, d. i. senkrecht zur Biegerichtung. Probestreifen von 20 mm Breite aus einer Schale mit 60 mm Innendurchmesser und 2 mm dicker Stahlschale ließen sich bis zu einem äußeren Biegeradius von 6 mm umbiegen, bevor zuerst an den Rändern ein Abbröckeln der Blei-Kupferschicht einsetzte. Die Schicht ist spröde; sie läßt sich am besten mit einem Diamanten durch Drehen bearbeiten. Die Vickerhärte ist rund 200 kg/mm² bei einer Belastung von 200 g während 20 Sekunden. Das Gefüge zeigt Bild 25a, in dem eine parallel zur Bindungsfläche verlaufende Schichtung, durch Konzentrationsschwankungen verursacht, erkennbar ist. Die Konzentrationsschwankungen haben stark wechselnde Amplituden bei bemerkenswert regelmäßiger Wellenlänge. Nach Untersuchungen an mehreren Schichten schwankt die Wellenlänge zwischen etwa 4 und $6 \cdot 10^{-4}$ mm. Bild 25b gibt das Gefüge in einer Schliffläche parallel zur Bindungsfläche wieder. Mit einem Lichtmikroskop läßt sich das Feingefüge nicht auflösen.

Laufversuche in der Lagerprüfmaschine mit einer den ganzen Lagerumfang in gleicher Weise beanspruchenden Druckursprungsbelastung wurden bei 5 m/s Gleitgeschwindigkeit und einer Temperatur von 105 bis 120° 0,5 mm unter der Zapfenoberfläche bei folgenden Verhältnissen durchgeführt:

Wellendurchmesser . . .	60 mm,
Lagerbreite	20 mm,
Lagerspiel	0,06 mm,
Schmieröl	Rotring (Eichöl),
Wellenzapfen	nitriert.



a) Schliff quer zur Abscheidungsfläche. (Vergr. 1000fach.)



b) parallel zur Abscheidungsfläche. (Vergr. 500fach.)

Bild 24a und b. Gefüge der elektrolytisch abgeschiedenen Bleibronze.

Die Belastung wurde stufenweise, beginnend mit 100 kg/cm², um 50 kg/cm² gesteigert. In jeder Belastungsstufe lief das Lager 50 h ohne Pause. Nach 38stündigem Betrieb bei der Laststufe 400 kg/cm² traten die ersten Anzeichen für Überlastung — Reibungsanstieg — auf. Die Beschädigungen waren gering: einige Riefen und schwache Freßspuren. Das Einlaufvermögen war sehr gut, da zum Übergang auf die nächsthöhere Laststufe jeweils höchstens fünf Minuten benötigt wurden. Die Tragfähigkeit im Dauerbetrieb kann mit 350 kg/cm² angegeben werden.

Die Entwicklungsarbeiten werden noch nicht als abgeschlossen angesehen. Zur Zeit werden eingehende Untersuchungen über die Gefügeausbildung, Weiterbehandlung und Badbehandlung angestellt. Die mitgeteilten Ergebnisse zeigen die grundsätzliche Brauchbarkeit elektrolytisch erzeugter Bleibronze für hochbelastete Gleitlager. Die Tragfähigkeit erreicht Werte, die mit guten gegossenen Bleibronze-Verbundlagerschalen unter den gleichen Betriebsbedingungen erzielt werden. Der gegenüber gegossenen Lagerschalen niedrige Bleigehalt hat sich weder beim Einlaufen noch beim Dauerlauf nachteilig ausgewirkt trotz der hohen Härte der Lagermetallschicht, vermutlich wegen der submikroskopisch feinen Bleiverteilung

Da die Schichtdicke bis auf wenige Tausendstel eines Millimeters bei der elektrolytischen Herstellung eingehalten werden kann, wird versucht, unbearbeitete Lagerschichten dadurch einsatzfähig zu machen, daß auf die im wesentlichen in der oben angegebenen Weise erzeugte kupferreiche Bleibronzeschicht eine mehrere μ dicke, sofort vollbelastete Einlaufschicht aus Silber, Blei, bleireicheren Kupfer-Blei- oder Silber-Bleilegierungen aufgebracht wird, die gegen geringfügige Unebenheiten unempfindlich ist.

III. Verbund-Gleitlager mit elektrolytisch hergestellten Silber- und Silber-Blei-Schichten.

Als die gelegentlich an Silberlegierungen beobachteten hohen Belastbarkeiten in Gleitlagern bekannt wurden[10]), begannen vor mehreren Jahren A. Beerwald und L. Dörinkel unter Berücksichtigung der Arbeiten von Faust und Thomas[11]) mit ihren Versuchen zur Klärung der günstigsten Bedingungen zur Abscheidung von Silber-Blei-Legierungen auf Stahlunterlage[12]). Auch bei diesen Arbeiten wurde der Haftfestigkeit der galvanisch abgeschiedenen Schicht auf Stahl besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Die Bindung zwischen der Lagermetallschicht und der Unterlage ist für die Belastbarkeit des Gleitlagers ein entscheidender Faktor.

Einige der von Beerwald und Döhler elektrolytisch hergestellten Verbundlager wurden unter der gleichen Art der Belastung wie bei den Bleibronze-Verbundlagern auf ihre Tragfähigkeit untersucht. Der Durchmesser der nitrierten Wellenzapfen betrug 60 mm, die Lagerbreite 20 mm, das Lagerspiel 1‰. Das Öl, Rotring Flugmotorenöl, trat mit 60 bis 70° C durch eine Querbohrung der Welle unter 4 kg/cm² Überdruck in den Lagerspalt gegenüber der höchstbelasteten Stelle ein. Dabei wurde eine Lagertemperatur von 120 bis 130° angestrebt. Der Schmierölverbrauch lag zwischen 0,15 bis 0,45 l/min je nach Lagerspiel und Belastung.

Die Ermittlung der Grenzlast für Schichten mit rund 5% Blei, auf Stahl, der an der Bindungsfläche durch Sandstrahlen aufgerauht war, erfolgte unter stufenweiser Steigerung der Belastung — von 100 kg/cm² ausgehend — um je 50 kg/cm² nach je zwei Stunden Laufzeit. Die maximal ertragene Belastung betrug 450 bis 500 kg/cm². Die Verbundlager versagten bei höheren Belastungen durch Lösen der Silber-Blei-Schichten vom Stahl. Untersuchungen an Stahlhülsen mit Silberschichten schlossen sich an. Die Bindungsflächen wurden anodisch mit Chromsäure gebeizt, dann verkupfert und versilbert. Lager mit 0,25 und 0,50 mm dicken Schichten wurden Dauerprüfläufen unterzogen, deren Verlauf in Zahlentafel 5 verzeichnet ist.

Die Gleiteigenschaften erwiesen sich als ausgezeichnet, auch bei den Belastungen, die zu einer mechanischen Überbeanspruchung, plastischer Verformung und Anrissen führten. Heißlaufen und Fressen kamen nicht vor. Die 0,5 mm dicken Schichten vertrugen die höchsten Belastungen, bis zu 700 kg/cm². Weniger dicke Schichten waren empfindlicher; wahrscheinlich sind sie nicht so fähig, örtlichen Belastungsspitzen durch Verformung auszuweichen. Auch die die nach den 100-Stunden-Läufen bei der Belastung von 700 kg/cm² durch Dauerbruchanrisse beschädigten Lager Nr. 1 und 2 scheinen noch beachtliche Notlaufeigenschaften zu besitzen, da kein Temperaturanstieg festgestellt wurde.

Aus der Lagerschale 2 konnte man nach den Prüfläufen die Silberschicht als zusammenhängendes, noch gut verformbares Band mittels eines Schraubenziehers herausheben. Nach der mikroskopischen Untersuchung war die Verankerung des Silbers in den Ätzgruben der Stahlunterlage nicht schlecht; die Silberteilchen liegen nach Bild 26 noch fest verankert, soweit sie in seitlich verlaufenden Höhlungen verzahnt werden konnten. Bild 27 und 28 lassen jedoch erkennen, daß die anodische Beizbehandlung noch kein genügend gleichmäßiges Aufrauhen bewirkte. Infolge der hohen Ursprungsbelastung des Lagers und ungenügenden Haftung an den nicht aufgerauhten Stellen zerrissen die Silberanker wegen überschrittener mechanischer Festigkeit. Diese Erscheinungen können in Anbetracht der bisher nicht mit anderen Lagerwerkstoffen erreichten hohen Tragfähigkeit bei gleichzeitig noch nicht ganz ausgenutzten Notlaufeigenschaften den erzielten lagertechnischen Fortschritt nicht beeinträchtigen. Ein lohnendes Ziel ist die Verbesserung der mechanischen Festigkeit und der Haftung zwischen

[10]) Rep. on Silver-Bearing Alloys, Battley Mem. Inst. Rep. Nr. 5/8 (1938/39); R. W. Dayton, Metalls and Alloys Bd. 9 (1938), S. 323 bis 328; dgl. Metals Industry (1939).

[11]) C. L. Faust u. B. Thomas, Trans. Amer. electrochem. Soc. Bd. 75 (1939), S. 185.

[12]) Z. Elektrochemie Bd. 48 (1942).



Bild 26. Die Silberschicht löst sich infolge Überbeanspruchung, die Verankerungen reißen durch. (Vergr. 500fach.)

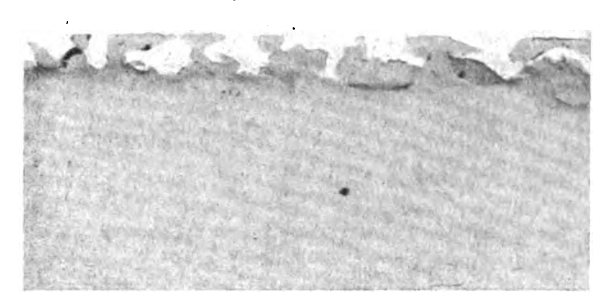


Bild 27. Verankerung an fein und gleichmäßig aufgerauhter Stelle. (Vergr. 500fach.)

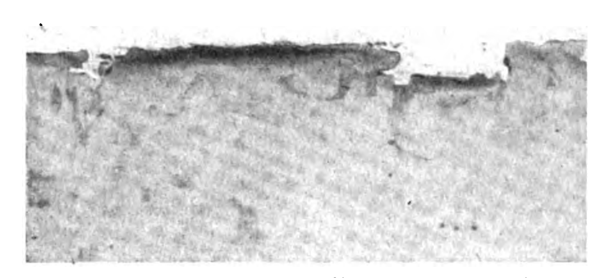


Bild 28. Verankerung an ungleichmäßig aufgerauhter Stelle. (Vergr. 200fach.)

Bild 26 bis 28. Schliffe durch die Bindungszone zwischen elektrolytisch hergestellter Silberschicht und Stahlunterlage. (Vergr. 500fach.)

Lagermetall und Stützschale. Neben darauf ausgerichteten Arbeiten widmet man sich zur Zeit einer eingehenderen Untersuchung der mechanischen Eigenschaften, des Gefügeaufbaues[13]) und seiner Beeinflussung durch Wärmebehandlungen.

IV. Zusammenfassung und Schluß.

Nach Untersuchungen über den Einfluß der Abkühlungsbedingungen auf die Gefügeausbildung in Bleibronze-Verbundlagern werden Ergebnisse aus Versuchen über den Zusammenhang zwischen den bei verschiedenen Ausgußdicken und Abkühlungsarten erzeugten Gefügen und der Tragfähigkeit im Dauerbetrieb unter pulsierender Belastung mitgeteilt. Als günstig werden Ölabkühlung und die an verschiedenen Abmessungen der Lager anpassungsfähigere und praktisch besser durchführbare Abkühlung durch Abbrausen mit Wasser befunden. Dicke Ausgüsse erstarren leichter unter Bildung eines Bleinetzwerkes, dünne Ausgüsse neigen eher zu Transkristallisation. Mit beiden Gefügeausbildungen ist eine geringere Tragfähigkeit verbunden, als Ausgüsse mittlerer Dicke mit regellos orientierten kleinen Kupferdendriten aufweisen; letztere können mit etwa 400 bis 450 kg/cm² Lagerdruck bei 100 bis 130° pulsierend beansprucht werden.

An einer Reihe von Versuchsschmelzen ergab sich, daß die Bildung fester Diffusionsschichten zwischen Stahlstützschale und Bleibronzen hauptsächlich von dem Phosphorgehalt, der über die zur Desoxydation notwendige Menge hinaus der Schmelze zugesetzt wird, abhängt. Die Zwischenschichten bestehen aus mehreren Lagen, die sich durch den Gehalt an Kohlenstoff, Phosphor, Kupfer und Eisen unterscheiden. Die Zwischenschichten sind hart und spröde. Ob sie einen entscheidenden Einfluß auf die Tragfähigkeit der Lagerschalen ausüben, wurde nicht ermittelt.

Weitere Untersuchungen gaben Anhaltspunkte für die galvanische Herstellung von Bleibronzeschichten auf Stahl und über ihre Belastbarkeit im Dauerbetrieb. Die ersten Ergebnisse berechtigen zu der Hoffnung, daß elektrolytisch Bleibronze-Verbundlager hergestellt werden können, welche die Tragfähigkeit handelsüblicher gegossener Verbundlager besitzen.

Für höhere als von Bleibronze-Verbundlagern ertragene Beanspruchungen werden Verbundlager mit galvanisch auf Stahlunterlage abgeschiedene Silber-Blei- oder auch Silberschichten herangezogen werden können. Versuchslager mit Reinsilberschichten hatten sehr gutes Einlaufvermögen, ausgezeichnete Notlaufeigenschaften bei Tragfähigkeiten von 450 bis 700 kg/cm² im Dauerbetrieb. Ihre schwache Seite bei noch höheren Belastungen war die Haftung zwischen Silber und Stahl.

[13]) S. auch E. Raub u. A. Engel, Z. Elektrochemie Bd. 49 (1943), S. 89/97.

Zahlentafel 5.
Prüfläufe an Lagerschalen mit Reinsilberschichten.

Lager-Nr.	Schichtdicke mm	Lagerbelastung kg/cm²	Laufzeit h	Bemerkungen über den Befund nach jeder Versuchsstufe
1	0,5	400	100	blanke Stellen am Rande infolge Kantenpressung
		500	100	kleine Anrisse am Rande
		600	100	verstärkte Randrisse
		700	93	Ausbrechen kleiner Schichtteilchen am Rande
2	0,5	500	100	Anrisse am Rande
		550	100	ein kleiner Teil am Rande ausgebrochen
		600	93	unverändert
		700	100	an den Rändern sind einige Teilchen, mehrere mm² groß, ausgebrochen, Haftfestigkeit der Schicht ist erschöpft
3	0,25	300	95	trägt ungleichmäßig, erhöhte Temperatur
		400	112	wie vor
		500	50	3 längere Risse haben sich gebildet, erhöhte Temperatur und Reibung
4	0,25	300	50	einwandfreier Laufspiegel
		350	50	„ „
		400	50	„ „
		450	50	„ „
		500	50	Reibungsanstieg, Silberschicht beginnt auszubrechen.

Herstellung von Bleibronze-Verbundlagern durch elektrisch-induktive Erhitzung*).

Von F. Bollenrath und W. Siedenburg, Berlin.

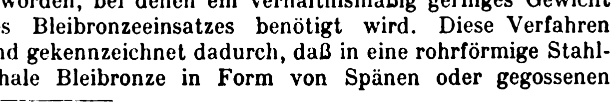
Bericht des Institut für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Aufbau einer Versuchsanlage zur Herstellung von Bleibronzelagern in Stahlstützschalen durch Erhitzung mit elektrischen Wirbelströmen im Schleuderverfahren. Metallurgische Behandlung der Bleibronze, Gefügeausbildung und Ergebnisse der Untersuchungen in der Lagerprüfmaschine.

Gliederung.

I. Einleitung.

Bleibronzeausgüsse in Stahlstützschalen haben für mechanisch und thermisch hoch beanspruchte Gleitlager ein großes Anwendungsgebiet gefunden. In einer schmiertechnisch gut durchgebildeten Lagerstelle zeigt sich bei gleichmäßiger Lastverteilung eine hohe Tragfähigkeit, wenn die Bleibronzeschicht verhältnismäßig dünn ist, und zwar ist die erforderliche Dicke nach unten im wesentlichen durch die Forderung nach einem mit Rücksicht auf das höchst zulässige Lagerspiel erträglichen Verschleiß begrenzt. Die mit den heute angewendeten Verfahren zur Einbringung der Bleibronze in die Stützschale herstellbaren Ausgußdicken betragen meist mehr als das Zehnfache der erforderlichen. Demgemäß ist der Aufwand an Schmelze beachtlich groß. Im Laufe der Entwicklung der Verfahren zur Herstellung der Bleibronze-Verbundlager sind die Bestrebungen zur Verringerung des Rohgußgewichtes neben dem Ziel einer günstigen Gefügeausbildung maßgebend gewesen. Welche Fortschritte dabei erreicht wurden, erhellt aus einem Vergleich der Schmelzgewichte zum Gewicht der Bleibronze, die in einem einbaufertigen Verbundlager noch verbleibt, bei dem zuerst üblichen Sandguß mit Durchlauferhitzung und einem der moderneren Herstellungsverfahren, in dem z. B. die Stahlstützschale mit angeschweißter Stahlblechform zum Erhitzen und Füllen in die Schmelze getaucht wird. Die Gewichte der in beiden Fällen benötigten Bleibronzeschmelzen verhalten sich annähernd wie 16 bis 5:1. Aber selbst bei dem Tauchverfahren liegt für einen Innendurchmesser der Lagerschale von 60 bis 90 mm die Dicke des Ausgusses zwischen 3 bis 8 mm, obwohl in der bearbeiteten Lagerschale z. B. für einen hoch belasteten Verbrennungsmotor eine 0,4 bis 0,7 mm dicke Bleibronzeschicht ausreicht. Das Rohgewicht beträgt unter Berücksichtigung der erforderlichen Zugaben in der Länge der Lagerschale damit auch noch das Zehn- bis Zwanzigfache des Fertiggewichtes.



Immerhin sind seit geraumer Zeit Verfahren bekanntgeworden, bei denen ein verhältnismäßig geringes Gewicht des Bleibronzeeinsatzes benötigt wird. Diese Verfahren sind gekennzeichnet dadurch, daß in eine rohrförmige Stahlschale Bleibronze in Form von Spänen oder gegossenen Ringen eingebracht und bis zum Schmelzfluß erhitzt wird. Die gleichmäßige Verteilung über die Rohrinnenwand wird durch Zentrifugalkräfte bewirkt. Das Schmelzen erfolgt entweder durch Erhitzen in Muffel- oder Kammeröfen und anschließend außerhalb der Öfen das Schleudern mit folgendem Abkühlen, oder das in Drehung versetzte Stahlrohr wird von außen mittels einer Flamme erhitzt. Vor einigen Jahren wurde auch vorgeschlagen, das Schmelzen durch elektrisch-induktive Erhitzung vorzunehmen¹). Bei diesen zuletzt genannten Methoden können Ausgüsse erzeugt werden, die nicht mehr wesentlich dicker als die endgültig benötigten sind. Im folgenden wird über Versuche, Bleibronzeverbundlager durch elektrisch-induktive Erhitzung herzustellen, berichtet.

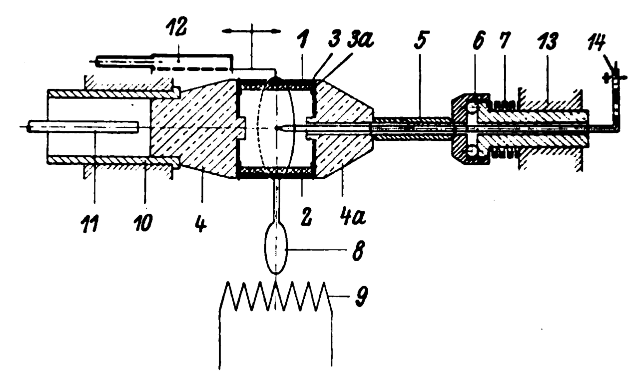


Bild 1. Schema der Versuchsanlage.

1 Stahlstützschale,
2 Bleibronze,
3 u. 3a Druckverschluß aus Blechscheibe 3 und Blechring 3a,
4 u. 4a Halter,
5 Zwischenstück,
6 Axiallager,
7 Druckfeder,
8 u. 9 Hochfrequenztransformator mit Heizspule,
10 Antriebswelle,
11 Zuführung für Kühlwasser,
12 Wasserbrause zur Abkühlung des Verbundlagers,
13 Lagerbock,
14 Thermoelement.

II. Versuchsanlage.

Zu den Versuchen stand die Stromquelle einer Hochfrequenzschmelzanlage mit einer Generatorleistung von 10 kW bei 10000 Hertz zur Verfügung, die in Verbindung mit einer sehr einfach aufgebauten Schleudermaschine nach der schematischen Darstellung in Bild 1 die Versuchsanlage darstellte. Die Stahlstützschale 1 wird an beiden Seiten mit kreisförmigen, dünnen Blechscheiben 3 verschossen. Die Außendurchmesser dieser Blechscheiben und der Stahlbuchse sind gleich. Auf die Blechscheibe wird konzentrisch ein schmaler Blechring 3a durch Punktschweißung befestigt, um die Stahlbuchse auf der Blechscheibe zu zentrieren. Die Blechscheibe selbst hat in der Mitte eine Bohrung zur Zen-

*) E 29, K 33 7.

¹) F. Bollenrath, Bemerkungen zur Metallurgie der Bleibronzen. Metallwirtschaft Bd. 20 (1941), S. 1063 bis 1068. Vorgetragen vor dem Werkstoffausschuß der Lilienthalgesellschaft für Luftfahrtforschung im Februar 1941.



trierung auf den Zapfen der Halter 4 und 4a, von denen der eine (4) in der von einem Motor angetriebenen Welle 10 sitzt; der zweite Halter (4a) wird von einer Feder 7 über ein Zwischenstück 5 gegen die Verschlußscheibe gedrückt und stützt sich über ein Kugellager 6 gegen den Lagerbock 13 ab. Der Halter 4a, das Zwischenstück 5 und der Lagerbock 13 sind in Richtung der Längsachse durchbohrt, so daß ein Thermometer bis in die Mitte der Stahlbuchse 1 gebracht werden kann. Durch diese Bohrung können ferner neutrale Gase eingeleitet oder beim Schmelzen entstehende Gase abgesaugt werden. Um die Stahlschale 1 ist eine wassergekühlte Schleife 8 aus Kupfer gelegt, in welcher der durch den Transformator induzierte Wechselstrom mit einer Frequenz von 10000 Hertz fließt. Neben dieser Schleife ist fest mit ihr und in Achsrichtung verschiebbar eine Wasserbrause 12 angeordnet, die im Anschluß an die Schmelzung an die Stelle der Heizspule 8 geschoben wird und zur beschleunigten Abkühlung der Verbundschale dient. In dem Augenblick, in dem man die Heizspule von der Stahlschale abschiebt, wird automatisch der Heizstrom abgeschaltet.

III. Herstellungsversuche.

1. Abmessungen der Lagerbuchsen.

Mit Rücksicht auf die verfügbare, verhältnismäßig geringe Leistung mußten die Abmessungen der Lagerbuchsen so gewählt werden, daß die Herstellungszeiten so kurz blieben, wie es eine Schmelzführung zum Erzielen eines einwandfreien Gefüges der Bleibronzeausgüsse erlaubte bzw. erforderte. Unter diesen Bedingungen konnten Lagerschalen mit einem Innendurchmesser an der Gleitfläche von 60 mm und einer Länge von 50 mm hergestellt werden. Die Stahlschalen hatten 66 mm Außendurchmesser und 3 mm Wanddicke.

2. Werkstoffe.

Für die Stützschale wurde ein unlegierter Stahl mit 0,1 bis 0,2% Kohlenstoff und für den Ausguß ein Bleibronzepulver[2]) mit 22% Blei benutzt.

3. Allgemeines zum Wirbelstromerhitzen.

Bei dem sonst meist üblichen Erschmelzen der Bleibronze in Graphittiegeln steht ausreichend Zeit für eine Schmelzführung und -behandlung zur Verfügung, um möglichst hohe Freiheit von Gasen und Schlacken herbeizuführen. Nacheinander können die Maßnahmen zur Beseitigung der Gase wie Wasserstoff, der Gasblasen und ungleichmäßige Bleiverteilung bzw. Bleisteigerungen verursacht, sowie Sauerstoff, der zu Versprödung und schlechten Gleiteigenschaften führt, durchgeführt werden. In der metallurgisch günstigen Reihenfolge können die Legierungselemente eingeführt werden. Für diese bewährte Schmelzführung bleibt bei der Herstellung der Ausgüsse im Schleuderverfahren unter Wirbelstromerhitzung wenig Zeit. Deshalb wurden die Versuche, von denen im folgenden einiges mitgeteilt wird, so durchgeführt, daß die Fehler, die durch die Vereinfachungen vorkommen, in ihrer Auswirkung und Bedeutung erkennbar und auf ein Mindestmaß beschränkt blieben. Andererseits war anzunehmen, daß bei den kurzen Schmelzzeiten auch einige Schwierigkeiten, die bei dem erwähnten sonst üblichen Verfahren auftreten, abnehmen würden.

Durch die Wirbelstromerhitzung wird die Wärme zunächst vorwiegend in der Stahlschale entwickelt, entsprechend der von der Wechselfrequenz und außerdem von den geometrischen Verhältnissen der Induktionsschleife und Stützschale (Abmessungen und gegenseitige Anordnung, Luftspalt) abhängigen Stromdichteverteilung über die Tiefe und Länge.

Bei unseren Versuchen war die Frequenz gegeben, so daß die Stromverteilung nicht mehr stark beeinflußt werden konnte. Da die größte Stromdichte entsprechend der Funktion

$$J_0 = J_0 e^{-kx} (\cos \omega t - c)$$

(J_0 = Stromdichte an der Oberfläche
x = Abstand von der Oberfläche,
$\omega = 2\pi f$,
$k = 2\pi \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}}\, 10^{-9}$
f = Frequenz,
ϱ = Widerstand,
μ = Permeabilität,
c = Phasenverschiebung)

in den Außenschichten eines massiven Kreiszylinders herrscht, wird hier auch die meiste Wärme entwickelt, wie es von der elektrisch-induktiven Härtung her bekannt ist. Der Temperaturabfall nach innen ist um so stärker, je höher die Frequenz ist. Um die Überhitzung zu vermeiden, das Verzundern an der Oberfläche und die Heizzeiten in günstiger Weise zu beeinflussen, wird man später die Wechselfrequenz auf die Lagerschalenabmessungen abstimmen. Während des Aufheizens sind bezüglich der Abstimmung des Wechselstromkreises bzw. der Stromaufnahme drei Stadien zu unterscheiden: Das erste Stadium reicht von Raumtemperatur bis zur Temperatur der magnetischen Umwandlung des Stahls, das zweite bis zum Schmelzen des Kupfers, womit das dritte Stadium erreicht ist. Die Schmelzperiode des Bleies liegt je nach der Dicke und Dichte der Schicht des eingestampften Bleibronzepulvers vorzugsweise im ersten oder zweiten Stadium. Für eine kurze Erwärmungs- und Schmelzdauer sowie für einen guten elektrischen Wirkungsgrad sollte die Größe der Kondensatoren im Abstimmkreis diesen drei Stadien angepaßt werden. Für jede Lagerschalenabmessung und jede Kombination von Stahl- und Bleibronzegewicht können die günstigsten Bedingungen experimentell ermittelt und später automatisch eingehalten werden. Da in der dritten Stufe nach dem Schmelzen des Kupfers bei der Abstimmung, die für ein schnelles Erreichen der Schmelztemperatur zweckmäßig ist, die Temperatur beschleunigt ansteigt, muß besonders darauf geachtet werden, daß nunmehr keine Überhitzung der Stahlschale und Bleibronzeschmelze erfolgt, weil sonst erhebliche Eisenmengen in der Bleibronze gelöst werden, bevor die zu einer fehlerfreien Gefügeausbildung erforderlichen Vorgänge in der Bleibronzeschmelze abgelaufen sind.

Aus diesen Darlegungen ist bereits zu ersehen, daß trotz des einfachen Aufbaues einer solchen Anlage die Beherrschung der einzelnen Vorgänge schwierig werden kann und der Schmelzführung besondere Sorgfalt gewidmet werden muß.

4. Schmelzversuche und Versuchsergebnisse.

Die ersten Schmelzversuche wurden mit Stahlbuchsen angestellt, in die ohne besondere Vorbehandlung und Zuschläge eine fünf Millimeter dicke Schicht Bleibronzepulver um einen Kern so fest eingestampft wurde, daß sie nach Entfernung des Kerns zusammenhielt. Die Temperatur inmitten der Lagerbuchse wurde mit einem Thermoelement gemessen, hinkte aber gegenüber der Temperatur der Stahlschale und Bleibronze so stark nach, daß diese Art der Temperaturmessung sich als praktisch unbrauchbar erwies. Es ist durchaus möglich, daß bei einer Serienherstellung eine solche Temperaturkontrolle zweckmäßig ist, da es hierbei nicht auf Absolutmessungen ankommt, sondern mehr auf die Beobachtung eines stets gleichen Ablaufs oder auf eine Steuerung irgendwelcher Vorgänge. Wenn bei diesen Lagerbuchsen innen Temperaturen von 1200° erreicht waren, wurde die Heizspule ab- und die Wasserbrause übergeschoben. Diese Versuche hatten folgende Ergebnisse: Die Bleibronze zeigte ein dichtes und ausreichend feines Gefüge mit feiner Bleiverteilung und unregelmäßig orientierten Kupferdendriten, von dem man nach praktischen Erfahrungen mit Verbundlagern, die in üblicher Weise hergestellt sind, gutes Laufverhalten und hohe Belastbarkeit erwarten kann. Während der Aufheizperiode bis zum Schmelzen des Bleibronzepulvers hatte sich jedoch an der Bindungsfläche

[2]) Komplexpulver bezogen von der Deutschen Pulvermetallurgischen Gesellschaft m. b. H. in Frankfurt/Main.

Eisenzunder gebildet. Die Zunderschicht war nicht vollkommen dicht, so daß die geschmolzene Bleibronze durch die Poren im Zunder zur Stahlstützschale vordringen und den Stahl auf der ganzen inneren Bindungsfläche benetzen konnte. Die Zunderschicht blieb aber, da keine Zuschläge gegeben waren, welche zu einer dünnflüssigen Schlackenbildung geeignet sind, fest und zusammenhängend in der Nähe der Bindungsfläche liegen. Nach dem Abkühlen mit der Wasserbrause wurde der Aufbau nach Bild 2 und 3 vorgefunden. Beim Aufteilen der Buchse in zwei Halbschalen trennte sich infolge der Schrumpfspannungen die Bleibronzeschicht *d* längs der Zunderschicht *c* ab.

Zum Hintanhalten der Zunderbildung kann Borax oder eine der handelsüblichen Kupferlötpasten, z. B. Lecupa[3]), wie in den weiteren Versuchen verwandt werden. Die Stahlschalen wurden an der Bindungsfläche mit der Lötpaste bestrichen, mit einer dünnen Schicht Bleibronzepulver versehen und im Trockenschrank bei 120° getrocknet. Dann wurde eine nur 2,5 mm dicke Lage Bleibronzepulver eingestampft, da sich bei den vorhin beschriebenen Versuchen gezeigt hatte, daß die Bleibronzeschicht sich gleichmäßig anordnet und bei den vorhandenen Abmessungen eine etwa 2 mm dicke Schicht nach der Erstarrung genügend Bearbeitungszugabe in sich schließt. Durch die Lötpaste wird zwar die Schmelze frei von Schlacken, enthält jedoch zu viel Gase, die während der Erstarrung frei werden. Die Gase bilden größere Blasen, besonders in der Nähe der Bindungsfläche und heben die Bleibronze ab, wie Bild 4 zeigt.

In der folgenden dritten Versuchsreihe wurden die Stahlbuchsen wie vorhin mit Lötpaste und der ersten Schicht Bleibronzepulver versehen und getrocknet. Die weitere eingestampfte Lage bestand aus Bleibronzepulver, das mit so viel Pulver aus Phosphorkupfer mit 10% Phosphorgehalt vermengt wurde, daß bezogen auf das Kupfer 0,2% Phosphor vorhanden war. Diese Maßnahmen führten zu einem gasblasenfreien Ausguß und einwandfreier Bindung. Die Bildung einer dünnflüssigen Schlacke wurde gefördert. Damit die Schlacken aus der Schmelze entfernt und an die innere Oberfläche steigen können, muß die Schmelze eine gewisse Zeit flüssig gehalten werden. Ist die Zeit des schmelzflüssigen Zustandes zu kurz und insbesondere die Temperatur zu niedrig, dann enthält die Bleibronze Schlackeneinschlüsse mehr oder weniger über die ganze Schicht verteilt, wie Bild 5 zeigt. Der Schliff ist durch den Rand der Lagerbuchse gelegt, an dem die Temperatur etwas niedriger und daher die Schmelze zähflüssiger als in dem mittleren Abschnitt ist. In der Mitte reichten Temperatur und Zeit aus, um der Schlacke die Möglichkeit zu geben, nach innen zu steigen und sich an der Innenfläche zu sammeln, während unmittelbar am Rande die Schlacken nur zum Teil sich aus der Schmelze entfernt haben, und noch keine einwandfreie Bindung erfolgt ist. Um in jedem Falle die Schlacke über die ganze Lagerlänge ausfließen zu lassen, müßte entweder die Schmelze in der Mitte überhitzt oder sehr lange flüssig

[3]) Von Griesogen, Griesheimer Autogen Verkaufsgesellschaft, Griesheim/Frankfurt a. M.

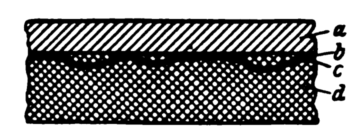
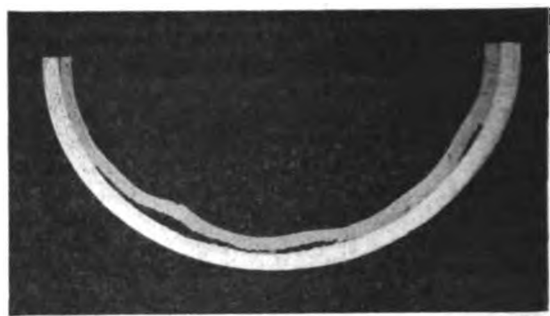
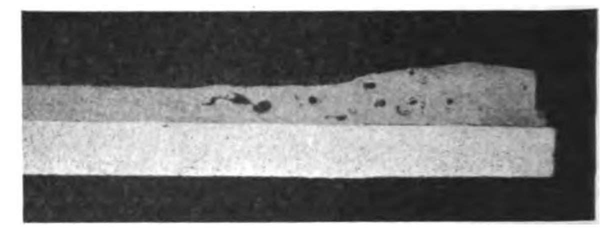
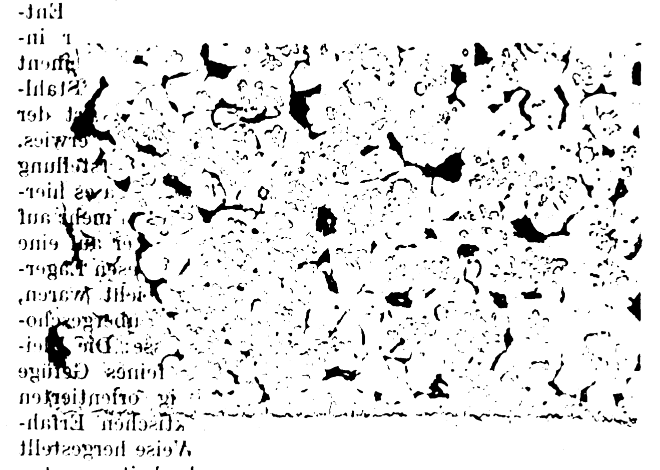


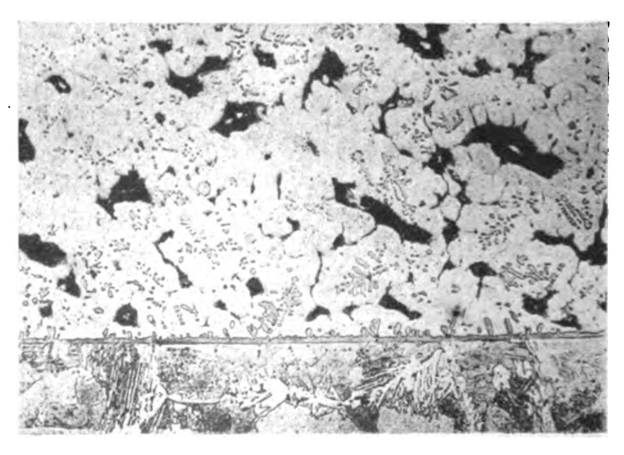
Bild 2. Schematische Darstellung des Aufbaues der Lagerschale mit zusammenhängender Zunderschicht in der Bleibronze.
a Stahlschale, *b* und *d* Bleibronze, *c* Eisenzunderschicht.


Bild 3. Ansicht der Bleibronzeschicht auf der Stahlstützschale unter der Eisenzunderschicht. Vgl. Bild 2. Vergr. 1fach.


Bild 4. Gasblasen in der Bleibronze. Vergr. 0,9fach.


Bild 5. Bleibronzeschicht mit Schlackeneinschlüssen. Vergr. 3fach.


Bild 6a. Bleibronze mit starker Eisenanreicherung geätzt mit essigsaurer Perhydrollösung. Vergr. 200fach.


Bild 6b. Bleibronze mit starker Eisenanreicherung geätzt zuerst mit 1 proz. alkoholischer Salpetersäurelösung, dann mit ammoniakalischer Perhydrollösung. Vergr. 200fach.

gehalten werden. Damit steigt aber die Gefahr, daß zuviel Eisen von der Bleibronze aufgenommen wird und bei der Erstarrung harte eisenreiche Mischkristalle sich bilden, die einen erhöhten Verschleiß und Riefenbildung an der Welle verursachen. Bild 6 zeigt eine Bleibronze mit starker Eisenanreicherung (7,47% Fe) infolge Überhitzung, die zur Bildung vieler Eisen-Kupfer-Mischkristalle geführt hat. Bemerkenswert ist die Zwischenschicht an der Bindungsfläche, die fast ausschließlich aus den kupferreichen Mischkristallen, die durch Diffusion des Kupfers in das Eisen erzeugt wurden, bestehen. Während die Bleibronze vorteilhaft mit einer essigsauren Perhydrollösung geätzt wird, empfiehlt sich zur Untersuchung der Eisen-Kupfer-Kristalle folgende Ätzung: zuerst wird eine alkoholische Salpetersäurelösung und danach eine ammoniakalische Perhydrollösung angewendet. Deutlich ist erkennbar, wie zum Kupfer hin Reste der Eisenkristallite mit Tropfenform sich ablösen und als kugelige Gebilde in die Bleibronze einwandern. Vielfach dienen diese Diffusionsmischkristallreste als Keim für die während der Abkühlung primär kristallisierenden Dendrite. Um also über den größeren mittleren Teil der Lagerlänge Überhitzen und Eisenaufnahme zu vermeiden, wird man u. U. an den kälter bleibenden Randzonen einige wenige Schlackenreste in der Bleibronze in Kauf nehmen; diese Zone war bei einigen Versuchslagern rd. 5 mm breit und wird abgestochen. Nach wenigen Versuchsschmelzen wurden einwandfreie Bleibronzeausgüsse erzielt. Das Durchschnittsgefüge zeigt Bild 7. Das Gefüge ist nicht ganz so feinkörnig, wie bei den aus dem Hochfrequenzofen geschöpften Bleibronzeverbundlagern, insbesondere ist das Blei nicht so fein verteilt. Mit dem Abstand von der Bindungsfläche nahm vielfach der Bleigehalt etwas zu. Die gesamte Herstellungszeit in der Schleuderanlage betrug 3,5 min. Die Drehzahl wurde nur wenig höher gewählt als zur Erzeugung einer Zentrifugalbeschleunigung von 1,5 g erforderlich war. Durch Erhöhung der Drehzahl wird sich eine Trennung von Schlacke und Bleibronze sicherlich in noch kürzerer Zeit erzielen lassen. Während bisher die Schmelztemperatur des Kupfers in etwa 1,5 min erreicht, und während rd. 2 min die Schmelze flüssig gehalten werden mußte, ließe sich bei höherer Drehzahl die Flüssigperiode vielleicht auf 1 min oder noch weniger abkürzen. Bei höherer Generatorleistung läßt sich die Erhitzungszeit ebenfalls noch stark herunterdrücken, so daß schließlich eine gesamte Herstellungszeit von etwa 1,5 min verwirklicht werden kann. Je Lager wurde bei unseren Versuchen annähernd 0,6 kWh verbraucht. In einer gut durchgebildeten Anlage wird man für die gleiche Lagerbuchse mit einem Energieaufwand von ungefähr 0,3 kWh rechnen können.

Die Lagerschalen wurden auf der DVL-Lagerprüfmaschine den sonst üblichen Dauerläufen unterzogen. Bei einer Öleintritt-Temperatur von 60° C, bei 4 atü Druck und 6 m/s Gleitgeschwindigkeit wurden die Lagerbuchsen über den ganzen Umfang schwellend belastet. Nach einer Einlaufzeit von je 2 h bei 100 und 200 kg/cm² Beanspruchung liefen die Lager je 50 h mit einer Belastung, die bei 250 kg/cm² beginnend stufenweise um 50 kg/cm² gesteigert wurde. Dabei zeigten sie die gleiche Belastbarkeit und dasselbe Laufverhalten wie die in Verbrennungskraftmaschinen für hochbelastete Kurbelwellengrund- und -pleuellager verwendeten

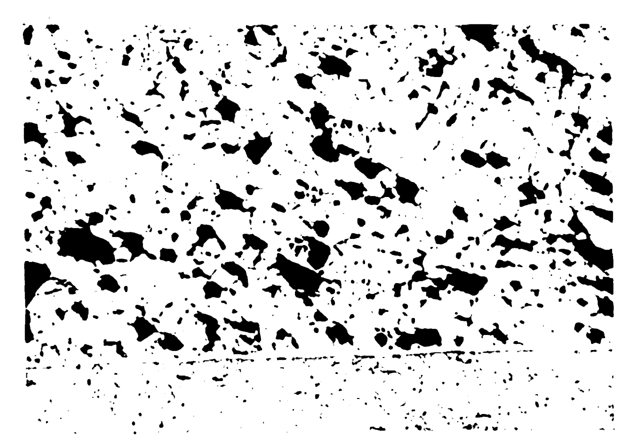


Bild 7. Gefüge der Bleibronze in einer mit induktiver Heizung erzeugten Verbundlagerschale Vergr. 100fach.

Verbundgußlagerschalen; die im Dauerlauf ertragene Höchstbelastung betrug wenigstens 300 bis 350 kg/cm².

IV. Folgerungen.

Die elektrisch-induktive Erhitzung erweist sich somit als geeignet zur Herstellung hochwertiger Bleibronze-Verbundguß-Gleitlager im Schleuderverfahren. Die Herstellungszeiten können z. B. durch Anwendung hoher Energien nicht beliebig verkürzt werden, da einerseits in der Schmelze ablaufende Reaktionen, die notwendig für eine fehlerfreie Gefügeausbildung sind, ihre Zeit brauchen, andererseits extrem kurze Heizperioden eine Steuerung der Temperaturen und damit die Vermeidung einer Überhitzung erschweren. Überhitzte Schmelzen lösen zuviel Eisen und zeigen dann schlechte Laufeigenschaften der Bleibronzeausgüsse und erhöhten Verschleiß. Die günstigsten Stromzeitprogramme können experimentell für jede Lagersorte ermittelt werden. Zur Ausschaltung von Bedienungsfehlern wird sich eine automatische Steuerung empfehlen.

Das Verfahren ist bemerkenswert durch den geringen Schmelzeinsatz an Bleibronze und den kleinen Energieaufwand. Es kann erwartet werden, daß in einer automatisch gesteuerten Anlage ein sehr kleiner Ausschuß anfällt. Ein Bleiabbrand findet kaum noch statt, wenn wie bei den hier beschriebenen Untersuchungen beiderseits durch dünne Blechwände, die durch den Einspanndruck dicht genug gegen die Schmelze sind, abgeschlossene Stahlbuchsen angewendet werden. Bleidämpfe treten nicht aus; damit entfällt die Gefahr der Bleivergiftung.

V. Zusammenfassung.

In einer Versuchseinrichtung, die sich an eine vorhandene kleine Hochfrequenzschmelzanlage anschloß, wurden durch mehrere Versuchsreihen die Bedingungen geklärt, unter denen mit elektrisch-induktiver Erhitzung im Schleuderverfahren Bleibronzeverbundgußlager in Stahlstützschalen hergestellt werden können. Die verschiedenen möglichen Gefüge- und Bindefehler werden besprochen und die metallurgischen Maßnahmen zu ihrer Vermeidung angegeben. Die hergestellten Versuchslager zeigten sich den nach den heute üblichen Verfahren hergestellten und in Verbrennungsmotoren benutzten Verbundgußlagern gleichwertig.

Über einige Eigenschaften elektrolytisch hergestellter Blei-Kupfer-Legierungen.

Von Franz Bollenrath, Berlin.

Bericht des Instituts für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Angaben über die elektrolytische Herstellung; die Härte und ihre Beeinflussung durch Anlassen bei verschiedenen Temperaturen; Gefüge und Gefügeänderung durch Anlassen; Rekristallisation.

Gliederung.

I. Einleitung.

Blei-Kupfer-Legierungen mit etwa 18 bis 25% Blei werden in großem Umfange für hochbeanspruchte Gleitlager, die ausschließlich als Verbundgußlager mit Stahlstützschalen hergestellt werden, verwendet. Der verhältnismäßig hohe Werkstoffeinsatz und die schwierige Herstellung einiger Lagertypen haben Versuche veranlaßt, Kupfer-Blei-Legierungen elektrolytisch in Stahlstützschalen einzubringen. Probelager mit galvanischen Bleibronzeschichten, die 8 bis 12% Blei enthielten, zeigten eine Tragfähigkeit, die denen gegossener Bleibronze-Verbundlagerschalen vergleichbar ist[1]). Einige Eigenschaften und der Aufbau solcher galvanischer Blei-Kupferschichten werden im folgenden beschrieben.

II. Herstellung der Blei-Kupferschichten.

Nach einem von A. Beerwald und L. Döhler ausgearbeiteten Verfahren wurden auf Stahl, der vorher verkupfert wurde, Schichten mit rd. 10 bis 12% Blei abgeschieden. Zur Herstellung dichter, haltbarer und festhaftender Schichten, die bei niedrigen Bleigehalten (7 bis 15%) am ehesten verwirklicht werden konnten, geben Beerwald und Döhler u. a. folgende Badzusammensetzung als brauchbar an:

14 g/l $Cu(OH)_2$,
56 » Kaliumtartrat (neutr.),
58 » Bleiazetat,
180 » Kaliumzitrat,
30 » KOH

und finden, daß eine Mitabscheidung des Bleis bei Potentialen erfolgt, die unedler als das Gleichgewichtspotential des Bleis sind, obwohl eine Mischkristall- oder Verbindungsbildung nach den bekannten Zustandsdiagrammen nicht auftritt.

III. Eigenschaften der Blei-Kupferschichten.

Die Härte ist gegenüber der gegossener Bleibronzen und elektrolytisch abgeschiedener reiner Metalle wie Kupfer und Nickel[2]) sehr hoch und schwankt zwischen 170 und 300 kg/mm² (Vickershärte bei 200 g Prüflast und 30 s Belastungsdauer). In Bild 1 ist die Härte und Dicke einer Schicht ange-

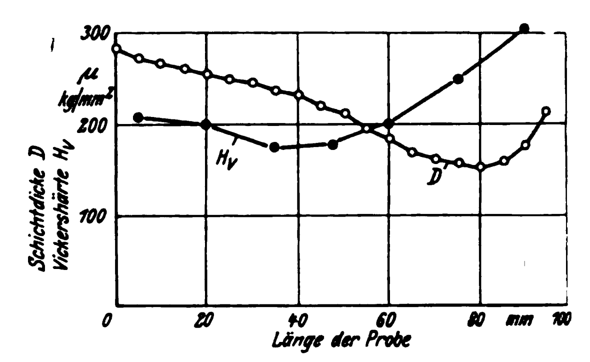


Bild 1. Verteilung der Dicke und Härte einer Kupfer-Blei-Legierung über die Probenlänge.

geben, die auf der Innenseite eines Stahlzylinders mit einer lichten Weite von 95 mm bei 0,7 A/dcm² Stromdichte und 25° Badtemperatur abgeschieden wurde unter lebhafter Bewegung des Elektrolyten in axialer Richtung durch den Zylinder. Die Enden des Zylinders waren zur Erzielung einer gleichmäßigeren Stromdichteverteilung durch aufgesetzte Ringe verlängert. Härte und Dicke ändern sich — infolge der Elektrolytbewegung und vielleicht auch infolge des Spannungsabfalls an der Anode — über die Zylinderlänge beträchtlich, und zwar in einander entgegengesetztem Sinne. Die Schichten sind spröde und manchmal von Haarrissen durchsetzt, die sich senkrecht zur Abscheidungsfläche erstrecken und ein unregelmäßiges Netz bilden. Bei einer Verformung durch Biegen treten zahlreiche Brüche ein, die nur z. T. den ursprünglichen bis an die Oberfläche reichenden Haarrissen folgen, ohne daß die einzelnen Bleibronzeteilchen von der Unterlage abspringen.

Der Versuch, die Blei-Kupferschichten durch Anlassen zu erweichen, liegt nahe. Die nach verschiedenen Anlaßzeiten und -temperaturen gemessene Härte einer Probenserie bringt Bild 2. Die Werte streuen zwar in ziemlich weiten Grenzen um so mehr, je länger die Proben angelassen

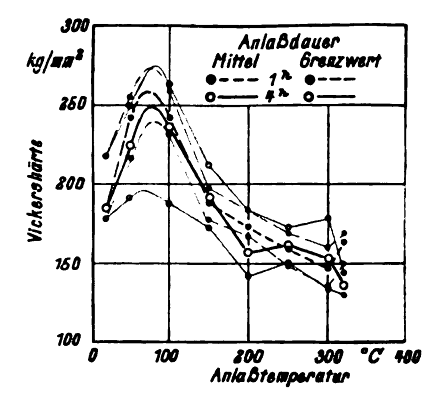
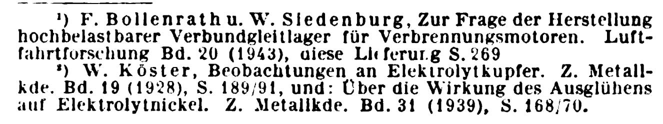


Bild 2. Härte nach Anlassen bei verschiedenen Temperaturen während einer und vier Stunden.



[1]) F. Bollenrath u. W. Siedenburg, Zur Frage der Herstellung hochbelastbarer Verbundgleitlager für Verbrennungsmotoren. Luftfahrtforschung Bd. 20 (1943), diese Lieferung S. 269.

[2]) W. Köster, Beobachtungen an Elektrolytkupfer. Z. Metallkde. Bd. 19 (1928), S. 189/91, und: Über die Wirkung des Ausglühens auf Elektrolytnickel. Z. Metallkde. Bd. 31 (1939), S. 168/70.

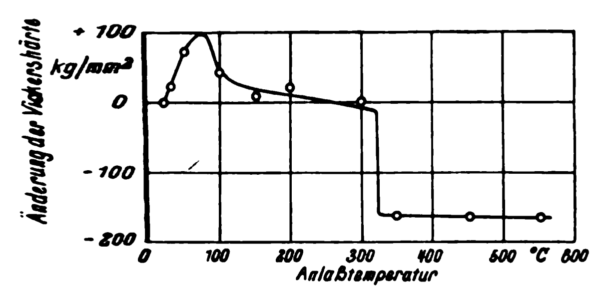


Bild 3. Änderung der Härte durch Anlassen bei verschiedenen Temperaturen (Anfangshärte 242 kg/mm²).

wurden; jedoch zeigen die Streugebiete ebenso wie die Mittelwerte eindeutig folgenden bemerkenswerten Verlauf über der Anlaßtemperatur: Mit der Temperatur steigt die Härte zunächst an, erreicht bei 70° bis 90° einen Höchstwert, fällt anschließend bis 150° stärker und dann schwächer ab, ohne jedoch selbst bei 320°, also kurz unterhalb der Schmelztemperatur des Bleis, wesentlich die Anfangshärte zu unterschreiten.

Um in Anbetracht der Streuungen die Abhängigkeit der Härte von der Anlaßtemperatur genauer festzulegen, wurde mit einer weiteren Probenserie die Härteänderung nach einstündiger Anlaßzeit ermittelt. Durch eine größere Zahl von Einzelmessungen an jeder Probe vor und nach dem Anlassen sind die Mittelwerte gut belegt. Die Härte der unbehandelten Proben betrug 210 bis 255 Vickerseinheiten bei einem Gesamtmittelwert von 242 kg/mm². Die Streubereiche waren mit 12 bis 25 kg/mm² bei den unteren Anlaßtemperaturen größer als bei den über 325° liegenden, bei denen sie auf 10 bis 4 kg/mm² absanken. Die Ergebnisse dieser Versuchsreihe in Bild 3 bestätigen, daß im unteren Temperaturbereich bis etwa 150° durch Ausbildung von Zwischenzuständen eine Härtesteigerung durchlaufen wird mit dem Höchstwert von rd. 80 bis 90 Vickerseinheiten bei schätzungsweise 80°, und daß bis 300° die Anfangshärte kaum stark unterschritten wird. Möglicherweise ist die Härteänderung mitbedingt durch Ausscheidungsvorgänge. Erst wenn die Anlaßtemperatur die Schmelztemperatur des Bleis überschreitet, werden die Schichten erheblich weicher. Bei 350° ist die Härte auf 74 kg/mm² abgesunken und behält diesen Wert noch bis 550°.

Vergleichsmessungen an Elektrolytkupfer brachten folgende Ergebnisse: Die Anfangshärte ist 56 bis 70 kg/mm², 63 kg/mm² im Mittel, und damit viel geringer als bei den Kupfer-Bleilegierungen. Eine Härtesteigerung wurde bei keiner Anlaßtemperatur beobachtet. Zwischen 300 und 400° sinkt infolge Entspannung und Rekristallisation die Härte entsprechend Bild 4 ab und beträgt nach dem Anlassen bei 500° nur noch 35 kg/mm². Die Anlaßdauer betrug eine Stunde.

IV. Aufbau der Blei-Kupferschichten.

Im festen Kupfer ist Blei praktisch unlöslich; jedenfalls liegt nach L. Addicks[3]), N. B. Pilling und G. P. Halliwell[4]) die Löslichkeit unter 0,05 bzw. 0,02% Pb. Trotzdem kann, wie bereits erwähnt, eine gleichzeitige Abscheidung des Bleis und Kupfers erfolgen. Wahrscheinlich ist die Löslichkeit des Bleis im Kupfer bei elektrolytischer Herstellung der Legierung beträchtlich. Bereits Beerwald und Döhler beobachten eine grobe Schichtung in der galvanischen Bleibronze. In weiteren mikroskopischen Untersuchungen wurden folgende Feststellungen gemacht:

Bild 5 zeigt eine Schlifffläche senkrecht zur Bindungsfläche nach Ätzung mit essigsaurer Perhydrollösung. Man erkennt die Kupfer-Zwischenschicht, das Aufwachsen der galvanischen Niederschläge in Stengelform, die senkrecht zur Fläche der Stahlunterlage angeordnet sind. Infolge der Rauhigkeit und günstigeren Orientierung einzelner Gruppen der zuerst abgeschiedenen Metallkriställchen entsteht die allgemein von elektrolytisch hergestellten Schichten bekannte Anordnung. Deutlich ist die Schichtung hervorgehoben; sie ist Konzentrationsschwankungen zuzuschreiben. Die dunkel geätzten Schichten sind bleireicher. Bleireiche Zonen befinden sich auch in Wachstumsrichtung angeordnet zwischen den einzelnen gleich gerichteten Korngruppen. In einer Schlifffläche parallel zur Bindungsfläche ergibt sich bei gleicher Ätzung das in Bild 6 dargestellte Gefüge, in dem an den Grenzen zwischen den parallel zueinander aufgewachsenen Kristallgruppen höhere Bleikonzentrationen vorkommen; man erkennt ferner, ebenso wie in Bild 5, daß innerhalb der Gruppen auch quer zur Wachstumsrichtung der Bleigehalt schwankt. An zahlreichen Stellen werden Grübchen angeätzt, die durch ihre regelmäßige Begrenzung vermuten lassen, daß über weite Bereiche die äußerst kleinen Kristalle gleich orientiert sind. Die Umrisse der Ätzgrübchen weisen auf eine reguläre Kristallform hin. Vorzugsweise liegen in den Ätzgrübchen



[3]) Trans. Amer. Inst. min. metallurg. Engr. Bd. 36 (1906), S. 18/27.
[4]) Trans. Amer. Inst. min. metallurg. Engr. Bd. 73 (1926), S. 679/92.

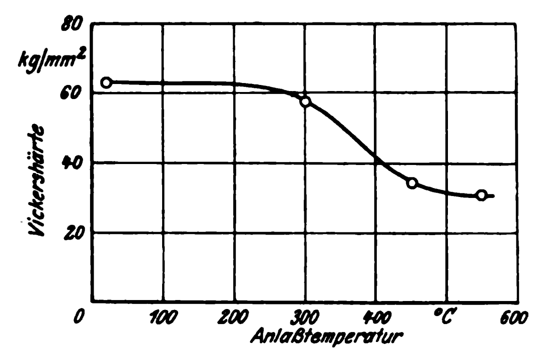


Bild 4. Änderung der Härte von Elektrolytkupfer durch Anlassen.

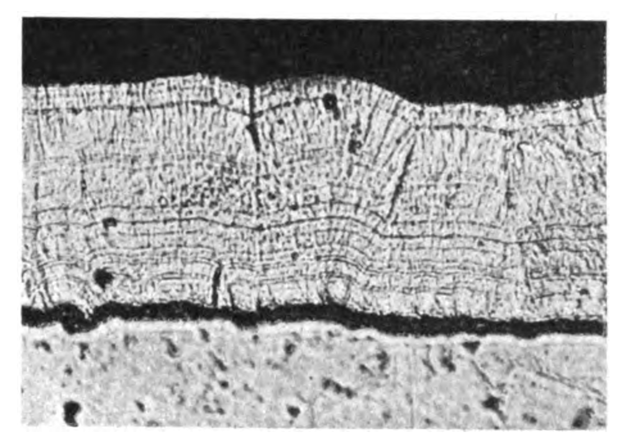


Bild 5. Gefügeaufbau im Querschliff einer unbehandelten Schicht. Vergr. 1000fach.

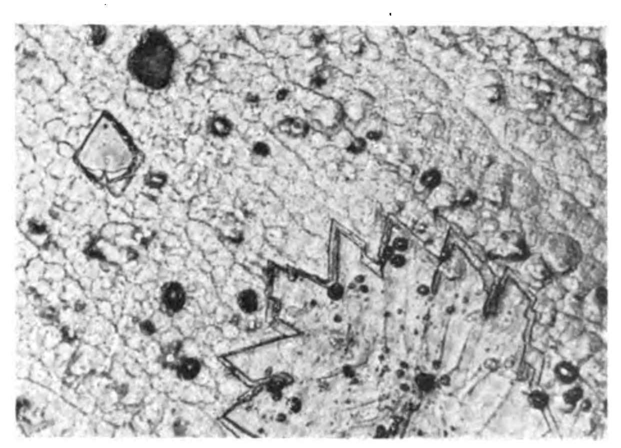


Bild 6. Gefüge und Ätzfiguren in einer Schlifffläche parallel zur Bindungsfläche. Vergr. 500fach.

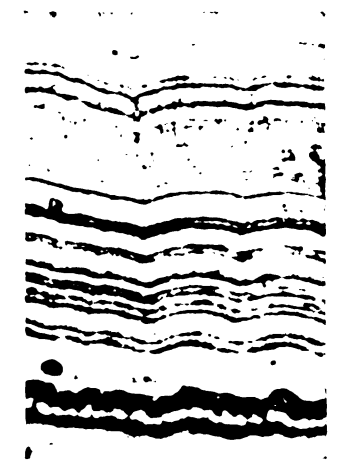


Bild 7. Schichtung infolge Konzentrationsschwankungen mit regelmäßiger Wellenlänge. Vergr. 2000 fach.

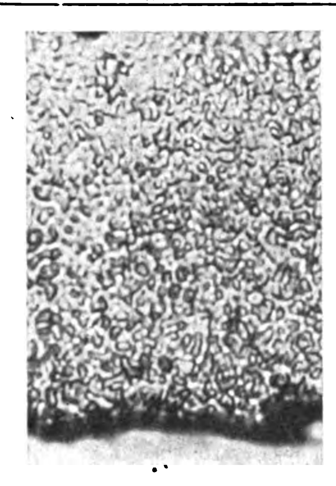


Bild 8. Gefüge im Querschliff nach Anlassen bei 150°. Vergr. 2000 fach.

111 — Ebenen parallel zur Schlifffläche. Die oft anzutreffenden stufenartig abgesetzten Vertiefungen hängen offenbar mit den vorhin beschriebenen Konzentrationsschwankungen parallel zur Bindungsfläche zusammen. Häufig findet man in den Ätzfiguren ein Zentrum besonders angeätzt, von dem strahlenförmig eine gestufte Ätztiefe ausgeht. Die einzelnen Gefügebestandteile sind zu klein, als daß das Mikroskop über die Größe und Form genauere Auskunft geben könnte. Bei der stärksten zweckdienlichen Vergrößerung sind jedoch noch einige weitere Einzelheiten im Lichtmikroskop erkennbar. Bild 7 bringt eine der an vielen Querschliffen gemachten Beobachtungen über die außerordentlich regelmäßige Folge der Konzentrationsschwankungen über die ganze Schichtdicke. Obwohl die Amplitude der Konzentration stark schwankt, bleibt die Wellenlänge konstant und beträgt nach verschiedenen Messungen 4 bis $6 \cdot 10^{-4}$ mm. Wenn also wie in diesem Falle bei geringer gegenseitiger Löslichkeit zweier Metalle oder, wie auch bei Silber-Blei-Legierungen beobachtet wurde, zwei Metalle in einer Konzentration, welche die Löslichkeit im festen Zustand übersteigt, erzeugt werden, scheiden sich die Phasen besonders gerne wechselweise in einer höheren und niederen als der mittleren Konzentration ab. Die Gründe werden analog denen sein, die zu den Konzentrationsschwankungen bei der Erstarrung aus dem Schmelzfluß führen[5]).

Änderungen im Gefüge werden durch Anlassen bei gehobenen Temperaturen verursacht. Gleichzeitig ändert sich die Stärke des Ätzangriffs. In Querschliffen ist nach einstündiger Anlaßzeit bis 100° die Schichtung noch gleich gut

[5]) F. Bollenrath und W. Bungardt, Z. Metallkunde Bd. 34 (1942) S. 160/165.

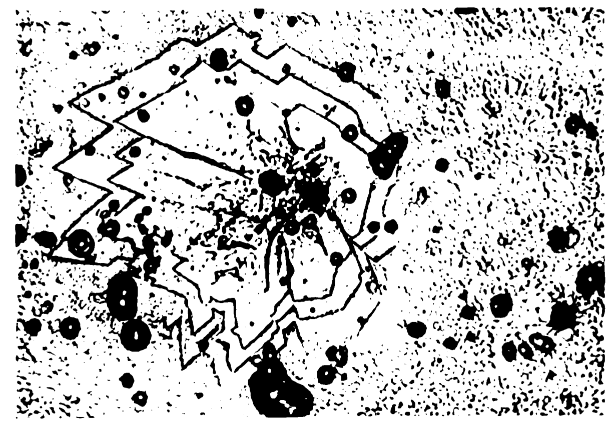


Bild 9. Gefüge und Ätzgrübchen nach Anlassen bei 100°. Vergr. 500 fach.



Bild 10. Gefüge und Ätzgrübchen nach Anlassen bei 150°. Vergr. 500 fach.

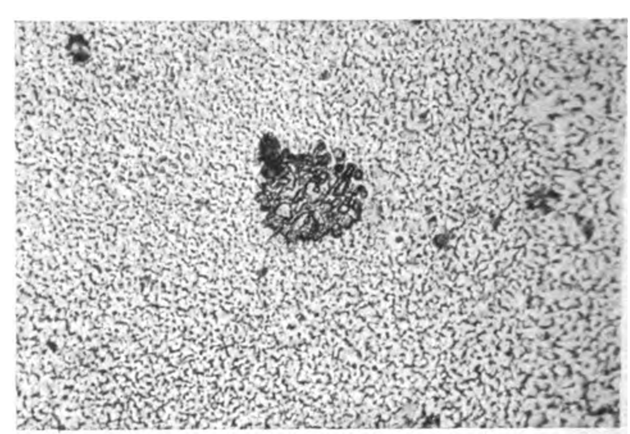


Bild 11. Gefüge und Ätzgrübchen nach Anlassen bei 200°. Vergr. 500 fach.

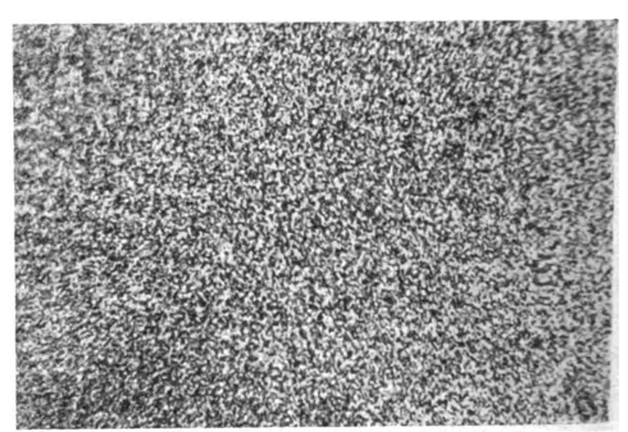


Bild 12. Gefüge nach Anlassen bei 300°. Vergr. 800 fach.

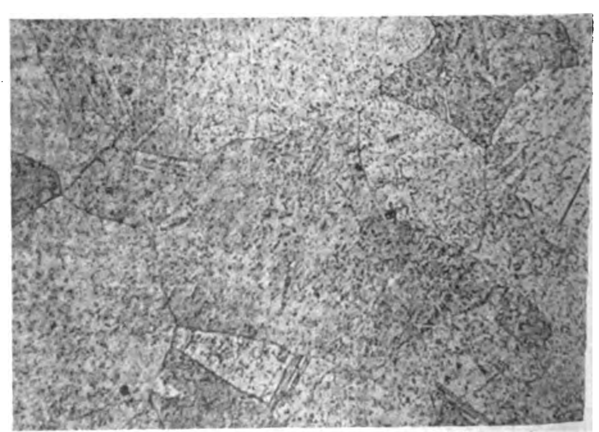


Bild 13. Sammelrekristallisation nach Anlassen bei 350°. Vergr. 500 fach.



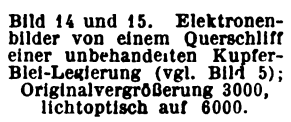
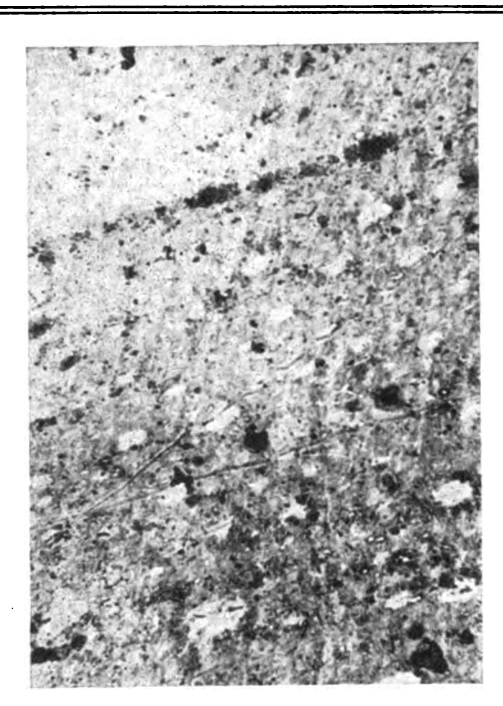


Bild 14 und 15. Elektronenbilder von einem Querschliff einer unbehandelten Kupfer-Blei-Legierung (vgl. Bild 5); Originalvergrößerung 3000, lichtoptisch auf 6000.



wie vor einer Warmbehandlung erkennbar; bei 150° ist sie aber bereits verschwunden, wie Bild 8 in der gleichen Vergrößerung, die bei Bild 7 angewendet wurde, zeigt; die Vergrößerung reicht auch hier nicht zur Auflösung des Gefüges aus. Ab 150° Anlaßtemperatur greift das Ätzmittel stärker an als nach Anlassen bei niedrigen Temperaturen. An Schliffflächen quer und parallel zur Bindungsfläche wurden ferner folgende in Bild 9 bis 13 dargestellte Beobachtungen gemacht: Mit zunehmender Anlaßtemperatur, z. B. bei 100°, bleiben nach Bild 9 zunächst die scharfe Begrenzung und der gleichmäßige flächenhafte Ätzangriff innerhalb der Ätzfiguren erhalten. Bei 150° bereits greift das Ätzmittel innerhalb der rosettenförmigen Bezirke nach Bild 10 ungleichmäßiger an. Die den schichtenweise schwankenden Konzentrationen zuzuschreibende Stufung in den Ätzgruben wird verwaschener. Bei einer auf 200° gesteigerten Anlaßtemperatur nimmt die Ätzbarkeit in dieser Art weiter zu, Bild 11, bis bei 300° die Bezirke eben noch angedeutet sind, Bild 12, und eine schärfere Begrenzung der Gefügebestandteile sich auszubilden beginnt. Die hohen inneren Spannungen lassen nach und Rekristallisation hat stattgefunden, nachdem ein Rückgang der Störungen im Gitterbau schon früher einsetzte. Die Kristallite bleiben wohl wegen der geringen Diffusionsfähigkeit des Bleis noch sehr klein. Die Durchmesser betragen höchstens 1 μ, bleiben meistens wesentlich darunter. Röntgenographische Untersuchungen[6]) zeigen bis 250° Anlaßtemperatur bei Anlaßzeiten bis zu vier Stunden zunächst keine Linien. Erst bei 300° treten stark verbreiterte, bei der großen Kornfeinheit aber noch nicht vermeßbare Linien auf. Überschreitet die Anlaßtemperatur den Bleischmelzpunkt, dann werden diskrete punktförmige Bleiteilchen infolge stärkerer Koagulation entsprechend der nunmehr offenbar viel größeren Beweglichkeit der Bleiatome nach gleichzeitig eingetretenem starkem Härteabfall sichtbar, Bild 13. Weiterhin haben sich größere, manchmal grobe Kupfer-Rekristallisationskörner mit häufiger Zwillingsstreifung gebildet (Sammelrekristallisation). Die Röntgenbilder zeigen jetzt scharfe Interferenzpunkte. Teilweise ist auf den Kupferkorngrenzen eine Bleiansammlung erkennbar, wie es auch sonst von heterogenen Mehrstofflegierungen nach Aufschmelzen der Phase mit dem niedrigsten Schmelzpunkt bekannt ist. Die Bleiverteilung bleibt gegenüber gegossenen Blei-Kupfer-Legierungen aber noch äußerst fein.

Elektronenbilder, von Herrn Dr. Mahl in der Forschungsanstalt der AEG mit Hilfe des AEG-Elektronenmikroskopes aufgenommen, brachten weitere Aufschlüsse über den Aufbau. Aus den in Bild 14 und Bild 15 wiedergegebenen Ausschnitten von Aufnahmen einer unbehandelten Blei-Kupfer-Legierung erkennt man zunächst die parallel zur Bindungsfläche verlaufende Streifung. Als größere Gefügebestandteile treten in der als Mischkristall zu betrachtenden, nicht auflösbaren Grundmasse Kupferartikel (hell) mit den größten Abmessungen von 0,001 mm auf. Die dunklen, punktförmig erscheinenden Bestandteile sind Blei, die in den bleireichen Zonen gehäuft auftreten. Die Bleiteilchen sind so klein, daß auch das Elektronenbild keine Auflösung bringt, die über die Gestalt weitere Auskunft gibt. Für die Größe der Bleipartikel läßt sich nach dem Elektronenbild annehmen, daß sie einen Durchmesser von hundert bis tausend Atomabständen haben.

V. Zusammenfassung

An elektrolytisch auf Stahlunterlage hergestellten Blei-Kupfer-Legierungen mit 10 bis 12% Blei, die sich als Gleitlagerschichten grundsätzlich brauchbar erwiesen, wurde die Härte und das Gefüge untersucht. Durch Anlassen steigt die Härte mit zunehmender Anlaßtemperatur zunächst an, erreicht etwas unterhalb 100° einen Höchstwert und fällt bei weiter gesteigerter Temperatur wieder ab, bei 320° jedoch erst wenig unter die Anfangshärte von 200 bis 300 kg/mm². Erst oberhalb der Temperatur des Bleischmelzpunktes werden die Legierungen wesentlich weicher, die Härte beträgt noch etwa 70 kg/mm².

Das Gefüge zeigt in regelmäßiger Folge in Wachstumsrichtung angeordnet Konzentrationsschwankungen, die durch Anlassen bei 150° ausgeglichen werden. Die gleichzeitig allmählich einsetzende Rekristallisation ist bei 320° weit fortgeschritten. Oberhalb der Schmelztemperatur des Bleis wird eine Koagulation des Bleis und Grobkristallisation des Kupfers beobachtet.

[6]) Die Untersuchungen mit Röntgenstrahlen wurden in dankenswerter Weise von Herrn Dr.-Ing. E. Oßwald angestellt.

Änderung der Festigkeitseigenschaften einiger Aluminiumlegierungen durch langzeitiges Erwärmen*).

Von F. Bollenrath und H. Gröber, Berlin.

Bericht des Instituts für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Ermittlung der Streckgrenze, Zugfestigkeit, Bruchdehnung und Härte einiger Aluminiumguß- und Knetlegierungen — vorwiegend für Kolben und Zylinderköpfe von Verbrennungsmotoren — nach Erwärmen auf verschiedene Temperaturen während 40 bis 340 Stunden.

Gliederung.

1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1] wurde über das Kriechverhalten mehrerer Aluminiumlegierungen, die teils gegossen, teils als gepreßte Stangen und zum Teil in beiden Zuständen vorlagen, bei Temperaturen von 150 bis 320° C und während einer Belastungsdauer von 300 und mehr Stunden berichtet. Diese Legierungen werden verwendet für Maschinenteile, die mehr oder weniger gehobenen Temperaturen und gleichzeitig mechanischen Spannungen ausgesetzt werden. Zum Beispiel kommen einige von ihnen in Frage für Gehäuse oder Laufräder der Luft-Turbokompressoren, andere für Zylinderköpfe und wieder andere für Kolben in Verbrennungsmotoren. Neben den Formänderungen, die durch die Betriebsbeanspruchungen verursacht werden, ist für die Beurteilung der Bauteilsicherheit die Kenntnis der Änderung der statischen Festigkeitseigenschaften in den gleichen Betriebszeiten wichtig. Die vorliegende Arbeit berichtet über die Ergebnisse der Untersuchungen, die sich mit dem Einfluß der Temperatur während einer den Versuchen über das Kriechverhalten entsprechenden Zeit auf die kennzeichnenden statischen Festigkeitseigenschaften beschäftigten.

2. Versuchswerkstoffe, Versuchsdurchführung und -ergebnisse

Die untersuchten Werkstoffe sind in der Zahlentafel 1 durch die chemische Zusammensetzung und in Zahlentafel 2 durch die Formgebung und den Warmbehandlungszustand zu Versuchsbeginn gekennzeichnet. Unter ihnen findet man neben mehreren altbekannten und bewährten Aluminiumlegierungen weitere, die sich durch ihre Zusammensetzung aus einheimischen Elementen auszeichnen.

Das Gefüge der meisten Legierungen befindet sich zu Beginn der Prüfung in einem instabilen Zustand. Diese Legierungen werden einer Wärmebehandlung unterworfen, die möglichst stark übersättigte Mischkristalle bewirkt, um bei anschließendem Lagern bei Raumtemperatur oder auch bei gehobenen Temperaturen durch Aushärten zu hohen Festigkeiten zu gelangen. Dies sind vornehmlich die Knetlegierungen Nr. 1 (Duralumin W, ähnlich der bekannten Y-Legierung), die beiden RR-Legierungen Nr. 4 und 5 (RR 56 und RR 59), Nr. 3 (EC 124) sowie die Werkstoffe nach den Fliegwerkstoff-Leistungsblättern 3115 und 3125. Die im Gußzustand befindlichen Legierungen weisen meistens ebenfalls infolge der dem Guß folgenden Abkühlungsgeschwindigkeit u. a. übersättigte Mischkristalle oder zum mindesten Schichtkristalle auf. Allerdings ist bekanntlich bei den im Gußzustand befindlichen Legierungen der Aushärtungsbetrag sehr viel geringer als bei den gekneteten.

Die Versuchstemperaturen sind so hoch, daß sie auf die Gefügezustände erheblich einwirken; je nach ihrer Höhe sorgen sie für eine sehr weitgehende Ausscheidung der im Überschuß gelösten Legierungselemente und — namentlich die höheren Temperaturen — für eine mehr oder weniger vollständige Koagulation der Ausscheidungen. Lange Glühzeiten führen weiterhin zu einer Angleichung der Konzentrationen in den Schichtkristallen und einer Abminderung des Preßeffektes. Je größer entsprechend der Zusammensetzung und Vorbehandlung während der Versuche die Gefügeänderungen sind, um so stärker ändern sich die Festigkeitseigenschaften, die an der Hand der Kennwerte für die Streckgrenze (bei 0,2% bleibender Dehnung, $\sigma_{0,2}$ kg/mm²), Zugfestigkeit (σ_B kg/mm²), Bruchdehnung (δ_{10} %) und Kugeldruckhärte (H_B, 5-mm-Kugel, 250 kg Belastung, 30 s Belastungsdauer) verfolgt werden.

Die Festigkeitseigenschaften wurden bei Raumtemperatur an Stäben ermittelt, die eine Wärmebehandlung erfahren hatten wie die den obenerwähnten Kriechversuchen unterworfenen Stäbe, und zwar befanden sie sich in dem Zustande, der zu Beginn und zu Ende der 300-Stunden-Versuche vorlag. Sie wurden also zum Teil während 40 und zum Teil während 340 Stunden auf 150, 220, 270 und 320° C erwärmt.

Die Aluminium-Magnesium-Legierungen (Hydronalium) Hy 51, Hy 511 und Hy 5112 wurden unter folgenden leitenden Gesichtspunkten als warmfeste bzw. kriechfeste Legierungen entwickelt: Die Legierungselemente sind einheimische Stoffe. Die Zusammensetzung ist so bemessen, daß bei den Betriebstemperaturen keine Löslichkeitsänderungen ablaufen. Mit den Platzwechselvorgängen bei Änderung der Gleichgewichte kann ebenso wie mit den Platzwechselvorgängen bei der Erholung und Rekristallisation eine erhöhte Kriechdehnung verknüpft sein. Wie die Kriechversuche zeigten, ist der Anteil der Platzwechselplastizität bei den Legierungen mit übersättigten Mischkristallen an der Kriechdehnung allerdings nicht so groß, daß ihr zu Beginn der Versuche und bei den mäßig gehobenen Temperaturen an sich schon überlegener Kriechwiderstand in dem Temperaturgebiet bis 220 und 270° C so geschädigt würde, daß er dem der im Gleichgewichtszustand befindlichen Legierungen schließlich unterlegen wäre. Bei den hohen Temperaturen zwischen 270 und 320° ist der absolute Unterschied zwischen den das Kriechverhalten kennzeichnenden Spannungen für die verschiedenen Legierungen zwar gering, der prozentuale Unterschied dagegen manchmal noch beträchtlich.

Für die statischen Festigkeitseigenschaften, die im Zugversuch mit normaler Durchführungszeit bei Raumtempera-

*) E 22 1.

[1]) F. Bollenrath und H. Gröber, Über das Kriechverhalten einiger Aluminiumlegierungen bei erhöhter Temperatur. Mitt. d. Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung 1942, Heft 4, S. 187 bis 205.



Zahlentafel 1. Chemische Zusammensetzung.

Nr.	Bezeichnung	Zusammensetzung in %									
		Be	Cu	Co	Fe	Mn	Mg	Ni	Si	Ti	Zn
1	Duralumin W	n. b.[1]	**4,03**	n. b.	0,30	Sp.[2]	**1,50**	**1,97**	0,22	0,013	Sp.
2	(Y-Legierung)	n. b.	**4,28**	n. b.	0,44	0,28	**1,55**	**2,00**	0,42	0,014	n. b.
3	EC 124	n. b.	**1,13**	n. b.	0,48	0,06	**1,14**	**1,06**	**12,10**	**0,12**	Sp.
4	RR 56	n. b.	**2,30**	n. b.	**1,14**	0,02	**0,82**	**1,29**	**0,84**	**0 08**	Sp.
5	RR 59	n. b.	2 09	n. b.	-**1,03**	0,02	**1,47**	**1,26**	**0,98**	**0,14**	0,07
6	Hy 51	n. b.	0,08	n. b.	0,43	0,22	**4,83**	n. b.	**0,99**	0,01	0,06
7	Hy 511	n. b.	0,02	n. b.	0,35	0,19	**4,92**	n. b.	**1,16**	**0,13**	0,06
8	Hy 51	n. b.	0,06	n. b.	0,42	0,21	**4,81**	n. b.	**0,98**	0,01	0,06
9	Hy 511	n. b.	0,01	n. b.	0,50	0,14	**4,92**	n. b.	**1,15**	**0,15**	0,06
10	Hy 51	n. b.	0,02	n. b.	0,21	0,27	**5,23**	n. b.	**0,98**	**0,008**	n. b.
11	Hy 51	n. b.	**0,50**	n. b.	0,22	0,23	**5,25**	n. b.	**0,97**	0,01	n. b.
12	Hy 51	n. b.	**1,09**	n. b.	0,25	0,23	**5,24**	n. b.	**1 08**	0,01	n. b.
13	Hy 511	n. b.	0,03	n. b.	0,28	0,19	**5,35**	n. b.	**1,09**	**0,15**	n. b.
14	Hy 511	n. b.	**0,62**	n. b.	0,28	0,22	**5,38**	n. b.	**1,18**	**0,13**	n. b.
15	Hy 511	n. b.	**1,25**	n. b.	0,20	0,23	**5,45**	n. b.	**1,81**	**0,14**	n. b.
16	Hy 5112	**0,18**	0,04	n. b.	0,36	0,17	**5,25**	n. b.	**1,12**	**0,14**	n. b.
17	Hy 5112	**0,18**	**0,60**	n. b.	0,36	0,17	**5,31**	n. b.	**1,11**	**0,14**	n. b.
18	Hy 5112	**0,18**	**1,07**	n. b.	0,37	0,17	**5,24**	n. b.	**1,09**	**0,14**	n. b.
19	KS 280	n. b.	**1,68**	**1,19**	0,59	**0,87**	0,17	**1,50**	**21,11**	**0,15**	0,04
20	Flw. 3115,5	n. b.	**4,14**	n. b.	0,45	**0,65**	**0,76**	n. b.	0,27	0,02	0,05
21	Flw. 3125,5	n. b.	**4,28**	n. b.	0,39	**1,17**	**1,00**	n. b.	**0,78**	0,01	0.1

[1] n. b. = nicht bestimmt und nicht zugesetzt.
[2] Spuren.

tur nach der Einwirkung verschiedener Temperaturen während langer Zeiten festgestellt wurden, gilt das gleiche, was bezüglich der Auswirkung der Platzwechselplastizität infolge Änderung der Löslichkeit im festen Zustande zu dem Kriechverhalten gesagt wurde. Daher werden bei den folgenden Betrachtungen die Gruppen der im Gußzustand bzw. im gekneteten (verpreßten) Zustand befindlichen Legierungen jede für sich behandelt.

Die gesamten Versuchsergebnisse sind in der Zahlentafel 3 zusammengestellt.

a) Zugfestigkeit.

Von den verpreßten Legierungen weisen bei 150° C nach 40stündiger Glühzeit die Legierungen RR 56 und RR 59 mit 44,5 und 47,1 kg/mm² die weitaus höchsten Zugfestigkeiten auf. Dann folgen die Legierung Duralumin W (bzw. Y-Legierung) mit 37,6 kg/mm², EC 124 mit 34,1 und Hy 51 mit 23,9 kg/mm². Bei einer um 20° höheren Temperatur liegen die Fliegwerkstoffe 3115 und 3125 wenig unter Hy 51. Durch eine weitere Glühdauer von 300 Stunden wird diese Reihenfolge nicht geändert. Der größte Festigkeitszuwachs wird bei Duralumin W beobachtet und beträgt rd. 3 kg/mm². Die Legierungen EC 124, RR 56 und Hy 51 ändern ihre Zugfestigkeit nicht, RR 59, Flw. 3115 und 3125 zeigen einen geringen Abfall von 1 bis 2 kg/mm².

Die Temperaturen von 220° verursachen einen stärkeren Abfall bei 40stündiger Einwirkung bei den Legierungen RR 56 und RR 59, die um etwa 8 kg/mm² auf eine Zugfestigkeit von 37 bzw. 39 kg/mm² absinken; die Legierungen Duralumin W und Hy 51 werden nicht beeinflußt. EC 124 erleidet den gleichen Abfall wie die RR-Legierungen und kommt herunter auf 25,6 kg/mm². Die Flw. 3115 und 3125 erzielen merkwürdigerweise eine Steigerung um 8 bis 9 kg/mm² auf 28,7 und 31,3 kg/mm² bei 230° gegenüber 170°. Die Glühdauer von 340 Stunden vermindert durchweg die Zugfestigkeit gegenüber der 40stündigen Glühzeit weiterhin beträchtlich. Die Zugfestigkeit von RR 56 sinkt von 37 auf 28,3 kg/mm², die der Legierung Duralumin W von 37,6 auf 33,5 kg/mm²; RR 59 zeigt sogar einen Abfall um nahezu 10 kg/mm², nämlich von 39,1 auf 29,6 kg/mm². EC 124 fällt von 25,6 auf 22,1 kg/mm², während Hy 51 sich nicht mehr ändert. Beachtlich ist die Verminderung der Zugfestigkeiten bei den Fliegwerkstoffen 3115 und 3125, die von 28,7 bzw. 31,3 auf 15,1 bzw. 15,3 kg/mm² heruntergehen, entsprechend 50% im Mittel.

Bei 270° sind die Zugfestigkeiten der Legierungen Duralumin W, RR 56, RR 59 und Hy 51 praktisch gleich mit

Zahlentafel 2. Behandlungszustand.

Nr.	Bezeichnung	Verarbeitung	Wärmebehandlung
1	Duralumin W	gepreßt	50 min bei 505° geglüht und in Wasser abgeschreckt
2	(Y-Legierung)	Sandguß	Die Sandgußlegierung wurde außerdem während 3 h bei 300° angelassen
3	EC 124	gepreßt	90 min bei 500° geglüht in Wasser mit 75° abgeschreckt und 7 h bei 200° angelassen
4 5	RR 56 RR 59	gepreßt	30 min bei 350° geglüht, Glühtemperatur in 45 min auf 525° gesteigert, dann in Wasser mit 85° abgeschreckt, 16 h bei 170° angelassen und in Wasser abgeschreckt
6 7	Hy 51 Hy 551	gepreßt	keine
8 9	Hy 51 Hy 511	Sandguß	
10 11 12 13 14 15 16 17 18	Hy 51 Hy 51 Hy 51 Hy 511 Hy 511 Hy 511 Hy 5112 Hy 5112 Hy 5112	Sandguß	3 h bei 300° geglüht
19	Ks 280	Sandguß	bei 250° angelassen
20 21	Flw. 3115 Flw. 3125	gepreßt	bei 500° geglüht, in Wasser abgeschreckt

24 bis 25 kg/mm² nach 40stündiger Glühzeit und ebenfalls nach 340stündiger Glühzeit mit 21,5 bis 23 kg/mm². EC 124 liegt hier am niedrigsten mit 20,2 bzw. 16,9 kg/mm². Ähnlich ist die Lage bei 320° C. Hierbei zeigt nach 40 Stunden Hy 51 die höchste Zugfestigkeit mit 23,6 kg/mm², dann folgen RR 56, RR 59 und Duralumin W in einem Bereich von 3 kg/mm², schließlich kommt EC 124 mit 17,9 kg/mm². In den weiteren 300 Stunden ändert sich Hy 51 nicht, Duralu-

Zahlentafel 8. Streckgrenze bei 0,2 % bleibender Dehnung ($\sigma_{0,2}$) und Zugfestigkeit (σ_B) in kg/mm². Bruchdehnung des langen Proportionalstabes (Meßlänge gleich 10 mal Durchmesser, δ_{10} in %) und Brinellhärte ($H_{B\,5/250/30}$ kg/mm²) nach einer Erwärmungsdauer von 40 und 340 Stunden auf 150 bis 320° C.

Nr.	Werkstoff	Glühdauer h	Glühtemperatur: 150°				220°				270°				320°			
			$\sigma_{0,2}$	σ_B	δ_{10}	H_B	$\sigma_{0,2}$	σ_B	δ_{10}	H_B	$\sigma_{0,2}$	σ_B	δ_{10}	H_B	$\sigma_{0,2}$	σ_B	δ_{10}	H_B
1	Duralumin W (gepreßt)	40 340	26,8 37,6	37,6 40,9	15,3 6,5	124 136	25,1 25,9	37,6 33,5	17,3 7,4	121 111	13,6 11,2	24,8 22,2	9,8 10,5	72 69	7,1 7,1	20,4 19,4	16,9 16,7	59 58
2	Y-Legierung (Sandguß)	40 340	18,6 19,4	19,1 19,9	0,4 0,2	89 87	17,2 16,8	18,3 17,4	0,4 0,3	83 82	15,8 12,5	16,9 15,9	0,3 0,5	82 71	8,9 8,1	15,0 13,2	1,4 1,2	64 63
3	EC 124 (gepreßt)	40 340	29,4 31,4	34,1 34,9	2,1 1,5	119 121	18,7 14,7	25,6 22,1	4,4 4,7	86 75	11,8 8,1	20,2 16,9	5,7 7,7	66 59	8,8 7,5	17,9 16,5	8,0 9,2	58 54
4	RR 56 (gepreßt)	40 340	35,7 37,4	44,5 44,8	8,2 5,9	146 147	30,7 19,2	37,0 28,3	5,8 7,5	117 95	13,2 11,1	24,9 21,6	9,2 9,6	74 71	10,8 7,2	22,8 18,0	10,5 15,5	67 53
5	RR 59 (gepreßt)	40 340	38,0 39,0	47,1 45,0	6,3 2,7	147 147	34,0 21,3	39,1 29,6	4,9 5,9	123 96	12,7 10,5	24,4 21,9	10,1 11,7	69 65	9,0 5,7	21,5 16,3	13,9 14,8	64 54
6	Hy 51 (gepreßt)	40 340	10,2 10,3	23,9 23,7	19,4 18,6	68 68	10,0 8,8	23,6 23,3	18,9 20,6	67 66	11,4 8,3	24,7 23,3	16,0 19,9	63 65	9,7 9,4	23,6 23,6	19,8 18,4	64 64
7	Hy 511 (gepreßt)	340	16,4	28,7	12,0	71	16,0	27,6	12,2	71	15,4	28,4	11,9	70	14,5	26,8	12,9	69
8	Hy 51 (Sandguß), alte Lieferung	40 340	14,4 15,9	19,1 19,9	0,9 1,4	82 84	11,3 14,0	18,3 18,9	2,8 1,7	73 84	10,9 10,8	18,2 17,8	2,6 2,6	70 69	9,9 9,8	17,6 17,8	3,0 2,9	67 68
9	Hy 511 (Sandguß), alte Lieferung	340	15,8	18,6	0,6	83	12,9	17,8	1,2	75	10,9	17,1	1,4	69	9,5	16,3	1,9	68
10	Hy 51 (Sandguß)	40 340	11,9 12,5	18,3 18,2	2,7 2,3	70 71	11,8 12,2	18,4 18,0	2,6 2,2	70 71	11,7 11,2	18,6 17,8	3,1 2,8	68 69	10,4 10,3	17,7 17,0	3,3 2,6	68 67
11	Hy 51 + 0,5 Cu (Sandguß)	40 340	15,7 16,4	20,2 19,8	1,6 1,1	81 81	15,7 15,3	20,2 19,4	1,8 1,2	79 80	13,6 11,7	19,3 17,8	2,1 2,0	75 73	10,7 11,2	18,2 18,2	2,9 2,5	70 70
12	Hy 51 + 1,0 Cu (Sandguß)	40 340	18,0 17,7	20,7 20,2	0,7 0,9	87 86	17,2 16,9	20,1 19,6	0,8 0,8	85 82	14,5 12,2	18,5 17,5	1,2 1,6	77 73	10,4 11,0	16,2 16,7	1,7 2,0	72 71
13	Hy 511 (Sandguß)	40 340	13,0 13,7	19,4 19,1	2,9 2,5	74 75	13,1 13,5	19,3 18,6	2,5 2,2	75 74	12,3 11,4	18,8 18,2	2,7 2,6	72 72	10,7 10,5	18,2 18,4	3,4 3,3	69 68
14	Hy 511 + 0,5 Cu (Sandguß)	40 340	15,9 16,7	19,8 20,1	1,3 1,2	83 85	15,3 15,0	19,4 19,6	1,3 1,3	80 78	13,8 12,1	18,8 18,2	1,6 2,0	77 73	10,6 10,8	17,3 17,8	2,3 2,2	71 71
15	Hy 511 + 1,0 Cu (Sandguß)	40 340	16,1 17,0	19,4 19,5	1,0 0,8	84 85	16,5 16,1	19,7 19,5	0,9 0,8	84 83	14,8 13,1	18,8 18,4	1,3 1,4	79 78	11,5 11,6	17,0 17,7	1,6 1,7	75 75
16	Hy 5112 (Sandguß)	40 340	11,7 11,9	19,5 19,5	4,8 4,0	72 71	11,7 11,4	19,5 19,5	4,6 4,3	70 70	10,8 10,3	19,3 19,3	4,9 5,1	70 69	9,7 9,8	19,1 19,1	5,3 4,9	67 68
17	Hy 5112 + 0,5 Cu (Sandguß)	40 340	15,4 16,5	20,6 20,4	2,4 2,0	80 80	14,4 14,3	19,9 20,2	2,0 2,2	79 78	12,9 11,1	19,3 18,7	2,7 3,3	71 71	10,4 10,2	18,4 18,5	3,7 3,3	69 69
18	Hy 5112 + 1,0 Cu (Sandguß)	40 340	15,9 16,3	20,0 20,2	1,2 1,3	82 82	15,8 15,8	19,5 19,8	1,2 1,1	81 77	13,9 12,5	19,2 18,4	1,8 1,7	77 74	10,8 10,8	17,4 17,2	2,3 2,4	71 69
19	KS 280 (Sandguß)	40 340	16,8 16,8	17,5 18,9	0,1 0,2	117 118	— 16,1	13,8 16,5	0,1 0,1	115 112	16,4 15,3	17,4 14,2	0,3 0,1	109 109	14,2 14,9	16,2 18,0	0,1 0,1	109 107
			170°				230°				270°				320°			
20	Flw. 3115,5	40 340	16,0 14,9	19,9 19,1	9,2 8,8	125 129	18,2 9,6	28,7 15,1	11,5 10,3	82 96	6,3 —	12,3 —	12,0 —	72 —	5,4 6,2	12,0 12,7	15,6 15,9	69 74
21	Flw. 3125,5	40 340	20,1 17,6	22,7 21,2	7,1 6,7	141 136	19,6 10,3	31,3 15,3	11,6 8,7	90 96	7,2 —	13,4 —	10,7 —	77 —	6,3 6,7	12,7 13,2	12,5 14,2	72 76

min W und EC 124 verlieren je 1 kg/mm², RR 56 und RR 59 noch je rd. 5 kg/mm².

Die Gußlegierungen ändern demgegenüber weder bei den verschieden langen Glühzeiten noch bei den verschiedenen Glühtemperaturen bis 270° ihre Zugfestigkeit in einem nennenswerten Maße. Alle Hydronaliumtypen bleiben untereinander gleich. Lediglich bei Hy 51 ist durch die steigenden Kupfergehalte bei 150° ein schwacher Anstieg durch die ersten 0,5% Kupfer erzielt. Bei 320° verursacht der Kupferzusatz anscheinend sogar eine Verringerung der Zugfestigkeit. Bis 270° bewegen sich die Zugfestigkeiten der Hydronaliumlegierungen zwischen 18 und 20,2 kg/mm², bei 320 zwischen 16 und 19 kg/mm². Demgegenüber verhalten sich die Y-Legierung (Sandguß) und KS 280 ungünstiger.

b) Streckgrenze.

Die Streckgrenzen ändern sich mit zunehmender Temperatur und Glühzeit stärker als die Zugfestigkeiten.



Die verpreßten Legierungen zeigen z. T. beachtliche Verschiebungen der Streckgrenzen infolge der Ausscheidungsvorgänge außer der Legierung Hy 51. Allerdings sind die Streckgrenzen der Legierung Hy 51 (Nr. 6) mit rd. 10 kg/mm² außer nach den Wärmebehandlungen bei 320° wesentlich niedriger als alle übrigen, auch der im Gußzustand befindlichen Legierungen. Die nach den Streckgrenzen sich ergebende Reihenfolge bleibt im wesentlichen die gleiche wie bei der Zugfestigkeit.

Bei 150° C verursacht die Warmaushärtung in der Zeit von 40 bis 340 Stunden bei der Legierung Duralumin W eine Steigerung der Streckgrenze von 26,8 auf 37,6 kg/mm², bei den Legierungen RR 59, RR 56 und EC 124 beträgt die Erhöhung etwa 2 kg/mm², wobei RR 59 und RR 56 an der Spitze liegen.

Bei 220° sind die Streckgrenzen nach 40 Stunden bei RR 59 und RR 56 noch weitaus die höchsten, fallen aber in den weiteren 300 Stunden beträchtlich ab, und zwar um 12,7 bzw. 11,5 kg/mm² auf 21,3 bzw. 19,2 kg/mm² und liegen damit um rd. 5 bis 6 kg/mm² tiefer als die Streckgrenze der Legierung Duralumin W, die 25,1 bis 25,9 kg/mm² beträgt. EC 124 verliert in 40 Stunden gegenüber 150° 10,7 kg/mm² (18,7 gegenüber 29,4) und in 340 Stunden 16,7 kg/mm² (von 31,4 auf 14,7).

Sämtliche Legierungen im Preßzustand haben nach 40-stündiger Glühdauer bei 270° eine Streckgrenze zwischen 11,2 und 13,6 kg/mm². Die Werte lassen in den weiteren 300 Stunden um 2 bis 3 kg/mm² nach.

Duralumin W zeigt mit 7,1 nach 40- und 340stündiger Erwärmung bei 320° die niedrigste Streckgrenze der warmfesten Preßlegierungen. Von den Legierungen EC 124, RR 56 und RR 59, die nach 40stündiger Erwärmung noch 8,8 bis 10,8 kg/mm² Streckgrenze aufweisen, geht RR 59 in den weiteren 300 Stunden auf 5,7 kg/mm², die beiden anderen gehen auf 7,2 bis 7,5 kg/mm² herunter.

Unter den Gußlegierungen zeigen die Aluminium-Magnesiumlegierungen (Hydronalium) in den Streckgrenzen außer bei 320° einen deutlicheren Einfluß der Kupferzusätze als bei der Zugfestigkeit. Die Glühdauer spielt keine Rolle, abgesehen von den Kupfer enthaltenden Legierungen und 270° Glühtemperatur, bei der die Hydronaliumlegierungen mit 0,5 und 1% Cu in der Zeit von 40 bis 340 Stunden rd. 1 bis 2 kg/mm² einbüßen. 0,5% Kupfer erhöhen bei 150° die Streckgrenze um 3 bis 4 kg/mm², d. s. rd. 25%. Weitere 0,5% Kupfer bringen noch eine Verbesserung von zusätzlich 0 bis 19%, lohnen sich aber mit Rücksicht auf das Kriechverhalten nicht. Während die Glühdauer bei 150, 220 und 320° die Streckgrenze fast nicht beeinflußt, sinken bei 270° in der Zeit von 40 bis 340 Stunden die Streckgrenzen durchweg um 0,5 bis 2 kg/mm². Im übrigen sind die drei Gruppen Hy 51, Hy 511 und Hy 5112 bezüglich der Streckgrenzen ebenso wie bezüglich der Zugfestigkeit gleichwertig.

Die Y-Legierung liegt bis 270° in der Streckgrenze an der oberen Grenze der Gußlegierungen, bei 320° hat sie die niedrigste Streckgrenze. Die Legierung KS 280 zeigt keine nennenswerte Abhängigkeit von Glühdauer und -temperatur.

c) Dehnung.

Die an und für sich schon niedrige Dehnung der im gegossenen Zustande befindlichen Legierungen ändert sich kaum im gesamten untersuchten Temperaturbereich. Bei den 1% Cu enthaltenden Aluminium-Magnesiumlegierungen geht der Abnahme der Festigkeit und Streckgrenze bei 320° eine schwache Zunahme der Bruchdehnung parallel. Diese Legierungen haben unter den Gußlegierungen die besten Dehnungen.

Die Ausscheidungsvorgänge verursachen bei den verpreßten Legierungen stärkere Änderungen der Dehnungen. Bei der Warmaushärtung geht die Dehnung stark zurück. Überwiegt die Koagulation der ausgeschiedenen Bestandteile, steigt die Dehnung wieder an, um schließlich bei den Weichglühtemperaturen und -zeiten mit wachsender Temperatur und Zeit die höchsten Werte anzunehmen. Die niedrigste Dehnung wurde an EC 124 beobachtet, die höchste bei der Legierung Nr. 6 (Hy 51).

Bezüglich der speziellen Werte sei auf die Zahlentafel verwiesen.

d) Kugeldruckhärte.

Die Härte ändert sich analog den Festigkeitseigenschaften, wie Streckgrenze und Zugfestigkeit.

Die verpreßten Legierungen haben zunächst (bei 150°) die höchsten Härten. An der Spitze stehen RR 56 und RR 59 mit einer Brinellhärte von 146 bis 147 kg/mm²; dann folgen Duralumin W und Flw. 3115 sowie Flw. 3125. Nicht viel niedriger liegt EC 124 mit 119 bis 121 kg/mm². Diesen gegenüber ist Hy 51 mit 68 kg/mm² sehr weich. Den stärksten Härteverlust von rd. 50% erleiden die verpreßten Werkstoffe zwischen 220 und 270° C. Bei den höheren Temperaturen spielt die Glühzeit keine besondere Rolle mehr. Schließlich sind die Härten aller verpreßten Legierungen bei 320° C beinahe alle gleich.

Die als Sandguß untersuchten Aluminium-Magnesiumlegierungen zeigen sowohl mit zunehmender Temperatur als auch bei steigender Glühzeit keine Besonderheiten. Sie unterscheiden sich nur wenig voneinander. Die Härteänderungen sind an sich sehr gering; besonders bemerkbar macht sich der Kupferzusatz, der sich in den größeren Härteänderungen auswirkt. Am meisten fällt die Härte der Y-Sandgußproben ab, relativ am wenigsten ändert sich KS 280, die ab 270° mit 107 bis 109 kg/mm² die größte Härte aller hier untersuchten Legierungen besitzt.

8. Zusammenfassung.

An den auf ihr Kriechverhalten untersuchten Legierungen wird die Änderung der Streckgrenze, Zugfestigkeit, Bruchdehnung und Kugeldruckhärte in Abhängigkeit von den bei den Kriechversuchen angewendeten Temperaturen und Glühzeiten festgestellt.

Sowohl Zeit wie Temperatur wirken sich am stärksten bei den verpreßten und aushärtbaren Legierungen aus. Die im Gußzustand untersuchten Legierungen zeigen geringere Änderungen, vor allem dann, wenn sie sich schon von vorneherein in einem stabilen Gefügezustand befinden.



Kerbeinfluß bei üblicher und erhöhter Temperatur auf hochwarmfeste, austenitische Werkstoffe*).

Von H. Cornelius und W. Schmidt.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Zerreißversuche bei 20, 450 und 600° sowie Zugschwellversuche bei 450 und 600° mit glatten und gekerbten Prüfstäben aus drei hochwarmfesten, austenitischen Werkstoffen mit zum Teil verschiedener Vorbehandlung.

Gliederung.

1. Einleitung.

Die Dauerfestigkeit und das Dehnverhalten von ungekerbten Stahlstäben in der Wärme sind besonders durch neuere Untersuchungen von M. Hempel und Mitarbeitern weitgehend geklärt worden. Über diese Arbeiten haben M. Hempel und H. Krug kürzlich unter Berücksichtigung des sonstigen Schrifttums zusammenfassend berichtet[1]). Es ergibt sich als wesentlichste Feststellung, daß das Wöhlerverfahren oberhalb 300° bis 400° zur Ermittlung der Dauerfestigkeit nicht ausreicht. Vielmehr müssen auch die im Dauerversuch auftretenden Dehnungen berücksichtigt werden, um einen Anhalt für die wirkliche Belastbarkeit der Werkstoffe zu erhalten. Die Versuchsunterlagen über die Wirkung von Kerben auf die Dauerfestigkeit metallischer Baustoffe in der Wärme[2]) sind erst wenig umfangreich, und ihre Erweiterung ist erforderlich. Insbesondere fehlen Angaben für die erst in neuerer Zeit in Erscheinung getretenen, hochwarmfesten Stähle und Legierungen[3]). Hierzu sollen die nachfolgend behandelten Untersuchungen einen Beitrag liefern, der sich außer auf Zugschwellversuche auch auf Kurzzerreißversuche mit glatten und gekerbten Prüfstäben erstreckt.

2. Versuchswerkstoffe und Versuchsdurchführung.

Als austenitische Versuchswerkstoffe wurden ein Chrom-Nickel-Stahl A mit Zusätzen von Wolfram, Tantal und Niob, ein Chrom-Nickel-Titan-Stahl B und eine eisenarme Chrom-Nickel-Kobalt-Wolfram-Molybdän-Legierung C gewählt. (Die Warmfestigkeitseigenschaften der Legierung können durch Zusätze von Titan oder Tantal und Niob noch erheblich verbessert werden.) Der Stahl A und die Legierung C wurden nach zwei verschiedenen Vorbehandlungen untersucht. Der Stahl A wurde nach dem Schmieden bei 800° (Bezeichnung A_{800}) und außerdem bei 1050° (A_{1050}) geglüht mit anschließender Luftabkühlung. Die Glühung bei 800° beseitigt die von der Formgebung durch Schmieden herrührenden Verfestigungsreste nicht vollständig, während das Glühen bei 1050° den weichen Werkstoff ergibt. A_{800} hat, wie bereits früher festgestellt wurde, unterhalb der Temperaturen der Erholung von den Folgen der Kaltbearbeitung, A_{1050} oberhalb dieser Temperatur (600 bis 670°) die höhere Dauerstandfestigkeit[4]). Die Legierung C wurde einerseits im

*) A 22 1, E 2113.
[1]) M. Hempel u. H. Krug, Z. VDI. Bd. 86 (1942), S. 599/05.
[2]) Hinweise auf das Schrifttum in 1.
[3]) F. Bollenrath, H. Cornelius u. W. Bungardt, Metallwirtschaft Bd. 17 (1938), S. 755/57; Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 468/80 und 505/10. H. Cornelius u. W. Bungardt, Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 275/79 u. 305/10.
[4]) H. Cornelius, Metallwirtschaft Bd. 18 (1939), H. 19, S. 399 bis 402, H. 20, S. 419/421.

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe.

Werkstoff	C %	Si %	Mn %	Ni %	Co %	Cr %	Mo %	W %	Ti %	Ta+Nb %
A	0,12	0,80	0,70	9,3	—	17,9	—	0,93	—	1,8
B	0,12	0,92	0,71	29,2	—	15,3	—	—	1,6	—
C	0,06	0,65	0,85	36,2	22,8	13,7	4,4	4,9	—	—

ungeglühten Zustand (C_0), dem eine vom Walzen herrührende Kaltverfestigung entspricht, andererseits nach vollständigem Weichglühen bei 1250° (C_{1250}) geprüft. Für die Legierung C ist nach diesen Vorbehandlungen ein ähnlich verschiedenes Dauerstandverhalten wie für Stahl A zu erwarten, mit dem Unterschied, daß die Erholung erst bei höherer Temperatur eintritt. Der Stahl B lag nur in einem Behandlungszustand vor, der die beste Warmfestigkeit ergibt. — Stahl A hatte in beiden Behandlungszuständen ein stark mit Gleitebenen durchsetztes, rein austenitisches Gefüge mit eingelagerten, feinen Karbiden in unregelmäßiger Verteilung. Der nur überschlägig meßbare Austenit-Korndurchmesser betrug 0,01 bis 0,04 mm, bei größerer Häufigkeit der gröberen Körner in dem bei 1050° geglühten Stahl. — Der Austenit des Stahles B hatte einen mittleren Korndurchmesser von 0,12 mm. Verhältnismäßig große Karbide waren in Zeilenform angeordnet. Die Korngrenzen erschienen durch Ausscheidungen schwach verdickt. — Die Legierung C_0 hatte ein feines Austenitkorn mit einem mittleren Durchmesser von 0,02 mm. Ein grobes Korn besaß die Legierung im weichgeglühten Zustand (C_{1250}). Der mittlere Korndurchmesser lag bei 0,3 bis 0,35 mm. Sowohl in C_0 wie auch in C_{1250} lagen örtlich ziemlich grobe Korngrenzenausscheidungen nicht sicher erkannter Natur vor, während im Großteil des Gefüges nicht einmal Korngrenzenverdickungen nachweisbar waren.

Glatte und mit einem Halbkreiskerb mit 1,0 mm Abrundungsradius versehene Prüfstäbe aus den Versuchswerkstoffen wurden im Kurzzerreißversuch bei 20, 450 und 600°, sowie im Zugschwellversuch bei 450 und 600° untersucht. Die Unterspannung im Zugschwellversuch (20/10 t-Losenhausen-Pulsator) wurde für alle Versuche mit 10 kg/mm² konstant gehalten. Die Lastwechselfrequenz betrug 1000/min, die Grenzlastwechselzahl 5 bis $10 \cdot 10^6$. Die für die Dauerversuche benutzte Form der Stäbe geht aus Bild 1 hervor. Für die Zerreißversuche fanden ähnliche Stäbe mit längerer zylindrischer Meßstrecke ($l_0 = 5\,d$, $d = 10$ mm) Verwendung. Die im folgenden für gekerbte Stäbe angegebenen Spannungen sind auf den durch den Kerb geschwächten Stab-

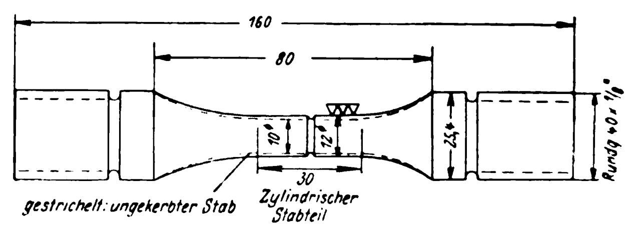


Bild 1. Prüfstabform für die Zugschwellversuche.

querschnitt bezogen. — Die Temperaturabweichungen betrugen in der Meßstrecke der Prüfstäbe bei 450° ± 1,5°, bei 600° ± 3°. Über die Versuchsdauer wurde die Temperatur mittels eines Reglers auf rd. ± 3° gleichgehalten.

Obgleich zu Beginn der Untersuchungen die Zweckmäßigkeit der Messung der Formänderung bei Dauerversuchen in der Wärme bereits erkannt war, wurde auf die Dehnungsmessung bei den hier behandelten Versuchen doch verzichtet, weil die Versuchswerkstoffe wenigstens bei 600° in Dauerstandversuchen mit glatten Stäben eingehend geprüft worden waren, und es als zulässig anzusehen war, die hierbei gemessenen Dehnbeträge als näherungsweise übereinstimmend mit den im Zugschwellversuch zu erwartenden Dehnungen anzunehmen, sofern die Oberspannung bei Schwellbeanspruchung der Dauerstandbeanspruchung entspricht[1][5]). Außerdem wurden die Versuche im Hinblick auf Bauteile durchgeführt, für die die Sicherheit gegen Bruch bei weitgehender Ausnutzung der Werkstoffestigkeit im Vordergrund steht, während Dehnungen um ein und selbst einige Prozent in Kauf genommen werden können.

3. Versuchsergebnisse.

Die Ergebnisse der Zerreiß- und Zugschwellversuche für den Stahl A_{800} und A_{1050} sind in Bild 2 dargestellt. Erwartungsgemäß hat der bei 800° geglühte Stahl bei Raumtemperatur und in geringerem Maße noch bei 450 und 600° eine höhere Zugfestigkeit und demgemäß kleinere Dehnung und Einschnürung als der bei 1050° weichgeglühte Stahl. Besonders groß sind die Unterschiede der Streckgrenze, die nur bei Raumtemperatur an glatten Stäben gemessen wurde und hier für A_{800} etwa doppelt so groß wie für A_{1050} ist. Die gekerbten Stäbe[6]) haben infolge der Formänderungsbehinderung in der gekerbten Zone in beiden Behandlungszuständen besonders bei Raumtemperatur, aber auch noch bei 450 und 600° gegenüber den glatten Stäben stark erhöhte Zugfestigkeiten und entsprechend gesenkte Dehnungen und Einschnürungen. Die Kerbwirkung ist also für A_{800} und A_{1250} im statischen Zerreißversuch bei den drei Versuchstemperaturen ausgeprägt. Der hinsichtlich der Festigkeit in entgegengesetzter Richtung wirkende Kerbeinfluß im Dauerversuch ist bei 450° nur klein und bei 600° nicht mehr vorhanden. Die Kerbwirkungszahl ($\sigma_0 - \sigma_u$) ungekerbt: ($\sigma_0 - \sigma_u$) gekerbt bei 450° ist für A_{800} $\beta_K = 1{,}12$ und für A_{1050} 1,07. Es ist bekannt, daß die Kerbempfindlichkeit austenitischer Stähle auch schon bei Raumtemperatur sehr klein sein kann[7]).

Der bei niedriger Temperatur geglühte Stahl ist dem bei hoher Temperatur geglühten in seinem Dauerfestigkeitsverhalten bei 450° deutlich, bei 600° nur noch geringfügig überlegen. In beiden Zuständen ist die Temperaturabhängigkeit der Dauerfestigkeit zwischen 450 und 600° nur klein.

Bild 3 zeigt die Wöhlerkurven für A_{800} und A_{1050} bei 450 und 600° (Ordinatenmaßstäbe versetzt). Die Wöhlerkurven von A_{800} laufen für die glatten und gekerbten Stäbe einander etwa parallel, während die Wöhlerkurven der gekerbten Stäbe von A_{1050} im Gebiet der Zeitfestigkeit einen flacheren Verlauf haben als die der glatten Stäbe. Es liegt also im Zeitfestigkeitsbereich eine größere Kerbempfindlichkeit vor als in der Nähe der Dauerfestigkeit. Entsprechend der Lage der Dauerfestigkeitswerte für A_{800} und A_{1050} bei 450 und 600° zwischen den an glatten Stäben bei Raumtemperatur bestimmten Streckgrenzen (Bild 2) ist die Dehnung bei der Dauerfestigkeit besonders bei 600° und für A_{1050} groß. Die wahre Dauerfestigkeit (auf den jeweils vorhandenen Querschnitt bezogen) liegt bei den im Dauerversuch sich stark verformenden Stäben erheblich über den in Bild 2 eingetragenen, auf den Ausgangsquerschnitt bezogenen Werten. Große Verformungen im Dauerversuch rufen auch eine Abflachung der Kerben hervor und tragen so wohl zur Vermin-

[5]) M. Hempel u. H. Tillmanns, Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 18 (1936), S. 163/82.
[6]) Die Zugfestigkeit ist auf den Querschnitt im Kerbgrund bezogen.
[7]) Vgl. z. B.: H. Cornelius u. F. Bollenrath, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 14 (1940/41), S. 289/92.

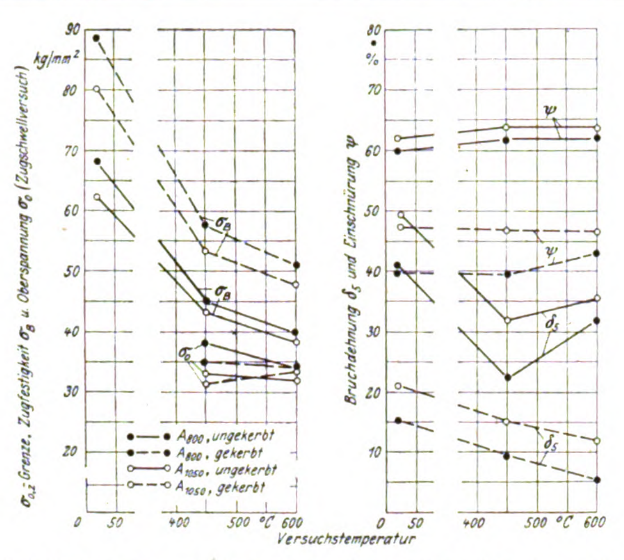


Bild 2. Ergebnisse der Zerreiß- und Zugschwellversuche (σ_u = 10 kg je mm²) mit ungekerbten und gekerbten Proben aus Werkstoff A_{800} und A_{1050} bei verschiedenen Temperaturen.

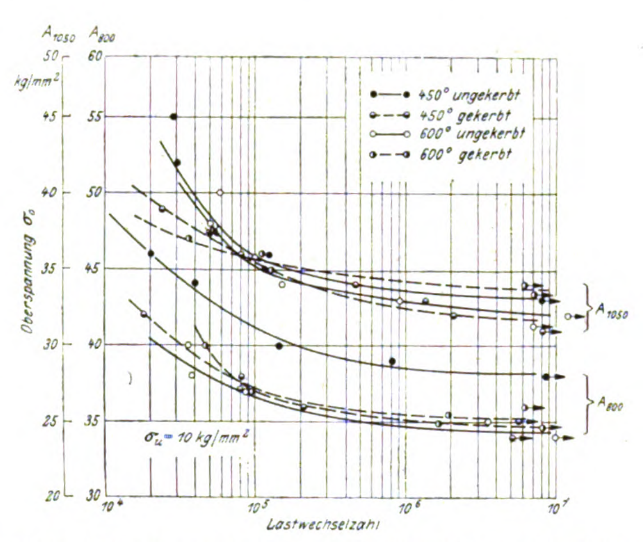


Bild 3. Wöhlerkurven glatter und gekerbter Stäbe aus Werkstoff A_{800} und A_{1050} bei 400 und 600°.

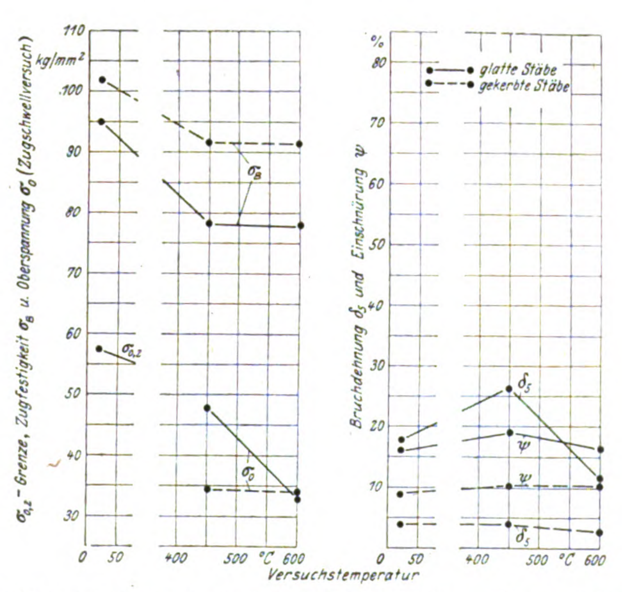


Bild 4. Ergebnisse der Zerreiß- und Zugschwellversuche mit glatten und gekerbten Proben aus Werkstoff B bei verschiedenen Temperaturen.

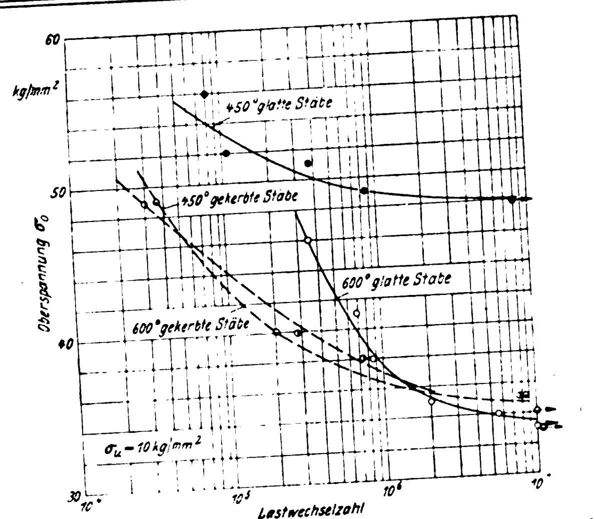


Bild 5. Wöhlerkurven glatter und gekerbter Stäbe aus Werkstoff B bei 450 und 600°.

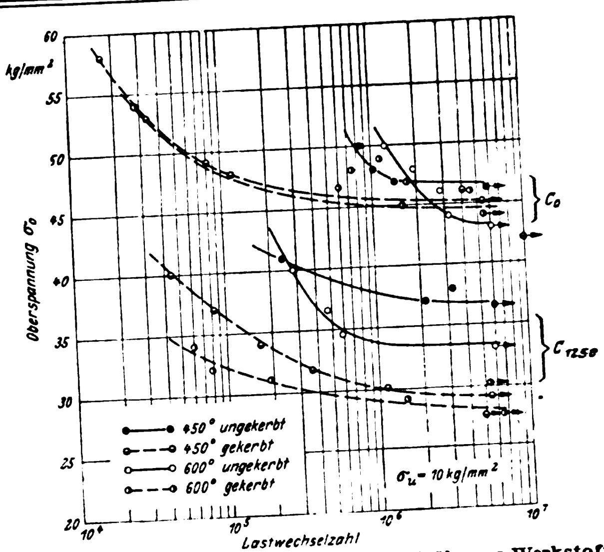


Bild 7. Wöhlerkurven glatter und gekerbter Stäbe aus Werkstoff C_0 und C_{1250} bei 450 und 600°.

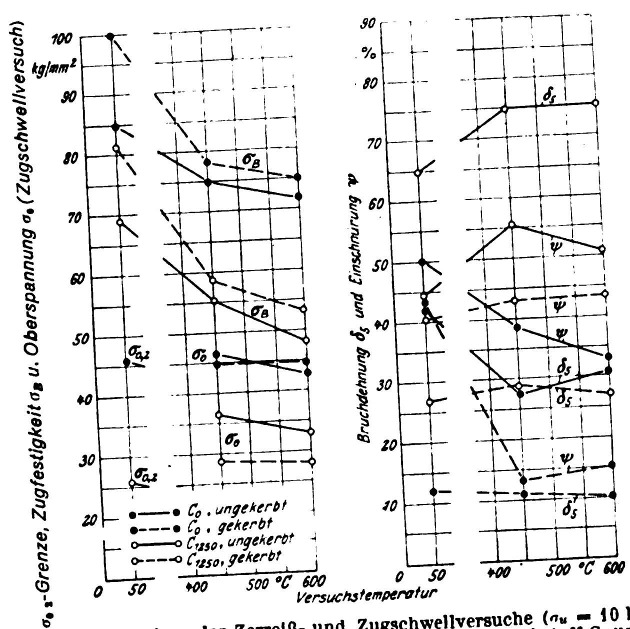


Bild 6. Ergebnisse der Zerreiß- und Zugschwellversuche (σ_u = 10 kg je mm²) mit ungekerbten und gekerbten Proben aus Werkstoff C_0 und und C_{1250} bei verschiedenen Temperaturen.

derung der Kerbwirkung besonders bei der höheren Versuchstemperatur bei.

Die mit Stahl B im Zerreiß- und Zugschwellversuch erhaltenen Ergebnisse veranschaulicht Bild 4. Im statischen Zerreißversuch ist der Kerbeinfluß bei 450 und 600° ausgeprägt. Dehnung und Einschnürung sinken hierdurch auf kleine Werte ab. Bei der ersten Temperatur liegt im Zugschwellversuch eine erhebliche Kerbempfindlichkeit vor ($\beta_K = 1{,}55$), während die Dauerfestigkeit der gekerbten Stäbe bei 600° praktisch gleich der der ungekerbten ist. Die Dauerfestigkeit der glatten Stäbe unterliegt zwischen 450 und 600° einem starken, die der gekerbten praktisch keinem Temperatureinfluß. — Aus Bild 5, das die Wöhlerkurven für den Stahl B wiedergibt, ist zu entnehmen, daß die Zeitfestigkeit bei 600° im Gegensatz zur Dauerfestigkeit durch den Kerbeinfluß vermindert wird. Die Längenzunahme des Stahles B ist bei 450 und 600° unter einer Zugschwellbeanspruchung in Höhe der Dauerfestigkeit weit kleiner als 1%.

Im ungeglühten Zustand hat die eisenarme Legierung C im untersuchten Temperaturbereich nach Bild 6 eine weit höhere Festigkeit bei entsprechend kleinerer Dehnung und Einschnürung als nach Weichglühung. Besonders große Abweichungen zeigt die Streckgrenze der glatten Stäbe bei Raumtemperatur. Die Kerbwirkung ist im statischen Zerreißversuch für beide Werkstoffzustände im Hinblick auf die Zugfestigkeit bei den erhöhten Temperaturen viel kleiner als bei Raumtemperatur, aber noch eindeutig vorhanden. Die Dehnung und Einschnürung dagegen werden auch bei den erhöhten Temperaturen durch die Kerbwirkung stark vermindert. Die Zugschwellfestigkeit ist zwischen 450 und 600° nur wenig von der Temperatur abhängig. Im Zustand C_0 mit der höheren statischen Festigkeit liegt auch eine hohe, etwa der Streckgrenze bei Raumtemperatur entsprechende Zugschwellfestigkeit vor. Hieraus ist bereits auf größere Dehnbeträge bei der Dauerfestigkeit bei 450 und 600° zu schließen. Während im Zustand C_0 keine Kerbempfindlichkeit im Bereich der erhöhten Temperaturen vorgefunden wurde, ist die Legierung im weichen (grobkörnigen) Zustand C_{1250} eindeutig kerbempfindlich, und zwar in einem von 450 ($\beta_K = 1{,}39$) nach 600° ($\beta_K = 1{,}28$) schwach abnehmenden Maße. Die Dauerfestigkeitswerte für C_{1250} liegen bei 450 und 600° über der Streckgrenze bei Raumtemperatur. Der Dauerfestigkeit entsprechende Zugschwellspannungen erzeugen demgemäß hohe Dehnbeträge.

Aus den Wöhlerkurven für die Legierung C in Bild 7 ergibt sich, daß auch im Zustand C_0, in dem die Dauerfestigkeit durch den Kerb bei 450 und 600° nicht gesenkt wird, eine



Bild 8. Stahl A_{1050}, 450°.



Bild 9. Stahl A_{1050}, 600°.



Bild 10. Legierung C_0, 600°.

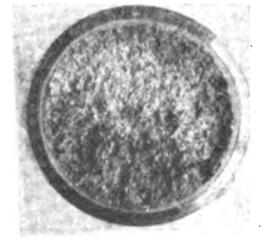


Bild 11. Stahl B, 450°



Bild 12. Stahl B, 600°.

Bild 8 bis 12. Bruchaussehen von gekerbten Stäben aus den Versuchswerkstoffen nach Zugschwellbeanspruchung bei 450 und 600°. Vergr. 2,5 fach.

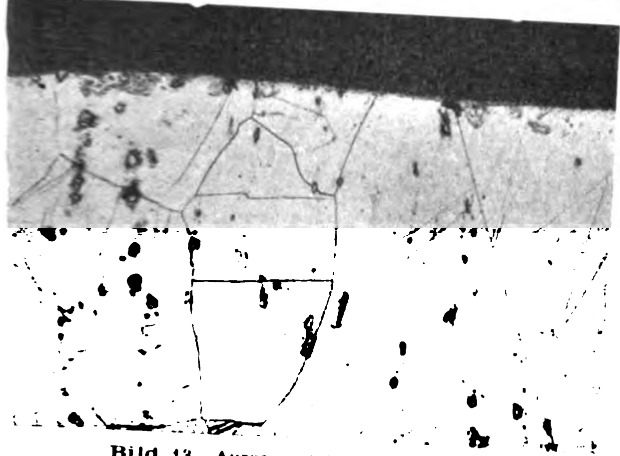


Bild 13. Ausgangsstelle der Dauerbrüche.

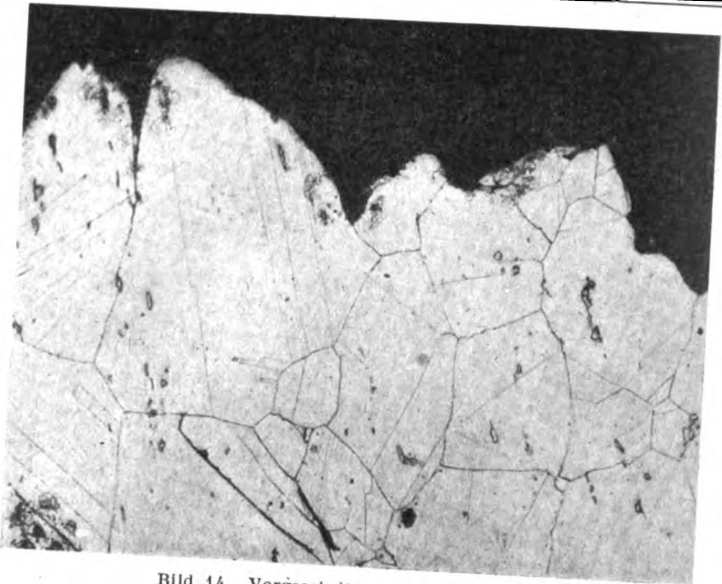


Bild 14. Vorgeschrittener Dauerbruch.

Bild 13 und 14. Gefüge an der Dauerbruchfläche von Stahl B nach dem Zugschwellversuch bei 600°. Heißgeätzt mit VA-Beize. Vergr. 200f.

erhebliche Beeinträchtigung der Zeitfestigkeit durch die Kerbwirkung eintritt.

Das Bruchaussehen der im Zugschwellversuch bei 450 und 600° gebrochenen Prüfstäbe des Stahles A und der Legierung C in beiden Zuständen unterschied sich außer durch das Vorliegen von Anlauffarben nicht von dem bei Raumtemperatur gewohnten Dauerbruchaussehen. Die Bilder 8 bis 10 zeigen die Bruchflächen gekerbter Proben aus dem Stahl A und der Legierung C. Die Prüfstäbe aus Stahl B ließen auf den im Dauerversuch bei 450 und 600° entstandenen Bruchflächen, Bild 11 und 12, die typischen Merkmale des Dauerbruchs vermissen. Die Dauerbruch- und die Restbruchfläche unterschieden sich meist nur durch ihre verschiedenen Anlauffarben, Bild 11, nur vereinzelt und geringfügig auch durch die Körnigkeit der Bruchfläche, Bild 12. Durch mikroskopische Untersuchung war jedoch nachzuweisen, daß der erste Dauerbruchansatz bei Stahl B in der Wärme ebenso wie bei den Werkstoffen A und C der gesamte Dauerbruch, intrakristallin verläuft, Bild 13. Mit der Vergrößerung des ersten Anrisses, also mit zunehmender Wanderungsgeschwindigkeit der Dauerbruchfront, nimmt der Anriß nach Bild 14 ebenso wie der Restbruch einen interkristallinen Verlauf an.

4. Folgerungen.

In Zahlentafel 2 sind die wesentlichen, bei 450 und 600° erhaltenen Ergebnisse der beschriebenen Versuche neben Unterlagen über das Kriechverhalten der Versuchswerkstoffe übersichtlich zusammengestellt. Für alle Versuchswerkstoffe steht die am glatten Stab gemessene Zugfestigkeit zu der am gekerbten Stab ermittelten Zugfestigkeit bei 450 und 600° im gleichen Verhältnis. Die relative Formänderungsbehinderung durch den Kerb wird also im Kurzzerreißversuch durch eine Temperatursteigerung von 450 auf 600° noch nicht vermindert. Im Gegensatz dazu steht die Wirkung des Rundkerbes im Dauerversuch bei diesen Temperaturen. Nur der Stahl B und die Legierung C_{1250} haben bei 450° eine verhältnismäßig hohe Kerbwirkungszahl, während die der Werkstoffe A_{800}, A_{1050} und C_0 nur wenig von 1,0 verschieden ist. Bei 600° haben die Werkstoffe bis auf die Legierung C_{1250} die Kerbwirkungszahl 1,0. Die Legierung C_{1250} erweist sich auch bei dieser Temperatur noch als kerbempfindlich. Es zeigt sich also nicht nur, daß die Kerbempfindlichkeit verschiedener austenitischer Werkstoffe bei erhöhter Temperatur wesentlich verschieden ist, sondern daß auch ein bestimmter Werkstoff je nach der Vorbehandlung entweder kerbempfindlich oder unempfindlich sein kann. Eine Vorhersage über die Kerbempfindlichkeit in der Wärme ist also für austenitische Werkstoffe noch nicht möglich. Sie würde auch selbst für Raumtemperatur unsicher sein. Der Kurzzerreißversuch in der Wärme mit glatten und gekerbten Stäben vermag nach den Versuchen keinen Anhaltspunkt für die Kerbempfindlichkeit unter Dauerbeanspruchung zu geben. — Der an glatten Stäben bei 450°

Zahlentafel 2. Übersicht über die Versuchsergebnisse bei 450 und 600°.

1	2	3	4	5	6	7	8
Werkstoff	$\frac{\sigma_B \text{ glatt}}{\sigma_B \text{ gekerbt}}$	β_K	$\frac{1/2\,(\sigma_0 - \sigma_u)_{glatt}}{\sigma_B \text{ glatt}}$	$\frac{1/2\,(\sigma_0 - \sigma_u)_{gekerbt}}{\sigma_B \text{ gekerbt}}$	σ_0 glatt	σ_0 gekerbt	$\sigma_{1/300}$ [1])
					kg/mm²		
450°							
A_{800}	0,78	1,12	0,31	0,22	38	35	—
A_{1050}	0,81	1,07	0,27	0,20	33	31,5	[2])
B	0,85	1,55	0,24	0,13	48	34,5	[3])
C_0	0,96	1,04	0,24	0,23	46,5	45	—
C_{1250}	0,94	1,39	0,24	0,15	36,5	29	—
600°							
A_{800}	0,78	1,0	0,30	0,23	34	34	28,5
A_{1050}	0,81	~1,0	0,28	0,20	32	33,3	25,5
B	0,85	~1,0	0,15	0,13	33	34	[4])
C_0	0,96	~1,0	0,23	0,23	43	44,5	30,0
C_{1250}	0,90	1,28	0,24	0,26	33	28	22,0

[1]) Dauerstandfestigkeit, entsprechend 1% Gesamtdehnung in 300 h.
[2]) Eine Dauerstandbeanspruchung von 33 kg/mm² ergibt eine Gesamtdehnung von 0,41% in 500 h.
[3]) Eine Dauerstandbeanspruchung von 48 kg/mm² ergibt eine Gesamtdehnung von 0,30% in 360 h.
[4]) Eine Dauerstandbeanspruchung von 33 kg/mm² ergibt eine Gesamtdehnung von 0,25% in 504 h.

ermittelte Spannungsausschlag (Dauerfestigkeit) beträgt rd. 0,25 der Zugfestigkeit. Nur der Stahl A_{800} hat einen höheren Wert. Für die gekerbten Stäbe ergeben sich nur unbedeutend kleinere Verhältniszahlen zur Zugfestigkeit, neben viel kleineren für die kerbempfindlichen Werkstoffe B und C_{1250}. Bei 600° steht der Spannungsausschlag zur Zugfestigkeit für glatte und gekerbte Stäbe im Verhältnis 0,20 bis 0,30, nur der Stahl B fällt mit 0,13 bis 0,15 außerhalb dieses Bereiches. Wie bei 450° so hat der Stahl A_{800} auch bei 600° die größte Verhältniszahl. — In den Spalten 6 bis 8 der Zahlentafel 2 sind für 600° die der Dauerfestigkeit entsprechenden Oberspannungen den Dauerstandfestigkeiten gegenübergestellt. Die Oberspannungen von A_{800}, A_{1050}, C_0 und C_{1250} liegen auch für die gekerbten Stäbe weit über der Dauerstandfestigkeit. Man wird also der Berechnung in diesen Fällen auch für gekerbte Stäbe die Dauerstandfestigkeit zugrunde legen. Deren Überschreitung selbst um einen nennenswerten Betrag braucht dann im Betriebe noch nicht mit der Gefahr des Dauerbruchs verknüpft zu sein. Die für Stahl B bei der Zugschwellfestigkeit ermittelte Oberspannung führt als Dauerstandbeanspruchung nur zu sehr kleinen Kriechgeschwindigkeiten. Hier ist unter Zugrundelegung der Dauerfestigkeit für die Berechnung die Sicherheit dafür gegeben, daß keine großen Formänderungen auftreten. Die Versuche zeigen am Beispiel des Stahles B, daß es Fälle gibt, in denen die Anwendung des Wöhlerverfahrens selbst noch bei 600° zur Ermittlung der Dauerfestigkeit glatter und gekerbter Stäbe aus austenitischem Werkstoff ausreicht, um einen Anhalt für die tatsächliche Belastbarkeit des Werkstoffs zu erhalten; im allgemeinen sind jedoch auch bei gekerbten Stäben die auftretenden Dehnungen zu berücksichtigen, wenn nicht nur Sicherheit gegen Bruch verlangt wird.

Für die Versuchstemperatur von 450° war die Dauerstandfestigkeit der Versuchswerkstoffe nicht bekannt. Um einen Anhalt für die Dehnbeträge unter einer der Oberspannung entsprechenden Dauerstandbeanspruchung zu gewinnen — soweit diese sich nicht im Dauerversuch größenordnungsmäßig ergeben hatten — wurden einzelne Kriechversuche durchgeführt. Hierbei zeigt sich, daß die Stähle A_{1050} und B bei der der Oberspannung entsprechenden Dauerstandbeanspruchung nur kleine Dehnungen erfahren. Hier ist also wieder das Wöhlerverfahren für die Bestimmung der Dauerfestigkeit der glatten und gekerbten Stäbe ausreichend. Nach den im Dauerversuch auftretenden Dehnungen, die zum Teil mehrere Prozent erreichten, liegt die Zugschwellfestigkeit der Versuchswerkstoffe A_{800}, C_0 und C_{1250} auch im gekerbten Zustand über der Dauerstandfestigkeit.

In den Fällen, in denen die Zugschwellfestigkeit bei Oberspannungen liegt, die eine erhebliche Verformung bedingen, kann von einer wirklichen Dauerfestigkeit nur dann die Rede sein, wenn die Verformung noch nicht den für die Versuchstemperatur maßgebenden, kritischen Grad erreicht, der zur Erholung oder Rekristallisation führt. Andernfalls kommt die Verformung nicht zum Stillstand (bzw. zu selbst über lange Zeiten kleinen Werten), und der Bruch muß schließlich infolge der Querschnittsverminderung eintreten.

5. Zusammenfassung.

Kurzzerreißversuche und vor allem Zugschwellversuche wurden mit glatten und gekerbten Stäben (Halbkreiskerb mit 1,0 mm Radius) aus einem Chrom-Nickel-Wolfram-Stahl mit Zusätzen von Tantal und Niob, einem Chrom-Nickel-Titan-Stahl und einer Nickel-Kobalt-Eisen-Chrom-Legierung mit einem Gehalt an Wolfram und Molybdän durchgeführt. Die stabil austenitischen Werkstoffe waren zum Teil verschieden vorbehandelt. Für Versuchstemperaturen von 450 und 600° lassen sich aus den Untersuchungen folgende Schlüsse ableiten: Kurzzerreißversuche mit gekerbten und glatten Stäben liefern keinen Anhaltspunkt für die Kerbempfindlichkeit im Zugschwellversuch. Noch bei 600° ist die Kerbwirkung im statischen Zerreißversuch ausgeprägt. Die Kerbempfindlichkeit im Dauerversuch hängt nicht nur von der Werkstoffart ab, sondern kann bei dem gleichen Werkstoff auch in hohem Maße von dessen Vorbehandlung beeinflußt werden. Erwartungsgemäß sinkt die Kerbwirkung im Zugschwellversuch mit steigender Temperatur. In mehreren Fällen war schon bei 450°, bei 600° mit Ausnahme nur eines Falles keine merkliche Herabsetzung der Dauerfestigkeit durch den Rundkerb vorhanden. — Noch bei 600° kann das Wöhlerverfahren allein zur Ermittlung der Zugschwellfestigkeit glatter und gekerbter Stäbe aus austenitischem Werkstoff ausreichen. Im allgemeinen ist es jedoch schon bei 450° erforderlich, die auftretenden Dehnungen auch bei gekerbten Stäben zu berücksichtigen, um ein Bild von der Beanspruchbarkeit des austenitischen Werkstoffs zu erhalten, wenn nicht nur Sicherheit gegen Bruch sondern auch gegen unzulässig große Formänderungen zu verlangen ist.

Abgeschlossen im Mai 1943.

Die Oberflächenhärte von Kunstgläsern*).

Von H. Perkuhn, Berlin.

Bericht des Instituts für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

An mehreren Kunstgläsern werden die Oberflächenhärten bei Temperaturen zwischen 0° und 45° mit Hilfe des Ritzverfahrens ermittelt. Aus den gewonnenen Unterlagen kann wahrscheinlich eine Beziehung zwischen der Ritzhärte und der Zugfestigkeit abgeleitet werden, die es gestattet, aus der Ritzhärte die Zugfestigkeit mit einer Genauigkeit von ± 3 % zu bestimmen.

Gliederung.

I. Einleitung.

Zur Ermittlung der Widerstandsfähigkeit der Kunstgläser gegen Verschrammen (z. B. durch Flugsand) sind die in der Metallprüfung üblichen Härteprüfverfahren (Brinell, Vickers, Rockwell) weniger geeignet, da die hierbei angewandten Härteprüfmaschinen meistens nur große Belastungen zulassen, die bei verhältnismäßig tiefem Eindringen des Prüfkörpers den Einfluß der Oberfläche nicht erkennen lassen. Es wurde daher auf die Ritzhärteprüfung zurückgegriffen, die kleinste Lasten zuläßt und sich, wie gezeigt wird, zur Bestimmung der Oberflächenhärte gut eignet.

II. Gang der Untersuchungen.

Die Versuche wurden an Plexiglas M 33, M 132, M 222, Reilit und Astralon mit einem Diritest von Zeiß durchgeführt[1]). Da Vorversuche ergaben, daß die Ergebnisse der Ritzhärteprüfung von der Vorschubgeschwindigkeit abhängig sind, wurde die durch Handantrieb vorgesehene Schlittenverschiebung in Ritzrichtung durch maschinellen Antrieb ersetzt. Durch Anbau eines, mit einem Synchronmotor gekuppelten Getriebes, konnten verschiedene konstante Vorschubgeschwindigkeiten erzielt werden.

Die Versuchsproben (40 mm × 40 mm) wurden aus 3 mm dicken Platten an verschiedenen Stellen herausgearbeitet.

Für die Ritzhärteprüfung fand eine Diamantkegelspitze von 120° Verwendung. Die Messungen erstreckten sich auf ein Temperaturgebiet von 0° bis 45° und wurden in einem Klimaraum mit einer maximalen Temperaturabweichung von ± 1,5° durchgeführt.

III. Versuchsergebnisse.

Vergleichende Untersuchungen zwischen der Ritzhärteprüfung und der Vickershärteprüfung ergaben, daß das erstere Verfahren auch meßtechnisch Vorteile hat. Beim Ritzen entstehen scharfe, gleichmäßige Ränder, Bild 1, die entsprechend der Meßgenauigkeit mit ± 1% ausgemessen werden können. Außerdem sind die Nachwirkungserscheinungen, die bei der Härtebestimmung mit den üblichen Prüfgeräten das Ergebnis beeinflussen, bei der Ritzhärteprüfung vernachlässigbar gering. Die dadurch bedingten Abweichungen liegen nach einer Zeit von 60 min noch innerhalb der Meßgenauigkeit. Wegen der hohen Meßgenauigkeit sind mit Hilfe der Ritzhärteprüfung geringe Härteunterschiede, wie sie z. B. bei den Plexigläsern M 33 und M 132 auftreten, feststellbar. Die aus jeweils 10 voneinander unabhängigen Messungen gefundene Strichbreite betrug bei einer Last von 20 g für Plexiglas M 33 24,4 μ ± 1%, Plexiglas M 132 25,6 μ ± 1% und für Plexiglas M 222 23,0 μ ± 1%. Demgegenüber beträgt bei der Vickers-Härteprüfung, da die Enden der Diagonalen nicht scharf ausgeprägt sind, Bild 2, die Meßgenauigkeit ± 1,5%, und geringe Härteunterschiede können nicht mehr eindeutig festgestellt werden. Für die Länge der Diagonalen wurden bei einer Last von 20 g und einer Belastungszeit von 60 s die folgenden Werte ermittelt:

Plexiglas	M 33	: 46,0 μ ± 1,5%
»	M 132	: 46,4 μ ± 1,5%
»	M 222	: 43,0 μ ± 1,5%

Die Ritzhärteprüfung berücksichtigt nur den plastischen Anteil der Verformung, denn die elastischen Formänderungen federn noch während des Ritzvorganges zurück.

*) E 5.
[1]) Sporkert, Ein neuer Härteprüfer für das Laboratorium, Maschinenbau der Betrieb Bd. 17 (1938), S. 527/29.

Bild 1. Ritz in Plexiglas M 33, mit einem Kegel von 120 Öffnungswinkel hergestellt. (Vergr. 200fach.)

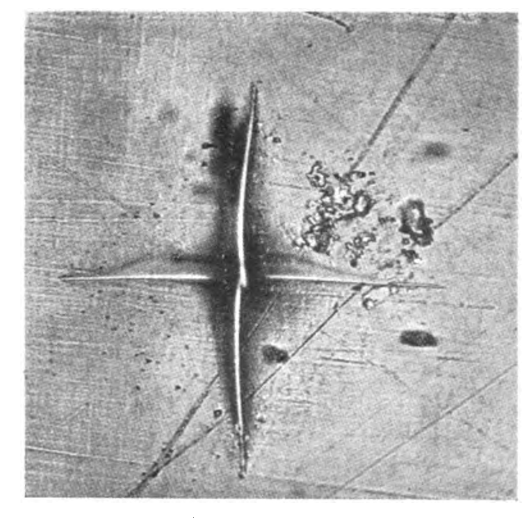


Bild 2. Vickerseindruck in Plexiglas M 33. (Vergr. 400fach.)



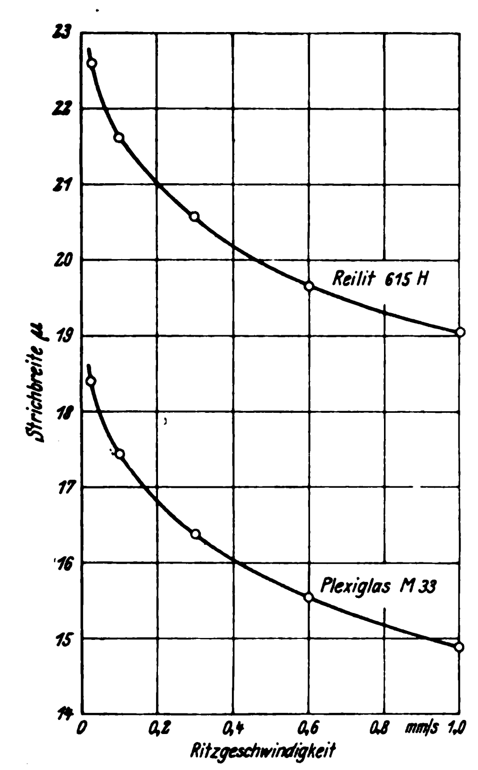


Bild 3. Strichbreite in Abhängigkeit von der Ritzgeschwindigkeit bei einer Last von 10 g.

In Bild 3 ist die Strichbreite in Abhängigkeit von der Ritzgeschwindigkeit aufgetragen. Die Strichbreite wird mit zunehmender Ritzgeschwindigkeit kleiner, weil die von dem Werkstoff auf den Kegel ausgeübten Auftriebskräfte, die der Belastung entgegenwirken, mit zunehmender Geschwindigkeit größer werden. Da nun der Einfluß der Ritzgeschwindigkeit auf die Strichbreite mit zunehmender Ritzgeschwindigkeit abnimmt, andererseits aber oberhalb 0,3 mm/s der Diamantkegel zum Rattern neigte, wurde bei den weiteren Versuchen eine Geschwindigkeit von 0,3 mm/s zugrunde gelegt. Die Ränder sind hierbei scharf ausgeprägt.

In Bild 4 ist die Strichbreite in Abhängigkeit von der Last aufgetragen. Bei allen Werkstoffen nimmt die Zunahme der Strichbreite mit steigender Belastung ab.

Bei den Plexigläsern und bei Reilit konnten in den verschiedenen Richtungen der Platten keine Härteunterschiede festgestellt werden, die Streuungen liegen innerhalb der Meßgenauigkeit, Zahlentafel 1. Astralon wies jedoch in zwei aufeinander senkrechten Richtungen abweichende Werte auf (offenbar Kalandereffekt).

Bei der statischen Härteprüfung wird als Härte die Belastung je Einheit der Ruhefläche angegeben. Entsprechend definiert Ehrenberg[3]) die Ritzhärte H als Last je Einheit der Gleitfläche zu $H = \frac{8\,P\,\sin \nu/2}{b^2\,\pi}$, worin P die Last, b die Ritzbreite und γ der Kegelwinkel bedeuten. Obgleich diese Deutung den physikalischen Vorgängen nicht vollständig entspricht, ist sie, wie noch in folgendem gezeigt wird, gut brauchbar.

Die Ritzhärte H, Bild 5, fällt mit zunehmender Last zunächst stark, dann schwächer ab. Der starke Abfall ist auf das verschiedene elastische Verhalten der oberflächlichen Schichten gegenüber den tiefer liegenden zurückzuführen. Mit zunehmender Ritztiefe wird der Einfluß der Oberflächenspannung gegenüber der Spannung in den tieferen Schichten immer geringer. Je nach Wahl der Last kann entweder die reine Oberflächenhärte oder die Härte der tiefer liegenden Schichten bestimmt werden. Bei der Ermittlung der Widerstandsfähigkeit der Kunstgläser gegen Verschrammen ist es ratsam, die Härte durch kleine

[3]) W. Ehrenberg, Die Ritzhärte in c-g-s-Einheiten. Z. f. Metallkde. Bd. 33 (1941), Nr. 1, S. 22/23.

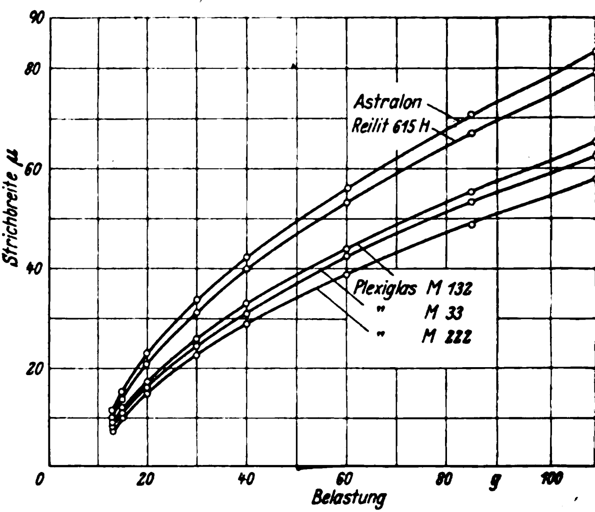


Bild 4. Strichbreite in Abhängigkeit von der Belastung bei einer Ritzgeschwindigkeit von 0,3 mm/s.

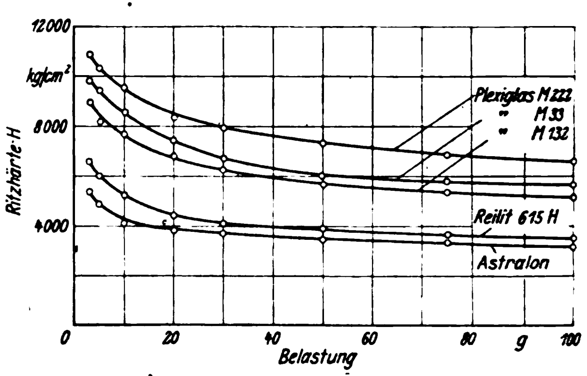


Bild 5. Ritzhärte H in Abhängigkeit von der Last.

Lasten zu bestimmen, doch wird man zur Erzielung ausreichender Meßgenauigkeit zweckmäßig nicht unter 10 g heruntergehen. Bei Lasten über 100 g ist die Strichbreite infolge starker Wulstbildung nicht mehr gut meßbar.

In Bild 6 ist die Ritzhärte bei einer Last von 10 g in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Die Ritzhärte fällt mit steigender Temperatur stärker ab. Astralon ist wärmeempfindlicher als Reilit und Plexiglas.

Bei bestimmten Werkstoffen besteht bekanntlich zwischen der Brinellhärte und der Zugfestigkeit eine einfache Beziehung. Auch zwischen der Ritzhärte und Zugfestigkeit läßt sich in dem Bereich von 4° bis 40° ein ähnlicher Zusam-

Zahlentafel 1. Ritzbreite bei einer Last von 30 g in zwei zueinander senkrechten Richtungen und diagonal dazu.

Werkstoff	Messung Nr.	Strichbreite in μ längs	quer	diagonal	Bemerkung
Plexiglas M 222	1	28,8	28,7	28,8	Abweichungen liegen innerhalb der Meßgenauigkeit
	2	28,8	28,8	28,7	
	3	29,0	28,8	29,0	
Plexiglas M 132	1	32,8	32,7	32,8	
	2	32,8	32,8	32,6	
	3	32,6	32,8	32,8	
Plexiglas M 33	1	31,2	31,4	31,4	
	2	31,4	31,4	31,2	
	3	31,4	31,5	31,3	
Reilit 615 H	1	40,0	40,4	40,2	
	2	40,2	40,2	40,4	
	3	40,1	40,2	40,4	
Astralon	1	42,8	44,0	43,4	Abweichungen zwischen zwei zueinander senkrechten Richtungen liegen außerhalb der Meßgenauigkeit
	2	43,2	44,2	43,4	
	3	43,0	44,0	43,2	

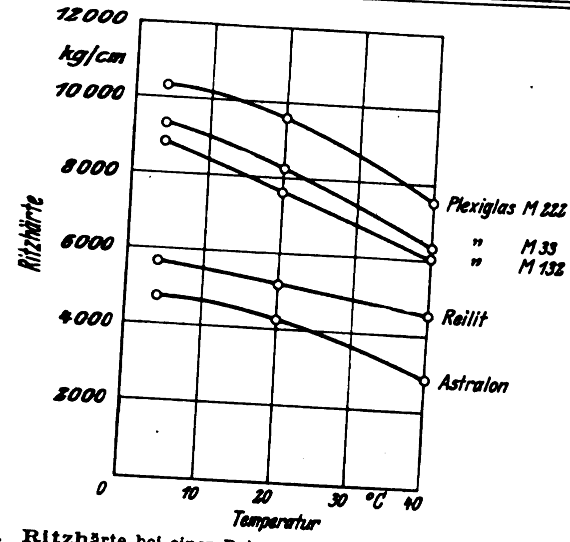


Bild 6. Ritzhärte bei einer Belastung von 10 g in Abhängigkeit von der Temperatur.

menhang nachweisen. Das Verhältnis von Zugfestigkeit zu Ritzhärte ist nämlich bei einer konstanten Last in dem obigen Temperaturbereich nahezu ein konstanter Wert, Zahlentafel 2.

Die Abhängigkeit der Umrechnungswerte von der Belastung geht aus Bild 7 hervor. Die Unterlagen ermöglichen eine schnelle und zerstörungsfreie Ermittlung der Zugfestigkeit der Gläser aus der Ritzhärte. Die größten Abweichungen betrugen ± 2,5%.

IV. Zusammenfassung.

An den Kunstgläsern Plexiglas M 222, M 132, M 33, Reilit und Astralon wurde in einem Temperaturgebiet zwischen 0° und 45° die Oberflächenhärte bestimmt. Dabei ergab sich, daß die Ritzhärteprüfung der Vickershärteprüfung vorzuziehen ist. Bei der Ritzhärteprüfung werden die Nachwirkungserscheinungen weitestgehend ausgeschaltet. Die Ritzbreite kann mit einer Genauigkeit von ± 1% ausgemessen werden, so daß mit der Ritzhärteprüfung noch geringe Oberflächenhärteunterschiede, die bei der Vickersprüfung nicht mehr einwandfrei feststellbar sind, bestimmt werden können. Je nach Wahl der Last kann entweder die Oberflächenhärte oder die Härte der tiefer liegenden Schichten ermittelt werden. Die günstigsten Messungen ergaben sich aus meßtechnischen Gründen bei Lasten zwischen 10 bis 100 g.

Da die Ritzhärte von der Ritzgeschwindigkeit abhängt, muß die Ritzgeschwindigkeit konstant gehalten werden. Im vorliegenden Fall betrug sie 0,3 mm/s.

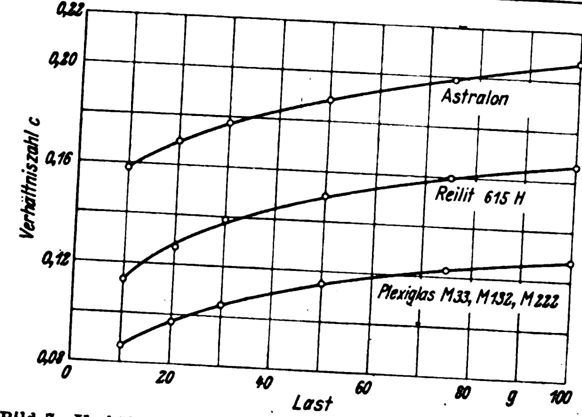


Bild 7. Verhältnis c zwischen Ritzhärte und Zugfestigkeit in Abhängigkeit von der Last. (Zugfestigkeit bei einer Zerreißgeschwindigkeit von 300 kg/cm²/min.)

Die Temperaturempfindlichkeit der Kunstgläser hat mit zunehmender Temperatur einen Abfall der Härte zufolge, Zahlentafel 2.

Ferner wird eine einfache Beziehung zwischen der Ritzhärte und der Zugfestigkeit aufgezeigt. Für eine Last von 10 g ist für Temperaturen zwischen 0° und 45° das Verhältnis von Ritzhärte zur Zugfestigkeit bei den Plexigläsern $0{,}087_0$, bei Reilit $0{,}113_4$ und bei Astralon $0{,}157_8$. Die Werte gelten aber nur für eine Ritzgeschwindigkeit!

Zahlentafel 2. Verhältnis c zwischen Zugfestigkeit und Ritzhärte für das Temperaturgebiet 0° bis 40°.

Werkstoff	Temperatur °C	Ritzbreite μ	Ritzhärte H kg/cm²	Zugfestigk.*) σ_B kg/cm²	c $\frac{\sigma_B}{H}$	c $\frac{\sigma_B}{H}$ Mittel
Plexiglas M 222	4	14,6	10 300	900	$0{,}087_8$	
	20	15,2	9 559	820	$0{,}086_0$	
	40	17,1	7 550	660	$0{,}087_5$	
Plexiglas M 132	4	15,8	8 830	760	$0{,}086_2$	
	20	17,0	7 630	675	$0{,}087_2$	$0{,}087_0$
	40	19,0	6 100	540	$0{,}088_5$	
Plexiglas M 33	4	15,4	9 300	800	$0{,}086_0$	
	20	16,4	8 210	720	$0{,}087_5$	
	40	18,6	6 370	560	$0{,}08_0$	
Reilit	4	19,7	5 670	650	$0{,}114_8$	
	20	20,6	5 200	595	$0{,}111_5$	$0{,}113_4$
	40	22,0	4 550	520	$0{,}114_0$	
Astralon	4	21,5	4 770	760	$0{,}159_0$	
	20	22,8	4 250	660	$0{,}155_5$	$0{,}157_8$
	40	27,6	2 890	460	$0{,}159_0$	

*) Zugfestigkeit ermittelt bei einer Belastungsgeschwindigkeit von 300 kg/cm²/min.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 20 | LFG. 11 SEITE 301 BIS 332 | MÜNCHEN, 6.1.1944

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.
Die Herren Verfasser erhalten von ihren Aufsätzen jeweils 50 Fortdrucke ohne besondere Anforderung.

Erscheinungsweise: Die Schriftenreihe erscheint in Monatslieferungen. Sie kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Halbjahresbezugspreis RM. 12.— einschließlich Zeitungs- und Verpackungsgebühr, zuzüglich Zustellgebühr.
Ausland siehe oben: Halbjährlich durch die Post (in solchen Ländern, in denen Postbezug zugelassen) oder durch den Buchhandel bei jahresweiser Bestellung.
Einzelheft: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr. Nach dem Ausland nur gegen Voreinsendung des Betrages.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangenen Bandes erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Einzellieferungen werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Schriftenreihe direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Bandes Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 | 6. Januar 1944 | Lfg. 11

Das Massenrückdrehmoment von Mehrzylindermotoren.

Von A. Kimmel und M. Läpple.

Bericht aus dem Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Aufbauend auf früheren Untersuchungen über den Einzylindermotor wird das Massenrückdrehmoment, das infolge der Massenwirkung der bewegten Kurbeltriebteile auf die Motoraufhängung ausgeübt wird, für einfache Reihenmotoren sowie für V- und Sternmotoren ermittelt und in einer für die praktische Anwendung geeigneten Form dargestellt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die früheren, für den Einzylindermotor durchgeführten Untersuchungen über das Massenrückdrehmoment[1]), d. h. das infolge der Massenwirkung der bewegten Kurbeltriebteile auf die Motoraufhängung ausgeübte, um die Kurbelwellenachse wirkende Massendrehmoment, werden im folgenden auf Mehrzylindermotoren erweitert. Die Betrachtungen erstrecken sich zunächst wieder auf Motoren mit unmittelbarem Antrieb der Luftschraube bzw. der Arbeitsmaschine. Auf die bei Motoren mit angebautem Übersetzungsgetriebe auftretenden Wirkungen soll später gesondert eingegangen werden.

II. Einfacher Reihenmotor.

1. Die Ausgangsgleichungen.

Bildet man mit den Bezeichnungen (vgl. Bild 1)

φ = Kurbelwinkel,
ω = Drehschnelle der Kurbelwelle,
r = Kurbelhalbmesser,
l = Länge des Pleuels,
s', s'' = Abstand des Pleuelschwerpunktes vom Hubzapfen bzw. vom Kolbenbolzen,
m_K = Masse des Kolbens,
m_P = Masse des Pleuels,
k_P = Trägheitshalbmesser des Pleuels, bezogen auf eine zur Kurbelwellenachse parallele Achse durch den Schwerpunkt S_P

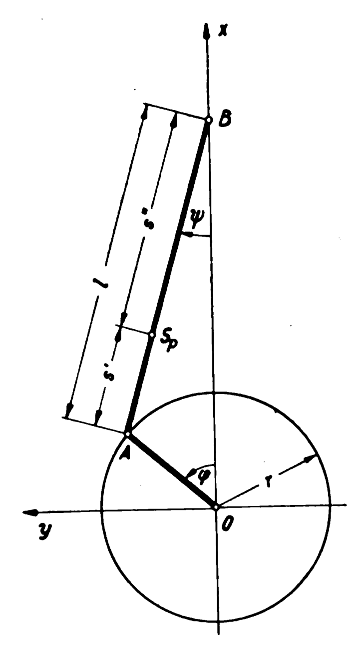


Bild 1. Kurbeltrieb des Einzylindermotors.

die Abkürzungen

$$\lambda = \frac{r}{l} = \text{Stangenverhältnis},$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{s'}{l}, \quad \sigma'' = \frac{s''}{l}, \quad \sigma^* = \frac{k_P}{l}, \\ \bar{\sigma}^2 &= \sigma' \sigma'' \quad \sigma^{*2} = \frac{1}{l^2}(s' s'' - k_P^2), \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (1)$$

$m_h = m_K + \sigma' m_P$ = gesamte hin- und hergehende Masse im Kolbenbolzen, ... (2)

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16} + \frac{15}{512}\lambda^5 + \dots, \\ E_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\lambda^4}{32} - \frac{\lambda^6}{32} - \dots, \\ E_3 &= -\frac{3}{4}\lambda - \frac{9}{32}\lambda^3 - \frac{81}{512}\lambda^5 - \dots, \\ E_4 &= -\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} - \dots, \\ E_5 &= \frac{5}{32}\lambda^3 + \frac{75}{512}\lambda^5 + \dots, \\ E_6 &= \frac{3}{32}\lambda^4 + \frac{3}{32}\lambda^6 + \dots. \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (3)$$

[1]) A. Kimmel, Das Massenrückdrehmoment des Flugmotors. Luftf.-Forschg. Bd. 20 (1943), S. 107, im folgenden kurz als Mitt. I bezeichnet. — In Gl. (24) jener Mitteilung muß der letzte Ausdruck in der Klammer richtig lauten: $k_P^2 \dot{\psi} \ddot{\psi}$. Außerdem sind die Druckstöcke von Bild 10 und Bild 11 miteinander zu vertauschen.

$$E_7 = -\frac{21}{512}\lambda^5 - \ldots,$$

$$E_8 = -\frac{\lambda^6}{32} - \ldots,$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{\lambda}C_1,\ K_2 = 1 + E_2,\ K_3 = \frac{1}{\lambda}C_3,\ K_4 = E_4, \\ K_5 &= \frac{1}{\lambda}C_5,\ K_6 = E_6,\ K_7 = \frac{1}{\lambda}C_7,\ K_8 = E_8, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 1 + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{3}{64}\lambda^4 + \frac{25}{1024}\lambda^6 + \ldots, \\ C_3 &= -\frac{3}{8}\lambda^2 - \frac{27}{128}\lambda^4 - \frac{135}{1024}\lambda^6 - \ldots, \\ C_5 &= \frac{15}{128}\lambda^4 + \frac{125}{1024}\lambda^6 + \ldots, \\ C_7 &= -\frac{35}{1024}\lambda^6 - \ldots, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und läßt die praktisch bedeutungslosen Schwankungsglieder (d. h. die mit $\dot{\omega}$ behafteten Glieder) außer acht, so ergibt sich für das Massenrückdrehmoment des Einzylindermotors ausreichend genau[2])

$$\left.\begin{aligned} M_r = r^2\omega^2[&-m_h(E_1\sin\varphi + E_2\sin 2\varphi + E_3\sin 3\varphi + \ldots) \\ &+ m_p\bar{\sigma}^2(K_1\sin\varphi + K_2\sin 2\varphi + K_3\sin 3\varphi + \ldots)]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Beim Massenrückdrehmoment des Einzylindermotors treten somit Glieder erster, zweiter, dritter und höherer ganzzahliger Ordnung auf, die mit wachsender Ordnungszahl rasch kleiner werden. Die mit der Größe m_h behafteten Glieder rühren von den im Kolbenbolzen vereinigt gedachten hin- und hergehenden Massenanteilen von Kolben und Pleuel her, während die mit $m_p\,\bar{\sigma}^2$ behafteten infolge der Drehträgheit des Pleuels entstehen.

Für die folgenden Untersuchungen ist es zweckmäßig, die Glieder gleicher Ordnung jeweils noch etwas zusammenzufassen, wozu man etwa die weitere Abkürzung

$$U_\nu = -m_h E_\nu + m_p\bar{\sigma}^2 K_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots (7)$$

einführt. Damit wird

$$M_r = r^2\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \sin\nu\varphi \quad \ldots \ldots (8)$$

oder ausführlich

$$M_r = r^2\omega^2(U_1\sin\varphi + U_2\sin 2\varphi + U_3\sin 3\varphi + \ldots). \quad (8a)$$

Jeder Kurbeltrieb des Reihenmotors liefert einen Beitrag zum Massenrückdrehmoment nach (8). Die einzelnen Beiträge sind aber entsprechend der jeweiligen Kurbelversetzung des Motors, welche für Zweitakt und Viertakt verschieden ist, gegeneinander phasenverschoben. Im folgenden wird daher zunächst der Zweitakt- und sodann der Viertakt-Reihenmotor jeweils mit regelmäßiger Kurbelversetzung behandelt. Mit einem anschließend angegebenen zeichnerischen Verfahren können auch Motoren mit anderen Kurbelversetzungen auf einfache Weise untersucht werden.

2. Der Zweitaktmotor.

Beim gewöhnlichen z-Zylinder-Zweitakt-Reihenmotor sind zwei in der Zündung aufeinanderfolgende Kurbeln um den Winkel $\chi = \frac{2\pi}{z}$ gegeneinander versetzt. Bezeichnet man mit φ den Kurbelwinkel der ersten Kurbel, so ist der Kurbelwinkel der k-ten Kurbel

$$\varphi_k = \varphi + (k-1)\frac{2\pi}{z} \qquad (k = 1, 2, \ldots z) \quad \ldots (9)$$

und das Massenrückdrehmoment des ganzen Motors ergibt sich aus (8a) unter der Voraussetzung gleichartiger Einzelkurbeltriebe zu

$$\begin{aligned} M_r = \sum_{k=1}^{z} M_{rk} = r^2\omega^2\Big(U_1 \sum_{k=1}^{z} \sin\varphi_k \\ + U_2 \sum_{k=1}^{z} \sin 2\varphi_k + U_3 \sum_{k=1}^{z} \sin 3\varphi_k + \ldots\Big). \end{aligned} \quad (10)$$

Die hier auftretenden Summen lassen sich leicht ausrechnen, wenn man folgende Summationsformeln zu Hilfe nimmt[3]):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{z} \cos\nu\varphi_k &= \sum_{k=1}^{z} \cos\nu\left[\varphi + (k-1)\frac{2\pi}{z}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq z, 2z, 3z, \ldots \\ z\cos\nu\varphi & \text{für } \nu = z, 2z, 3z, \ldots, \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{z} \sin\nu\varphi_k &= \sum_{k=1}^{z} \sin\nu\left[\varphi + (k-1)\frac{2\pi}{z}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq z, 2z, 3z, \ldots \\ z\sin\nu\varphi & \text{für } \nu = z, 2z, 3z, \ldots \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (11)$$

Damit folgt aus (10), wenn $z > 1$ vorausgesetzt, also der bereits früher behandelte Einzylindermotor ausgeschlossen wird, das Massenrückdrehmoment des z-Zylinder-Zweitaktmotors

$$\left.\begin{aligned} M_r = z r^2\omega^2(U_z\sin z\varphi + U_{2z}\sin 2z\varphi + U_{3z}\sin 3z\varphi + \ldots) \\ (z = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

mit den Abkürzungen U_ν (7). Beim z-Zylinder-Zweitaktmotor treten somit Massenrückdrehmomente der Ordnungen z, $2z$, ... je in z-facher Größe gegenüber dem Einzylindermotor auf, wobei wieder zu beachten ist, daß die Momente mit wachsender Ordnungszahl sehr rasch kleiner werden. Diese beim Zweitaktmotor auftretenden Ordnungen des Massenrückdrehmoments sind in Tafel 1 zusammengestellt und mit ● gekennzeichnet; alle übrigen Ordnungen heben sich auf.

3. Der Viertaktmotor.

Beim z-Zylinder-Viertaktmotor muß man unterscheiden, ob die Zylinderzahl z gerade oder ungerade ist. Wenn z gerade ist, so wird der Kurbelversetzungswinkel $\chi = \frac{4\pi}{z} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}z}$ ebenso groß wie der eines $\frac{z}{2}$-Zylinder-Zweitaktmotors. Dies besagt, daß sich der Viertaktmotor mit gerader Zylinderzahl hinsichtlich des Massenrückdrehmoments wie zwei zusammengebaute Zweitaktmotoren mit je halb so vielen

Zahlentafel 1. Beim Reihenmotor auftretende Ordnungen ● des Massenrückdrehmoments.

Zyl.-Zahl: Zweitakt	Zyl.-Zahl: Viertakt	Ordnung 1	2	3	4	5	6	7	8
	1	●	●	●	●	●	●	●	●
1	2	●	●	●	●	●	●	●	●
	3			●			●		
2	4		●		●		●		●
	5					●			
3	6			●			●		
	7							●	
4	8				●				●
	9								
5	10					●			
	11								
6	12						●		

[2]) Mitt. I, Gl. (22).

[3]) Die gleichen Formeln werden bei der Untersuchung des Massenausgleichs von Reihenmotoren verwendet, vgl. etwa C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 860.

Zylindern verhält. Daher wird das **Massenrückdrehmoment des geradzahligen z-Zylinder-Viertaktmotors**

$$M_r = z\,r^2\,\omega^2\left(U_{\frac{z}{2}}\sin\frac{z}{2}\varphi + U_z\sin z\varphi + U_{\frac{3z}{2}}\sin\frac{3z}{2}\varphi + U_{2z}\sin 2z\varphi + \ldots\right) \quad (z = 2,4,6,\ldots). \qquad (13a)$$

Ist dagegen die Zylinderzahl ungerade, so unterscheidet sich das Kurbelschaubild, d. h. die in Richtung der Kurbelwellenachse gesehene Kurbelfolge des Viertaktmotors von dem des Zweitaktmotors nur der Bezifferung, nicht dem Aussehen nach. Somit erhält man für das **Massenrückdrehmoment des ungeradzahligen z-Zylinder-Viertaktmotors** wie oben beim Zweitaktmotor

$$M_r = z r^2 \omega^2 (U_z \sin z\varphi + U_{2z}\sin 2z\varphi + U_{3z}\sin 3z\varphi + \ldots) \quad (z = 1,3,5,\ldots) \qquad (13b)$$

Die beim Viertaktmotor auftretenden Ordnungen des Massenrückdrehmoments sind ebenfalls in Tafel 1 wiedergegeben.

4. Zeichnerische Ermittlung der Massenrückdrehmomente.

Es soll noch kurz ein bei den Untersuchungen des Massenausgleichs gebräuchliches zeichnerisches Verfahren angegeben werden, das die Massenrückdrehmomente sowohl für regelmäßige als auch für beliebige Kurbelversetzung auf einfache Weise liefert und das im folgenden am Beispiel des Vierzylinder-Zweitaktmotors erläutert wird. Man zeichnet zunächst die in Richtung der Kurbelwellenachse betrachteten Kurbeln in einem Kurbelschaubild auf, Bild 2a, und beziffert die Kurbeln der Reihe nach in Richtung der Kurbeldrehung. Sodann legt man zur Ermittlung der Momente erster Ordnung Einheitsvektoren $e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_4^1$ in Richtung der vier Kurbelhalbmesser fest, also mit den Winkeln φ, $\varphi + 90^0$, usw. gegen die lotrecht gezeichnete Projektion der Zylinderachsen x des Motors, Bild 2b. Für die Momente zweiter Ordnung zeichnet man entsprechende Einheitsvektoren $e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2$ mit den doppelten Winkeln (gekennzeichnet durch das obere Beizeichen ^{2}, das keinen Exponenten darstellen soll!), Bild 2c, für die höheren Ordnungen weitere mit den dreifachen, vierfachen Winkeln usw., Bild 2d und e. Der Vektorstern fünfter Ordnung stimmt wieder mit dem für die erste Ordnung überein usw.

Der durch Addition der Vektoren e gefundene resultierende Vektor e_r ist ein Maß für das Massenrückdrehmoment des ganzen Motors. Für die erste, zweite und dritte Ordnung ergibt sich $e_r = 0$, bei der vierten Ordnung tritt ein resultierender Vektor $e_r^4 = e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 + e_4^4$ vom vierfachen Betrag des Einheitsvektors e auf. Die wirkliche Größe des verbleibenden Moments erhält man aus dem Vektorstern dadurch, daß man die y-Komponente des resultierenden Vektors e_r bildet und beachtet, daß das Massenrückdrehmoment der betrachteten Ordnung für den einzelnen Kurbeltrieb nicht den Betrag 1, sondern den aus (8) folgenden Wert $r^2\,\omega^2\,U_\nu$ hat.

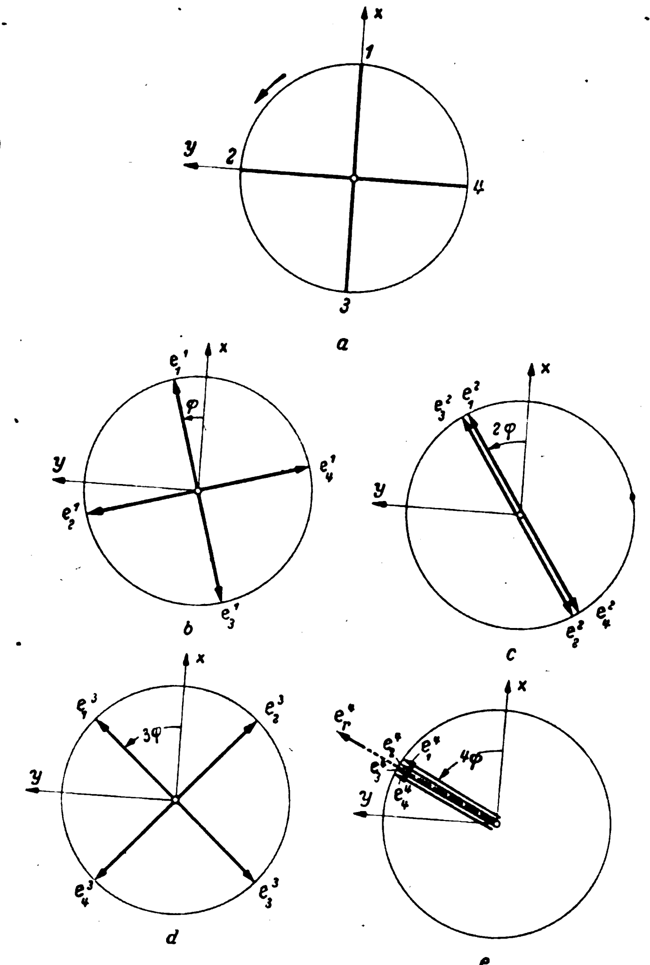


Bild 2. Kurbelschaubild und Vektorsterne zur Ermittlung der Massenrückdrehmomente beim Vierzylinder-Zweitaktmotor.

III. V-Motor.

1. V-Motor mit unmittelbarer Anlenkung sämtlicher Pleuel.

Greifen beide Pleuel eines zu einer Kurbelkröpfung gehörenden Zylinderpaares des V-Motors unmittelbar (im kinematischen Sinn) am Hubzapfen an, etwa durch Gabelung des einen Pleuels oder durch Anordnung der Pleuel unmittelbar nebeneinander auf dem Hubzapfen, so erhält man die Massenrückdrehmomente jedes der beiden Zylinder ganz entsprechend wie beim Einzylindermotor. Rechnet man den Kurbelwinkel φ_1 bzw. φ_2 jeweils von der zugehörigen Zylinderachse bis zur Kurbel, Bild 3, und führt noch — wie es auch bei den Betrachtungen der Massenkräfte des Motors üblich ist — den Winkel φ der Kurbel mit der in der

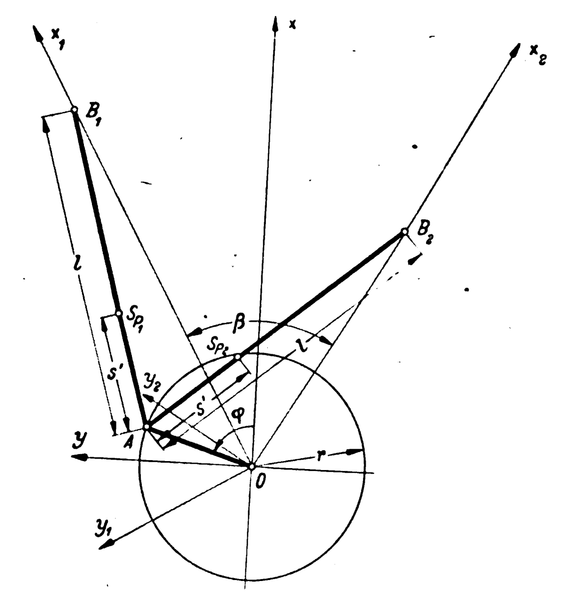


Bild 3. V-Motor mit unmittelbarer Pleuelanlenkung.

Winkelhalbierenden der beiden Zylinderachsen festgelegten x-Achse ein, dann gilt

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{\beta}{2} \text{ und } \varphi_2 = \varphi + \frac{\beta}{2}, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

wo β der V-Winkel ist. Die Massenrückdrehmomente der beiden als gleichartig vorausgesetzten Kurbeltriebe werden damit

$$M_{r_1} = r^2\,\omega^2\,(U_1 \sin\varphi_1 + U_2 \sin 2\,\varphi_1 + U_3 \sin 3\,\varphi_1 + \ldots),$$
$$M_{r_2} = r^2\,\omega^2\,(U_1 \sin\varphi_2 + U_2 \sin 2\,\varphi_2 + U_3 \sin 3\,\varphi_2 + \ldots),$$

woraus sofort das Massenrückdrehmoment des Zylinderpaares

$$\left.\begin{aligned} M_r = M_{r_1} + M_{r_2} = r^2\,\omega^2\,[U_1\,(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \\ + U_2\,(\sin 2\,\varphi_1 + \sin 2\,\varphi_2) + U_3\,(\sin 3\,\varphi_1 + \sin 3\,\varphi_2) + \ldots] \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

folgt. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der aus (14) folgenden trigonometrischen Umformung

$$\sin\nu\,\varphi_1 + \sin\nu\,\varphi_2 = 2\cos\nu\,\frac{\beta}{2}\sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \quad (16)$$

das Massenrückdrehmoment für ein Zylinderpaar des V-Motors bei unmittelbarer Anlenkung der Pleuel endgültig zu

$$\left.\begin{aligned} M_r = r^2\,\omega^2 \Big(2\,U_1 \cos\frac{\beta}{2}\sin\varphi + 2\,U_2 \cos\beta\sin 2\,\varphi \\ + 2\,U_3 \cos\frac{3\,\beta}{2}\sin 3\,\varphi + 2\,U_4 \cos 2\,\beta \sin 4\,\varphi + \ldots\Big). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Im allgemeinen treten somit Glieder erster, zweiter und höherer ganzzahliger Ordnung auf, entsprechend wie beim Einzylindermotor. Da sich nun das Massenrückdrehmoment des ganzen V-Motors aus dem Moment M_r (17) des Zylinderpaares ganz entsprechend ermitteln läßt wie das des einfachen Reihenmotors aus dem Moment M_r (8) des Einzylindermotors, so treten beim ganzen V-Motor die gleichen Ordnungen auf wie beim einfachen Reihenmotor mit gleichem Kurbelschaubild. Damit gilt Tafel 1 bei gleichem Kurbelschaubild unverändert auch für den V-Motor, wobei aber nunmehr an Stelle der Zylinderzahl sinngemäß die Zahl der Zylinderpaare zu nehmen ist. Lediglich bei gewissen V-Winkeln verschwinden zusätzlich einige Ordnungen der Momente schon innerhalb eines Zylinderpaares. So verschwindet nach (17) z. B. beim V-Winkel $\beta = 90^0$ wegen $\cos\beta = 0$, $\cos 3\,\beta = 0$ usw. das Moment zweiter Ordnung, sechster Ordnung usw.

In den Fällen, in denen beim V-Motor das Kurbelschaubild von dem des einfachen Reihenmotors abweicht, läßt sich ein Überblick über die auftretenden Massenrückdrehmomente wieder rasch mit Hilfe der Vektorsterne gewinnen.

2. V-Motor mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung.

Zunächst soll wieder das Massenrückdrehmoment eines zu einem Hubzapfen gehörenden Zylinderpaares ermittelt werden, wobei nunmehr das Nebenpleuel nicht unmittelbar an der Hubzapfenachse A angreift, sondern an der Anlenkachse C_n des Hauptpleuels angelenkt ist, Bild 4.

Das Massenrückdrehmoment des Hauptkurbeltriebes ist unverändert aus (8) zu entnehmen. Zur Ermittlung des Massenrückdrehmomentes des Nebenkurbeltriebes geht man zweckmäßig aus von dem in Mitt. I, Gl. (29b) angegebenen Zusammenhang zwischen Massenrückdrehmoment M_{r_n}, negativem Moment $-M_{t_n}$ der Massendrehkraft und Trägheitsdrehmoment M_{P_n} des Pleuels bezogen auf die Kurbelwellenachse, der sofort mit den Bezeichnungen für den Nebenkurbeltrieb angeschrieben sei:

$$M_{r_n} = -M_{t_n} + M_{P_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Der Anteil M_{t_n} ist bereits früher[4]) ermittelt worden, und zwar hat sich mit den Bezeichnungen (vgl. Bild 4)

l_n = Länge des Nebenpleuels,
s_n', s_n'' = Abstand des Nebenpleuelschwerpunktes von der Anlenkachse bzw. vom Kolbenbolzen,
c_n = Anlenkhalbmesser,
m_{K_n} = Masse des Nebenkolbens,
m_{P_n} = Masse des Nebenpleuels,
k_{P_n} = Trägheitshalbmesser des Nebenpleuels, bezogen auf eine zur Kurbelwellenachse parallele Achse durch den Schwerpunkt S_{P_n},
γ_n = Anlenkwinkel,
β_n = V-Winkel

und den Abkürzungen

$$\lambda_n = \frac{r}{l_n},\quad \varrho_n = \frac{c_n}{l}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n' = \frac{s_n'}{l_n},\quad \sigma_n'' = \frac{s_n''}{l_n}\;(\sigma_n' + \sigma_n'' = 1),\quad \sigma_n^* = \frac{k_{P_n}}{l_n}, \\ \bar\sigma_n^2 = \sigma_n'\,\sigma_n'' - \sigma_n^{*2} = \frac{1}{l_n^2}\,(s_n'\,s_n'' - k_{P_n}^2), \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$m_{h_n} = m_{K_n} + \sigma_n'\,m_{P_n}$ = gesamte hin- und hergehende Masse im Nebenkolbenbolzen, (21)

$$\delta_n = \gamma_n - \beta_n, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

$$\mu_n = \varrho_n \cos\delta_n,\quad \tau_n^3 = \varrho_n \sin\delta_n \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

sowie den weiteren, hier nur bis zu den Gliedern dritter Ordnung in λ, λ_n usw. wiedergegebenen Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_1 &= \left[\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16} - \frac{\mu_n}{4}\,(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\right]\sin\beta_n, \\
\mathfrak{E}_2 &= -\frac{1}{2}\sin 2\,\beta_n - \tau_n^3\cos\beta_n + \frac{\lambda_n}{\lambda}\,\tau_n^3\cos 2\,\beta_n, \\
\mathfrak{E}_3 &= -\left(\frac{3}{4}\,\lambda_n + \frac{9}{32}\,\lambda_n^3\right)\sin 3\,\beta_n \\
&\quad -\frac{3}{4}\,\mu_n\,(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\sin\beta_n + \frac{3}{2}\,\lambda_n\,\mu_n\sin 2\,\beta_n, \\
\mathfrak{E}_4 &= -\frac{\lambda_n^2}{4}\sin 4\beta_n + \lambda_n^2\,\mu_n\sin 3\beta_n - \frac{1}{2}\,\lambda\,\lambda_n\,\mu_n\sin 2\beta_n, \\
\mathfrak{E}_5 &= \frac{5}{32}\,\lambda_n^3\sin 5\,\beta_n, \\
&\;\vdots \\
\mathfrak{F}_1 &= \left[\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16} + \frac{\mu_n}{4}\,(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\right]\cos\beta_n - \frac{\lambda_n}{2}\,\mu_n, \\
\mathfrak{F}_2 &= -\frac{1}{2}\cos 2\,\beta_n + \tau_n^3\sin\beta_n - \frac{\lambda_n}{\lambda}\,\tau_n^3\sin 2\,\beta_n, \\
\mathfrak{F}_3 &= -\left(\frac{3}{4}\,\lambda_n + \frac{9}{32}\,\lambda_n^3\right)\cos 3\,\beta_n \\
&\quad -\frac{3}{4}\,\mu_n\,(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\cos\beta_n + \frac{3}{2}\,\lambda_n\,\mu_n\cos 2\,\beta_n, \\
\mathfrak{F}_4 &= -\frac{\lambda_n^2}{4}\cos 4\beta_n + \lambda_n^2\,\mu_n\cos 3\beta_n - \frac{1}{2}\,\lambda\,\lambda_n\,\mu_n\cos 2\beta_n, \\
\mathfrak{F}_5 &= \frac{5}{32}\,\lambda_n^3\cos 5\,\beta_n, \\
&\;\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

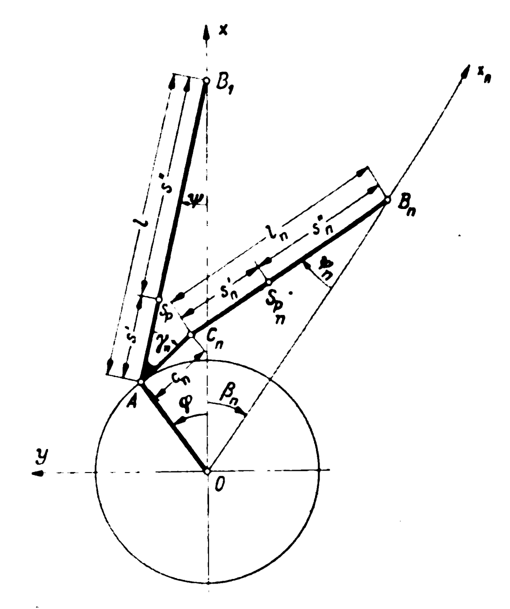


Bild 4. V-Motor mit mittelbar angelenktem Nebenpleuel.

4) A. Kimmel, Die erregenden Drehkräfte bei Flugmotoren mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 262.

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{G}_1 &= \left[\sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4}+\frac{\lambda_n^3}{16}\right)-\frac{\sigma_n'}{4}\lambda_n\mu_n^2-\frac{\lambda}{4}\mu_n\right]\sin\beta_n,\\
\mathfrak{G}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}-2\sigma_n')\sin 2\beta_n-(\sigma_n''^2\\
&\quad+\sigma_n^{*2})\mu_n\sin\beta_n-\tau_n^3\cos\beta_n+\sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\cos 2\beta_n,\\
\mathfrak{G}_3 &= -\sigma_n'\left(\frac{3}{4}\lambda_n+\frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\sin 3\beta_n\\
&\quad-\frac{3}{4}(\lambda+\sigma_n'\lambda_n\mu_n)\mu_n\sin\beta_n+\frac{3}{2}\sigma_n'\lambda_n\mu_n\sin 2\beta_n,\\
\mathfrak{G}_4 &= \lambda_n^2(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\mu_n\sin 3\beta_n-\frac{1}{4}\sin 4\beta_n\right)\\
&\quad-\frac{\sigma_n'}{2}\lambda\lambda_n\mu_n\sin 2\beta_n,\\
\mathfrak{G}_5 &= \frac{5}{32}\sigma_n'\lambda_n^3\sin 5\beta_n,\\
&\vdots\\
\mathfrak{H}_1 &= \left[\sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4}+\frac{\lambda_n^3}{16}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\mu_n}{4}(\lambda+\sigma_n'\lambda_n\mu_n)\right]\cos\beta_n-\frac{\sigma_n'}{2}\lambda_n\mu_n,\\
\mathfrak{H}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}-2\sigma_n')\cos 2\beta_n\\
&\quad+\mu_n(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{1}{2}\mu_n-\cos\beta_n\right)\\
&\quad+\tau_n^3\sin\beta_n-\sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\sin 2\beta_n,\\
\mathfrak{H}_3 &= -\sigma_n'\left(\frac{3}{4}\lambda_n+\frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\cos 3\beta_n\\
&\quad-\frac{3}{4}(\lambda+\sigma_n'\lambda_n\mu_n)\mu_n\cos\beta_n+\frac{3}{2}\sigma_n'\lambda_n\mu_n\cos 2\beta_n,\\
\mathfrak{H}_4 &= \lambda_n^2(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\mu_n\cos 3\beta_n-\frac{1}{4}\cos 4\beta_n\right)\\
&\quad-\frac{\sigma_n'}{2}\lambda\lambda_n\mu_n\cos 2\beta_n,\\
\mathfrak{H}_5 &= \frac{5}{32}\sigma_n'\lambda_n^3\cos 5\beta_n,\\
&\vdots
\end{aligned}
\right\} \quad (25)
$$

ergeben:

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{t_n} &= r(T_{K_n}+T_{P_n}) = r^2\omega^2\left[m_{K_n}\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{E}_\nu\cos\nu\varphi\right.\\
&\quad\left.+\mathfrak{F}_\nu\sin\nu\varphi)+m_{P_n}\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{G}_\nu\cos\nu\varphi+\mathfrak{H}_\nu\sin\nu\varphi)\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (26)
$$

Nun ist in (18) noch das Trägheitsdrehmoment M_{P_n} des Nebenpleuels zu ermitteln, das sich als negative Änderungsgeschwindigkeit des Impulsmoments bezüglich der Kurbelwellenachse ergibt. Hierzu ersetzt man zweckmäßig das Nebenpleuel in entsprechender Weise, wie in Mitt. I für das Hauptpleuel ausführlich gezeigt wurde[5]), durch eine mit dem Pleuel fest verbundene, mit Eigenträgheit behaftete Ersatzmasse $\frac{s_n'}{l_n}m_{P_n}$ im Kolbenbolzen B_n (Trägheitshalbmesser k_{2_n}) und eine entsprechende Masse $\frac{s_n''}{l_n}m_{P_n}$ in der Anlenkachse C_n (Trägheitshalbmesser k_{1_n}) so, daß außer Gesamtmasse und Schwerpunkt auch das Trägheitsmoment des Pleuels, bezogen auf die zur Kurbelwellenachse parallele Achse durch den Schwerpunkt, erhalten bleiben. Damit die letztgenannte Bedingung erfüllt ist, muß nach dem Steinerschen Satz gelten:

$$m_{P_n}k_{P_n}^2 = \frac{s_n''}{l_n}m_{P_n}(k_{1_n}^2+s_n'^2)+\frac{s_n'}{l_n}(k_{2_n}^2+s_n''^2)$$

oder wenn man berücksichtigt, daß $s_n'+s_n''=l_n$ ist,

$$\frac{s_n''}{l_n}m_{P_n}k_{1_n}^2+\frac{s_n'}{l_n}m_{P_n}k_{2_n}^2 = m_{P_n}(k_{P_n}^2-s_n's_n''). \quad (27)$$

[5]) Mitt. I, S. 107.

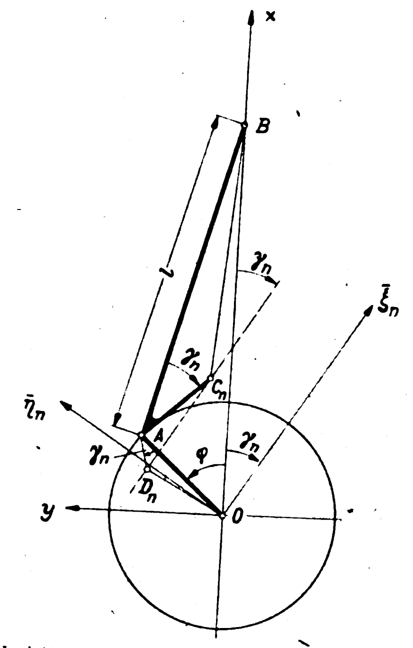


Bild 5. Zur Herleitung des Bewegungsgesetzes des Anlenkpunktes C_n nach Crocco.

Die Impulsmomente der Ersatzmassen des Nebenpleuels setzen sich zusammen aus den von der Drehung $-\dot{\psi}_n$ des Nebenpleuels herrührenden Beträgen $-\dot{\psi}_n\left(\frac{s_n''}{l_n}m_{P_n}k_{1_n}^2+\frac{s_n'}{l_n}m_{P_n}k_{2_n}^2\right)$ und aus den Momenten der Impulse der beiden Ersatzmassen bezüglich der Kurbelwellenachse O, die noch berechnet werden müssen. Die Ersatzmasse in B_n liefert keinen Beitrag, da ihre Geschwindigkeit $\dot{x}_n$ keinen Hebelarm bezüglich O hat. Zur Berechnung des Moments des Impulses der Ersatzmasse in C_n bezüglich des Punktes O benützt man die Tatsache, daß dieses unabhängig davon ist, welches Koordinatensystem gewählt wird, wenn es nur seinen Ursprung in O hat. Am einfachsten wird die folgende Rechnung, wenn man nach Crocco[6]) ein Koordinatensystem $\overline{\xi}_n$, $\overline{\eta}_n$ so wählt, daß die $\overline{\xi}_n$-Achse mit der x-Achse den Winkel γ_n bildet, wo γ_n wieder der Anlenkwinkel ist, Bild 5. Dann ergibt sich folgender kinematischer Zusammenhang: Trägt man an die Strecke OA ein Dreieck OAD_n an, das dem Dreieck BAC_n ähnlich ist und denselben Umlaufsinn hat, dann wird auch das Dreieck D_nC_nA dem Dreieck OBA ähnlich, und außerdem behält die Gerade D_nC_n während einer ganzen Kurbelumdrehung ihre Richtung bei, und zwar schneidet sie die x-Achse unter dem festen Winkel γ_n.

Hiermit erhält man die Koordinaten von C_n durch Projektion des Streckenzuges OAD_nC_n auf die $\overline{\xi}_n$- bzw. $\overline{\eta}_n$-Achse zu

$$
\left.
\begin{aligned}
\overline{\xi}_n &= \overline{OA}\cos(\varphi+\gamma_n)-\overline{AD_n}\cos\varphi+\overline{D_nC_n},\\
\overline{\eta}_n &= \overline{OA}\sin(\varphi+\gamma_n)-\overline{AD_n}\sin\varphi.
\end{aligned}
\right\} \quad (28)
$$

Infolge der Ähnlichkeit der obengenannten Dreiecke ist

$$
\begin{aligned}
\overline{OA} &= r,\\
\overline{AD_n} &= \frac{r}{l}c_n = \varrho_n r,\\
\overline{D_nC_n} &= \frac{c_n}{l}x = \varrho_n x,
\end{aligned}
$$

womit (28) übergeht in

$$
\left.
\begin{aligned}
\overline{\xi}_n &= r\cos(\varphi+\gamma_n)-r\varrho_n\cos\varphi+\varrho_n x,\\
\overline{\eta}_n &= r\sin(\varphi+\gamma_n)-r\varrho_n\sin\varphi
\end{aligned}
\right\} \quad (29)
$$

Durch zweimalige Ableitung nach φ, die im folgenden durch Beistriche gekennzeichnet sei, erhält man

[6]) L. Crocco. Una proprietà del meccanismo manovella — biella — stantuffo e sue applicazioni al meccanismo a biella madre e bielletta. Atti di Guidonia Nr. 4. (1939), S. 61.

$$\bar{\xi}_n'' = -r\cos(\varphi+\gamma_n) + r\varrho_n\cos\varphi + \varrho_n x'' = -\bar{\xi}_n + \varrho_n(x+x''),$$
$$\bar{\eta}_n'' = -r\sin(\varphi+\gamma_n) + r\varrho_n\sin\varphi \qquad = -\bar{\eta}_n \quad \ldots (30)$$

Bei Verwendung dieses Koordinatensystems wird das Trägheitsdrehmoment des Nebenpleuels bezüglich O, wenn man den von der Drehung des Pleuels herrührenden Beitrag der Ersatzmassen zum Impulsmoment sofort nach (27) umformt,

$$M_{P_n} = -\frac{d}{dt}[-m_{P_n}(k_{P_n}^2 - s_n' s_n'')\dot{\psi}_n + \sigma_n'' m_{P_n}(-\dot{\bar{\xi}}_n\bar{\eta}_n + \dot{\bar{\eta}}_n\bar{\xi}_n)] \quad \ldots (31)$$

Vernachlässigt man wieder die Glieder mit $\dot{\omega}$, so wird $\ddot{\bar{\xi}}_n = \omega^2\bar{\xi}_n''$, $\ddot{\bar{\eta}}_n = \omega^2\bar{\eta}_n''$ und $\ddot{\psi}_n = \omega^2\psi_n''$ und (31) geht nach Ausführung der Differentiation mit (30) über in

$$M_{P_n} = m_{P_n}\omega^2[-\bar{\sigma}_n^2 l_n^2\psi_n'' + \sigma_n''\varrho_n\bar{\eta}_n(x+x'')]. \quad (32)$$

Dies kann mit Hilfe des Zusammenhangs

$$\psi'' = -\frac{\lambda}{l}(x+x'')\sin\varphi, \quad \ldots\ldots (33)$$

der hier ohne Herleitung angegeben sei, sich aber leicht mit Hilfe der in Mitt. I angegebenen Reihen für ψ'', x und x'' bestätigen läßt, sowie durch Einsetzen von $\bar{\eta}_n$ (29) und nach kurzer Umformung gemäß (22) und (23) umgewandelt werden in

$$M_{P_n} = m_{P_n}\omega^2\left[-\bar{\sigma}_n^2 l_n^2\psi_n'' - \sigma_n''\varkappa_n l^2\psi'' - \sigma_n''\zeta_n l^2\psi''\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right] \quad \ldots (34)$$

mit den neuen Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}\varkappa_n &= \mu_n\cos\beta_n - \tau_n^3\sin\beta_n - \mu_n^2,\\ \zeta_n &= \mu_n\sin\beta_n + \tau_n^3\cos\beta_n.\end{aligned}\right\} \quad \ldots (35)$$

Die Reihen für ψ'' und ψ_n'' in (34) wurden bereits früher ermittelt, und zwar ist[7])

$$\psi'' = -\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1}\sin(2\nu+1)\varphi \quad \ldots (36)$$

mit $C_{2\nu+1}$ (5) sowie[8])

$$\psi_n'' = -\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{C}_\nu\cos\nu\varphi + \mathfrak{D}_\nu\sin\nu\varphi) \quad \ldots (37)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{C}_1 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{8} + \frac{3}{64}\lambda_n^5 + \frac{\lambda_n^3}{8}\mu_n^2\right)\sin\beta_n - \frac{\lambda_n^3}{8}\mu_n\sin 2\beta_n,\\
\mathfrak{C}_2 &= -\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3(\lambda^2 - \lambda_n^2\cos 2\beta_n),\\
\mathfrak{C}_3 &= -\left(\frac{3}{8}\lambda_n^3 + \frac{27}{128}\lambda_n^5\right)\sin 3\beta_n + \frac{9}{8}\lambda_n^3\mu_n(\sin 2\beta_n - \mu_n\sin\beta_n),\\
\mathfrak{C}_4 &\approx 0,\\
\mathfrak{C}_5 &= \frac{15}{128}\lambda_n^5\sin 5\beta_n,\\
&\vdots\\
\mathfrak{D}_1 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{8} + \frac{3}{64}\lambda_n^5 + \frac{3}{8}\lambda_n^3\mu_n^2\right)\cos\beta_n - \frac{\lambda_n^3}{8}\mu_n\cos 2\beta_n - \lambda_n\mu_n\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4}\right),\\
\mathfrak{D}_2 &= -\frac{\lambda_n^3}{\lambda}\tau_n^3\sin 2\beta_n.\\
\mathfrak{D}_3 &= -\left(\frac{3}{8}\lambda_n^3 + \frac{27}{128}\lambda_n^5\right)\cos 3\beta_n + \frac{9}{8}\lambda_n^3\mu_n(\cos 2\beta_n - \mu_n\cos\beta_n),\\
\mathfrak{D}_4 &\approx 0,\\
\mathfrak{D}_5 &= \frac{15}{128}\lambda_n^5\cos 5\beta_n,\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

[7]) Mitt. I. Gl. (15).
[8]) Vgl. Gl. (17) der in Fußnote 4 genannten Arbeit.

Um noch den Ausdruck $\psi''\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ in (34) zu entwickeln, bildet man aus (36) zunächst

$$\psi''\cos\varphi = -\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1}\sin(2\nu+1)\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$= -\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2}C_{2\nu+1}[\sin 2\nu\varphi + \sin 2(\nu+1)\varphi] \quad (39)$$

und formt diesen Ausdruck so um, daß zur Division mit $\sin\varphi$ auf der rechten Seite der Faktor $\sin\varphi$ abgespalten wird. Hierzu bildet man nach einem bekannten trigonometrischen Additionstheorem

$$\sin 2\varrho\varphi - \sin 2(\varrho-1)\varphi = 2\cos(2\varrho-1)\varphi\sin\varphi. \quad (40)$$

Denkt man sich entsprechende Gleichungen für $\varrho = 1, 2, \ldots \nu$ angeschrieben und addiert diese Gleichungen, so heben sich auf der linken Seite sämtliche Glieder mit Ausnahme des Gliedes $\sin 2\nu\varphi$ paarweise auf und man erhält

$$\sin 2\nu\varphi = 2\sin\varphi\cdot\sum_{\varrho=1}^{\nu}\cos(2\varrho-1)\varphi; \quad \ldots (41a)$$

entsprechend gilt, wenn man ν durch $\nu+1$ ersetzt und sofort etwas umformt,

$$\sin 2(\nu+1)\varphi = 2\sin\varphi\sum_{\varrho=1}^{\nu+1}\cos(2\varrho-1)\varphi$$
$$= 2\sin\varphi\cdot\left[\cos(2\nu+1)\varphi + \sum_{\varrho=1}^{\nu}\cos(2\varrho-1)\varphi\right]. \quad (41b)$$

Setzt man (41a) und (41b) in (39) ein, so erhält man nach Division mit $\sin\varphi$

$$\psi''\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1}\left[\cos(2\nu+1)\varphi + 2\sum_{\varrho=1}^{\nu}\cos(2\varrho-1)\varphi\right]. \quad (42)$$

Denkt man sich in (42) die Summen ausführlich angeschrieben und nach Gliedern gleicher Ordnung (bezogen auf φ) zusammengefaßt, dann ergibt sich folgende Reihe:

$$\psi''\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty} Y_{2\nu+1}\cos(2\nu+1)\varphi, \quad \ldots (43)$$

wobei zur Abkürzung

$$Y_{2\nu+1} = C_{2\nu+1} + 2\sum_{\varrho=\nu+1}^{\infty} C_{2\varrho+1} \quad \ldots (44)$$

oder ausführlich

$$\left.\begin{aligned}Y_1 &= C_1 + 2(C_3 + C_5 + C_7 + \ldots),\\ Y_3 &= C_3 + 2(C_5 + C_7 + \ldots),\\ Y_5 &= C_5 + 2(C_7 + \ldots),\\ &\vdots\end{aligned}\right\} \quad \ldots (44a)$$

gesetzt ist.

Mit ψ'' (36), ψ_n'' (37) sowie dem Ausdruck $\psi''\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ aus (43) folgt aus (34) der endgültige Ausdruck für das Trägheitsdrehmoment des Nebenpleuels bezogen auf die Kurbelwellenachse

$$\left.\begin{aligned}M_{P_n} = m_{P_n}\omega^2\Bigg[&\bar{\sigma}_n^2 l_n^2\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{C}_\nu\cos\nu\varphi + \mathfrak{D}_\nu\sin\nu\varphi)\\ &+ \sigma_n''\lambda\varkappa_n l^2\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1}\sin(2\nu+1)\varphi\\ &+ \sigma_n''\lambda\zeta_n l^2\sum_{\nu=0}^{\infty} Y_{2\nu+1}\cos(2\nu+1)\varphi\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad \ldots (45)$$

mit den Abkürzungen $\mathfrak{C}_\nu$, $\mathfrak{D}_\nu$ (38), $C_{2\nu+1}$ (5), $Y_{2\nu+1}$ (44) und $\varkappa_n$, ζ_n (35).

Setzt man das Moment M_{t_n} (26) der Massendrehkraft sowie das soeben ermittelte Trägheitsdrehmoment M_{P_n} (45)

des Nebenpleuels in (18) ein, so erhält man nach einiger Umformung den endgültigen Ausdruck für das **Massenrückdrehmoment des Nebenkurbeltriebes**

$$M_{r_n} = r^2\,\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{R}_\nu \cos \nu\,\varphi + \mathfrak{S}_\nu \sin \nu\,\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

mit den (nicht mehr dimensionslosen) Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 &= - m_{h_n}\left[\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16} - \frac{\mu_n}{4}(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\right]\sin\beta_n \\
&\quad + m_{P_n}\Bigg\{\bar{\sigma}_n^2\left[\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{8}\right)\sin\beta_n - \frac{\lambda_n}{8}\mu_n \sin 2\,\beta_n\right] \\
&\quad + \sigma_n''\left[\left(\frac{\mu_n}{\lambda} - \frac{3}{8}\mu_n\,\lambda\right)\sin\beta_n + \frac{\tau_n^3}{\lambda}\cos\beta_n\right]\Bigg\}, \\
\mathfrak{R}_2 &= - m_{h_n}\left(-\frac{1}{2}\sin 2\beta_n - \tau_n^3\cos\beta_n + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\cos 2\,\beta_n\right) \\
&\quad + m_{P_n}\left[\bar{\sigma}_n^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\,\beta_n - \mu_n \sin\beta_n\right)\right. \\
&\quad \left. + \sigma_n''(\mu_n \sin\beta_n + \tau_n^3\cos\beta_n)\right], \\
\mathfrak{R}_3 &= - m_{h_n}\left[-\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\sin 3\,\beta_n\right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4}(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\,\mu_n \sin\beta_n + \frac{3}{2}\lambda_n\,\mu_n \sin 2\,\beta_n\right] \\
&\quad + m_{P_n}\left[\bar{\sigma}_n^2\left(-\frac{3}{8}\lambda_n \sin 3\,\beta_n\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{9}{8}\lambda_n\,\mu_n \sin 2\,\beta_n\right) + \sigma_n''\frac{3}{8}\mu_n\,\lambda \sin\beta_n\right], \\
\mathfrak{R}_4 &= - m_{h_n}\left(-\frac{\lambda_n^2}{4}\sin 4\,\beta_n + \lambda_n^2\,\mu_n \sin 3\,\beta_n\right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_n}{2}\mu_n\,\lambda \sin 2\,\beta_n\right) \\
&\quad - m_{P_n}\bar{\sigma}_n^2\,\lambda_n^2\left(\frac{1}{4}\sin 4\,\beta_n - v_n \sin 3\,\beta_n\right), \\
\mathfrak{R}_5 &= - m_{h_n}\frac{5}{32}\lambda_n^3 \sin 5\,\beta_n, \\
&\vdots \\
\mathfrak{S}_1 &= - m_{h_n}\left\{\left[\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16} + \frac{\mu_n}{4}(\lambda + \lambda_n\mu_n)\right]\cos\beta_n - \frac{\lambda_n}{2}\mu_n\right\} \\
&\quad + m_{P_n}\Bigg\{\bar{\sigma}_n^2\left[\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{8}\right)\cos\beta_n - \frac{\lambda_n\,\mu_n}{8}\cos 2\,\beta_n\right. \\
&\quad \left. - \mu_n\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{4}\right)\right] + \sigma_n''\left[\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{8}\right)\mu_n \cos\beta_n\right. \\
&\quad \left. - \frac{\tau_n^3}{\lambda}\sin\beta_n - \mu_n^2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{8}\right)\right]\Bigg\}, \\
\mathfrak{S}_2 &= - m_{h_n}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\,\beta_n + \tau_n^3\sin\beta_n - \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\sin 2\,\beta_n\right) \\
&\quad + m_{P_n}\left[\bar{\sigma}_n^2\left(\frac{1}{2}\cos 2\,\beta_n - \mu_n \cos\beta_n + \frac{1}{2}\mu_n^2\right)\right. \\
&\quad \left. + \sigma_n''\left(\mu_n \cos\beta_n - \frac{1}{2}\mu_n^2 - \tau_n^3 \sin\beta_n\right)\right], \\
\mathfrak{S}_3 &= - m_{h_n}\left[-\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\cos 3\,\beta_n\right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4}\mu_n(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\cos\beta_n + \frac{3}{2}\lambda_n\,\mu_n \cos 2\,\beta_n\right] \\
&\quad + m_{P_n}\left[\bar{\sigma}_n^2\left(-\frac{3}{8}\lambda_n \cos 3\beta_n + \frac{9}{8}\lambda_n\mu_n \cos 2\beta_n\right)\right. \\
&\quad \left. + \sigma_n''\frac{3}{8}\lambda\,\mu_n(\mu_n + \cos\beta_n)\right], \\
\mathfrak{S}_4 &= - m_{h_n}\left(-\frac{\lambda_n^2}{4}\cos 4\,\beta_n + \lambda_n^2\,\mu_n \cos 3\,\beta_n\right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_n}{2}\mu_n\,\lambda \cos 2\,\beta_n\right) \\
&\quad - m_{P_n}\bar{\sigma}_n^2\,\lambda_n^2\left(\frac{1}{4}\cos 4\,\beta_n - \mu_n \cos 3\,\beta_n\right), \\
\mathfrak{S}_5 &= - m_{h_n}\frac{5}{32}\lambda_n^3 \cos 5\,\beta_n, \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (47)$$

Bei der zahlenmäßigen Auswertung von (47) — etwa bei der Anlegung geeigneter Rechenblätter — ist zu beachten, daß die Beiwerte $\mathfrak{R}_\nu$ und $\mathfrak{S}_\nu$ ganz ähnlich gebaut sind. Die mit $-m_{h_n}$ behafteten Ausdrücke bei den Beiwerten $\mathfrak{R}_\nu$ und $\mathfrak{S}_\nu$ in (47) stimmen mit den bereits bei der Massendrehkraft des Nebenkolbens aufgetretenen Beiwerten $\mathfrak{E}_\nu$ bzw. $\mathfrak{F}_\nu$ (24) überein. Damit die Gleichungen nicht noch umfangreicher werden, sind in (47) in der Regel nur Glieder bis zur dritten Ordnung in λ, λ_n usw. mitgeführt worden, wobei auch die Größe $\bar{\sigma}_n^2$ als eine von erster Ordnung kleine Größe betrachtet wurde.

Das Massenrückdrehmoment für ein Zylinderpaar des V-Motors mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung erhält man dann durch Addition des Massenrückdrehmoments M_r (8) des Hauptkurbeltriebs und des eben berechneten Massenrückdrehmoments M_{r_n} (46) des Nebenkurbeltriebs. Bei einem Zylinderpaar treten somit im ganzen Glieder erster, zweiter und höherer ganzzahliger Ordnung auf und zwar sowohl cos- als auch sin-Glieder. Im Gegensatz zur unmittelbaren Anlenkung ist es hier nicht möglich, gewisse Ordnungen durch geeignete Wahl des V-Winkels vollständig zu beseitigen.

Gleichung (46) gilt zunächst für beliebige Anlenkung. Der Fall der regelmäßigen Anlenkung des Nebenpleuels, bei der der Anlenkwinkel γ_n gleich dem V-Winkel β_n ist, folgt jedoch ebenfalls aus (46), wenn man dort gemäß (22) und (23) insbesondere $\mu_n = \varrho_n$ und $\tau_n^3 = 0$ setzt. Auf die ausführliche Wiedergabe des zugehörigen Ausdruckes für das Massenrückdrehmoment sei verzichtet.

Das Massenrückdrehmoment von ganzen V-Motoren läßt sich unter Berücksichtigung der Kurbelversetzung entsprechend wie bei einfachen Reihenmotoren ermitteln, wobei aber zu beachten ist, daß beim einzelnen Zylinderpaar nunmehr sowohl cos- als auch sin-Glieder auftreten.

IV. Sternmotor.

1. Sternmotor mit unmittelbarer Anlenkung sämtlicher Pleuel.

Der Fall, daß sämtliche Pleuel unmittelbar am Hubzapfen angreifen, Bild 6, kommt beim Sternmotor mit größerer Zylinderzahl z aus baulichen Gründen in der Regel nicht vor, er wird daher im folgenden nur kurz behandelt. Setzt man voraus, daß sämtliche Pleuel und Kolben gleich ausgebildet sind und daß der Winkel β zwischen je zwei Zylindern jeweils gleich groß ist, dann ist der von der Zylinderachse gegen die Kurbel gerechnete Kurbelwinkel des k-ten Kurbeltriebs

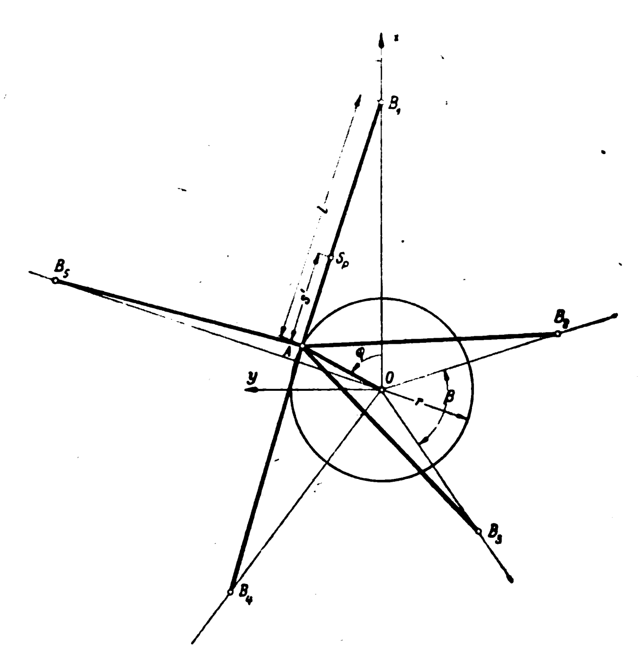


Bild 6. Sternmotor mit unmittelbarer Pleuelanlenkung.

$$\varphi_k = \varphi + (k - 1)\frac{2\pi}{z} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots\ z) \quad \ldots (48)$$

in formaler Übereinstimmung mit dem Kurbelwinkel φ_k (9) beim Zweitakt-Reihenmotor. Damit wird auch die Summation der Massenrückdrehmomente über den ganzen Stern formal gleich wie dort und man erhält schließlich für das Massenrückdrehmoment des z-Zylinder-Sternmotors mit unmittelbarer Pleuelanlenkung in Übereinstimmung mit (12)

$$M_r = z\, r^2 \omega^2 (U_z \sin z\varphi + U_{2z} \sin 2z\varphi + U_{3z} \sin 3z\varphi + \ldots) \quad (z = 1,\ 2,\ 3\ \ldots) \quad \ldots (49)$$

mit den Abkürzungen U_ν (7). Beim z-Zylinder-Sternmotor mit unmittelbarer Pleuelanlenkung treten somit lediglich Massenrückdrehmomente der Ordnungen z, $2z$, ... je in z-facher Größe gegenüber dem einzelnen Kurbeltrieb auf, also z. B. beim Neunzylinder-Sternmotor die Ordnungen 9, 18, ... Bei den praktisch vorkommenden Zylinderzahlen sind somit die auftretenden Massenrückdrehmomente außerordentlich klein.

2. Sternmotor mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung.

Zum Massenrückdrehmoment des Hauptkurbeltriebs, das unverändert aus (8) entnommen werden kann, ist noch das Massenrückdrehmoment sämtlicher Nebenkurbeltriebe hinzuzufügen. Für das Folgende seien nun die Zylinder eines Sterns, beginnend mit dem Hauptzylinder, mit 1, 2, ... n, ... z beziffert, wo z die Gesamtzahl der Zylinder im Stern, also z—1 die Zahl der Nebenzylinder allein bedeutet. Der Winkel $\beta = \frac{2\pi}{z}$ sei der durchweg gleiche Winkel zwischen zwei benachbarten Zylinderachsen, so daß für den n-ten Zylinder der Zylinderwinkel

$$\beta_n = (n - 1)\beta \quad (n = 2, 3,\ \ldots\ z) \quad \ldots (50)$$

wird und außerdem die Beziehung

$$\beta_{z+2-n} = -\beta_n \quad \ldots (51)$$

gilt. Ferner wird die praktisch immer zutreffende Annahme gemacht, daß die dem Hauptpleuel angehörenden Anlenkachsen C_n, Bild 7, bezüglich der Achse AB_1 des Hauptpleuels symmetrisch liegen; es gelten somit die weiteren Beziehungen

$$\varrho_{z+2-n} = \varrho_n \quad \text{und} \quad \delta_{z+2-n} = -\delta_n. \quad \ldots (52)$$

Schließlich wird auch hier wieder angenommen, daß sämtliche Kolben und Pleuel der Nebenzylinder gleich ausgebildet seien.

Die von sämtlichen Nebenkurbeltrieben eines Sterns herrührenden Massenrückdrehmomente ergeben sich dann aus dem Massenrückdrehmoment eines Nebenkurbeltriebes M_{r_n} (46) mit (47) zu

$$M_r^* = \sum_{n=2}^{z} M_{r_n} = r^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{R}_\nu^* \cos \nu\varphi + \mathfrak{S}_\nu^* \sin \nu\varphi), \quad (53)$$

wobei

$$\mathfrak{R}_\nu^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{R}_\nu^{(n)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_\nu^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{S}_\nu^{(n)} \quad \ldots (54)$$

ist, mit den (hier vorübergehend mit dem oberen Beizeichen $^{(n)}$ gekennzeichneten) Größen $\mathfrak{R}_\nu^{(n)}$ und $\mathfrak{S}_\nu^{(n)}$ (47). Verwendet man zur Durchführung der Summationen (54) die Beziehungen[6])

$$\sum_{n=2}^{z} \cos h\,(n-1)\,\beta = \begin{cases} -1 & \text{für } h \neq k\,z \\ z-1 & \text{für } h = k\,z \end{cases}$$

und

$$\sum_{n=2}^{z} \sin h\,(n-1)\,\beta = 0$$

mit $h = 1, 2, 3, \ldots$ und $k = 1, 2, 3, \ldots$ (55)

Bild 7. Sternmotor mit mittelbar angelenkten Nebenpleueln.

und führt für die auftretenden Summenausdrücke die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} t_h &= \sum_{n=2}^{z} \mu_n \cos h\,(n-1)\,\beta, \\ u_h &= \sum_{n=2}^{z} \mu_n^2 \cos h\,(n-1)\,\beta, \\ v_h &= \sum_{n=2}^{z} \tau_n^3 \sin h\,(n-1)\,\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots (56)$$

ein, so findet man mit (55) sowie unter Beachtung von (50) bis (52) für den Fall beliebiger Anlenkung der Nebenpleuel folgende Ausdrücke für die Beiwerte $\mathfrak{R}_\nu^*$ und $\mathfrak{S}_\nu^*$ in (53):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1^* &= \mathfrak{R}_2^* = \ldots = \mathfrak{R}_5^* = \ldots = 0, \\
\mathfrak{S}_1^* &= -m_{h_n}\left[-\frac{\lambda_n}{4}(1 + 2t_0) - \frac{\lambda_n^3}{16} + \frac{1}{4}(\lambda t_1 + \lambda_n u_1)\right] \\
&\quad + m_{p_n}\left\{\bar{\sigma}_n^2\left[\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{8}(1 + t_2) - \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{4}\right)t_0\right]\right. \\
&\quad \left. + \sigma_n''\left[\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{8}\right)t_1 - \frac{v_1}{\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{8}\right)u_0\right]\right\}, \\
\mathfrak{S}_2^* &= -m_{h_n}\left(\frac{1}{2} + v_1 - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_2\right) \\
&\quad + m_{p_n}\left[\bar{\sigma}_n^2\left(-\frac{1}{2} - t_1 + \frac{u_0}{2}\right) + \sigma_n''\left(t_1 - \frac{u_0}{2} - v_1\right)\right], \\
\mathfrak{S}_3^* &= -m_{h_n}\left[\frac{3}{4}\lambda(1 + 2t_2) + \frac{9}{32}\lambda_n^3\right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4}(\lambda t_1 + \lambda_n u_1)\right] + m_{p_n}\left[\bar{\sigma}_n^2 \frac{3}{8}\lambda_n(1 + 3t_2)\right. \\
&\quad \left. + \sigma_n'' \frac{3}{8}\lambda(t_1 + u_0)\right], \\
\mathfrak{S}_4^* &= -m_{h_n}\left[\lambda_n^2\left(\frac{1}{4} + t_3\right) - \frac{\lambda_n \lambda}{2} t_2\right] \\
&\quad + m_{p_n}\bar{\sigma}_n^2 \lambda_n^2\left(\frac{1}{4} + t_3\right), \\
\mathfrak{S}_5^* &= + m_{h_n}\frac{5}{32}\lambda_n^3, \\
&\;\vdots
\end{aligned} \quad (57)$$

Schließt man den Fall $z = 2$, d. h. den bereits oben behandelten V-Motor aus, so gelten hier sowie in allen folgenden

[6]) Vgl. etwa K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 3. Aufl., Berlin 1931. S. 368.

Gleichungen, bei denen das Massenrückdrehmoment über sämtliche Nebenzylinder summiert wird, gemäß (47) und (55) die angegebenen Ausdrücke für die Glieder ν-ter Ordnung (bezogen auf die Kurbelumdrehung) für Sternmotoren mit Zylinderzahlen $z > \nu$. Da somit durch diese Gleichungen alle praktisch vorkommenden Sternmotoren-Bauarten genügend genau erfaßt werden, wurde darauf verzichtet, die Glieder auch für kleinere Zylinderzahlen anzuschreiben, was aber mit Hilfe von (47) und (55) ohne weiteres möglich wäre.

Aus den Ausdrücken (57) folgen sofort die entsprechenden für den Sonderfall der regelmäßigen Nebenpleuelanlenkung, bei der die Anlenkwinkel γ_n jeweils gleich den zugehörigen Zylinderwinkeln β_n und außerdem alle Anlenkhalbmesser c_n einander gleich sind; nach (22) ist somit $\delta_n = 0$ sowie nach (19) $\varrho_n = \varrho$ und nach (23) $\mu_n = \mu = \varrho$ und $\tau_n^3 = 0$ zu setzen. Damit wird unter Beachtung von (55) das **Massenrückdrehmoment sämtlicher Nebenzylinder bei regelmäßiger Nebenpleuelanlenkung**

$$\overline{M}_r = r^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\overline{\mathfrak{R}}_\nu \cos \nu \varphi + \overline{\mathfrak{S}}_\nu \sin \nu \varphi) \quad . \; . \; (53a)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{R}}_1 &= \overline{\mathfrak{R}}_2 = \; . \; . \; . = \overline{\mathfrak{R}}_5 = \; . \; . \; . = 0, \\
\overline{\mathfrak{S}}_1 &= + m_{h_n} \left[\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16} + \frac{\varrho}{4}(\lambda + \lambda_n \varrho) + \frac{z-1}{2} \lambda_n \varrho\right] \\
&\quad + m_{P_n} \left\{\overline{\sigma}_n^2 \left[-\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{8}(1-\varrho) - (z-1)\varrho\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{4}\right)\right] \right. \\
&\quad \left. - \sigma_n'' \left[\varrho\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{8}\right) + (z-1)\varrho^2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{8}\right)\right]\right\}, \\
\overline{\mathfrak{S}}_2 &= -\frac{m_{h_n}}{2} + m_{P_n} \left[\overline{\sigma}_n^2 \left(-\frac{1}{2} + \varrho + \frac{z-1}{2}\varrho^2\right) - \sigma_n'' \varrho \left(1 + \frac{z-1}{2}\varrho\right)\right], \\
\overline{\mathfrak{S}}_3 &= - m_{h_n} \left[\frac{3}{4}\lambda_n (1 - 2\varrho) + \frac{9}{32}\lambda_n^3 + \frac{3}{4}\varrho(\lambda + \lambda_n \varrho)\right] \\
&\quad + m_{P_n} \left\{\overline{\sigma}_n^2 \frac{3}{8}\lambda_n (1 - 3\varrho) + \sigma_n'' \frac{3}{8}\lambda \varrho [(z-1)\varrho \quad 1]\right\}, \\
\overline{\mathfrak{S}}_4 &= - m_{h_n} \left[\lambda_n^2 \left(\frac{1}{4} - \varrho\right) + \frac{\lambda_n \lambda}{2} \varrho\right] + m_{P_n} \overline{\sigma}_n^2 \lambda_n^2 \left(\frac{1}{4} - \varrho\right), \\
\overline{\mathfrak{S}}_5 &= \quad m_{h_n} \frac{5}{32} \lambda_n^3, \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (57a)$$

Die für die regelmäßige Anlenkung hergeleiteten Ausdrücke (53a) und (57a) liefern auch noch dann, wenn kleine Abweichungen der Anlenkwinkel und Anlenkhalbmesser von der exakten regelmäßigen Anlenkung auftreten, sehr gute Näherungen für das Massenrückdrehmoment. Man hat hierzu lediglich in (57a) für ϱ den Mittelwert über die Größen ϱ_n einzusetzen.

Zahlenbeispiel.

Als Beispiel soll noch kurz ein Neunzylinder-Sternmotor mit folgenden Kenngrößen betrachtet werden.

Zylinderbohrung $d = 154$ mm,
Kurbelhalbmesser $r = 80$ mm,
Kurbelwellendrehzahl $n = 2800$ U/min.

Hauptzylinder:

Pleuellänge $l = 330$ mm,
Schwerpunktsabstände (vgl. Bild 7) $s' = 41,3$ mm und $s'' = 288,7$ mm,
Schubstangenverhältnis $\lambda = \frac{r}{l} = 0,2424$,
Gewicht des Hauptpleuels $G_P = 10,54$ kg,
Trägheitsarm des Hauptpleuels, bezogen auf eine Achse durch den Schwerpunkt $k_P = 10,79$ cm,

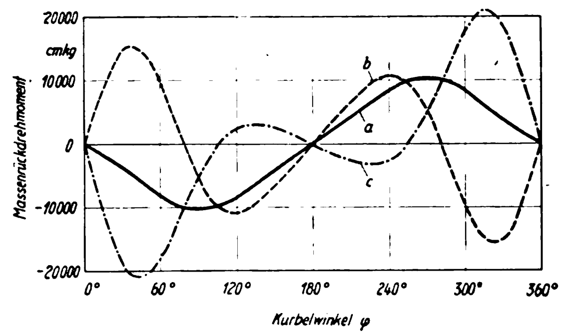


Bild 8. Verlauf des Massenrückdrehmoments eines Neunzylinder-Sternmotors.
a Sämtliche Zylinder,
b Hauptzylinder,
c sämtliche Nebenzylinder.

Gewicht des vollständigen Kolbens $G_K = 2,972$ kg,
Anlenkhalbmesser $c_2 = c_9 = 69,65$ mm,
$c_3 = c_8 = 71,26$ mm,
$c_4 = c_7 = 70,60$ mm,
$c_5 = c_6 = 68,82$ mm.

Die Anlenkwinkel sind über den Umfang gleichmäßig verteilt; es ist also nach (22) $\delta_n = 0$.

Nebenzylinder:

Nebenpleuellänge $l_n = 261,5$ mm,
Schwerpunktsabstände $s'_n = 138,5$ mm und $s''_n = 123,0$ mm,
Schubstangenverhältnis $\lambda_n = \frac{r}{l_n} = 0,3059$,
Gewicht des Nebenpleuels $G_{P_n} = 1,42$ kg,
Trägheitsarm des Nebenpleuels bezogen auf eine Achse durch den Schwerpunkt $k_{P_n} = 9,97$ cm,
Gewicht des vollständigen Kolbens $G_{K_n} = 2,972$ kg.

Der Verlauf des nach (8) ermittelten Massenrückdrehmoments des Hauptzylinders sowie des nach (53) mit (57) berechneten Massenrückdrehmoments sämtlicher Nebenzylinder und außerdem des durch Überlagerung dieser beiden Anteile erhaltenen Massenrückdrehmoments des ganzen Sterns ist in Bild 8 in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel φ dargestellt. Die Schaulinien für den Hauptzylinder und für sämtliche Nebenzylinder enthalten als kennzeichnende Bestandteile jeweils zwei Vollschwingungen je Kurbelwellenumdrehung, jedoch beim Hauptzylinder und bei den Nebenzylindern mit entgegengesetztem Vorzeichen. Dadurch wird bei der Addition dieser beiden Anteile der kennzeichnende Verlauf mit zwei Vollschwingungen im wesentlichen ausgelöscht und es bleibt beim ganzen Stern ein Moment übrig, das in seinem Verlauf im wesentlichen eine einzige Vollschwingung je Kurbelumdrehung zeigt.

Die Harmonischen des Massenrückdrehmoments des Hauptzylinders, sämtlicher Nebenzylinder sowie sämtlicher Zylinder des Sterns sind in Tafel 2 zusammengestellt. Wie auch schon aus Bild 8 zu schließen, ist in Tafel 2 das Glied

Zahlentafel 2. Die Harmonischen des Massenrückdrehmoments des betrachteten Sternmotors.

Beiwerte von	Hauptzylinder	Rechnung nach den Formeln (53) mit (57) für beliebige Anlenkung		Rechnung nach d. Formeln (53a) mit (57a) für regelmäßige Anlenkung	
		Sämtliche Nebenzylinder	Sämtliche Zylinder	Sämtliche Nebenzylinder	Sämtliche Zylinder
	cmkg	cmkg	cmkg	cmkg	cmkg
$\sin \varphi$	— 829	— 8821	— 9650	— 8742	— 9571
$\sin 2\varphi$	12116	— 11990	126	— 12004	112
$\sin 3\varphi$	4461	— 3698	763	— 3863	598
$\sin 4\varphi$	362	— 258	104	— 235	127
$\sin 5\varphi$	— 56	93	37	93	37

zweiter Ordnung des Hauptzylinders ungefähr entgegengesetzt gleich dem entsprechenden Glied für sämtliche Nebenzylinder, so daß beim ganzen Stern nur ein verhältnismäßig kleines Glied zweiter Ordnung übrigbleibt. Dies trifft auch bei den Gliedern dritter Ordnung zu. Dadurch wird beim Massenrückdrehmoment sämtlicher Zylinder des Sterns das Glied erster Ordnung weitaus am größten.

Zum Vergleich enthält Tafel 2 auch die Ergebnisse, die man erhält, wenn man das Massenrückdrehmoment der Nebenzylinder näherungsweise nach den Formeln (53a) mit (57a) für die regelmäßige Anlenkung berechnet, wobei für die Größen ϱ_n (19) der Mittelwert eingesetzt wird. Man sieht, daß die Näherung für sämtliche Nebenzylinder sehr gut ist. Beim Massenrückdrehmoment sämtlicher Zylinder des Sterns können bei den oben besprochenen Gliedern, die als Differenzen nahezu gleich großer Werte zustande kommen, zwar größere anteilige Fehler auftreten; diese sind aber belanglos, da diese Glieder absolut genommen klein sind.

Die bequemere Rechnung für die regelmäßige Anlenkung ist daher auch für die praktisch vorkommenden Fälle der beliebigen Anlenkung zu empfehlen, wo sich die Anlenkhalbmesser in der Regel nur um wenige Hundertteile voneinander unterscheiden.

V. Schlußbemerkung.

Ausgehend von früheren Untersuchungen über den Einzylindermotor wurde das auf die Motoraufhängung wirkende Massenrückdrehmoment von einfachen Reihenmotoren sowie von V- und Sternmotoren mit unmittelbarer Anlenkung der Pleuel und mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung ermittelt und in einer für die praktische Anwendung geeigneten Form dargestellt.

Will man das auf die Motoraufhängung wirkende Gesamtrückdrehmoment errechnen, so hat man das Massenrückdrehmoment, das im vorstehenden untersucht wurde, und das Gasrückdrehmoment, das mit dem negativen Wert des Moments der erregenden Gasdrehkraft übereinstimmt und das in früheren Arbeiten[10]) ausführlich behandelt wurde, zu addieren. Hierbei ist zu beachten, daß das Massenrückdrehmoment im wesentlichen nur vom Quadrat der Motordrehzahl, das Gasrückdrehmoment dagegen hauptsächlich von dem im Zylinder herrschenden Mitteldruck abhängt.

Die Untersuchungen lassen sich ohne weiteres auch auf Mehrstern- und Sternreihenmotoren erweitern, bei denen sich das Massenrückdrehmoment des Gesamtmotors in entsprechender Weise aus den vorstehend ermittelten Massenrückdrehmomenten der Teilmotoren zusammensetzt, wie das Massenrückdrehmoment des Reihenmotors aus dem des Einzylindermotors. Auch Mehrwellenmotoren mit parallelen Kurbelwellen lassen sich bei sinngemäßer Berücksichtigung der Kurbelversetzung der einzelnen Kurbelwellen gegeneinander ohne Schwierigkeit behandeln.

[10]) A. Kimmel, Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen bei Flugmotoren. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 229, sowie die in Fußnote 4 genannte Arbeit.



Eigenschaften hochwertiger Stahlbänder und ihrer Punktschweißverbindungen*).

Von Heinrich Cornelius und Werner Samtleben.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Untersuchung von weichgeglühten, vergüteten und kaltgewalzten 0,3, 0,6 und 1,0 mm dicken Bändern aus praktisch unlegiertem, niedriglegiertem und austenitischem Stahl: Statische Festigkeitswerte in Längs- und Querrichtung sowie nach dem Anlassen, Erichsen-Tiefung, Korrosionsverhalten in Leitungswasser und Kochsalzlösung, Eignung von Anstrichen als Oberflächenschutz, Spannungskorrosionsverhalten, statische Festigkeit und Zugschwell-Zeit- und Dauerfestigkeit von Punktschweißverbindungen.

Im Anschluß an frühere Untersuchungen[1]) über die statischen und dynamischen Festigkeitseigenschaften sowie das Korrosionsverhalten von kaltgewalzten oder vergüteten, 0,3 und 1,0 mm dicken, unlegierten, niedriglegierten und hochlegierten (austenitischen) Stahlbändern mit 96 bis 170 kg/mm² Zugfestigkeit wurden ähnliche Versuche mit weiteren niedriglegierten und austenitischen Stahlbändern durchgeführt, über die hier berichtet werden soll. Bei den neueren Versuchen wurden besonders auch die Eigenschaften von Punktschweißverbindungen der Bänder berücksichtigt.

1. Versuchs-Stahlbänder.

Angaben über die chemische Zusammensetzung, die Vorbehandlung, die Sollfestigkeit und die Abmessungen der untersuchten Stahlbänder enthält Zahlentafel 1. Die Bänder A_1 bis A_4 aus Mangan-Chrom-Vanadin-Vergütungsstahl wurden von verschiedenen Werken im weichgeglühten, kaltgewalzten und vergüteten Zustand mit Sollfestigkeiten zwischen 50 und 130 kg/mm² geliefert. Die kaltgewalzten und vergüteten Bänder B_1 und B_2 aus Mangan- (Silizium-) Stahl liegen im Sollfestigkeitsbereich von 85 bis 110 kg/mm². Die Bänder C aus einem praktisch unlegierten, niedriggekohlten Stahl wurden auf Sollfestigkeiten von 90 bis 130 kg/mm² vergütet. Die austenitischen Bänder D, E und F mit 80 bis 150 kg/mm² Zugfestigkeit sind sämtlich kaltgewalzt. Für die Bänder D und E wurden Mangan-Chrom-Stähle mit kleinen Nickelzusätzen und etwas erhöhten Stickstoffgehalten herangezogen. Für diese Stähle ist der niedrige Chromgehalt von 5,6 bis 6,4% kennzeichnend. Der Stahl der Bänder F hat einen Chromgehalt von 13% und einen Mangangehalt von 19%. — Die Versuchsbänder haben Breiten von 120 bis 300 mm. Die Dicken sind 0,3, 0,6 und 1,0 mm bei den Bändern A_1 bis A_4, B_1, B_2, C und F, 0,5 und 1,0 mm bei den Bändern D und E. — Die Bänder wurden blank und mit glatter Oberfläche geliefert. Lediglich die weichgeglühten Bänder A_2 hatten eine schwarze, teilweise angerostete Oberfläche.

Alle Versuchsbänder wurden eingehend metallographisch untersucht. Ihre metallurgische Reinheit war durchweg befriedigend. Die in Zahlentafel 1 als weichgeglüht bzw. weichgeglüht und kaltgewalzt bezeichneten Bänder hatten ein Gefüge mit körnigem Zementit. Die vergüteten Bänder A_3, A_4 und B_2 hatten ein Vergütungsgefüge ohne oder mit nur kleinen Ferritresten. Das Gefüge der vergüteten Bänder C enthielt dagegen größere Mengen Ferrit. — Für das Gefüge der austenitischen Bänder D und E in der unteren und oberen Festigkeitsstufe sind Bild 1 und 2 kennzeichnend. Ähnliche, noch stärker mit Gleitebenen durchsetzte Gefüge

*) E 21 13, J 31 25.

[1]) H. Cornelius, Luftf.-Forschg.-Bd. 20 (1943), Lfg. 1, S. 1/15; vgl. Stahl u. Eisen Bd. 63 (1943), S. 338/40.

Zahlentafel 1.

Chemische Zusammensetzung, Vorbehandlung, Sollfestigkeit und Abmessungen der untersuchten Stahlbänder.

Stahlbezeichnung	Lieferwerk	Chemische Zusammensetzung C %	Si %	Mn %	Cr %	Ni %	Mo %	V %	Festigkeit[1]) σ B kg/mm²	Behandlungszustand[2])	Bandbreite[3]) mm
A_1	O	0,25	0,41	1,10	0,69	n. b.	n. b.	0,12	50 — 60	weichgeglüht	150
									85 — 100	weichgeglüht und kaltgewalzt	
A_2	S	0,24	0,51	1,14	0,72	»	»	0,13	50 — 60	weichgeglüht	250
									85 — 100	weichgeglüht und kaltgewalzt	
A_3	P	0,24	0,54	1,13	0,64	»	0,09	0,11	50 — 60	weichgeglüht	145
									85 — 110	vergütet	
A_4	R	0,26	0,36	1,22	0,68	»	n. b.	0,11	110 — 130	vergütet (ölschlußgehärtet)	
B_1	O	0,14	0,60	2,26	n. b.	»	»	n. b.	90 — 120	vergütet	
B_2	R	0,15	0,63	2,45	0,02	»	»	»	85 — 100	weichgeglüht und kaltgewalzt	150
C	P	0,18	0,51	1,07	0,20	0,03	0,05	»	100 — 110	vergütet	150
D	Q	0,18	1,57	16,4	6,35	0,49	Sp.	»	90	vergütet	150
									110 — 130	vergütet	120
E	Q	0,19	1,09	17,8	5,58	1,71	Sp.	»	100 — 110	kaltgewalzt	150
									140	kaltgewalzt	300
F	R	0,14	0,95	19,0	13,0	0,17	Sp.	»	80 — 100	kaltgewalzt	
									140	kaltgewalzt	300
									110 — 120	kaltgewalzt	
									130 — 150	kaltgewalzt	150

[1]) Nach Angabe der Lieferwerke.
[2]) Nach Angabe der Lieferwerke und nach Gefügeuntersuchungen.
[3]) A_1 bis A_4, B_1, B_2, C und F mit 0.3, 0,6 und 1,0 mm Dicke, D und E mit 0,5 und 1,0 mm Dicke.

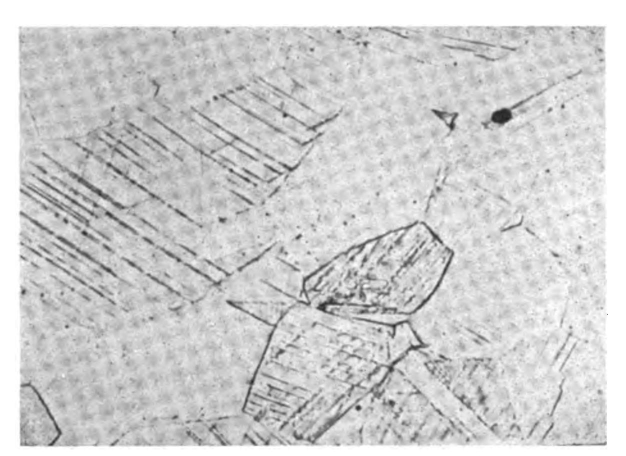


Bild 1. Untere Festigkeitsstufe (80 bis 110 kg/mm²).

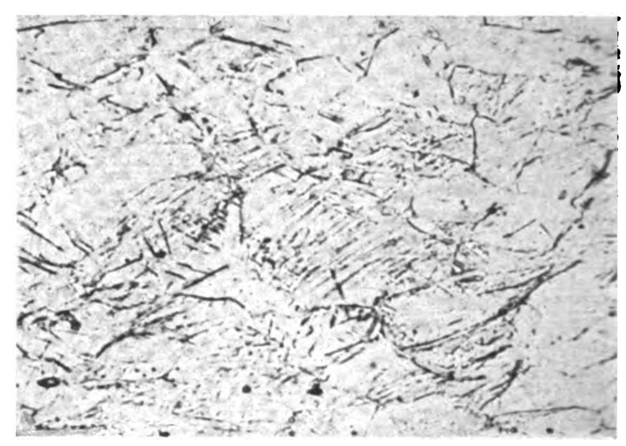


Bild 2. Obere Festigkeitsstufe (140 kg/mm²).

Bild 1 und 2. Gefüge der austenitischen Bänder *D* und *E*. Vergr. 500f.

hatten auch die Bänder aus dem Chrom-Mangan-Stahl *F*. Die austenitischen Versuchsbänder hatten sämtlich eine unter etwa 300 Gauß liegende magnetische Sättigung, waren also praktisch unmagnetisch.

2. Versuchsergebnisse

a) Statische Festigkeitswerte und Erichsen-Tiefung.

Aus jedem Band wurden je zwei Zerreißstäbe (DVM-Prüfverfahren A 114) längs und quer zur Walzrichtung geprüft. Die Meßlänge betrug 45, 35, 30 und 20 mm für die Bänder mit 1,0, 0,6, 0,5 und 0,3 mm Dicke. Ermittelt wurden die $\sigma_{0.02}$- und $\sigma_{0.2}$-Grenze, die Zugfestigkeit (σ_B) und die Bruchdehnung (δ_{10}) der Bänder im Lieferzustand. Es ist darauf hinzuweisen, daß der Bestimmung der $\sigma_{0.02}$-Grenze besonders bei den dünneren Bändern eine erhebliche Unsicherheit anhaftet. — Der Tiefungsversuch nach Erichsen wurde mit der 20 mm Kugel (DVM-Prüfverfahren A 101) durchgeführt.

Die Ergebnisse der Zerreißversuche waren für die in Längs- und Querrichtung entnommenen Stäbe meist nur wenig verschieden. Im allgemeinen wurden in der Querrichtung höhere Streckgrenzen und Zugfestigkeiten bei entsprechend kleineren Werten der Dehnung als in Längsrichtung festgestellt. Die Abweichungen der Längs- oder Querfestigkeitswerte waren innerhalb eines Bandes nur geringfügig. Dagegen traten zwischen verschieden dicken Bändern gleicher Sollfestigkeit erhebliche Unterschiede auf.

In Bild 3 sind die Elastizitätsgrenze, die Streckgrenze, das Streckgrenzenverhältnis und die Bruchdehnung von Längs- und Querproben sowie die Erichsen-Tiefung der 1 mm dicken Versuchsbänder in Abhängigkeit von ihrer Zugfestigkeit aufgetragen. Entsprechende Darstellungen enthalten Bild 4 und 5 für die 0,6 (0,5) und 0,3 mm dicken Bänder. Bild 3 bis 5 ist u. a. folgendes zu entnehmen: Die verschieden vorbehandelten Bänder aus den niedriglegierten Stählen *A*, *B* und *C* (I) haben — bei gleicher Zugfestigkeit — eine höhere $\sigma_{0.02}$- und $\sigma_{0.2}$-Grenze als die kaltgewalzten, austenitischen Bänder *D*, *E* und *F* (II). Eine Ausnahme von dieser Regel machen hinsichtlich der Streckgrenze die vergüteten Bänder aus Stahl *C*. Der beträchtliche Ferritgehalt im Vergütungsgefüge dieser Bänder ist dafür verantwortlich zu machen, daß die Streckgrenze besonders bei 1,0 und 0,3 mm dicken Bändern ähnlich tief liegt wie bei den austenitischen Bändern. Entsprechend der Streckgrenze ist auch das **Streckgrenzenverhältnis** der niedriglegierten höher als das der austenitischen Bänder. Eine Ausnahmestellung nimmt wieder der unvollständig vergütete Stahl *C* ein. Die kaltgewalzten, niedriglegierten Bänder neigen zu einem etwas höheren

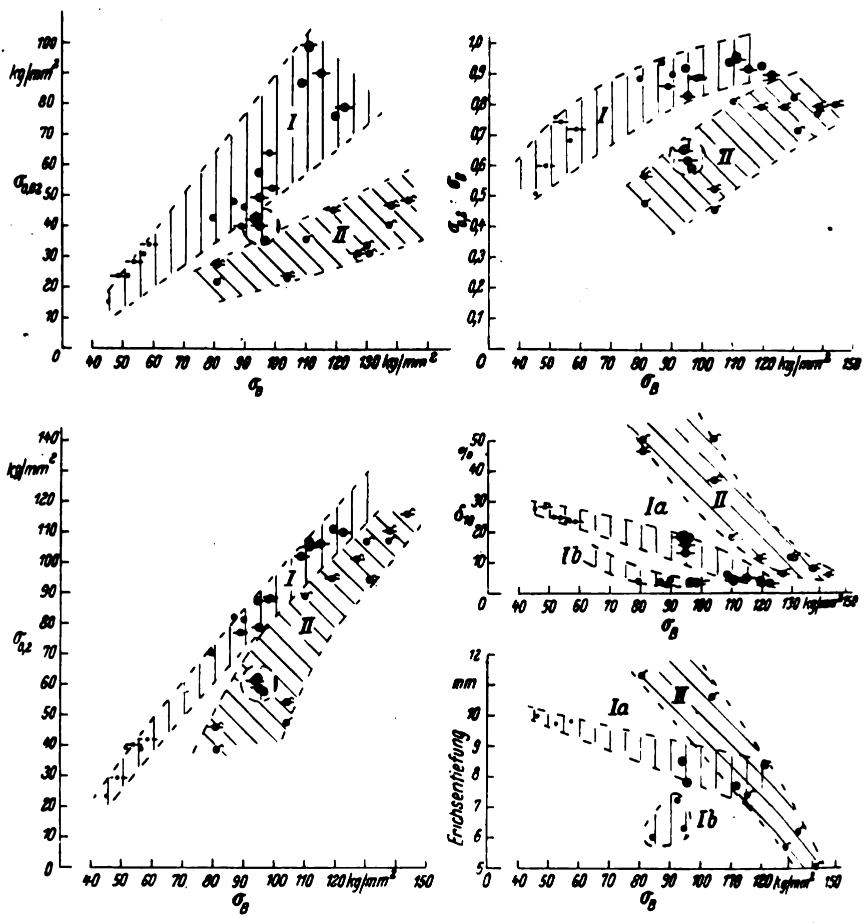


Bild 3. Elastizitätsgrenze, Streckgrenze, Streckgrenzenverhältnis, Bruchdehnung und Erichsen-Tiefung der 1-mm-Stahlbänder in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit.

● Stahl A, × Stahl B, △ Stahl C, ◻ Stahl D, ⌒ Stahl E, ⌒ Stahl F

zusätzliche Zeichen für den Behandlungszustand: (ohne Kreis) weichgeglüht, ○ + kaltgewalzt, ◎ vergütet

Die Werte sind Mittel aus 2 und mehr Werten.

Der Querstrich (—·—) kennzeichnet die Querwerte.

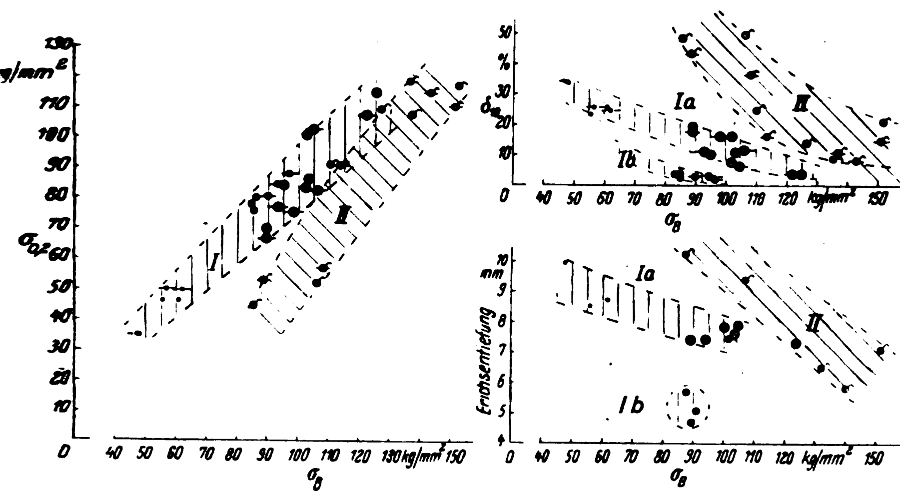


Bild 4. Elastizitätsgrenze, Streckgrenze, Streckgrenzenverhältnis Bruchdehnung und Erichsen-Tiefung der 0,6 (0,5)-mm-Stahlbänder in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit. Zeichenerklärung siehe Bild 3.

Bild 5 (unten). Elastizitätsgrenze, Streckgrenze, Streckgrenzenverhältnis, Bruchdehnung und Erichsen-Tiefung der 0,3-mm-Stahlbänder in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit. Zeichenerklärung siehe Bild 3.

Streckgrenzenverhältnis als die entsprechenden vergüteten Bänder. Eine schärfere Differenzierung der verschieden vorbehandelten, unlegierten Stähle ergibt die Beurteilung nach der **Bruchdehnung**. Die vergüteten Bänder (Ia) haben — stets bei gleicher Zugfestigkeit verglichen — eine bedeutend größere Bruchdehnung als die kaltgewalzten, niedriglegierten Bänder (Ib). Die Bruchdehnung der kaltgewalzten, austenitischen Bänder (II) übertrifft andererseits die der vergüteten niedriglegierten Bänder, und zwar mit fallender Zugfestigkeit in steigendem Maße. Ein ähnliches Verhalten wie die Bruchdehnung zeigt die **Erichsen-Tiefung**. Die kleinsten Tiefungswerte haben eindeutig die kaltgewalzten, niedriglegierten Bänder, die größten die (kaltgewalzten) austenitischen Bänder. Die Tiefung der vergüteten niedriglegierten Bänder reicht zum Teil an die der austenitischen Bänder heran.

Die früheren Untersuchungen an hochwertigen Stahlbändern[1]) haben u. a. gezeigt, daß für hochfeste Bänder mit besonderen Ansprüchen an die spanlose Verformbarkeit austenitische Stähle geeignet sind. Unlegierte und niedriglegierte Bänder haben eine größere Bruchdehnung, wenn die hohe Festigkeit vorwiegend durch Warmbehandlung erzielt, als wenn eine erhebliche Kaltverfestigung angewandt worden war. Die vorliegenden Versuche geben eine durch die Prüfung der Erichsentiefung verstärkte Bestätigung der älteren Versuche. Insbesondere zeigen die neuen Versuche eindeutig, daß für niedriglegierte Bänder mit hohen Ansprüchen an die spanlose Formbarkeit die Warmbehandlung zur Festigkeitssteigerung den unbedingten Vorzug vor der Kaltverfestigung verdient. Einen ergänzenden Beitrag zu diesem Punkt liefert für **Bleche**[2]) aus Stahl *B* Bild 6, aus dem auch hervorgeht, daß die Bruchdehnung und die Tiefung nicht in gleicher Weise auf die Vorbehandlung der Bleche anzusprechen brauchen. Bei gleicher Zugfestigkeit liegt nach

²) Für die Beschaffung der Bleche danken wir Herrn **Hagemeier** (RDLI) verbindlich.

Bild 6 die kleinste Erichsentiefung und die größte Streckgrenze bei den normalgeglühten und kaltgewalzten Bändern vor. Die größte Tiefung bei hoher Streckgrenze haben die vergüteten Bleche. Mittlere Tiefungswerte bei niedrigen Streckgrenzen treten nach Normalisieren und Anlassen auf. Zur Erzielung einer guten Tiefung niedriglegierter Bleche oder Bänder hoher Festigkeit ist also nach Bild 6 nicht nur ganz allgemein eine festigkeitssteigernde Warmbehandlung anzuwenden, sondern eine Vergütung, innerhalb derer das Abkühlen von einer Temperatur oberhalb A_{c3} rasch erfolgt, d. h. es muß eine regelrechte Abschreckhärtung vor dem Anlassen durchgeführt werden. (Bei entsprechend legierten Stählen kann diese Abschreckhärtung selbstverständlich schon bei der Abkühlung in Luft eintreten).

b) Statische Festigkeitswerte nach dem Anlassen bei niedrigen Temperaturen.

Es ist bekannt und auch bei den früheren Versuchen gezeigt worden, daß besonders die niedrige Elastizitätsgrenze kaltverfestigter Stahlbänder durch Anlassen auf Temperaturen von etwa 200 bis 300° in einem mit dem Kaltverfestigungsgrade steigenden Maße erhöht werden kann, ohne daß die Streckgrenze, Zugfestigkeit und Bruchdehnung nennenswert beeinträchtigt werden. Auf die Anlaßversuche mit den Versuchsbändern braucht hier daher nicht mehr ausführlich eingegangen zu werden. Die weichgeglühten und kaltgewalzten Bänder aus dem Mangan-Chrom-Vanadin-Stahl A_1 erfahren gemäß Bild 7 beim Anlassen bis 350° einen starken Anstieg der Elastizitätsgrenze sowie eine schwache Zunahme der Streckgrenze und des Streckgrenzenverhältnisses. Die Zugfestigkeit und die Bruchdehnung bleiben dabei fast unverändert. Ganz ähnlich verhalten sich nach Bild 8 auch die weichgeglühten und kaltgewalzten Bänder aus dem Mangan-Stahl B_1. Die vergüteten Bänder aus dem fast unlegierten Stahl C haben, wie die Zunahme der Elastizitätsgrenze beim Anlassen zeigt, nach dem Vergüten noch einen stärkeren Kaltstich

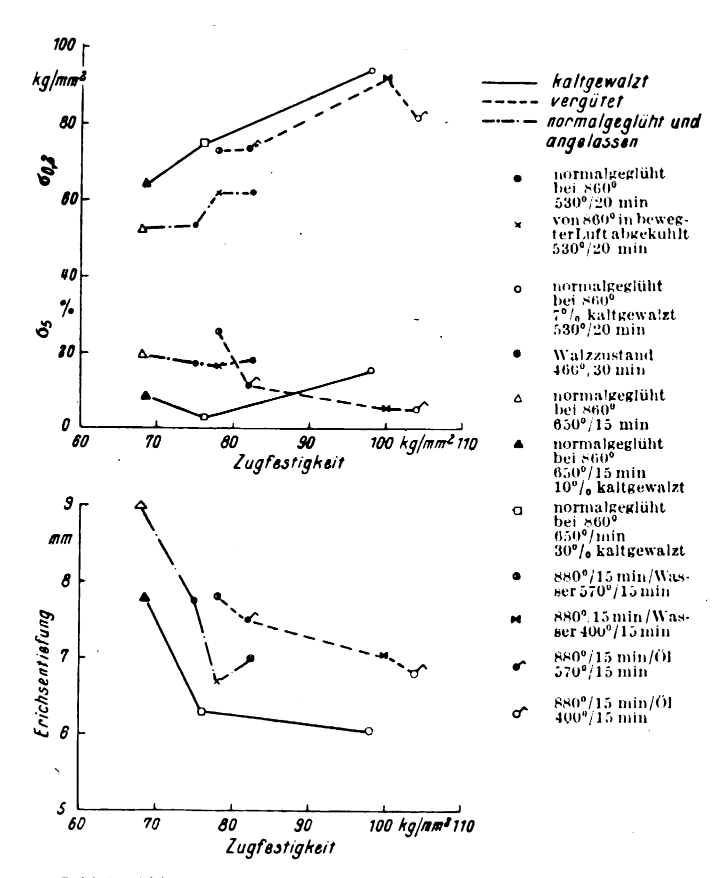


Bild 6. Abhängigkeit der Streckgrenze, Bruchdehnung und Erichsen-Tiefung von der Zugfestigkeit verschieden vorbehandelter Bleche aus Stahl B. Mittelwerte aus zwei Versuchen.

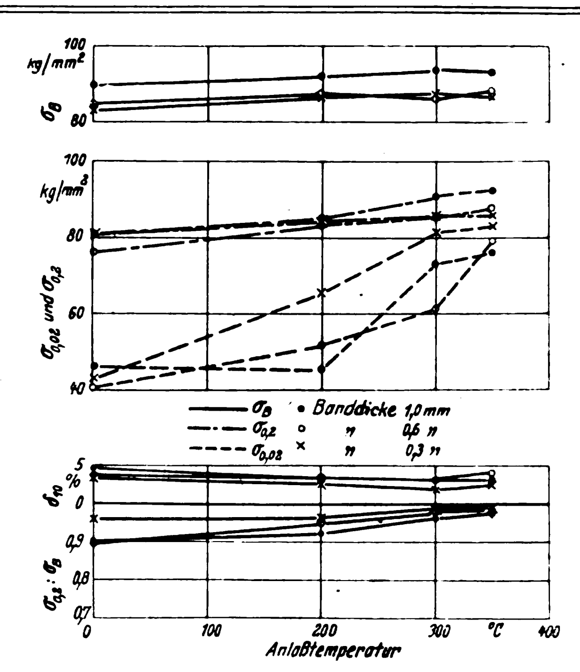


Bild 7. Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der weichgeglühten und kaltgewalzten Bänder aus Stahl A_1. Anlaßdauer 1 Stunde.

erhalten. Die Verbesserung der Elastizitätsgrenze durch das Anlassen würde bei diesen Bändern zweckmäßig nicht voll, nämlich nur bis zu dem bei 200° erreichten Betrage auszunutzen sein, da höhere Anlaßtemperaturen nach Bild 9 bereits die Zugfestigkeit und auch die im Ausgangszustand hohe Bruchdehnung etwas senken. Es zeigt sich also, daß die günstigste Anlaßbehandlung kaltgewalzter Bänder von der Stahlart bzw. der Herstellungsart der Bänder abhängt. Nach den früher durchgeführten Versuchen[1]) kann die Zunahme der Elastizitätsgrenze auch bei kaltgewalzten austenitischen Bändern erheblich sein. Die größte Änderung wurde bereits bei 200° festgestellt. Die hier behandelten austenitischen Bänder wurden in der unteren Festigkeitsstufe (bei 110 kg/mm² Zugfestigkeit) durch Anlassen bis 350° in ihren Festigkeitseigenschaften nur wenig beeinflußt, wie Bild 10 am Beispiel der Bänder mit rd. 110 kg/mm² Zugfestigkeit aus Stahl F zeigt. Die stärker kaltverfestigten Bänder der oberen Festigkeitsstufe aus den drei austenitischen Stählen D, E und F zeigten jedoch wie die früher untersuchten Stähle eine Zunahme der Elastizitäts- und Streckgrenze nach dem Anlassen bei 200°. Für das Verhalten der drei Stähle ist Bild 11 kennzeichnend, das sich auf die härteren Bänder aus Stahl D bezieht. Als endgültig darf man nach den früheren und den vorliegenden Versuchen die Feststellung ansehen, daß die Anlaßtemperaturen für die Erzielung der optimalen Elastizitätsgrenze der unlegierten und niedriglegierten, kaltgewalzten Bänder bei etwa 300°, die der austenitischen Stahlbänder dagegen bei 200° liegen, wenn man eine Anlaßdauer von 1 Stunde wählt.

c) Korrosionsverhalten.

Bei den früheren Versuchen[1]) konnte beim Wechseltauchversuch mit Leitungswasser und 3proz. Kochsalzlösung kein Einfluß der Vorbehandlung der Stahlbänder auf ihr Korrosionsverhalten festgestellt werden. Zu dem gleichen Ergebnis führten auch Spannungskorrosionsversuche mit den gleichen Angriffsmitteln. Bewitterungsversuche ließen dagegen im Falle der unlegierten Bänder einen ungünstigen Einfluß des Kaltwalzens erkennen. Zur Nachprüfung dieser Ergebnisse wurden an den hier behandelten Bändern Wechseltauchversuche und Spannungskorrosionsversuche in Leitungswasser und in 3proz. Kochsalzlösung durchgeführt. Im Wechseltauchversuch mit Leitungswasser wurden neben ungeschützten Proben auch mit einem Anstrich (Grund- und Decklack) versehene Proben der niedriglegierten Bänder geprüft. Es wurde der gleiche Anstrich

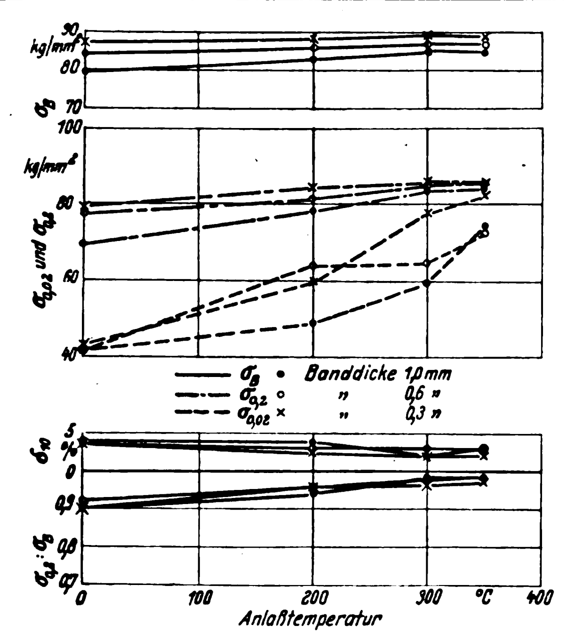


Bild 8. Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der weichgeglühten und kaltgewalzten Bänder aus Stahl B 1. Anlaßdauer 1 Stunde.

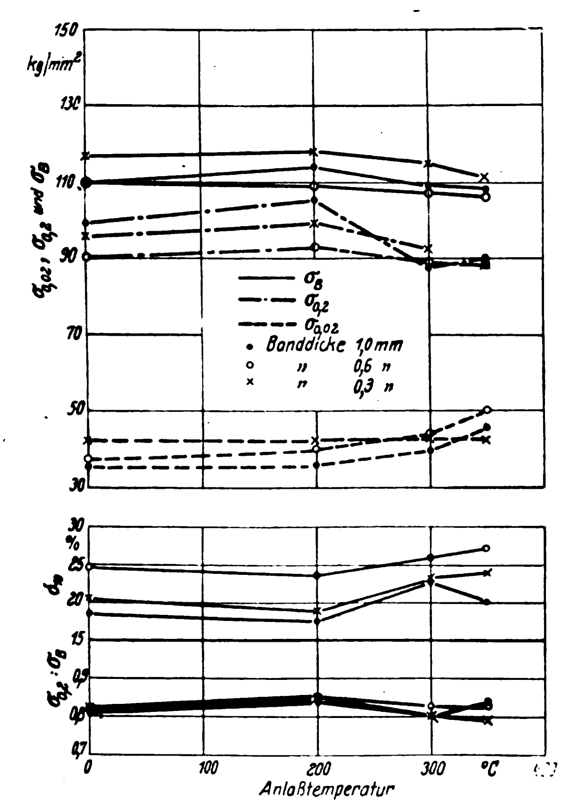


Bild 10. Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der Bänder der unteren Festigkeitsstufe aus Stahl F. Anlaßdauer 1 Stunde

verwendet, wie er sich für Leichtmetall im Flugzeugbau seit Jahren bewährt hat. Der Korrosionsangriff im Wechseltauchversuch wurde an der Änderung der Zugfestigkeit und Bruchdehnung in Abhängigkeit von der Korrosionsdauer verfolgt. Der Spannungskorrosionsversuch wurde mit Schlaufenproben[1]) ebenfalls im Wechseltauchgerät durchgeführt.

Die Ergebnisse der Wechseltauchversuche in Leitungswasser für die weichgeglühten und die weichgeglühten und kaltgewalzten Bänder aus Stahl A_1 vermitteln Bild 12 und 13. Neben der selbstverständlichen Tatsache, daß die Bänder durch Leitungswasser angegriffen werden, geht aus dem Vergleich der beiden Bilder hervor, daß das Ausmaß der Korrosion nicht eindeutig durch das Kaltwalzen beein-

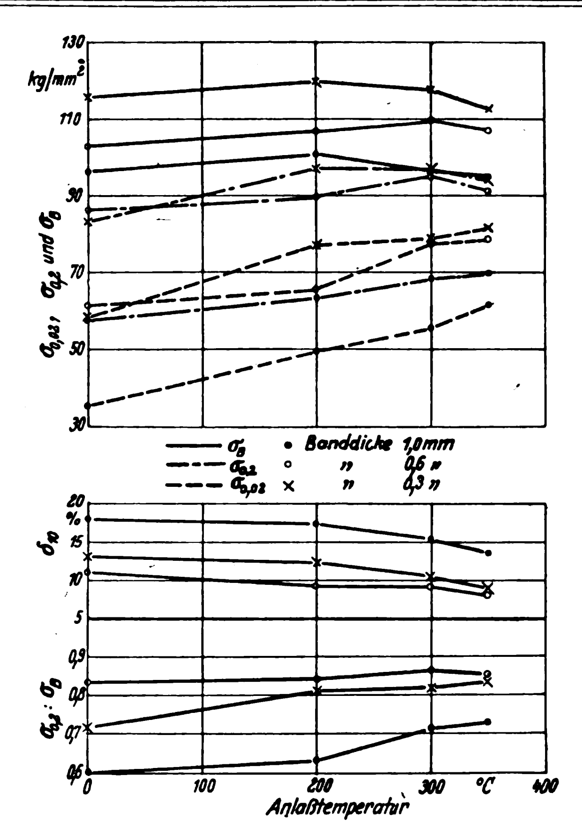


Bild 9. Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der vergüteten und schwach kaltverfestigten Bänder aus Stahl C. Anlaßdauer 1 Stunde.

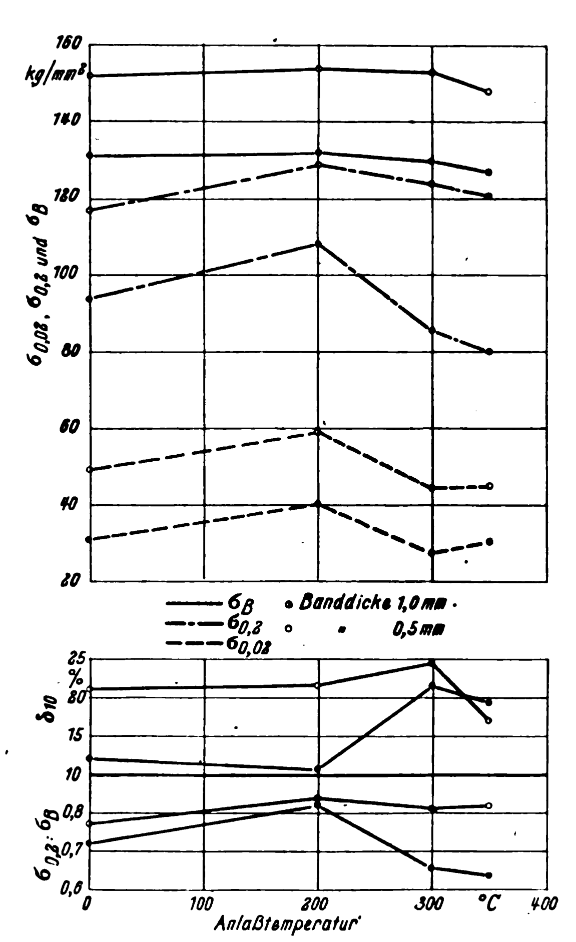


Bild 11. Einfluß des Anlassens auf die Festigkeitseigenschaften der Bänder der höheren Festigkeitsstufe aus Stahl D. Anlaßdauer 1 Std.

flußt wird. Die auf den Ausgangsquerschnitt der Proben bezogenen Festigkeitsabnahmen nach 70 Tagen Korrosionsdauer betragen für die 0,3, 0,6 und 1,0 mm dicken Bänder im weichgeglühten Zustand 15, 32 und 62% der Ausgangsfestigkeit, im kaltgewalzten Zustand 16, 30 und 63%. Die früheren Feststellungen über den praktisch fehlenden Einfluß der Vorbehandlung auf das Korrosionsverhalten (unlegierter) und niedriglegierter Bänder im Wechseltauchversuch mit Leitungswasser werden also durch die vorliegenden Versuche bestätigt.

Aus Bild 13 ist zu entnehmen, daß das für Leichtmetall im Flugzeugbau gebräuchliche Anstrichsystem auch Stahl vollständig vor dem Korrosionsangriff durch Leitungswasser schützt. Diese für den Stahl A_1 getroffene Feststellung gilt nach Bild 14 und 15 auch für die Bänder aus den Stählen B und C.

Die Unterschiede im Korrosionsverhalten der niedriglegierten Bänder aus den Stählen A, B und C in Leitungswasser sind erwartungsgemäß klein und praktisch ohne

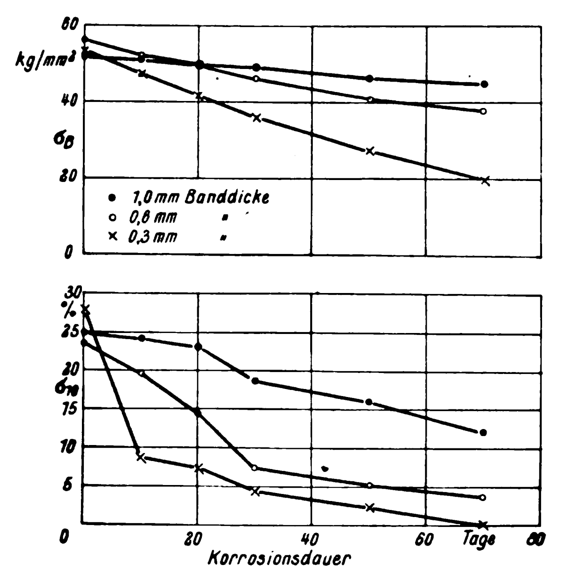


Bild 12. Ergebnisse des Wechseltauchversuchs in Leitungswasser mit den weichgeglühten Bändern aus Stahl A_1. Art des Korrosionsangriffs: gleichmäßige Abtragung.

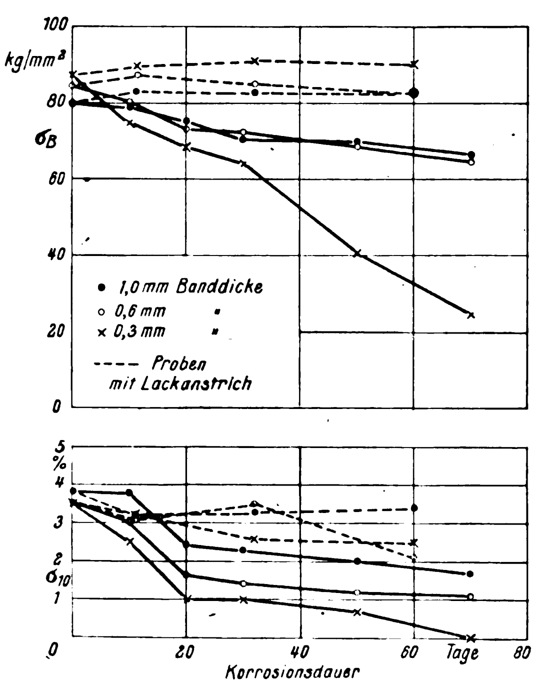


Bild 13. Ergebnisse des Wechseltauchversuchs in Leitungswasser mit den weichgeglühten und kaltgewalzten Bändern aus Stahl A_1. Ungeschützte und mit Anstrich versehene Proben. Art des Korrosionsangriffs: gleichmäßige Abtragung.

Bedeutung. Der Angriff erfolgte in allen Fällen durch gleichmäßige Abtragung. In Kochsalzlösung wurden die niedriglegierten Bänder beim Wechseltauchversuch nicht geprüft.

Ein eindeutiger Einfluß des Kaltwalzgrades auf das Korrosionsverhalten der austenitischen Stähle D, E und F im Wechseltauchversuch mit Kochsalzlösung war in Über-

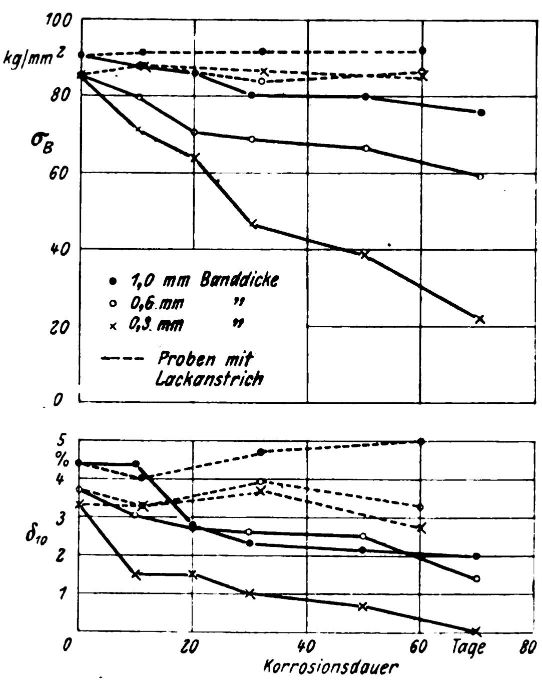


Bild 14. Ergebnisse des Wechseltauchversuchs in Leitungswasser mit den weichgeglühten und kaltgewalzten Bändern aus Stahl B. Ungeschützte und mit Anstrich versehene Proben. Art des Korrosionsangriffs: gleichmäßige Abtragung.

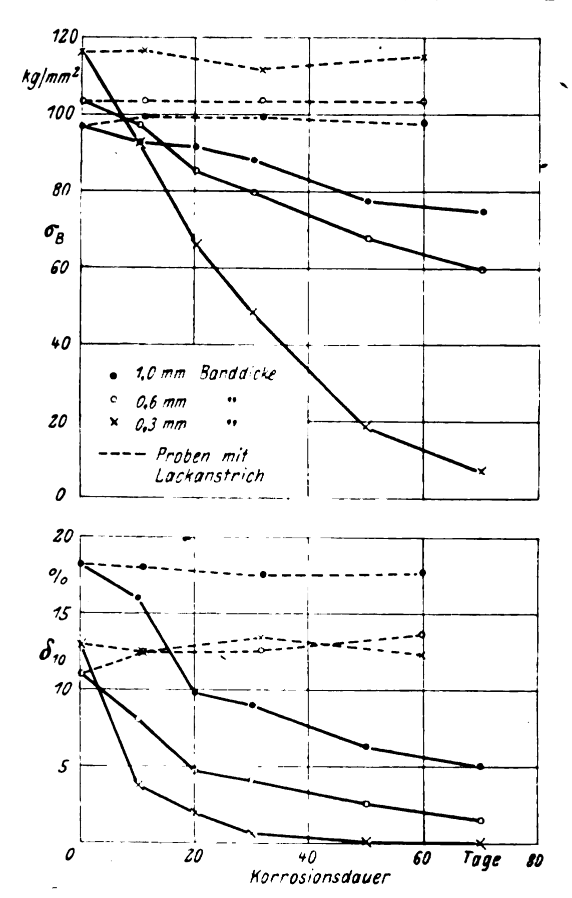


Bild 15. Ergebnisse des Wechseltauchversuchs in Leitungswasser mit den hartvergüteten Bändern aus Stahl C. Ungeschützte und mit Anstrich versehene Proben. Art des Korrosionsangriffs: gleichmäßige Abtragung.



einstimmung mit den älteren Versuchen auch jetzt nicht erkennbar. Der Angriff der Kochsalzlösung auf die austenitischen Bänder tritt nach Bild 16 bis 18 weniger durch die Abnahme der Festigkeit als durch die Dehnungsverminderung infolge Lochfraß in Erscheinung. Nach der Dehnungsabnahme beurteilt, ist die Beständigkeit der drei austenitischen Stähle in 3proz. Kochsalzlösung nur klein, bei den einzelnen Stählen wenig verschieden und vergleichbar mit der Beständigkeit der niedriglegierten Bänder in Leitungswasser. Das beste Verhalten von den austenitischen Stählen zeigt der Stahl F auf Grund seines gegenüber den Stählen *D* und *E* höheren Chromgehaltes.

Hinsichtlich der Spannungskorrosion der niedriglegierten Bänder bestätigen die hier behandelten Versuche die Ergebnisse der früheren Untersuchung. Unabhängig von der Stahlart und der Vorbehandlung (Weichglühen, Vergüten, Kaltwalzen) der Bänder waren diese in Leitungswasser und Kochsalzlösung (Wechseltauchen) unempfindlich gegen Spannungskorrosion. Nach einer Versuchsdauer von 100 Tagen war keine Schlaufenprobe (6 Stück je Band) angerissen oder gebrochen.

Die Spannungskorrosionsempfindlichkeit der austenitischen Bänder wurde nur in 3proz. Kochsalzlösung (Wechseltauchen) geprüft. Die Schlaufen aus den Bändern der unteren Festigkeitsstufe aus den Stählen *D* und *E* blieben

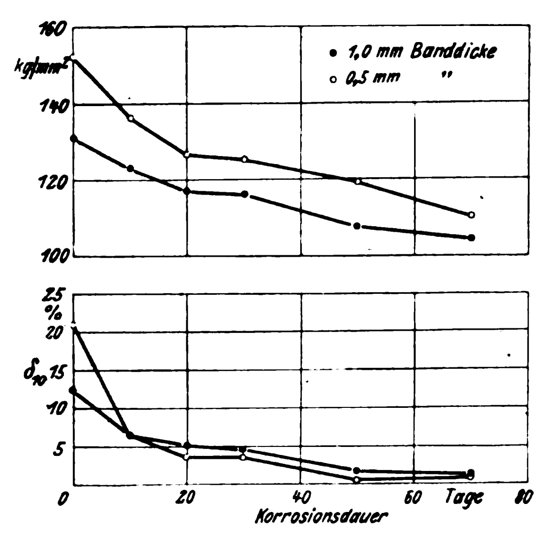


Bild 16. Ergebnisse des Wechseltauchversuchs in 3proz. Kochsalzlösung mit den Bändern der höheren Festigkeitsstufe aus Stahl D. Art des Korrosionsangriffs: Lochfraß.

bis zum Versuchsende nach 100 Tagen ohne Anrisse oder Brüche. In der oberen Festigkeitsstufe versagten die 1,0 bzw. 0,5 mm dicken Schlaufen aus Stahl *D* im Mittel nach 1 bzw. 10, die 1,0 bzw. 0,5 mm dicken Schlaufen aus Stahl *E* nach 14 bzw. 46 Tagen. Bei beiden Stählen zeigt sich also eine Zunahme der Spannungskorrosionsempfindlichkeit mit steigender Kaltverfestigung. Die Bänder aus Stahl *F* hingegen waren sowohl in der unteren wie in der oberen Festigkeitsstufe frei von Spannungskorrosion. Die Spannungskorrosionsempfindlichkeit der austenitischen Stähle in Kochsalzlösung ist demnach sowohl eine Frage der Stahlart wie des Verfestigungsgrades durch Kaltbearbeitung. Die Risse bei den Stählen *D* und *E* verliefen vorzugsweise interkristallin. Eine ganz sichere Entscheidung über den Rißverlauf war in dem verformten Gefüge nicht möglich.

d) Statische und dynamische Festigkeitseigenschaften nach dem Punktschweißen.

Für die Schweißung der Versuchsbänder wurde eine gittergesteuerte Siemens-Schuckert-Punktschweißmaschine mit einem größten Schweißstrom von 25000 A benutzt. Die wassergekühlten, zylindrischen Elektroden mit ebener Stirnfläche hatten 11 mm Dmr. An Hand von Vorversuchen wurde der Elektrodendruck für die hier wiederzugebenden Versuche zu 210 kg, die Schweißzeit zu 10 Perioden (0,2 s) gewählt. Lediglich die 1 mm-Bleche aus Stahl *F* der höheren Festigkeitsstufe wurden mit 12 Perioden geschweißt. Zur Erweiterung des Regelbereichs des Transformators an der unteren Grenze wurden die Perioden beim Schweißen eines Teils der Bänder angeschnitten. Die Netzspannung schwankte erheblich, und zwar zwischen 380 und 400 V, doch wurden alle Proben eines Bandes bei jeweils nahezu gleichbleibender Spannung geschweißt. Es wurden nur Bänder gleicher Stahlart, Vorbehandlung und Dicke untereinander verschweißt. Die überlappenden Flächen wurden geschmirgelt. Da die Bänder eine blanke und glatte Oberfläche hatten, ergab sich jedoch kein Unterschied zwischen der Punktfestigkeit der geschmirgelten und der nur entfetteten Bänder.

Punktschweißverbindungen der in Bild 19 wiedergegebenen Art wurden auf ihre statische Festigkeit bei Scherbeanspruchung geprüft. Die Schweißverbindungen wurden in der in dem Bild angegebenen Art in Proben aufgeteilt. Der Punktabstand war so gewählt worden, daß die Proben bei der Festigkeitsprüfung noch an den Punkten und nicht im vollen Blechquerschnitt brachen. Der für die Bänder verschiedener Dicke gewählte Punktabstand, die Überlappung und der Reihenabstand gehen aus der folgenden Aufstellung hervor:

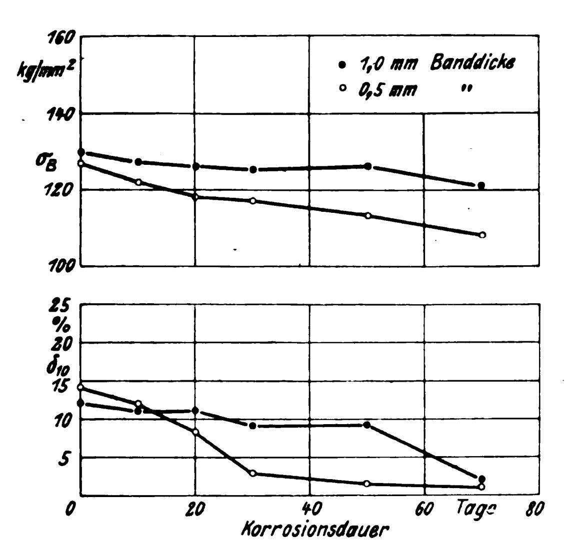


Bild 17. Ergebnisse des Wechseltauchversuchs in 3proz. Kochsalzlösung mit den Bändern der höheren Festigkeitsstufe aus Stahl E. Art des Korrosionsangriffs: Lochfraß.

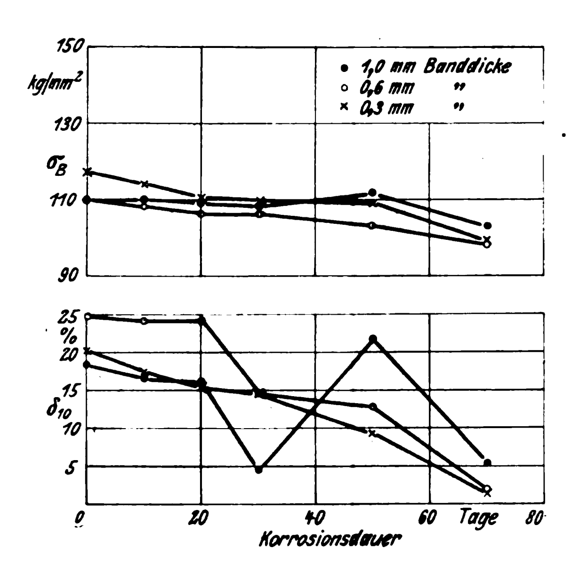
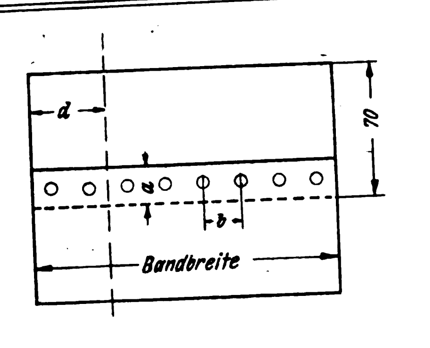


Bild 18. Ergebnisse des Wechseltauchversuches in 3proz. Kochsalzlösung mit den Bändern der höheren Festigkeitsstufe aus Stahl F. Art des Korrosionsangriffs: vereinzelter und schwacher Lochfraß.





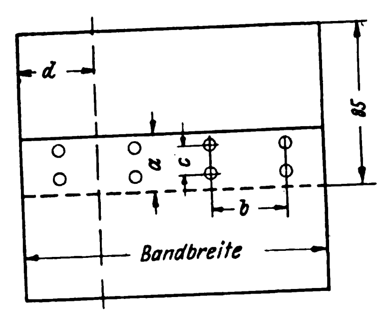


Bild 19. Einreihige und zweireihige Punktschweißverbindung.
a = Überlappung, c = Reihenabstand,
b = Punktabstand, d = Probenbreite.

Einreihige Verbindung

Banddicke mm	Überlappung mm	Punktabstand mm
1,0	20	20 bis 25
0,6	20	15 bis 20
0,3	20	15 bis 20

Zweireihige Verbindung

Banddicke mm	Überlappung mm	Punktabstand mm	Reihenabstand mm
1,0	35	40 bis 50	20
0,6	30	30 bis 40	15
0,3	25	30 bis 40	15

Die Punktabstände schwankten je nach Werkstoffart und Festigkeit in den angegebenen Grenzen.

Die bei der Herstellung der Schweißverbindungen zuerst geschweißten Punkte wurden hinsichtlich ihrer Festigkeit verglichen mit den anschließend geschweißten Punkten. Es zeigte sich kein über die üblichen Streuungen hinausgehender Unterschied.

Die aus 10 bis 30 Einzelversuchen erhaltenen Grenz- und Mittelwerte der Punktfestigkeiten der verschiedenen Versuchsbänder sind neben einigen Angaben über die Schweißbedingungen, soweit sie im einzelnen noch nicht erwähnt worden sind, in Zahlentafel 2 wiedergegeben. Die Punktdurchmesser waren etwa 4,0, 5,0 bis 6,0 und 7,0 bis 8,0 mm bei den Bändern von 0,3, 0,6 (0,5) und 1,0 mm Dicke. In den 1-mm-Bändern aus Stahl *F* betrug der Punktdurchmesser nur etwa 6,0 bis 7,0 mm. Ein eindeutiger Unterschied zwischen den Punktfestigkeiten der einreihigen und zweireihigen Verbindungen ist nicht erkennbar. Die Streuung der Punktfestigkeiten um ihren Mittelwert ist bei den einreihigen Verbindungen durchweg beträchtlich und erreicht häufig, besonders bei den dünnen Bändern, mehr als ± 10%. So große Streuungen treten bei den zweireihigen Verbindungen nur vereinzelt auf. Die gegenüber den einreihigen Verbindungen größere Gleichmäßigkeit der Punktfestigkeiten der zweireihigen Verbindungen wird zum großen Teil darauf zurückzuführen sein, daß die letzten beim Zug- (Scher-) Versuch weniger auf Abheben der Überlappung (Kopfzug) beansprucht werden.

Wie aus Zahlentafel 2 für die einreihigen und zweireihigen sowie aus Bild 20 für die einreihigen Schweißverbindungen hervorgeht, nimmt die Punktfestigkeit bei jeder Banddicke mit der Bandzugfestigkeit zu. Diese Abhängigkeit erklärt sich daraus, daß die Punkte nach Zahlentafel 2 — bis auf eine Ausnahme — im Zugversuch nicht abgeschert, sondern aus dem Blech herausgerissen wurden, und daß weiterhin während der kurzen Schweißzeit keine bedeutende Anlaßwirkung bzw. Erholung der Festigkeit von der Kaltverformung in der Umgebung der Punkte in den vergüteten bzw. kaltverfestigten Bändern eintritt. Ein Abscheren der Punkte trat im Zugversuch nur bei den 1 mm dicken Bändern aus dem austenitischen Stahl *F* ein. In diesem Falle ist daher keine Abhängigkeit der Punktfestigkeit von der Bandfestig-

Zahlentafel 2. Punktfestigkeiten der geschweißten Bandstähle.

Bänder aus Stahl	Zugfestigkeiten	Banddicke	Zahl der Perioden	Trafostufe	Primärspannung	Punktfestigkeit einreihige Verbindung von	bis	Mittel	zweireihige Verbindung von	bis	Mittel	Bruchart
	kg/mm²	mm			Volt	kg/Punkt			kg/Punkt			
A_3	56,0	0,3	10[1]	1/4 ; 2/1	390^{+2}	190	235	209	198	218	209	A[3]
	60,8	0,6	10[1]	3/1 ; 3/2	390^{-5}	495	580	545	480	510	500	
	56,8	1,0	10[2]	2/4 ; 3/1	386^{+4}	1000	1085	1050	950	980	968	
A_2	87,7	0,3	10[1]	3/2 ; 3/3	$385^{\pm 5}$	247	306	280	246	278	263	A
	85,8	0,6	10[1]	3/3 ; 3/4	390^{+2}	600	685	665	575	658	624	
·	86,8	1,0	10[2]	2/4	$382^{\pm 2}$	1255	1425	1330	1370	1410	1395	
A_1	90,0	1,0	10[2]	3/3	390	1480	1540	1510	—	—	—	A
A_3	94,6	1,0	10[2]	3/2	400	1590	1740	1650	—	—	—	A
A_3	115	0,3	10[1]	4/1	395^{+4}_{-5}	300	470	402	335	420	370	A
	125	0,6	10[1]	4/3	$385^{\pm 2}$	740	960	860	810	950	885	
	120	1,0	10[2]	4/1	$385^{\pm 3}$	2030	2200	2120	1910	2065	2010	
B_1	87,4	0,3	10[1]	3/3	395^{+3}	255	290	260	200	265	244	A
	87,3	0,6	10[2]	3/1 ; 3/3	400	790	870	825	700	750	719	
	79,6	1,0	10[2]	3/3	400	1360	1560	1446	1400	1560	1452	
B_2	109	0,3	10[2]	2/4	$385^{\pm 3}$	290	375	330	320	362	340	A
	102	0,6	10[2]	2/4	395^{+2}	800	1020	920	785	945	890	
	111	1,0	10[2]	2/4	$385^{\pm 3}$	1740	1970	1880	1720	1900	1810	
C	96,5	1,0	10[2]	2/4	$385^{\pm 3}$	1240	1565	1454	1375	1440	1418	A
F	117	0,3	10[1]	2/2 ; 3/2	380^{+2}	265	330	312	285	375	335	A
	110	0,6	10[1]	2/2	380^{+2}	550	735	630	585	750	670	A
	110	1,0	10[1]	2/1	390	900	1200	1035	985	1190	1083	S[4]
	141	0,3	10[1]	2/3	390	270	350	318	280	323	308	A
	136	0,6	10[1]	2/3	395^{+5}	610	725	663	650	700	675	A
	138	1,0	12[1]	2/3 ; 3/2	388^{-3}	1090	1215	1160	1055	1230	1140	S

[1]) Perioden angeschnitten. [2]) Volle Perioden. [3]) A = Herausreißen der Punkte aus dem Blech. [4]) S = Punkte abgeschert.

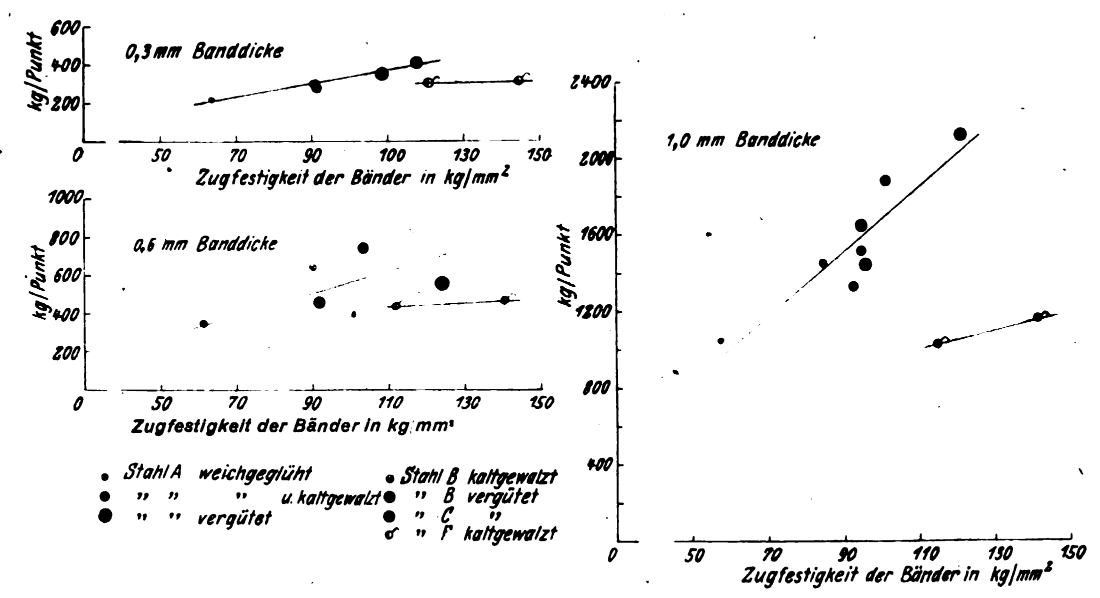


Bild 20. Mittlere Punktfestigkeit der einreihigen Verbindungen in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit der Bänder.

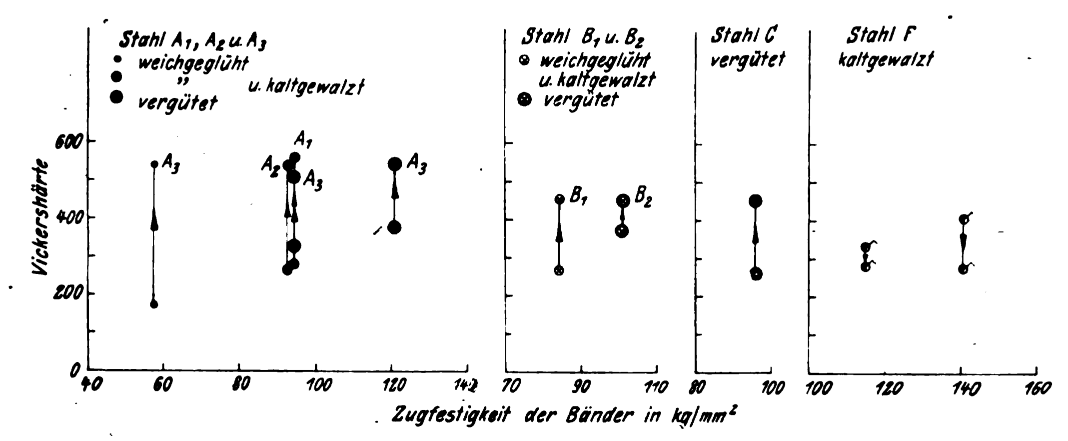


Bild 21. Höchsthärten der Schweißlinsen in den Versuchsbändern. (Pfeil gibt die Richtung der Härteänderung an.)

keit zu erwarten, denn die nicht härtefähige Schweißlinse besteht unabhängig von der Bandfestigkeit stets aus dem weichen austenitischen Stahl im Gußzustand. Tritt bei den austenitischen Bändern mit hoher Festigkeit Abscheren des Punktes ein, so liegt sinngemäß die Punktfestigkeit niedriger als bei den schwachlegierten Bändern entsprechend hoher Festigkeit, bei denen der gehärtete Punkt aus dem Blech herausgerissen wird. Um die Festigkeit kaltgewalzter Bänder aus austenitischen Stählen im punktgeschweißten Zustand möglichst weitgehend auszunutzen, müßte also ein kleiner Punktabstand beziehungsweise ein großer Punktdurchmesser angestrebt werden. Allerdings zeigen die 0,3 und 0,6 mm dicken Bänder aus Stahl F, bei denen diese Voraussetzungen zutreffen und die Punkte nicht abgeschert, sondern aus dem Blech herausgerissen wurden, auch keine nennenswerte Abhängigkeit der Punktfestigkeit von der Blechfestigkeit. Dies kann dahin ausgelegt werden, daß die Umgebung des Punktes bei den austenitischen Bändern wegen ihrer kleineren Wärmeleitfähigkeit stärker dem durch die Schweißwärme bedingten Erholungseinfluß unterliegt als bei den niedriglegierten, kaltverfestigten Bändern.

Die Höchsthärte und das Gefüge der Schweißlinsen sind bei gegebenem Bandwerkstoff und 1 mm Banddicke unabhängig von der Vorbehandlung und Festigkeit der Bänder[3]), wie Bild 21 zeigt. Die Bänder aus den Stäben A_1 bis A_3 erreichen mit 510 bis 560 Vickerseinheiten bedeutende Höchsthärten der Schweißlinsen. Dies ist insofern von Nachteil, als derart harte Punkte unter Zwangsverformungen die zu Beanspruchungen auf Kopfzug führen, leicht versagen können. Erheblich kleinere Härten, entsprechend rd. 450 Vickerseinheiten, weisen die Schweißlinsen in den Bändern aus den Stählen B_1, B_2 und C auf. Die kaltverfestigten, wegen ihres austenitischen Charakters nicht härtbaren Bänder aus Stahl F haben in der Schweißlinse infolge der Beseitigung der Kaltverfestigung durch das Aufschmelzen beim Schweißen eine — gegenüber dem Grundwerkstoff — kleinere, rd. 275 Vickerseinheiten betragende Härte.

Aus dem Gefüge der Schweißlinsen der niedriglegierten Bänder ist kein sicherer Schluß auf ihre Härte möglich. Ein Vergleich von Bild 22 bis 24 ergibt lediglich, daß die Schweißlinsen der Stähle A eine höhere Härte haben als die der Stähle B und C. Die Schweißlinsen des Stahles F haben ein strahlig-dendritisches Gußgefüge, Bild 25. Lunker in den Schweißlinsen, die sich nicht immer vermeiden lassen, beeinflussen die statische Punktfestigkeit nicht, was auch schon daraus hervorgeht, daß die Punkte beim Zugversuch meist aus den Blechen herausgerissen wurden.

Über die Dauerhaltbarkeit von Punktschweißverbindungen aus Stahl liegen im Schrifttum erst wenige Untersuchungen vor, die vorwiegend mit Biegewechselbeanspruchung durchgeführt worden sind. Punktschweißverbindungen aus den hier behandelten Stahlbändern wurden auf ihre Dauerhaltbarkeit bei Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$) auf einem 2 t Pulser (Bauart Schenk-Erlinger) geprüft. Die Lastwechselfrequenz betrug 2800/min, die Grenzlastwechselzahl $5 \cdot 10^6$. Durchweg wurde die zweireihig geschweißte Probe, für einige Vergleichsversuche auch die Probe mit einer Punktreihe verwendet (Bild 26). Die Schweißbedingungen waren die gleichen wie bei den Proben für die sta-

[3]) Vgl. hierzu auch: H. Cornelius, Gefügeausbildung und Härte nach dem Punktschweißen eines Chrom-Vanadin-Stahles. Elektroschweißung demnächst.

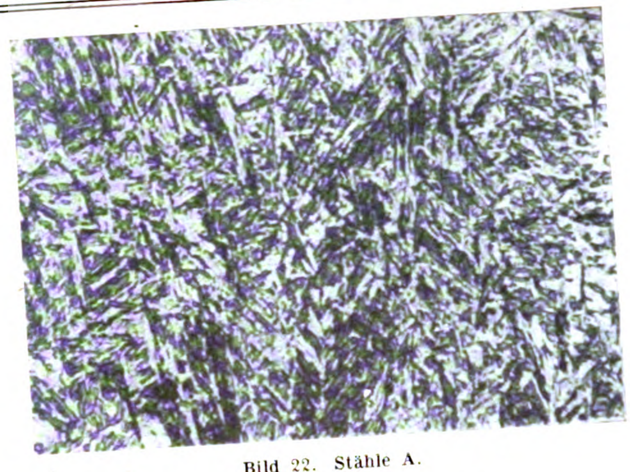


Bild 22. Stähle A.

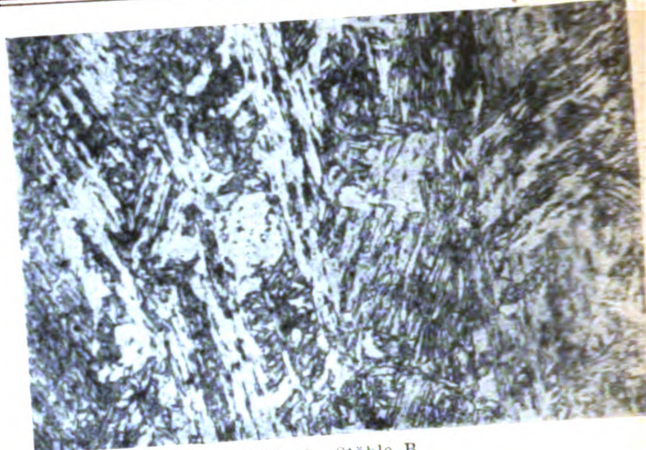


Bild 23. Stähle B.

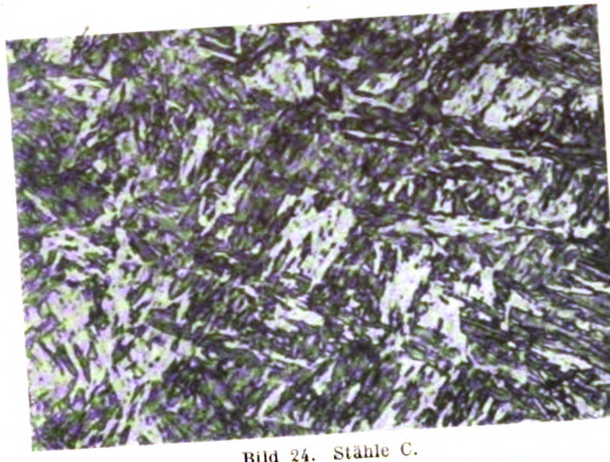


Bild 24. Stähle C.

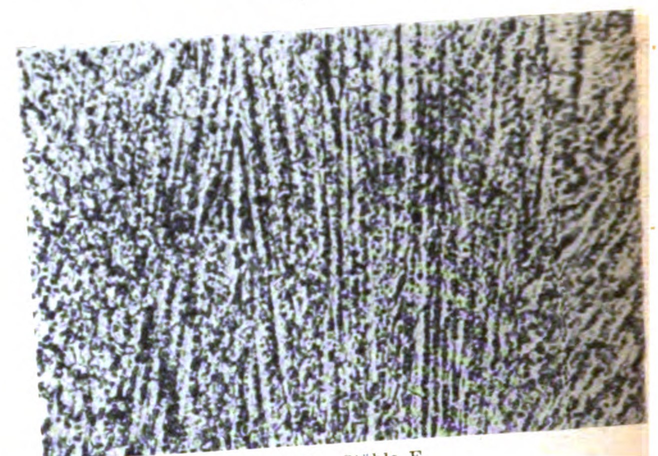


Bild 25. Stähle F.

Bild 22 bis 25. Gefüge der Schweißlinsen in Bändern aus den Stählen A, B, C und F. Vergr. 500fach.

tische Festigkeitsprüfung; jedoch wurden die Punkte dichter gesetzt, um auf der durch die Einspannvorrichtung der Prüfmaschine bedingten Probenbreite eine dem Lastbereich der Maschine angemessene Punktanzahl unterzubringen. Die für die Dauerversuche verwendeten, nach dem Schweißen außer in einem Falle nicht warmbehandelten Proben wurden auch im statischen Zug- (Scher-) Versuch geprüft.

Die Ergebnisse der Zugschwellversuche und die statische Zugfestigkeit der hierbei benutzten Schweißverbindungen enthält Zahlentafel 3. Die statische Zugfestigkeit der Schweißverbindungen entspricht bis auf Band *F* der Bandfestigkeit; der Bruch trat also im vollen Blech ein. Die Zugschwellfestigkeit der nicht nachbehandelten Schweißverbindungen beträgt, weitgehend unabhängig von der Stahlart, Vorbehandlung der Bänder und der zwischen 80 und 122 kg/mm² liegenden statischen Festigkeit ihrer Schweißverbindungen 43 bis 52 kg/Punkt. Einen kleineren Wert von 37 kg/Punkt besitzen bei einer statischen Bandzugfestigkeit von 56,8 kg/mm² lediglich die Schweißverbindungen aus dem weichgeglühten Stahl A_3. Das Anlassen auf 600°, wie es nach dem Schweißen mit den Schweißverbindungen der vergüteten Bänder aus Stahl A_3 durchgeführt wurde, setzt die statische Zugfestigkeit der Schweißverbindung bzw. des Bandwerkstoffs von 120 auf 97 kg/mm²

Zahlentafel 3. Ergebnisse der Dauerversuche an Punktschweißverbindungen 1 mm dicker Bänder.

Band aus Stahl	Zustand	Bandzugfestigkeit	Zugfestigkeit d. Schweißverbindung, bezogen auf den Blechquerschn.	Zugschwellfestigkeit der Schweißverbindung bezogen auf 1 Punkt	bezogen auf den Blechquerschn.	σ_D / σ_{ZB}	Bemerkungen
		σ_B	σ_{ZB}	P	σ_D		
		kg/mm²		kg/Pkt	kg/mm²		
A_2	kaltgewalzt	86,8	86,0	43	5,8	0,067	2-reihige Verbdg.
	weichgeglüht	56,8	56,4	37	4,9	0,087	» »
A_3	vergütet	120,0	122	47	6,2	0,052	» »
	vergütet	120[1]	97[2]	47	6,2	0,072	2-reihige Verbdg. bei 600° 1/2 h angelassen
	vergütet	120	122	53	3,6	0,029	1-reihige Verbdg.
B_1	kaltgewalzt	79,6	79,0	50	6,7	0,085	2-reihige Verbdg.
B_2	vergütet	111	115	48	6,4	0,056	» »
C	vergütet	96,5	91,4	50	6,7	0,073	» »
F	kaltgewalzt	138	122	48	6,4	0,052	» »

[1]) Festigkeit vor dem dem Schweißen folgenden Anlassen.
[2]) Festigkeit nach dem dem Schweißen folgenden Anlassen.

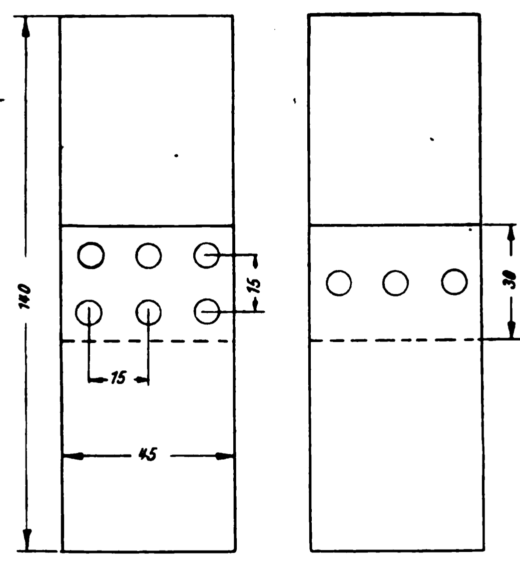


Bild 26. Zug-Schwell-Proben.

herab, beeinflußt aber die Zugschwellfestigkeit nicht. Für diese ist also die hohe Härte der Schweißlinse nicht nachteilig. Demgemäß haben auch die austenitischen Bänder mit weichen Punkten keine höhere Dauerfestigkeit als die niedriglegierten Bänder mit harten Punkten. In einer einreihigen Verbindung, die neben den zweireihigen bei den vergüteten Bändern aus Stahl A_3 geprüft wurden, ist die auf einen Punkt bezogene Zugschwellfestigkeit etwas größer als die der zweireihigen Verbindung.

Bezieht man die Zugschwellfestigkeit nicht auf einen Punkt, sondern auf den ursprünglichen Blechquerschnitt an der Schweißung, wie es in Zahlentafel 3 ebenfalls geschehen ist, so ergibt sich, wie bereits aus den auf einen Punkt bezogenen Zugschwellfestigkeiten abzuleiten war, eine gegenüber den zweireihigen Verbindungen auf etwas mehr als die Hälfte herabgesetzte Zugschwellfestigkeit der einreihigen Verbindung. Neue Gesichtspunkte ergeben sich erwartungsgemäß nicht, wenn man die Zugschwellfestigkeit statt in kg/Punkt in kg/mm² des Blechquerschnitts ausdrückt.

Im Verhältnis zu der der Bandfestigkeit entsprechenden statischen Zugfestigkeit der Schweißverbindungen liegt deren auf den Blechquerschnitt bezogene Zugschwellfestigkeit niedrig. Die Verhältniszahlen der Zugschwellfestigkeit

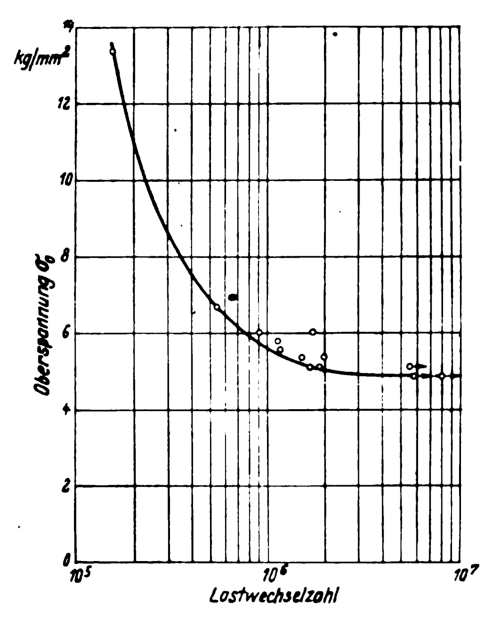


Bild 27. Wöhlerkurve für Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$) der zweireihigen Schweißverbindung aus dem weichgeglühten Band aus Stahl A_3.

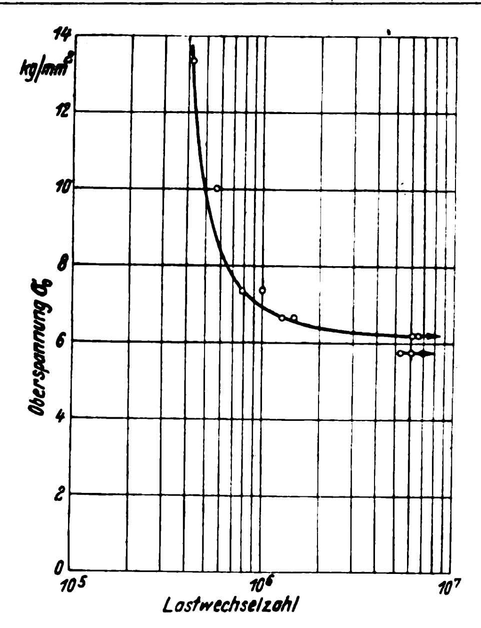


Bild 28. Wöhlerkurve für Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$) der zweireihigen Schweißverbindung aus dem vergüteten Band aus Stahl A_3 mit 120 kg/mm² Festigkeit.

zu der statischen Zugfestigkeit der zweireihigen Schweißungen betragen zwischen 0,052 und 0,087, der einreihigen Verbindung nur 0,029. Würde man statt der Zugschwellfestigkeit den Spannungsausschlag als Bruchteil der Zugfestigkeit ausdrücken, so ergäben sich nur halb so große Zahlen.

Wie aus Bild 27 bis 31 hervorgeht, haben die Wöhlerkurven der Punktschweißverbindungen einen ausgesprochen steilen Verlauf. Der niedrigen Dauerfestigkeit sind also im Bereich kleiner Lastwechselzahlen hohe Zeitfestigkeiten zugeordnet.

Der Dauerbruch ging bei den Zugschwellversuchen ausnahmslos von der hohen Spannungsspitze dem Übergang der Schweißlinse in das Band aus. Poren und kleine Punkte innerhalb der Linse, die nicht sicher vermieden werden können, haben das Ergebnis der Dauerversuche nicht beeinflußt.

8. Zusammenfassung

Untersuchungen von weichgeglühten, vergüteten und kaltgewalzten, 0,3; 0,6 und 1,0 mm dicken Bändern aus

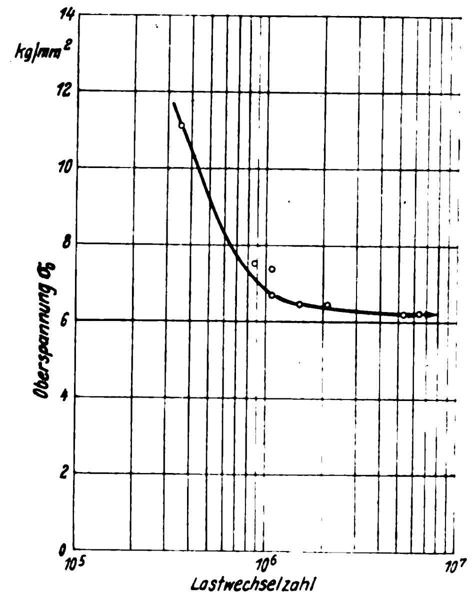


Bild 29. Wöhlerkurve für Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$) der zweireihigen Schweißverbindung aus dem vergüteten Band aus Stahl A_3 mit 120 kg/mm² Festigkeit. Nach dem Schweißen bei 600° eine halbe Stunde angelassen.

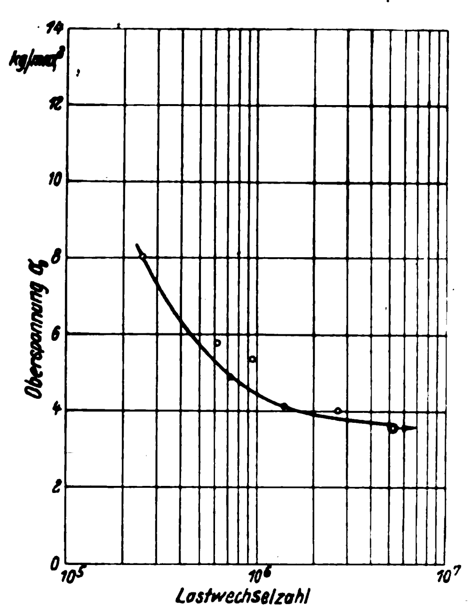


Bild 30. Wöhlerkurve für Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$) der einreihigen Schweißverbindung aus dem vergüteten Band aus Stahl A, mit 120 kg/mm² Festigkeit.

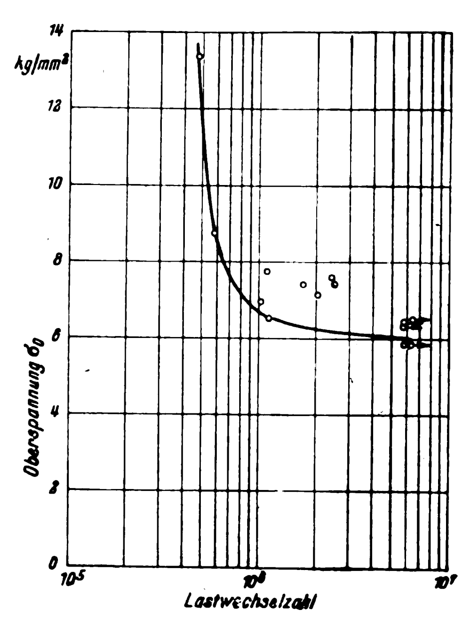
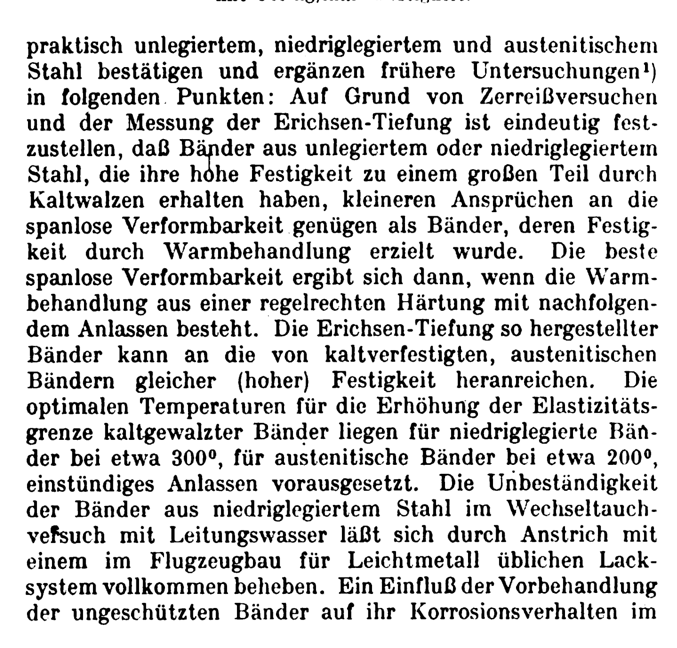


Bild 31. Wöhlerkurve für Zugschwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$) der zweireihigen Schweißverbindung aus dem austenitischen Bandstahl F mit 140 kg/mm² Festigkeit.



praktisch unlegiertem, niedriglegiertem und austenitischem Stahl bestätigen und ergänzen frühere Untersuchungen[1]) in folgenden Punkten: Auf Grund von Zerreißversuchen und der Messung der Erichsen-Tiefung ist eindeutig festzustellen, daß Bänder aus unlegiertem oder niedriglegiertem Stahl, die ihre hohe Festigkeit zu einem großen Teil durch Kaltwalzen erhalten haben, kleineren Ansprüchen an die spanlose Verformbarkeit genügen als Bänder, deren Festigkeit durch Warmbehandlung erzielt wurde. Die beste spanlose Verformbarkeit ergibt sich dann, wenn die Warmbehandlung aus einer regelrechten Härtung mit nachfolgendem Anlassen besteht. Die Erichsen-Tiefung so hergestellter Bänder kann an die von kaltverfestigten, austenitischen Bändern gleicher (hoher) Festigkeit heranreichen. Die optimalen Temperaturen für die Erhöhung der Elastizitätsgrenze kaltgewalzter Bänder liegen für niedriglegierte Bänder bei etwa 300°, für austenitische Bänder bei etwa 200°, einstündiges Anlassen vorausgesetzt. Die Unbeständigkeit der Bänder aus niedriglegiertem Stahl im Wechseltauchversuch mit Leitungswasser läßt sich durch Anstrich mit einem im Flugzeugbau für Leichtmetall üblichen Lacksystem vollkommen beheben. Ein Einfluß der Vorbehandlung der ungeschützten Bänder auf ihr Korrosionsverhalten im Wechseltauchversuch mit Leitungswasser und Kochsalzlösung war nicht festzustellen. — Bei den unlegierten und niedriglegierten Bändern trat Spannungskorrosion weder in Leitungswasser noch in Kochsalzlösung ein. In letzterer ist das Spannungskorrosionsverhalten austenitischer Bänder abhängig von der Stahlart und dem Verfestigungsgrad durch Kaltbearbeitung.

Versuche über die statische Zugfestigkeit und die Zugschwellfestigkeit von Punktschweißverbindungen ergaben die zu erwartende, im Verhältnis zur Zugfestigkeit niedrige Dauerfestigkeit. Diese wird durch Anlassen zur Beseitigung der bei den niedriglegierten Bändern teilweise hohen Härte der Schweißlinse nicht verbessert. In Übereinstimmung hiermit haben auch die austenitischen Bänder mit weichen Punkten keine höhere Dauerfestigkeit als die niedriglegierten Bänder mit harten Punkten. Die Zeitfestigkeit der Punktschweißverbindungen erreicht im Verhältnis zu ihrer Dauerfestigkeit hohe Werte. — Der Dauerbruch entsteht durch die Spannungsspitze am Übergang vom Band zur Schweißlinse. Demgemäß sind nicht immer vermeidbare Poren in den Schweißlinsen ohne Einfluß auf das Dauerfestigkeitsverhalten der Schweißverbindungen.

Der Einfluß von Magnesium, Silizium, Mangan und Eisen auf die Eigenschaften der Legierung »Duralumin Cu 30«*).

Von K. L. Dreyer und M. Hansen, Berlin.

Bericht der Forschungsanstalt der Dürener Metallwerke, A.-G., Berlin.

Um die hinsichtlich der Gesamteigenschaften günstigste Zusammensetzung für die Legierung „Duralumin Cu 30" mit etwa 3% Cu zu ermitteln, wird die Wirkung verschiedener Gehalte an Magnesium, Silizium, Mangan und Eisen auf die Kalt- und Warmaushärtung sowie auf das Rekristallisationsgefüge planmäßig untersucht.

Gliederung.

1. Einleitung.

Auf Grund planmäßiger Legierungsuntersuchungen wurde bereits im Jahre 1936 eine Legierung »Duralumin Cu 30«[1]) mit nur etwa 3% Cu entwickelt, die nach eingehender Erprobung für die frühere Al-Cu-Mg-Legierung entsprechend Fliegwerkstoff 3115/16 mit 4,2% Cu eingeführt worden ist[2]). Diese Legierung weist nicht nur die gleichen mechanischen Eigenschaften auf wie der frühere Fliegwerkstoff, sondern unterscheidet sich auch hinsichtlich der Herstellung und Verarbeitung praktisch nicht von der kupferreicheren Legierung. Ebenso wie der bisherige Fliegwerkstoff 3115/16, erreicht also auch »Duralumin Cu 30« die günstigsten Festigkeitseigenschaften durch Kaltaushärten. Die Einführung des neuen Werkstoffes konnte also erfolgen, ohne daß in den Halbzeug- und Flugzeugwerken die Erstellung neuer Einrichtungen und die Einschaltung zusätzlicher Arbeitsgänge bei der Herstellung und Weiterverarbeitung notwendig wurden.

Die gebräuchlichen Al-Cu-Mg-Legierungen enthalten außer Kupfer und Magnesium stets noch verschiedene Mengen anderer Metalle, die teils — wie Mangan oder Silizium — die Eigenschaften in bestimmter Weise beeinflussen sollen, teils — insbesondere Eisen — als Beimengung des technischen Aluminiums in die Legierungen gelangen. Über die Wirkung dieser Zusätze auf die Eigenschaften der Al-Cu-Mg-Legierungen mit etwa 4,2% Cu hat eine Reihe früherer Arbeiten volle Klarheit geschaffen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen dürfen aber nicht ohne weiteres auf den neuen Fliegwerkstoff mit etwa 3% Cu übertragen werden, da durch die Verringerung des Kupfer- und Erhöhung des Magnesiumgehaltes die Wirkung der übrigen Legierungsbestandteile verändert werden kann. Es ergab sich daher die Notwendigkeit, den Einfluß der verschiedenen Zusätze an einer Grundlegierung mit 3% Cu erneut zu untersuchen, um die hinsichtlich der Gesamteigenschaften günstigsten Gehalte an Magnesium, Silizium, Mangan und Eisen für »Duralumin Cu 30« festzusetzen.

*) E 22 1.
[1]) Eingetragenes Warenzeichen der Dürener Metallwerke, A.-G
[2]) Legierung Al-Cu-Mg-3 nach DIN E 1725.

Nachstehend seien die wichtigsten Zusammenhänge an Hand einiger kennzeichnender Beispiele dargelegt. Die folgenden Ausführungen beziehen sich stets auf unplattierte 1 bis 2 mm dicke Bleche, die nach dem Lösungsglühen nicht kaltverformt wurden, da unter diesen Bedingungen der reine Legierungseinfluß auf die Eigenschaften am klarsten hervortritt.

2. Bedeutung des Magnesiumgehaltes.

Die Verringerung des Kupfergehaltes in der Legierung »Duralumin Cu 30« gegenüber dem früheren Fliegwerkstoff 3115/16 wird bekanntlich durch eine Erhöhung des Magnesiumzusatzes wettgemacht. Die gegenseitige Beeinflussung des Kupfers und Magnesiums und die Wirkung der beiden Metalle auf die Eigenschaften der Al-Cu-Mg-Legierungen ist bereits früher[3]) ausführlich behandelt worden. Im folgenden soll daher nur kurz die Bedeutung verschiedener Magnesiumgehalte für eine Legierungsreihe mit etwa 3% Cu, 0,7% Mn, 0,2% Fe und 0,2% Si besprochen werden.

a) Kaltaushärtung.

Bild 1 gibt zunächst die zeitliche Änderung der Festigkeitseigenschaften bei 20° nach dem Abschrecken von 500° für drei Legierungen mit 0,5, 1,3 und 2,1% Mg wieder. Die Geschwindigkeit der Kaltaushärtung wird durch eine Änderung des Magnesiumgehaltes zwischen 0,5 und 1,3% nur wenig beeinflußt, oberhalb 1,3% Mg aber deutlich verringert. Die »Inkubationszeit« beträgt in allen Fällen etwa zwei Stunden, und die Endwerte der Festigkeitseigenschaften sind nach ungefähr zehntägiger Raumtemperaturlagerung erreicht. Die Kaltaushärtung der Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3% Cu verläuft also nur wenig langsamer als bei den Legierungen mit etwa 4% Cu. Die Dehnung ist für alle drei Legierungen praktisch unabhängig von der Lagerdauer.

Von erheblichem Einfluß ist der Magnesiumgehalt auf die Festigkeitseigenschaften der Legierungen mit 3% Cu im abgeschreckten und im ausgehärteten Zustand, wie Bild 2 veranschaulicht. Sowohl unmittelbar nach dem Lösungsglühen bei 500° als auch nach Raumtemperaturlagerung nehmen die Werte der Härte, Zugfestigkeit und Streckgrenze mit steigenden Magnesiumgehalten bis etwa 2% beträchtlich zu und sinken bei noch höheren Magnesiumzusätzen allmählich wieder ab. Der Betrag der Festigkeitserhöhung durch Kaltaushärten ist am größten bei einem Magnesiumgehalt von ungefähr 1% und wird durch höhere Magnesiumzugaben deutlich erniedrigt. Die Dehnung wird nach Bild 2 durch Magnesiumzusätze bis etwa 3% kaum verändert, dagegen nehmen die Werte der Erichsentiefung und der Hin- und Herbiegezahl in Abhängigkeit vom Magnesiumgehalt erheblich ab, Bild 3. Um die höchsten Festigkeitseigenschaften bei einer Legierung mit 3% Cu zu erzielen, müßte man demnach einen Magnesiumgehalt von etwa 2%

[3]) M. Hansen und K. L. Dreyer, Z. Metallkde. Bd. 30 (1938) S. 55 bis 58; Bd. 31 (1939) S. 204 bis 209.



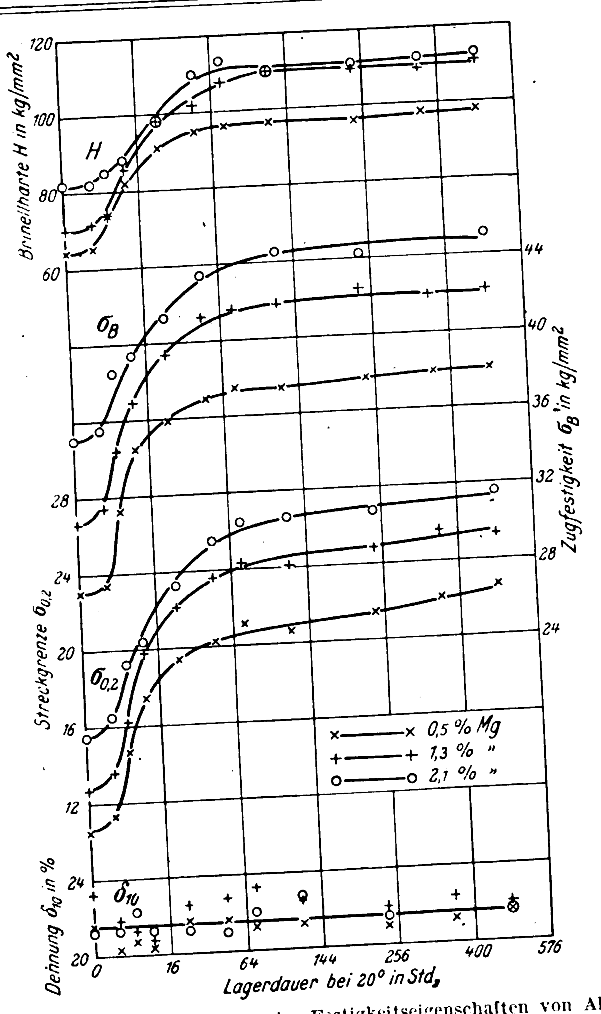


Bild 1. Zeitliche Änderung der Festigkeitseigenschaften von Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3% Cu und verschiedenen Magnesiumgehalten nach dem Abschrecken von 500°.

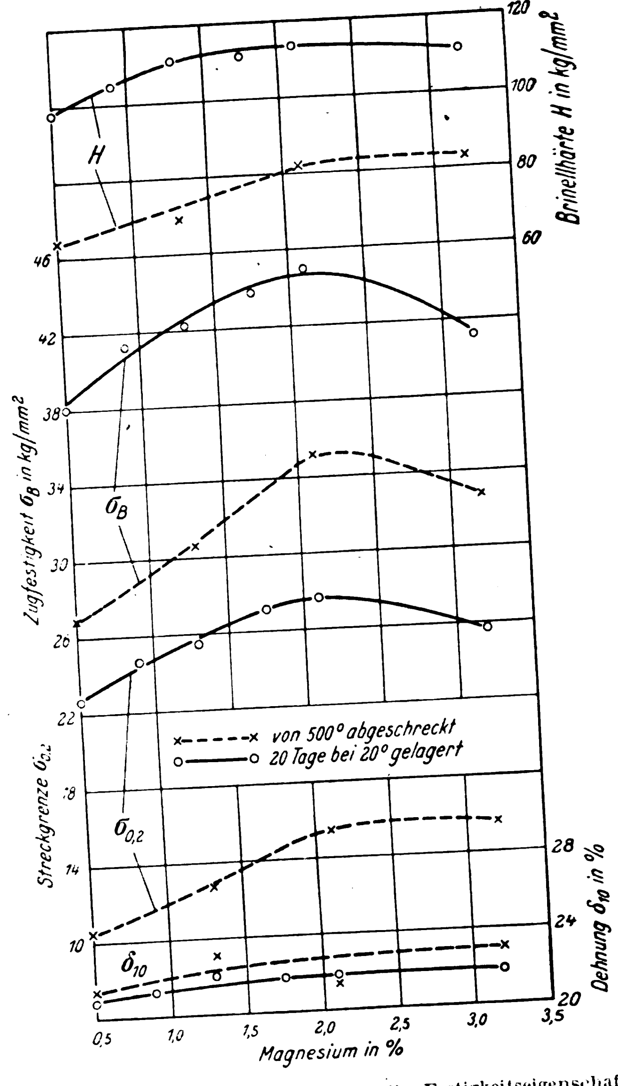


Bild 2. Einfluß des Magnesiums auf die Festigkeitseigenschaften einer Al-Cu-Mg-Legierung mit 3% Cu unmittelbar nach dem Abschrecken von 500° und im kaltausgehärteten Zustand.

wählen. Mit Rücksicht auf die Verformbarkeit im abgeschreckten und im kaltausgehärteten Zustand ist es jedoch nicht ratsam, mit dem Magnesiumzusatz an die obere Grenze zu gehen. Es hat sich außerdem bei der fabrikationsmäßigen Herstellung von Halbzeugen aus der Legierung mit 3% Cu gezeigt, daß ein hoher Magnesiumgehalt die Warmformgebung — insbesondere beim Warmwalzen — in ungünstiger Weise beeinflußt. Daher wurde der Sollgehalt für Magnesium in »Duralumin Cu 30«, der zunächst 1,7% betrug, auf etwa 1,4% herabgesetzt (Toleranzgrenzen nach DIN E 1725: 1,1 bis 1,6% Mg). Eine Verringerung des Magnesiumgehaltes unter etwa 1% führt nach Bild 2 zu einer Unterschreitung der Mindestwerte für Flw. 3115 (Zugfestigkeit 40 kg/mm², Streckgrenze 25 kg/mm²).

Die Festigkeitseigenschaften der Al-Cu-Mg-Legierungen mit etwa 4% Cu hängen bekanntlich in hohem Maße von der gewählten Lösungsglühtemperatur ab, und zwar besteht ein ganz bestimmter, eng begrenzter Temperaturbereich, in dem die optimalen Festigkeitswerte erreicht werden. Unterhalb dieses Temperaturbereiches findet nur eine unvollständige Aushärtung statt, während oberhalb einer bestimmten Temperatur eine Schädigung des Gefüges und Verschlechterung der Eigenschaften infolge Verbrennung eintreten. Bild 4 zeigt den Einfluß der Lösungsglühtemperatur auf die Festigkeitseigenschaften der Legierungsreihe mit 3% Cu und verschiedenen Magnesiumgehalten. Man erkennt, daß die Werte der Härte, Zugfestigkeit und Streckgrenze mit steigender Abschrecktemperatur im kaltausgehärteten Zustand um so stärker erhöht werden, je größer der Magnesiumgehalt der Legierung ist. Für einen Werkstoff mit 1,3% Mg wird oberhalb 480° keine nennenswerte Festigkeitserhöhung beobachtet, die Eigenschaft-Temperatur-Kurven verlaufen demnach wesentlich flacher als für den früheren Fliegwerkstoff 3115 mit 4,2% Cu. Das bedeutet, daß für das Lösungsglühen von »Duralumin Cu 30« ein größeres Temperaturgebiet zur Verfügung steht und daß die nach der Kaltaushärtung erreichten Festigkeitswerte unempfindlicher gegenüber zufälligen Temperaturschwankungen sind als bei kupferreicheren Werkstoffen. Ein Glühen oberhalb 510° führt bei der Legierung mit 1,3% Mg zu einem leichten Rückgang der Zugfestigkeit und Streck-

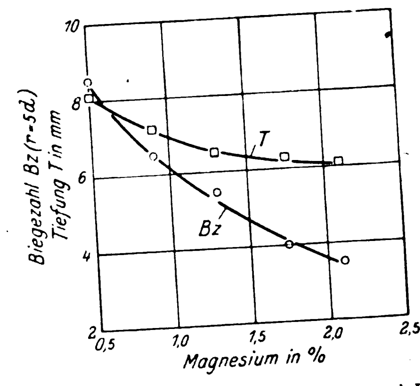


Bild 3. Einfluß des Magnesiums auf die Tiefung und Biegezahl einer kaltausgehärteten Al-Cu-Mg-Legierung mit 3% Cu.

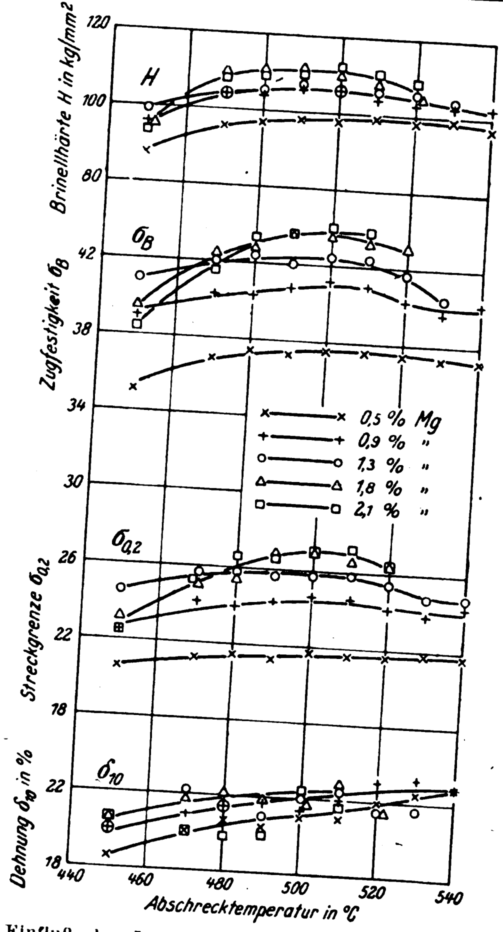


Bild 4. Einfluß der Lösungsglühtemperatur auf die Festigkeitseigenschaften von Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3% Cu und verschiedenen Magnesiumgehalten im kaltausgehärteten Zustand.

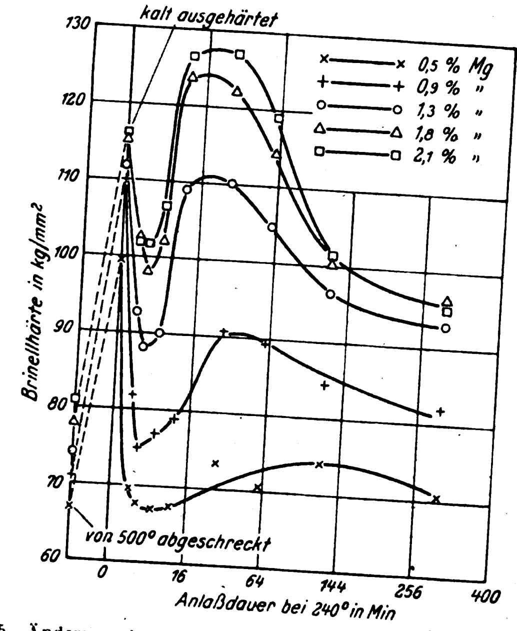


Bild 5. Änderung der Härte von kaltausgehärteten Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3% Cu und verschiedenen Magnesiumgehalten in Abhängigkeit von der Anlaßdauer bei 240° (Messung unmittelbar nach dem Erwärmen).

grenze, jedoch wurden Überhitzungserscheinungen im Gefüge erst bei Temperaturen über 530° beobachtet. Die Temperaturen der beginnenden Verbrennung werden bei der Legierungsreihe mit 3% Cu mit steigenden Magnesiumgehalten erniedrigt (von 550° bei 0,5% Mg auf 520° bei 2% Mg). Mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Schwankungen im Magnesiumgehalt würde man daher bei der Aushärtung von Blechen aus »Duralumin Cu 30« im praktischen Betrieb eine Lösungsglühtemperatur von 510° keinesfalls überschreiten.

b) Rückbildung der Kaltaushärtung.

Bei den aushärtbaren Aluminiumlegierungen beobachtet man häufig die Erscheinung, daß die Festigkeitswerte kaltausgehärteter Werkstücke durch kurzzeitiges Erwärmen auf Temperaturen um 200° herum absinken und bei anschließender Raumtemperaturlagerung wieder zunehmen. Diese sogenannte »Rückbildung« der Kaltaushärtung ist für Al-Cu-Mg-Legierungen mit etwa 4% Cu eingehend untersucht worden[4]). Dabei wirkt ein erhöhter Magnesiumgehalt in der Weise, daß der Rückgang der Kaltaushärtung und die Geschwindigkeit der erneuten Eigenschaftsänderung verringert werden[5]).

Es erschien von Wert, die Rückbildungserscheinungen auch an der Legierungsreihe mit 3% Cu und Magnesiumgehalten von 0,5 bis 2,1% zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurden kleine Blechabschnitte von 500° abgeschreckt, etwa 30 Tage bei 20° gelagert, darauf im Salzbad verschiedene Zeiten (1 bis 300 Minuten) bei 240° erwärmt, abgeschreckt und wiederum bei 20° gelagert. Die Prüfung der Eigenschaftsänderungen erfolgte an der Hand von Härtemessungen.

[4]) K. L. Dreyer, Z. Metallkde. Bd. 31 (1939) S. 147 bis 150; Metallwirtsch. Bd. 19 (1940) S. 843 bis 848.
[5]) K. L. Dreyer, Metallwirtsch. Bd. 22 (1943) S. 43 bis 47.

Bild 5 gibt die Härteänderung in Abhängigkeit von der Anlaßdauer bei 240° wieder, wobei die Messung unmittelbar nach dem Erwärmen vorgenommen wurde. Bei allen Legierungen tritt in den ersten Minuten ein ausgeprägter Härteabfall ein (Rückgang der Kaltaushärtung), dem ein mehr oder weniger starker Anstieg (Warmaushärtung) und schließlich wieder eine Härteabnahme (Erweichung durch Ausscheidungen) folgen. Bei der Legierung mit 0,5% Mg geht die Härte nach Bild 5 durch 2 bis 5 Minuten langes Erwärmen auf den Wert des abgeschreckten Zustandes zurück, und der Härteanstieg infolge Warmaushärtung ist nur sehr gering. Mit steigenden Magnesiumgehalten nimmt der Härterückgang ab, das Härtemaximum wird aber immer ausgeprägter, die Warmaushärtung also verstärkt.

Werden die erwärmten Proben bei Raumtemperatur gelagert, so nimmt die Härte infolge erneuter Kaltaushärtung mit der Zeit zu; dabei sind die Geschwindigkeit und der Betrag der Härtezunahme am größten nach einer Erwärmungsdauer von 2 bis 5 Minuten (Gebiet des Härteminimums unmittelbar nach dem Erwärmen), sie nehmen mit fortschreitender Warmaushärtung immer mehr ab und werden im Gebiet der Härteabnahme durch Entmischung Null. Dadurch verschieben sich die Härte-Anlaßzeit-Kurven mit der Lagerdauer bei 20° in der in Bild 6 wiedergegebenen Weise. Nach Bild 7 erfolgt die zeitliche Härteänderung der Legierung mit 0,5% Mg nach kurzzeitigem Erwärmen bei 240° praktisch mit der gleichen Geschwindigkeit wie nach dem Abschrecken von 500°; je mehr Magnesium aber die Legierung enthält, um so stärker bleibt die Geschwindigkeit der erneuten Kaltaushärtung hinter der normalen zurück. Während die Geschwindigkeit der normalen Kaltaushärtung beiden Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3% Cu durch eine Veränderung des Magnesiumzusatzes zwischen 0,5 und 2% nur verhältnismäßig wenig beeinflußt wird, Bild 1, wirkt demnach eine Erhöhung des Magnesiumzusatzes auf die erneute Kaltaushärtung stark verzögernd, Bild 7. In Bild 8 sind die nach verschiedener Wärmebehandlung erreichten Härtewerte in Abhängigkeit vom Magnesiumgehalt dargestellt. Unmittelbar nach dem Abschrecken von 500° nimmt die Härte mit steigenden Magnesiumgehalten ungefähr linear zu. Im kaltausgehärteten Zustand ist der Härteanstieg für geringe Magnesiumzusätze größer als für höhere. Nach kurzzeitigem Erwärmen der zuvor kaltausgehärteten Bleche auf 240° zeigt die Härte in Abhängigkeit vom Magnesiumgehalt einen viel steileren Anstieg als im abgeschreckten

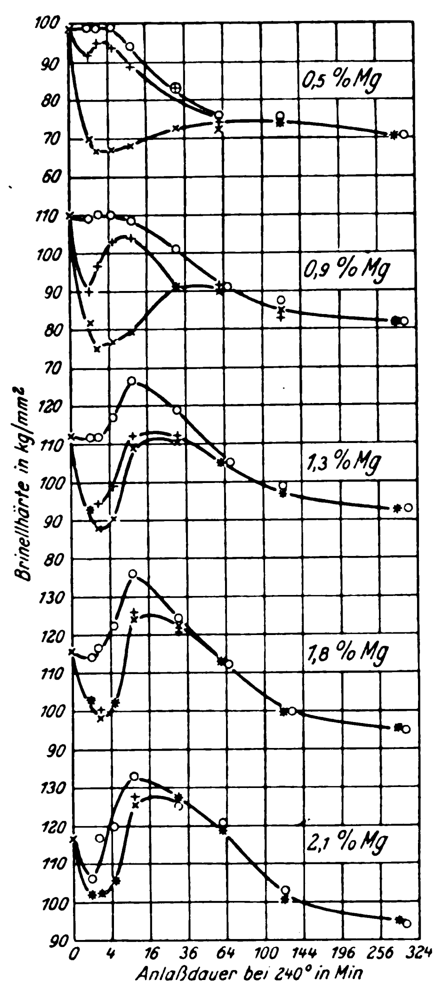


Bild 6. Wirkung der Anlaßdauer bei 240° und der Lagerdauer bei 20° auf die Härte von kaltausgehärteten Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3 % Cu und verschiedenen Magnesiumgehalten.

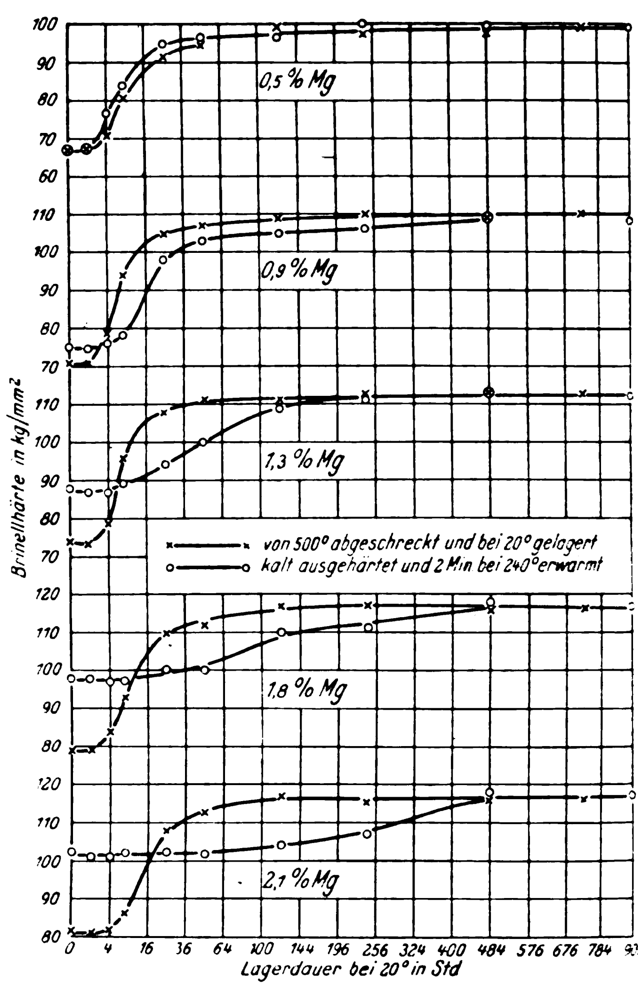


Bild 7. Zeitliche Härteänderung von Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3 % Cu und verschiedenen Magnesiumgehalten nach dem Abschrecken von 500° und nach kurzzeitigem Erwärmen bei 240°.

Zustand, da die Rückbildung mit höheren Magnesiumzusätzen immer unvollständiger wird. Nach hinreichend langer Raumtemperaturlagerung werden aber bei allen Legierungen die Werte des kaltausgehärteten Ausgangszustandes wieder erreicht.

Nach den obigen Versuchsergebnissen wird die Rückbildung der Al-Cu-Mg-Legierungen mit 3% Cu durch höhere Magnesiumgehalte in etwa der gleichen Weise beeinflußt wie bei entsprechenden Legierungen mit 4% Cu. Man hat demnach beim Erwärmen von kaltausgehärtetem »Duralumin Cu 30« mit 1,4% Mg nur mit verhältnismäßig geringfügigen Rückbildungserscheinungen zu rechnen, etwa in dem Maße, wie sie bei den Al-Cu-Mg-Legierungen gemäß Flw. 3125 beobachtet werden[5]).

3. Einfluß des Siliziums auf die Kalt- und Warmaushärtung.

Ein erhöhter Siliziumzusatz übt auf die Festigkeitseigenschaften der Al-Cu-Mg-Legierungen mit etwa 4% Cu im kaltausgehärteten Zustand nur einen verhältnismäßig geringen Einfluß aus, ist aber von entscheidender Bedeutung für ihre Warmaushärtbarkeit[6]). Um die entsprechenden Verhältnisse für »Duralumin Cu 30« zu prüfen, wurden Bleche der mittleren Zusammensetzung 3,0% Cu, 1,6% Mg, 0,6% Mn, 0,25% Fe und Siliziumgehalten von 0,17, 0,47, 0,73 und 0,86% im kalt- und warmausgehärteten Zustand näher untersucht.

[6]) M. Hansen und K. L. Dreyer, Aluminium Bd. 22 (1940) S. 134 bis 137.

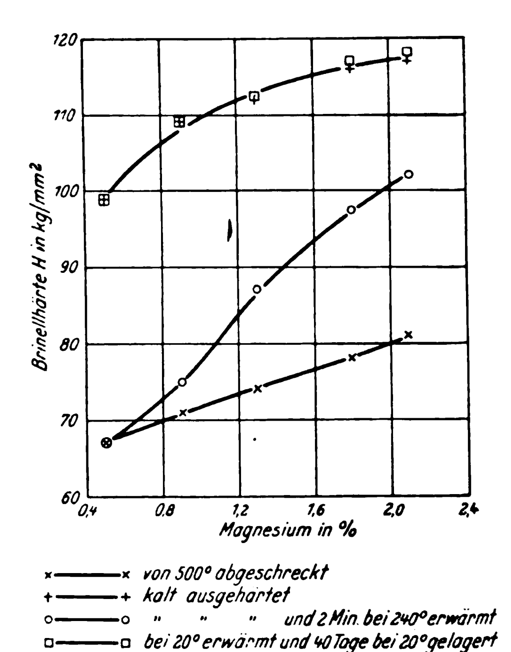


Bild 8. Einfluß des Magnesiums auf die Härte einer Al-Cu-Mg-Legierung mit 3 % Cu nach verschiedener Wärmebehandlung.

a) Kaltaushärtung.

Wie Bild 9 an der Hand von Härtemessungen zeigt, wird die Kaltaushärtung in den ersten Stunden nach dem Abschrecken von 500° durch eine Erhöhung des Siliziumgehaltes



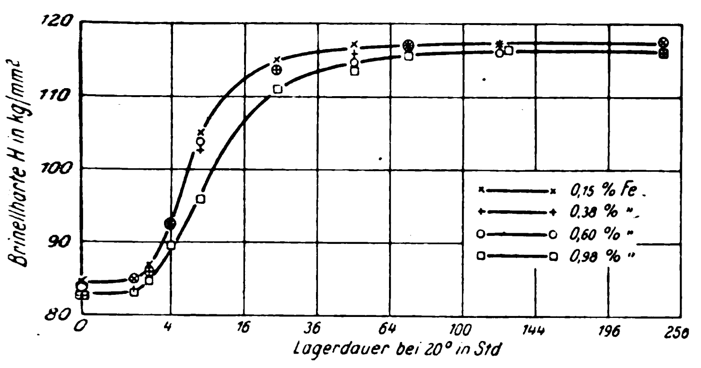


Bild 9. Zeitliche Härteänderung von »Duralumin Cu 30« mit verschiedenen Siliziumgehalten nach dem Abschrecken von 500°

von 0,2 bis auf etwa 0,7% ein wenig beschleunigt. Im kaltausgehärteten Zustand werden die Festigkeitseigenschaften in Abhängigkeit von der Abschrecktemperatur nach Bild 10 bis etwa 510° erhöht, und zwar um so stärker, je größer der Siliziumgehalt der Legierung ist. Der Verlauf der Eigenschaftskurven erklärt sich durch die mit steigender Abschrecktemperatur zunehmende Löslichkeit der Verbindung Mg_2Si im aluminiumreichen Mischkristall. Oberhalb 515° tritt bei allen Legierungen eine Abnahme der Festigkeit und Streckgrenze ein, ohne daß die Dehnung in nennenswertem Maße absinkt und ohne daß Verbrennungserscheinungen im Gefüge beobachtet werden. Eine Lösungsglühtemperatur von 505 bis 510° ist demnach auch für Legierungen mit höheren Siliziumgehalten als obere Grenztemperatur anzusehen.

In Abhängigkeit vom Siliziumgehalt ergeben sich für verschiedene Abschrecktemperaturen im ausgelagerten Zustand Eigenschaftskurven nach Bild 11. Aus ihm ist zu entnehmen, daß die Zugfestigkeit und Streckgrenze mit steigendem Siliziumgehalt bei tieferen Abschrecktemperaturen stärker abnehmen als bei höheren. Legt man eine Lösungsglühtemperatur von 500° zugrunde, so erfolgt eine deutliche Festigkeitsabnahme erst bei Siliziumgehalten über etwa 0,5%, und der für Flw. 3115 geforderte Mindestwert der Streckgrenze von 25 kg/mm² wird erst oberhalb 0,8% Si unterschritten. Man kann demnach in der Legierung »Duralumin Cu 30« einen Höchstgehalt von 0,5% Si zulassen, ohne eine nennenswerte Verringerung der Festigkeitseigenschaften befürchten zu müssen (Toleranzgrenzen nach DIN E 1725: 0,2 bis 0,5% Si).

b) Warmaushärtung

Obwohl »Duralumin Cu 30« ebenso wie der frühere Fliegwerkstoff 3115/16 üblicherweise nicht im warmausgehärteten Zustand Verwendung findet, war es doch von Interesse, die Wirkung verschiedener Siliziumgehalte auf die Warmaushärtung dieser Legierung kennenzulernen. Als Beispiel hierfür gibt Bild 12 die Änderung der Festigkeitseigenschaften der obigen Legierungsreihe in Abhängigkeit von der Anlaßdauer bei 160° wieder. Die Bleche wurden von 500° abgeschreckt, zehn Tage bei Raumtemperatur gelagert und darauf verschiedene Zeiten bis zu 20 Tagen angelassen. Nach einem mehr oder weniger ausgeprägten Abfall (teilweiser Rückgang der Kaltaushärtung) steigen die Festigkeitseigenschaften — insbesondere die Härte und Streckgrenze — aller Legierungen infolge Warmaushärtung wieder an. Dabei werden die Geschwindigkeit und das Ausmaß der Warmaushärtung mit zunehmenden Siliziumgehalten stark erhöht: Während sich bei der Legierung mit 0,17% Si das Streckgrenzenmaximum erst nach einer Anlaßdauer von ungefähr 15 Tagen einstellt und bei 35 kg/mm² liegt, wird der Höchstwert der Streckgrenze bei einem Siliziumgehalt von 0,86% Si schon durch etwa 5-tägiges Anlassen bei 160° erreicht und beträgt 39 kg/mm². Entsprechendes gilt für die Härte, während die Zugfestigkeit auch bei der siliziumreichsten Legierung durch Anlassen bei 160° nur wenig über den Wert des ausgehärteten Aus-

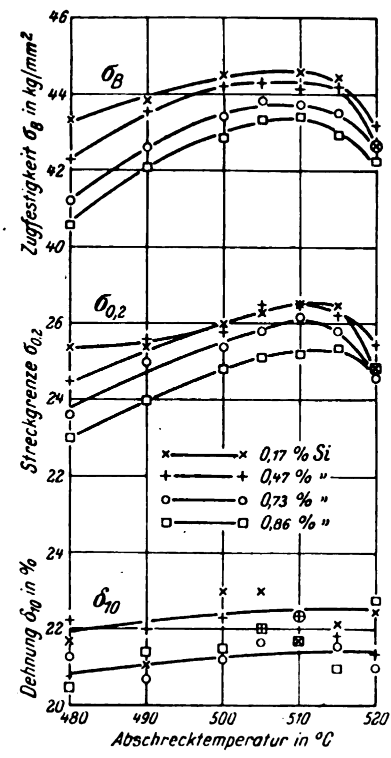


Bild 10. Einfluß der Lösungsglühtemperatur auf die Festigkeitseigenschaften von »Duralumin Cu 30« mit verschiedenen Siliziumgehalten im kaltausgehärteten Zustand.

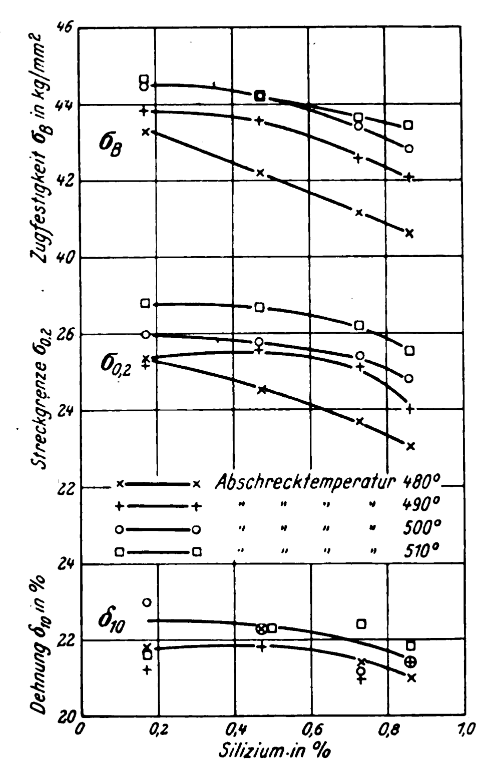


Bild 11. Einfluß des Siliziums auf die Festigkeitseigenschaften von kaltausgehärtetem »Duralumin Cu 30« für verschiedene Lösungsglühtemperaturen.

gangszustandes steigt. Durch Erhöhung der Anlaßtemperatur wird das Maximum der Warmaushärtung zu kürzeren Anlaßzeiten verschoben; beispielsweise werden die Höchstwerte der Streckgrenze bei 180° für eine Legierung mit 0,17% Si bereits nach 1 bis 2 Tagen und für 0,86% Si nach etwa 16 Stunden erreicht.

Wie die vorstehend beschriebenen Versuchsergebnisse zeigen, lassen sich die Werte der Härte und Streckgrenze

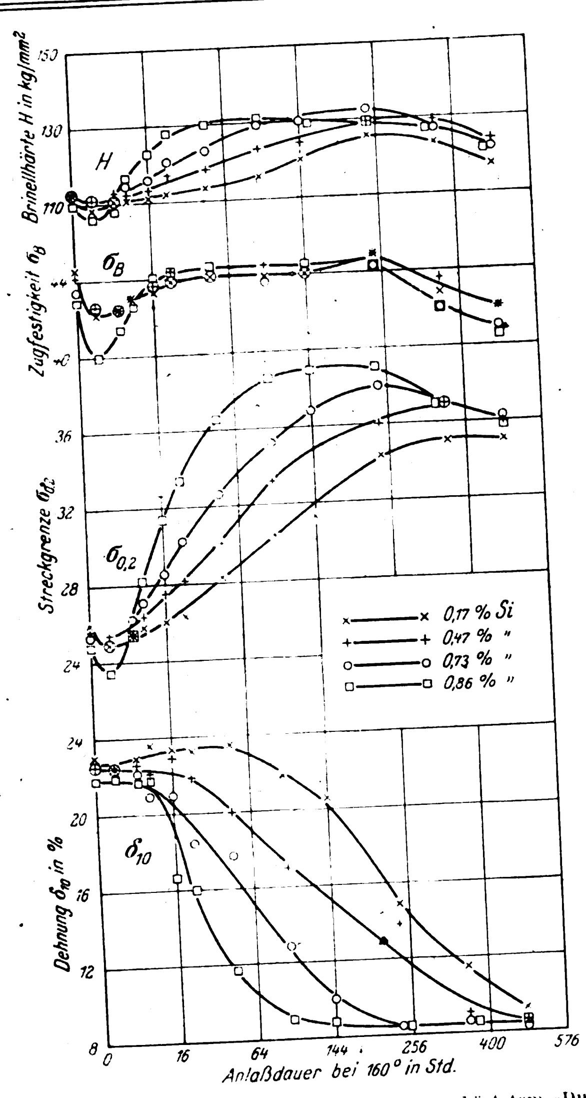


Bild 12. Festigkeitseigenschaften von kaltausgehärtetem »Duralumin Cu 30« mit verschiedenen Siliziumgehalten in Abhängigkeit von der Anlaßdauer bei 160°.

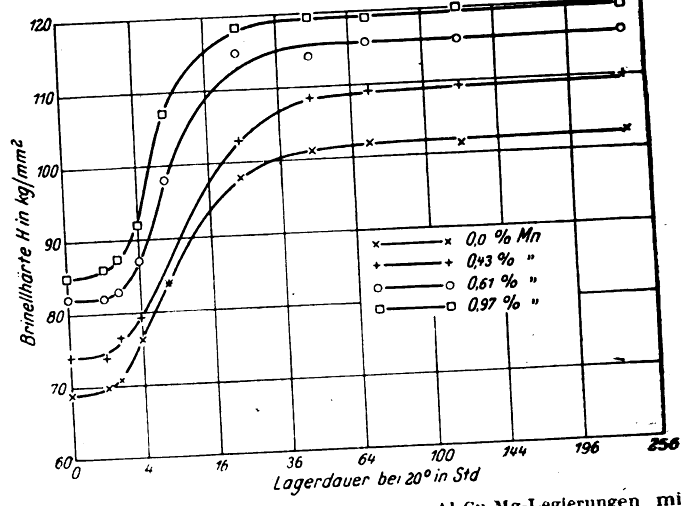


Bild 13. Zeitliche Härteänderung von Al-Cu-Mg-Legierungen mit 2,8 % Cu, 1,7 % Mg und verschiedenen Mangangehalten nach dem Abschrecken von 500°.

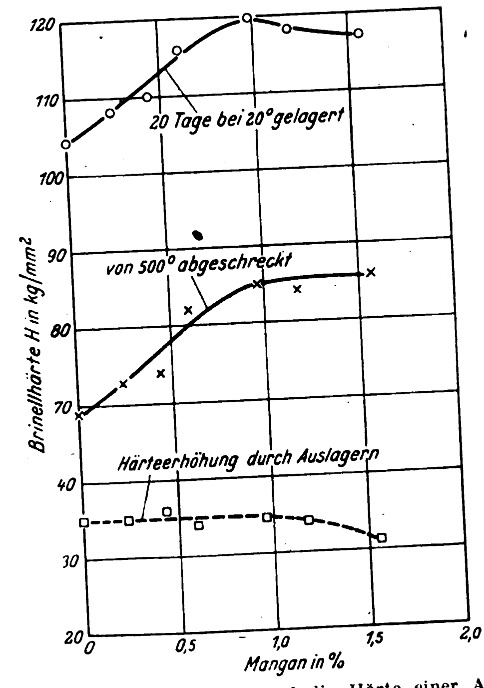


Bild 14. Einfluß des Mangans auf die Härte einer Al-Cu-Mg-Legierung mit 2,8 % Cu und 1,7 % Mg unmittelbar nach dem Abschrecken von 500° und nach Kaltaushärtung.

von »Duralumin Cu 30« durch Anlassen beträchtlich steigern, die Warmaushärtung verläuft aber träger als bei Al-Cu-Mg-Legierungen mit höheren Kupfer- und tieferen Magnesiumgehalten (z. B. Flw. 3125)[6]. Ähnlich wie bei den kupferreicheren und magnesiumärmeren Werkstoffen wird die Warmaushärtung bei der Legierung mit 3% Cu durch Siliziumzusätze beschleunigt und verstärkt. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Siliziumgehalte der obigen Legierungsreihe in keinem Falle den zur vollständigen Umsetzung des Magnesiums in die Verbindung Mg_2Si erforderlichen Betrag von 0,9% Si überschreiten, so daß die nach früheren Untersuchungen[7]) besonders ausgeprägte Wirkung einer **überschüssigen** Siliziummenge auf die Warmaushärtung bei der vorliegenden Versuchsreihe nicht erfaßt wurde.

4. Einfluß des Mangans auf die Festigkeitseigenschaften und das Rekristallisationsgefüge.

Bekanntlich wirkt ein Mangangehalt verfestigend auf die mechanischen Eigenschaften der Al-Cu-Mg-Legierungen mit etwa 4% Cu, beeinflußt aber ihre Aushärtbarkeit nur verhältnismäßig wenig[8]). Um die Wirkung verschiedener Manganzusätze auf die Eigenschaften von »Duralumin Cu 30« kennenzulernen, wurden Bleche der Grundzusammensetzung 2,8% Cu, 1,7% Mg, 0,3% Fe und 0,15% Si mit engabgestuften Mangangehalten zwischen 0 und 1,6% in verschiedenen Zuständen untersucht.

a) Festigkeitseigenschaften

Bild 13 läßt an der Hand von Härtemessungen erkennen, daß die Geschwindigkeit der Kaltaushärtung von »Duralumin Cu 30« durch verschiedene Manganzusätze nicht wesentlich verändert wird. Unmittelbar nach dem Abschrecken von 500° nimmt die Härte gemäß Bild 14 in Abhängigkeit vom Mangangehalt bis etwa 1% ungefähr in demselben Maße zu wie im ausgelagerten Zustand. Oberhalb 1% Mn wird aber nach Raumtemperaturlagerung eine leichte Härteabnahme gefunden, die sich im abgeschreckten Zustand nicht zeigt. Der Betrag der Härteerhöhung durch Auslagern wird demnach — ähnlich wie für eine Al-Cu-Mg-Legierung mit 4% Cu festgestellt wurde[8]) — durch höhere Manganzusätze ein wenig verringert.

Über den Einfluß des Mangans auf die mechanischen Eigenschaften im kaltausgehärteten Zustand für Lösungs-

[7]) M. Hansen, Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. I 501 bis 503; K. L. Dreyer und M. Hansen, Z. Metallkde. Bd. 35 (1943), S. 137 bis 146.

[8]) K. L. Dreyer und M. Hansen, Z. Metallkde. Bd. 33 (1941) S. 193 bis 204.

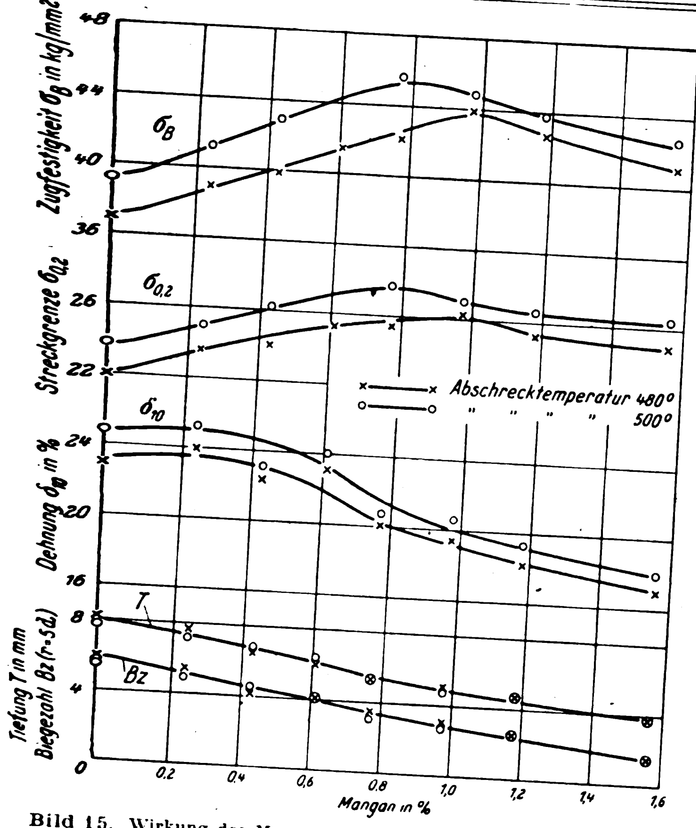


Bild 15. Wirkung des Mangans auf die mechanischen Eigenschaften einer kaltausgehärteten Al-Cu-Mg-Legierung mit 2,8% Cu und 1,7% Mg.

glühtemperaturen von 480 und 500° gibt Bild 15 Aufschluß. Die Werte der Zugfestigkeit und Streckgrenze nehmen mit steigenden Mangangehalten zunächst ungefähr linear zu, bei höheren Manganzusätzen aber deutlich wieder ab. Das Maximum der Festigkeitskurven liegt bei 0,8 bis 1% Mn und scheint sich mit steigenden Lösungsglühtemperaturen zu etwas tieferen Mangangehalten zu verschieben. Die Dehnung zeigt erst oberhalb etwa 0,6% Mn einen größeren Abfall; die Werte der Tiefung und Biegezahl nehmen aber schon bei kleineren Manganzusätzen merklich ab. Um die günstigsten Gesamteigenschaften (hohe Festigkeitswerte bei gleichzeitig guter Verformbarkeit) zu erhalten, ist nach Bild 15 der Mangangehalt in »Duralumin Cu 30« nicht über etwa 0,7% zu wählen (0,5 bis 0,8% Mn nach DIN E 1725).

b) Rekristallisationsgefüge

Aus früheren Untersuchungen[8]) ist bekannt, daß das Rekristallisationsgefüge der Al-Cu-Mg-Legierungen in hohem Maße von ihrem Mangangehalt beeinflußt wird. Manganfreie oder manganarme Legierungen mit etwa 4% Cu zeigen eine ausgeprägte Neigung zur Grobkörnigkeit, wenn sie um geringe (kritische) Beträge verformt und rekristallisierend geglüht werden. Diese Neigung zur Grobkornbildung wird durch höhere Manganzusätze weitgehend unterdrückt.

Ein ganz entsprechender Einfluß des Mangangehaltes auf das Rekristallisationskorn besteht auch bei »Duralumin Cu 30«. Bild 16 gibt eine Anzahl von konischen Stäben (Keilzugproben) aus 1 mm dicken Blechen mit verschiedenen Mangangehalten wieder, die — ausgehend vom walzharten Zustand mit einem Verformungsgrad von 44% — bei 500° geglüht, darauf zerrissen und nochmals bei 500° geglüht waren. Das durch Anätzen sichtbar gemachte Rekristallisationsgefüge ist bei der manganfreien Legierung in dem kritischen Verformungsbereich sehr grobkörnig, wird aber mit zunehmenden Manganzusätzen immer feiner. Bei einem Mangangehalt von 0,6% und mehr wurde nach der kritischen Verformung und Glühung praktisch keine Kornvergröberung mehr festgestellt. Wie Bild 17 zeigt, bleibt der günstige Einfluß des Mangans auf das Rekristallisationsgefüge bei den untersuchten Blechen erhalten, wenn die kritische Reck- und Glühbehandlung mehrmals wiederholt wird.

Es hat sich jedoch herausgestellt, daß ein hoher Mangangehalt allein nicht genügt, um die Gefahr des Grobkörnigwerdens bei der Weiterverarbeitung von Al-Cu-Mg-Legierungen mit voller Sicherheit auszuschließen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der letzte Verformungsgrad vor dem Lösungsglühen hoch war. Wie Bild 18 an Keilzugstäben aus Al-Cu-Mg-Legierungen mit 2,8% Cu, 1,7% Mg und verschiedenen Mangangehalten, deren letzter Abwalzgrad 72% betrug, veranschaulicht, werden auch die Bleche mit 0,6% Mn nach mehrfachem kritischen Verformen und Glühen noch verhältnismäßig grobkörnig, und selbst bei den Proben mit etwa 1% Mn tritt eine deutliche Kornvergrößerung ein. Es sind daher zusätzliche Sicherheitsmaßnahmen erforderlich, beispielsweise eine geeignete Wärmebehandlung (Vorglühen)[9]). Dies Verfahren[10]) besteht darin, daß die Bleche, die durch eine beliebig hohe Kaltverformung auf die gewünschte Dicke gebracht werden können, vor der Aushärtungsbehandlung in einem bestimmten Temperaturgebiet unterhalb der Lösungsglühtemperatur geglüht werden.

[9]) K. L. Dreyer und M. Hansen, Z. Metallkde. Bd. 34 (1942) S. 121 bis 125.

[10]) DRP.-Anm. v. 17. 3. 39 nebst Zusatzanm. und Auslandspatente.

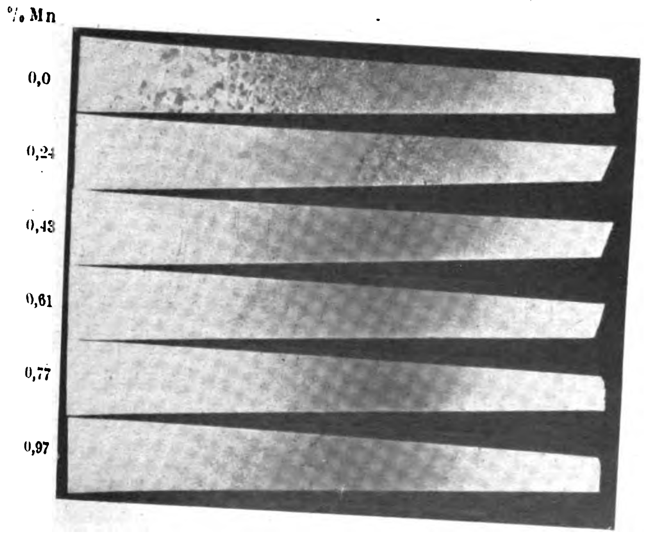


Bild 16

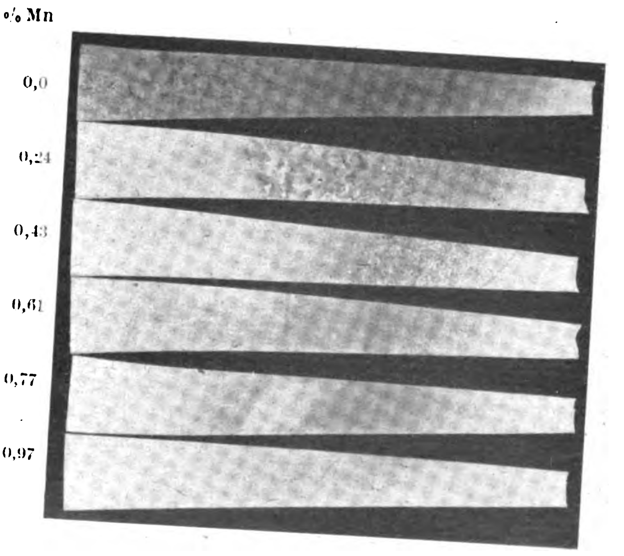


Bild 17

Bild 16 und 17. Einfluß des Mangans auf das Rekristallisationsgefüge einer um 44% kaltgewalzten Al-Cu-Mg-Legierung mit 2,8% Cu und 1,7% Mg nach einmaliger (Bild 16) und viermaliger (Bild 17) kritischer Reck- und Glühbehandlung.

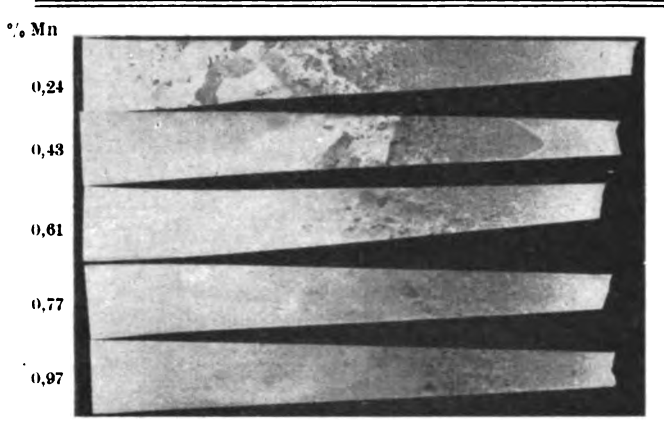


Bild 18. Einfluß des Mangans auf das Rekristallisationsgefüge einer um 72 % kaltgewalzten Al-Cu-Mg-Legierung mit 2,8 % Cu und 1,7 % Mg nach viermaliger kritischer Reck- und Glühbehandlung

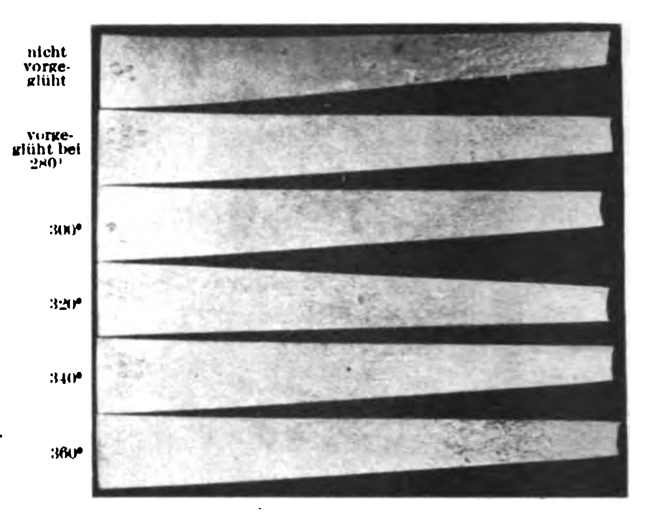


Bild 19. Wirkung eines einstündigen Vorglühens auf das Rekristallisationsgefüge einer um 72 % kaltgewalzten Al-Cu-Mg-Legierung mit 2,8 % Cu, 1,7 % Mg und 0,6 % Mn nach viermaliger kritischer Reck- und Glühbehandlung.

Auch bei »Duralumin Cu 30« führt eine derartige Vorglühbehandlung zu vollem Erfolg, wie nachstehendes Beispiel zeigt. Keilzugstäbe aus der Legierung mit 2,8% Cu, 1,7% Mg und 0,61% Mn, deren letzter Abwalzgrad 72% betrug, wurden 1 Stunde bei Temperaturen zwischen 280 und 360° vorgeglüht und dann mehrmals bei 500° geglüht und jeweils zerrissen. Bild 19 läßt erkennen, daß das Rekristallisationsgefüge der bei 300 bis 340° vorgeglühten Proben feinkörnig geblieben ist, wohingegen die nicht bzw. bei tieferen Temperaturen vorgeglühten Stäbe infolge Kornvergröberung nicht den Erfordernissen für Tiefziehbleche entsprechen; das gleiche gilt für Vorglühtemperaturen von 360° und höher.

5. Einfluß des Eisens.

Frühere Untersuchungen[11]) haben gezeigt, daß Eisenzusätze bis etwa 0,5% die Eigenschaften der Al-Cu-Mg-Legierungen mit 4,2% Cu nur wenig beeinflussen, in größeren Mengen aber auf die Festigkeit und Verformbarkeit schädlich wirken. Entsprechende Versuche wurden nun an Blechen aus »Duralumin Cu 30« mit 2,9% Cu, 0,65% Mn, 1,7% Mg, 0,25% Si und Eisengehalten von 0,15 bis 0,98% durchgeführt.

Wie Bild 20 erkennen läßt, wird die Geschwindigkeit der Härteänderung bei 20° nach dem Abschrecken von 500° erst bei Eisengehalten über 0,6% merklich verringert.

Nach Bild 21, das die Werte der mechanischen Eigenschaften im kaltausgehärteten Zustand für die Lösungsglühtemperaturen 480 und 500° in Abhängigkeit vom Eisengehalt wiedergibt, nimmt die Zugfestigkeit bis zu 0,6% Fe nur wenig und erst bei höheren Eisenzusätzen stärker ab. Noch geringer ist die Abnahme der Streckgrenze mit dem Eisengehalt. Auch die Dehnung und Tiefung erfahren mit steigenden Eisenzusätzen bis etwa 0,6% nur eine verhältnismäßig geringe Verschlechterung. Auf Grund dieser Ergebnisse konnte die zulässige Höchstgrenze für Eisen in »Duralumin Cu 30« nach DIN E 1725 auf 0,6% festgesetzt werden.

Von Bedeutung ist noch der Einfluß verschiedener Lösungsglühtemperaturen auf die Festigkeitseigenschaften der Legierungsreihe mit 3% Cu und verschiedenen Eisenzusätzen. Aus Bild 22 läßt sich entnehmen, daß die Werte der Härte, Zugfestigkeit und Streckengrenze mit steigender Abschrecktemperatur um so stärker zunehmen, je geringer der Eisengehalt der betreffenden Legierung ist. Dieser Befund, der mit den Ergebnissen an kupferreicheren Legierungen in Einklang steht, erklärt sich wohl durch die mit steigenden Eisengehalten abnehmende Löslichkeit des Kupfers in Aluminium. Der Abfall der Festigkeitseigenschaften, der auf beginnende Verbrennung des Gefüges zurückzuführen ist, wird mit steigenden Eisenzusätzen zu höheren Abschrecktemperaturen verschoben; ebenso wie bei

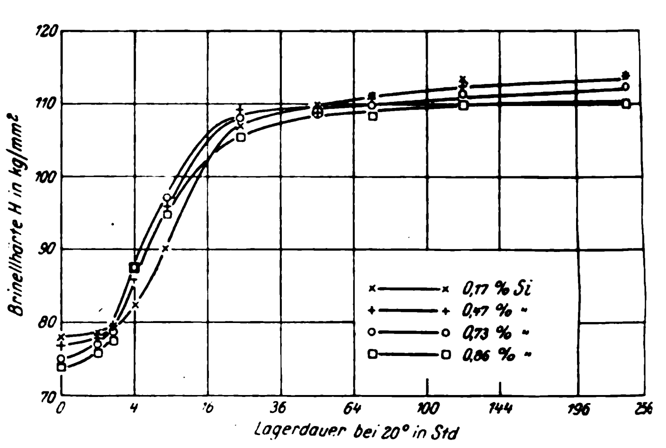


Bild 20. Zeitliche Härteänderung von »Duralumin Cu 30« mit verschiedenen Eisengehalten nach dem Abschrecken von 500°.

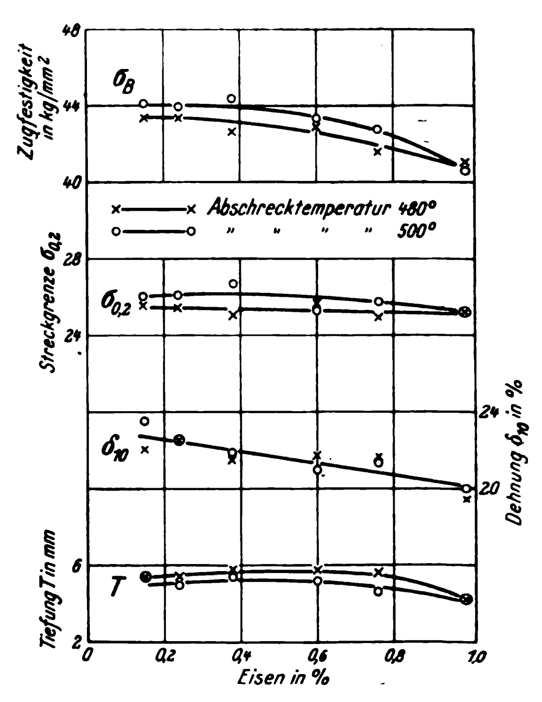
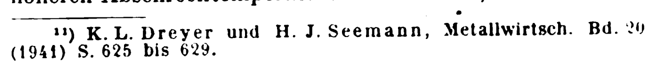
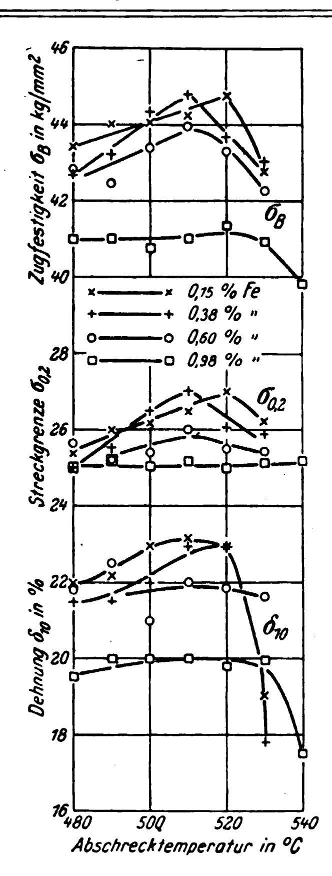


Bild 21. Wirkung des Eisens auf die mechanischen Eigenschaften von kaltausgehärtetem »Duralumin Cu 30«.



[11]) K. L. Dreyer und H. J. Seemann, Metallwirtsch. Bd. 20 (1941) S. 625 bis 629.



den Legierungen mit etwa 4% Cu wird demnach auch bei »Duralumin Cu 30« die Verbrennungstemperatur durch Eisenzusätze erhöht.

6. Zusammenfassung

An unplattierten 1 bis 2 mm dicken Blechen wurde der Einfluß verschiedener Magnesium-, Silizium-, Mangan- und Eisengehalte auf die Eigenschaften der Legierung »Duralumin Cu 30« mit 3% Cu untersucht, wobei sich folgende Gesetzmäßigkeiten ergaben:

Magnesiumgehalte wirken bis etwa 2% festigkeitserhöhend, verringern aber die Verformbarkeit. Die günstigsten Gesamteigenschaften werden mit einem Magnesiumgehalt von etwa 1,4% erzielt. Der Rückgang der Kaltaushärtung durch kurzzeitiges Erwärmen und die erneute Kaltaushärtung bei anschließender Raumtemperaturlagerung werden durch Magnesiumzusätze über 0,5% verringert.

Silizium beeinflußt die Kaltaushärtung nur verhältnismäßig wenig, beschleunigt und verstärkt aber die Warmaushärtung.

Mangan wirkt bis zu Gehalten von etwa 0,8% verfestigend und vermindert die Neigung zu grobkörniger Rekristallisation bei kritischem Verformen und Glühen.

Kleine Eisenzusätze (bis 0,6%) sind nur von geringem Einfluß auf die Eigenschaften, höhere Eisengehalte beeinträchtigen jedoch die Festigkeitswerte und die Verformbarkeit.

Bild 22. Festigkeitseigenschaften von kaltausgehärtetem »Duralumin Cu 30« mit verschiedenen Eisengehalten in Abhängigkeit von der Lösungstemperatur.



Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB) Berlin-Adlershof

Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 12 enthält Arbeiten von: A. Weigand S. 333—340, L. Schwarz S. 341—372

LUFTF.-FORSCHG. BAND 20 | LFG. 12 SEITE 333 BIS 372 | MÜNCHEN, 8. 2. 1944

Diese Lieferung enthält den Bandtitel und das Jahresinhaltsverzeichnis von Band 20

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Die Herren Verfasser erhalten von ihren Aufsätzen jeweils 50 Fortdrucke ohne besondere Anforderung.

Erscheinungsweise: Die Schriftenreihe erscheint in Monatslieferungen. Sie kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Halbjahresbezugspreis RM. 12.– einschließlich Zeitungs- und Verpackungsgebühr, zuzüglich Zustellgebühr.

Ausland siehe oben: Halbjährlich durch die Post (in solchen Ländern, in denen Postbezug zugelassen) oder durch den Buchhandel bei jahresweiser Bestellung.

Einzelheft: RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr. Nach dem Ausland nur gegen Voreinsendung des Betrages.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangenen Bandes erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Einzellieferungen werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Schriftenreihe direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Bandes Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 20 · 8. Februar 1944 · Lfg. 12

Das Torsionsproblem für Stäbe von kreisabschnittförmigem Querschnitt.

Von A. Weigand.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Triebwerk-Mechanik.

Die Randwertaufgabe, auf die das Torsionsproblem prismatischer Stäbe führt, wird für den kreisabschnittförmigen Querschnitt näherungsweise gelöst. Verdrehungs- und Dehnungsmessungen zeigen, daß die Näherungslösung hinreichend genau mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

Gliederung.

I. Die Grundgleichung des Torsionsproblems und ihre näherungsweise Lösung mittels der Methode der kleinsten Quadrate.

Das Torsionsproblem für den prismatischen Stab, der an den Stabenden durch Torsionsmomente beansprucht wird, kann auf folgende mathematische Form gebracht werden. Es ist eine Funktion $f(y, z)$ gesucht, die in der Querschnittsebene der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -1 \quad \dots \dots \quad (1)$$

und am Rand des Querschnittes der Bedingung

$$\bar{f} = 0 \quad \dots \dots \quad (2)$$

genügt. Aus dieser Funktion $f(y, z)$ ergibt sich der Drillwiderstand J_d des Stabes gemäß

$$J_d = 4 \int\int f(y, z)\, dy\, dz \quad \dots \dots \quad (3),$$

wobei das Doppelintegral über den Stabquerschnitt zu erstrecken ist. Für den Drehwinkel ψ des Stabes von der Länge l erhält man:

$$\psi = \frac{M_d\, l}{\mathfrak{G}\, J_d} \quad \dots \dots \quad (4).$$

M_d ist das beanspruchende Drehmoment, $\mathfrak{G}$ der Gleitmodul des Stabwerkstoffes.

Die Komponenten der Schubspannung ergeben sich aus

$$\tau_{xy} = -\frac{2 M_d}{J_d} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = \frac{2 M_d}{J_d} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \dots \quad (5).$$

Wegen der Gleichungen (5), die das identische Erfülltsein der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

gewährleisten, nennt man $f(y, z)$ die Spannungsfunktion des Torsionsproblems. Die Differentialgleichung (1) mit der

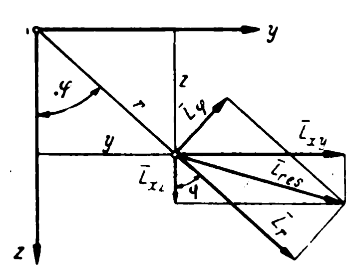


Bild 1. Die Koordinaten der Querschnittspunkte und die Komponenten der Schubspannung.

Randbedingung (2) ergibt sich aus der Betrachtung des Formänderungszustandes und dem Zusammenhang zwischen Spannung und Formänderung, der durch das Hookesche Gesetz gegeben ist.

Häufig ist es zweckmäßig, im Stabquerschnitt statt der rechtwinkligen Koordinaten (y, z) Polarkoordinaten r, φ einzuführen, Bild 1. Dann lautet die Differentialgleichung der Spannungsfunktion nebst der Randbedingung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -1 \quad \dots \quad (1a)$$

$$\bar{f} = 0 \quad \dots \dots \quad (2a),$$

während sich der Drillwiderstand aus

$$J_d = 4 \int\int f(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi \quad \dots \dots \quad (3a)$$

und die Schubspannungskomponenten aus

$$\tau_r = \frac{2 M_d}{J_d} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\tau_\varphi = -\frac{2 M_d}{J_d} \frac{\partial f}{\partial r} \quad \dots \dots \quad (5a)$$

ergeben.

Auf strenge Verfahren zur Lösung des durch (1) und (2) gestellten Potentialproblems soll hier nicht eingegangen werden. Zur näherungsweisen Lösung kann man grundsätzlich drei Wege einschlagen. Erstens kann man einen Ansatz machen, der die Randbedingung erfüllt, die Differentialgleichung dagegen nicht. Ersetzt man nun die Differentialgleichung durch ein Variationsproblem, so gelangt man zu dem bekannten Ritzschen Verfahren. Zweitens kann man einen die Differentialgleichung erfüllenden Ansatz machen und die Randbedingung entweder in einzelnen Punkten oder »im Mittel« erfüllen, wobei später noch genauer zu erklären ist, was »im Mittel« bedeutet. Endlich kann man auch die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzen und das auf Grund der Randbedingung

entstehende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Verfahrens von Liebmann-Wolf durch Iteration lösen. Hier soll nun auf das an zweiter Stelle genannte Verfahren näher eingegangen werden, auf das u. a. von Trefftz und St. Bergmann aufmerksam gemacht wurde (s. [1] u. [2]).

Da im folgenden das Torsionsproblem des Kreisabschnittes behandelt werden soll, gehen wir von der Differentialgleichung (1a) aus. Sie hat die Partikularlösungen

$$f_0 = -\frac{r^2}{4}, \quad f_k = r^k \cos k\varphi, \quad g_k = r^k \sin k\varphi \quad . \; . \quad (6),$$

aus denen man die allgemeinere Lösung

$$f = -\frac{r^2}{4} + \sum_0^n [a_k f_k + b_k g_k] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

aufbauen kann. Es handelt sich nun um die Ermittlung der Koeffizienten a_k und b_k. Das Nächstliegende ist, sie so zu bestimmen, daß die Randbedingung (2a) in einzelnen Punkten erfüllt ist. Auf diese Weise wurden u. a. bereits Aufgaben aus dem Gebiet der Plattenbiegung gelöst. Ein zweiter Weg ist folgender. Man verlangt nicht die genaue Erfüllung der Randbedingung an von vornherein festliegenden Punkten, sondern man fordert, daß durch Wahl der Koeffizienten das Integral der Quadrate der Randwerte möglichst klein wird; man sagt dann, die Randbedingung ist »im Mittel« erfüllt.

Dieses Verfahren soll im folgenden als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet werden. In einer Formel lautet die an die Koeffizienten gestellte Forderung

$$\bar{J} = \oint \bar{f}^2 \, d\bar{s} = \text{Min.} \quad ds = \text{Randelement.} \; . \; . \; . \quad (8).$$

Das Integral ist über den ganzen Rand zu erstrecken; dies ist durch das Zeichen $\oint$ angedeutet. Setzt man (7) in (8) ein, so erhält man

$$\oint \left\{ -\frac{\bar{r}^2}{4} + a_0 + \sum_1^n [a_k f_k(\bar{r}, \bar{\varphi}) + b_k g_k(\bar{r}, \bar{\varphi})] \right\}^2 d\bar{s} = \text{Min.} \quad . \; . \; . \quad (9).$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus der Forderung

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial b_k} = 0 \quad k = 1 \; . \; . \; . \; n. \quad (10).$$

Aus (10) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die $2n + 1$ Unbekannten a_0, a_k und b_k.

Die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens hängt davon ab, ob es gelingt, mit tragbarem Rechenaufwand ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten, und zwar insbesondere für die Spannungen; m. a. W. darf die Zahl der aufzulösenden linearen Gleichungen nicht zu groß werden.

II. Anwendung auf den Halbkreis und den Kreisabschnitt.

1. Der Halbkreis; strenge und näherungsweise Lösung mittels der Methode der kleinsten Quadrate.

Für den Kreissektor wurde die strenge Lösung des Torsionsproblems von St. Venant gegeben (s. Handb. d. Physik Bd. VI S. 153/154). Der Sonderfall des Halbkreises ist leicht zu behandeln, wie nun gezeigt werden soll.

Um in Übereinstimmung mit den beim Kreisabschnitt verwendeten Bezeichnungen zu bleiben (s. Bild 6), wird für den Halbkreis das Koordinatensystem nach Bild 2 gewählt. Auf dem geraden Rand AB ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $3\,\frac{\pi}{2}$; im Querschnitt ist $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$.

Für die Spannungsfunktion macht man den Ansatz

$$f(r, \varphi) = \sum_{1, 3 \ldots}^{\infty} X_k(r) \cos k\varphi \quad . \; . \; . \; . \quad (11);$$

er erfüllt bereits die Randbedingung auf dem geraden Rand, da k eine ungerade Zahl ist. Ferner entwickelt man die Konstante 1 im Intervall $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ in eine Fourier-Reihe:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{1, 3 \ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{\cos k\varphi}{k} \quad . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Setzt man (11) und (12) in (1a) ein, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von $\cos k\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$X_k'' + \frac{1}{r} X_k' - \frac{k^2}{r^2} X_k = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k} \quad . \; . \quad (13).$$

Die bei $r = 0$ endliche Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$X_k = C_k r^k - \frac{4}{k\pi} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{4 - k^2} r^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Da $X_k(R) = 0$ sein muß, ergibt sich

$$C_k = \frac{4}{k\pi} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{4 - k^2} R^{2-k} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

und folglich

$$f(r, \varphi) = \frac{4R^2}{\pi} \sum_{1, 3, 5 \ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k(4 - k^2)} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^k - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \cos k\varphi \quad (16).$$

Gleichung (16) ist die Lösung des Torsionsproblems für den Halbkreis.

Aus (16) wird der Drillwiderstand J_d und die Schubspannungsverteilung berechnet. Man findet aus (3a) auf drei Stellen genau

$$J_d = 0{,}297\, R^4 = \varkappa\, R^4$$

und aus (5a)

$$\tau_r = \frac{8}{\varkappa\pi} \frac{M_d}{R^3} \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \sin\varphi + \frac{1}{3^2 - 4}\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{r}{R}\right) \sin 3\varphi - \frac{1}{5^2 - 4}\left(\frac{r^4}{R^4} - \frac{r}{R}\right) \sin 5\varphi + - \ldots \right] \quad . \; . \quad (17)$$

$$\tau_\varphi = \frac{8}{\varkappa\pi} \frac{M_d}{R^3} \left[\frac{1}{3}\left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \cos\varphi + \frac{1}{3(3^2 - 4)}\left(3\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R}\right) \cos 3\varphi - \frac{1}{5(5^2 - 4)}\left(5\frac{r^4}{R^4} - 2\frac{r}{R}\right) \cos 5\varphi + - \ldots \right] \quad . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Die größte Schubspannung tritt bei A (Bild 2) auf, d. h. für $r = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dort ist

$$\tau_{max} = \frac{8}{3\varkappa\pi} \frac{M_d}{R^3} = 2{,}85 \frac{M_d}{R^3} \quad . \; . \; . \; . \quad (19).$$

Für die Schubspannung bei C (Bild 2) findet man:

$$\tau_\varphi^C = 2{,}44 \frac{M_d}{R^3}.$$

Nach der strengen Lösung soll nun für den Halbkreis eine Näherungslösung mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet werden.

Da der Querschnitt zu $\varphi = \pi$ symmetrisch ist, macht man nach Gleichung (7) den Ansatz:

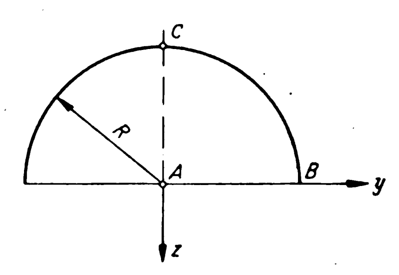


Bild 2. Halbkreisquerschnitt mit Koordinantensystem.

$$f = -\frac{r^2}{4} + \sum_0^{\infty} a_k r^k \cos k\varphi \quad \ldots\ldots (20).$$

Es ist zweckmäßig, statt der Koeffizienten a_k die Größe x_k durch

$$ak = \frac{R^2}{4}\frac{x_k}{R^k} \quad \ldots\ldots (21)$$

einzuführen. Mit $\lambda = \frac{r}{R}$ lautet dann der Ansatz (20)

$$f = \frac{R^2}{4}\left(-\lambda^2 + \sum_0^n x_k \lambda^k \cos k\varphi\right) \quad \ldots\ldots (20a).$$

Die Randwerte sind

auf AB (s. Bild 2):

$$\bar{f}_{AB} = \frac{R^2}{4}\left(-\lambda^2 + \sum_0^n x_k \lambda^k \cos\frac{k\pi}{2}\right)$$

auf BC (s. Bild 2):

$$\bar{f}_{BC} = \frac{R^2}{4}\left(-1 + \sum_0^n x_k \cos k\varphi\right).$$

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert als Bedingungsgleichung für x_k

$$\int_0^1 \left(-\lambda^2 + \sum_0^n x_k \lambda^k \cos\frac{k\pi}{2}\right)^2 d\lambda + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-1 + \sum_0^n x_k \cos k\varphi\right)^2 d\varphi = \text{Min} \quad \ldots\ldots (22).$$

Es muß also

$$\int_0^1 \left(-\lambda^2 + \sum_0^n x_k \lambda^k \cos\frac{k\pi}{2}\right)\lambda^l \cos\frac{l\pi}{2}\, d\lambda + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-1 + \sum_0^n x_k \cos k\varphi\right)\cos l\varphi\, d\varphi = 0$$

sein. Demnach gilt für die x_k das lineare Gleichungssystem mit symmetrischer Matrix

$$\sum_0^n A_{kl}\, x_k = B_l \qquad l = 0, 1, \ldots n \quad \ldots\ldots (23)$$

mit

$$A_{00} = 1 + \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots (24a)$$

$$A_{kk} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos^2\frac{k\pi}{2}}{2k+1} \qquad k = 1, \ldots n \quad \ldots\ldots (24b)$$

$$A_{kl} = \frac{\cos\frac{k\pi}{2}\cos\frac{l\pi}{2}}{k+l+1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-l)\frac{\pi}{2}}{k-l} + \frac{\sin(k+l)\frac{\pi}{2}}{k+l}\right] \qquad k \neq l \quad \ldots\ldots (24c)$$

$$B_0 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} \qquad B_l = \frac{\cos\frac{l\pi}{2}}{l+3} - \frac{\sin\frac{l\pi}{2}}{l} \qquad l = 1, \ldots n \quad \ldots\ldots (24d).$$

Die Zahlenrechnung wurde für $n = 1, 2 \ldots 6$ durchgeführt. Für $n = 6$ lautet das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x_0 & -x_1 & -\frac{1}{3}x_2 & +\frac{1}{3}x_3 & +\frac{1}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_5 & -\frac{1}{7}x_6 & = \frac{1}{3}+\frac{\pi}{2} \\
-x_0 & +\frac{\pi}{4}x_1 & -\frac{1}{3}x_2 & & +\frac{1}{15}x_4 & & -\frac{1}{35}x_6 & = -1 \\
-\frac{1}{3}x_0 & -\frac{1}{3}x_1 & +\left(\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}\right)x_2 & -\frac{3}{5}x_3 & -\frac{1}{7}x_4 & +\frac{5}{21}x_5 & +\frac{1}{9}x_6 & = -\frac{1}{5} \\
\frac{1}{3}x_0 & & -\frac{3}{5}x_2 & +\frac{\pi}{4}x_3 & -\frac{3}{7}x_4 & & +\frac{1}{9}x_6 & = \frac{1}{3} \\
\frac{1}{5}x_0 & +\frac{1}{15}x_1 & -\frac{1}{7}x_2 & -\frac{3}{7}x_3 & +\left(\frac{1}{9}+\frac{\pi}{4}\right)x_4 & -\frac{5}{9}x_5 & -\frac{1}{11}x_6 & = \frac{1}{7} \\
-\frac{1}{5}x_0 & & +\frac{5}{21}x_2 & & -\frac{5}{9}x_4 & +\frac{\pi}{4}x_5 & -\frac{5}{11}x_6 & = -\frac{1}{5} \\
-\frac{1}{7}x_0 & -\frac{1}{35}x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & -\frac{1}{11}x_4 & -\frac{5}{11}x_5 & +\left(\frac{1}{13}+\frac{\pi}{4}\right)x_6 & = -\frac{1}{9}.
\end{array}$$

Die Koeffizienten des Gleichungssystems wurden in Dezimalbrüche verwandelt, und zwar wurde noch die fünfte Stelle hinter dem Komma berücksichtigt. Es wurden sechs Näherungen berechnet; für die erste Näherung wurde $x_2 = x_3 = \ldots = x_6 = 0$ gesetzt. Das Ergebnis zeigt Tafel 1.

Tafel 1. Die Näherungen für die Unbekannte in dem für den Halbkreis geltenden Gleichungssystem (23).

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1. Näherung:			
0,486	—0,654	—	—	—	—	—
			2. Näherung:			
0,1135	—1,399	—0,638	—	—	—	—
			3. Näherung:			
0,0136	—1,6553	—0,9412	—0,3004	—	—	—
			4. Näherung:			
— 0,0086	—1,7364	—1,0859	—0,4566	—0,10095	—	—
			5. Näherung:			
— 0,0068	—1,7310	—1,0711	—0,43465	—0,0835	—0,00855	—
			6. Näherung:			
— 0,00022	—1,6978	—0,9967	—0,3251	+0,0308	+0,0900	+0,0359

Setzt man den Ansatz (20a) in die Formel (3a) für die Drehsteifigkeit J_d ein, so erhält man

$$J_d = 2\,R^4\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\,x_0 - \frac{1}{3}\,x_1 + \frac{1}{3\cdot 5}\,x_3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5\cdot 7}\,x_5 + - \ldots\right) = \varkappa\,R^4 \quad (25)$$

Demnach erhält man für $\varkappa$ folgende Näherungen, die auf drei Stellen genau berechnet sind:

$\varkappa_{(1)} = 0{,}414$ $\quad\varkappa_{(2)} = 0{,}326$ $\quad\varkappa_{(3)} = 0{,}300$

$\varkappa_{(4)} = 0{,}298$ $\quad\varkappa_{(5)} = 0{,}300$ $\quad\varkappa_{(6)} = 0{,}298$

Schon die dritte Näherung, die aus vier linearen Gleichungen berechnet wurde, ergibt also für die Drehsteifigkeit einen Wert, der sich nur um $^2/_3$% von dem genauen unterscheidet.

Zur Berechnung der Spannungen setzt man (20a) in (5a) ein und findet

$$\tau_r = -\frac{M_d}{2\,\varkappa\,R^3}\sum_1^n k\,x_k\,\lambda^{k-1}\sin k\,\varphi \quad \ldots \quad (26)$$

$$\tau_\varphi = -\frac{M_d}{2\,\varkappa\,R^3}\sum_1^n(-2\,\lambda + k\,x_k\,\lambda^{k-1}\cos k\,\varphi) \quad (27).$$

Für die Schubspannungen $\tau_\varphi^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ und $\tau_r^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ auf dem geraden Rand findet man

$$\tau_r^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{M_d}{2\,\varkappa\,R^3}\,(x_1 - 3\,x_3\,\lambda^2 + 5\,x_5\,\lambda^4 - + \ldots) \quad (28)$$

$$\tau_\varphi^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{M_d}{2\,\varkappa\,R^3}\,(-2\,\lambda - 2\,x_2\,\lambda + 4\,x_4\,\lambda^3 - 6\,x_6\,\lambda^5 + -) \quad \ldots \quad (29).$$

Für $\lambda = 1$ sind die Schubspannungen

$$\tau_r^{\lambda=1} = -\frac{M_d}{2\,\varkappa\,R^3}\,(x_1\sin\varphi + 2\,x_2\sin 2\,\varphi + \ldots) \quad (30)$$

$$\tau_\varphi^{\lambda=1} = -\frac{M_d}{2\,\varkappa\,R^3}\,(-2 + x_1\cos\varphi + 2\,x_2\cos 2\,\varphi + \ldots\ldots) \quad \ldots \quad (31).$$

Insbesondere erhält man für die beiden größten Schubspannungen

$$\tau_r^{\varphi=\frac{\pi}{2},\,\lambda=0} = \tau_{max} = -\frac{x_1}{2\,\varkappa}\,\frac{M_d}{R^3} \quad \ldots \quad (32)$$

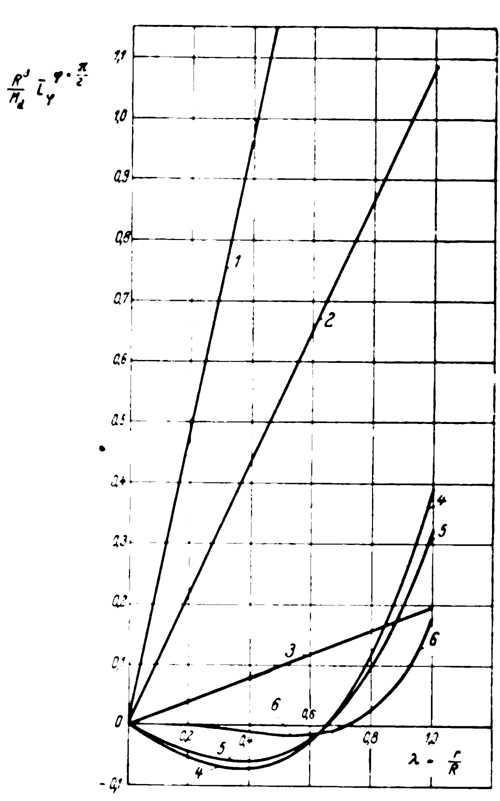


Bild 3. Die Näherungen für die Schubspannung τ_φ auf dem geraden Rand AB des Halbkreisquerschnittes.
1: 1. Näherung, 2: 2. „ 3: 3. „ 4: 4. Näherung, 5: 5. „ 6: 6. „

$$\tau_\varphi^{\varphi=\pi,\,\lambda=1} = \tau_\varphi^C = -\frac{M_d}{2\,\varkappa\,R^3}\,(-2 - x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + \ldots) \quad \ldots \quad (33).$$

Von diesen Ausdrücken müssen wenigstens näherungsweise verschwinden: $\tau^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ und $\tau_1^{\lambda=1}$.

Es soll nun nachgeprüft werden, wie weit diese Bedingungen für die verschiedenen Näherungen erfüllt sind und wie groß die Unterschiede zwischen den genauen Werten von τ_{max} bzw. τ_φ^C und den angenäherten sind. Das Ergebnis zeigen Tafel 2 und Bild 3, 4 und 5.

Tafel 2. Die Näherungswerte für τ_{max} und τ_φ^C.

1. Näherung	2. Näherung	3. Näherung	4. Näherung	5. Näherung	6. Näherung	Genauer Wert
$\frac{R^3}{M_d}\,\tau_{max} = 0{,}790$	2,15	2,76	2,91	2,88	2,85	2,85
$\frac{R^3}{M_d}\,\tau_\varphi^C = 1{,}625$	2,79	2,2	2,46	2,47	2,41	2,44

Die vierte Näherung ergibt für τ_{max} und τ_φ^C bereits ein brauchbares Ergebnis, das durch die beiden folgenden noch etwas verbessert wird.

In Bild 3 und 4 sind die Näherungen für die Schubspannungen $\tau_\varphi^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ und $\tau_r^{\lambda=1}$ aufgetragen, die eigentlich verschwinden müssen. Es zeigt sich, daß diese Bedingung von der fünften und sechsten Näherung schon gut erfüllt wird. Ferner wurde in Bild 5 die Schubspannung $\tau_r^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ auf dem geraden Rand in Abhängigkeit von $\lambda = \frac{r}{R}$ aufgetragen. Man sieht, daß sich die 4., 5. und 6. Näherung nur wenig voneinander und von der mit g bezeichneten genauen Spannungsverteilung unterscheiden. Eine starke Abwei-

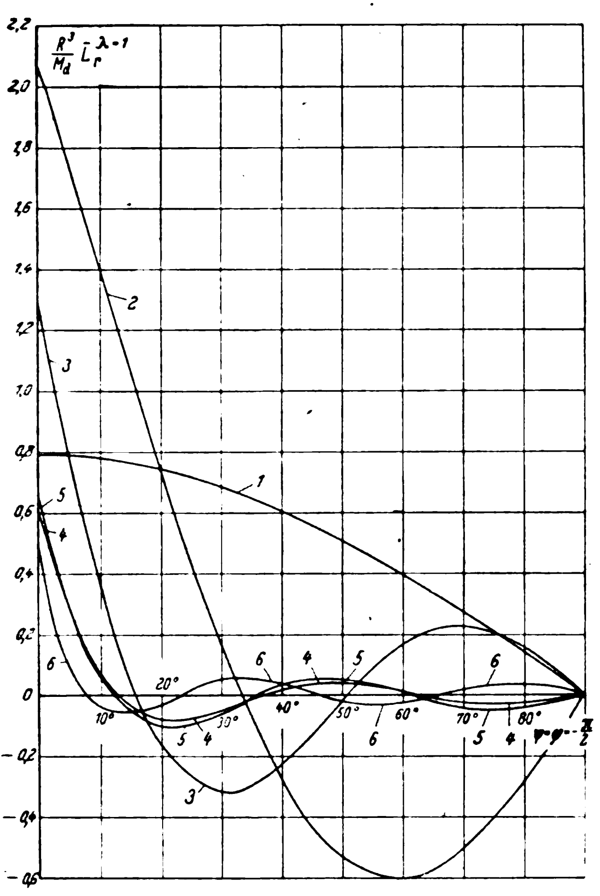


Bild 4. Die Näherungen für die Schubspannung τ_r auf dem Rand BC des Halbkreisquerschnittes.
1: 1. Näherung, 2: 2. „ 3: 3. „ 4: 4. Näherung, 5: 5. „ 6: 6. „

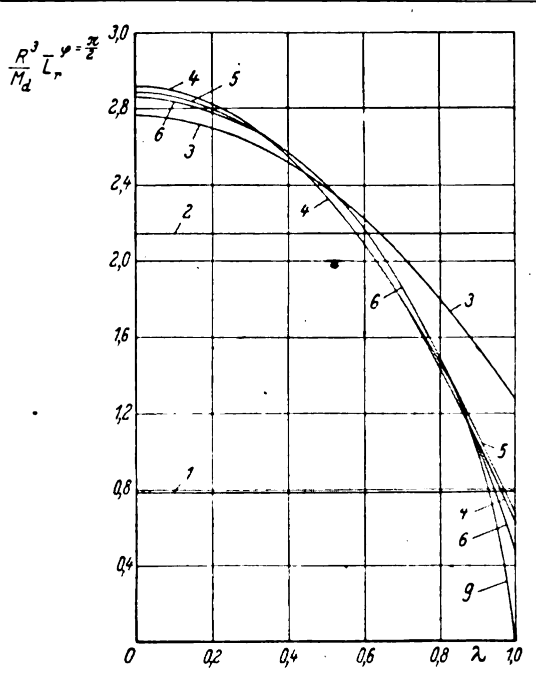


Bild 5. Die Näherungen für die Schubspannung τ_r auf dem geraden Rand AB des Halbkreisquerschnittes.
1: 1. Näherung, 2: 2. „ 3: 3. „ 4: 4. Näherung, 5: 5. „ 6: 6. „ g: genaue Lösung.

chung tritt nur noch in der unmittelbaren Umgebung der Ecke (Punkt B in Bild 2) auf.

2. Der Kreisabschnitt.

a) Näherungslösung mittels der Methode der kleinsten Quadrate. — Die Methode der kleinsten Quadrate soll nun auf den Kreisabschnitt angewandt werden. Da der Querschnitt zu $\varphi = 0$ symmetrisch ist (s. Bild 6), macht man für die Spannungsfunktion f den Ansatz (20a). Die Randwerte der Spannungsfunktion sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\overline{f}_{AB} = \frac{R^2}{4}\left(\frac{-\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi} + \sum_0^n x_k \frac{\cos^k\alpha}{\cos^k\varphi}\cos k\varphi\right) 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (34a)$$

$$\overline{f}_{BC} = \frac{R^2}{4}\left(-1 + \sum_0^n x_k \cos k\varphi\right) \alpha \leq \varphi \leq \pi \quad (34b).$$

Ist ds_1 ein Element des geraden Randes AB, ds_2 ein Element des Kreisbogens BC, so ist

$$ds_1 = R\cos\alpha \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \quad \ldots\ldots (35a)$$

$$ds_2 = R\,d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35b)$$

Demnach lautet der Ausdruck, der durch die Wahl der Koeffizienten x_k zu einem Minimum zu machen ist

$$\overline{J} = \int_0^\alpha \left[-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi} + \sum_0^n x_k \frac{\cos^k\alpha}{\cos^k\varphi}\cos k\varphi\right]^2 d\varphi \frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi} + \int_\alpha^\pi \left[-1 + \sum_0^n x_k\cos k\varphi\right]^2 d\varphi \quad (36).$$

Aus $\frac{\partial \overline{J}}{\partial x_k} = 0$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit symmetrischer Matrix für die Beiwerte x_k, das wieder in der Form der Gleichung (23) geschrieben sei. Die Koeffizienten A_{kl} und die rechten Seiten sind durch

$$A_{00} = \pi - \alpha + \sin\alpha \quad \ldots\ldots (37a)$$

$$A_{kk} = \cos^{2k+1}\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos^2 k\varphi}{\cos^{2k+2}\varphi} d\varphi + \frac{\pi-\alpha}{2} - \frac{\sin 2k\alpha}{4k} \quad k = 1, 2, \ldots n \quad (37b)$$

$$A_{kl} = \cos^{k+l+1}\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos k\varphi\cos l\varphi}{\cos^{k+l+2}\varphi} d\varphi - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-l)\varphi}{k-l} + \frac{\sin(k+l)\varphi}{k+l}\right] \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots n \\ l = 0, 1, \ldots n \end{matrix} \quad (37c)$$

$$B_0 = \pi - \alpha + \sin\alpha\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right) \quad . . (37d)$$

$$B_l = \cos^{l+3}\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos l\varphi}{\cos^{l+4}\varphi} d\varphi - \frac{\sin l\alpha}{l} \quad l = 1, 2, \ldots n \quad (37e)$$

gegeben.

Die in den Gleichungen (37) vorkommenden Integrale sind von der Form $\int_0^\alpha \frac{\cos p\varphi}{\cos^q\varphi}$; sie lassen sich ermitteln, indem man $\cos p\varphi$ durch $\cos^p\varphi$, $\cos^{p-2}\varphi$ usw. ausdrückt. Auf die Wiedergabe der z. T. etwas umfangreichen Formeln sei verzichtet.

Die Matrix A_{kl} wurde nebst den rechten Seiten B_l des Gleichungssystems (23) mittels der Rechenmaschine in Abhängigkeit von α berechnet, und zwar auf fünf Stellen. Um den Rechenaufwand in erträglichen Grenzen zu halten, wurde bis zu den Werten $k, l = 6$ gegangen. Das Ergebnis zeigt Zahlentafel 3. Nun wurden aus (23) die Unbekannten $x_0, x_1 \ldots x_6$ berechnet, wobei das Verfahren von Gauß angewandt wurde; das Ergebnis ist in Zahlentafel 4 zusammengestellt.

Nachdem die Unbekannten $x_0, x_1 \dots x_6$ ermittelt sind, können der Drillwiderstand J_d und die Schubspannungen errechnet werden.

Aus Gleichung (3a) folgt für den Drillwiderstand des Stabes

$$J_d = 8 \iint_{ABC} f(r, \varphi)\, r\, d r\, d \varphi .$$

Das Doppelintegral ist über das Gebiet ABC, s. Bild 6, zu erstrecken. Nun ist

$$\iint_{ABC} = \iint_{AOC} + \iint_{OBC} = \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{\bar r = R \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}} f(r,\varphi)\, r\, dr + \int_{\alpha}^{\pi} d\varphi \int_0^{R} f(r,\varphi)\, r\, dr .$$

Setzt man in diese Formel den Ausdruck für die Spannungsfunktion f aus Gleichung (23a) ein, so erhält man

$$J_d = R^4 \Big[-\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \left(\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right) + x_0 \left(\pi - \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) + 2 \sum_1^n \frac{x_k}{k+2} \left(J_k - \frac{\sin k\alpha}{k}\right)\Big] \equiv \varkappa R^4 \quad \dots \dots (38)$$

mit

$$J_k = \cos^{k+2}\alpha \int_0^{\alpha} \frac{\cos k\varphi}{\cos^{k+2}\varphi}\, d\varphi \quad \dots \dots (39).$$

Aus den Gleichungen (5) und (5a) erhält man für die Schubspannungen folgende Ausdrücke

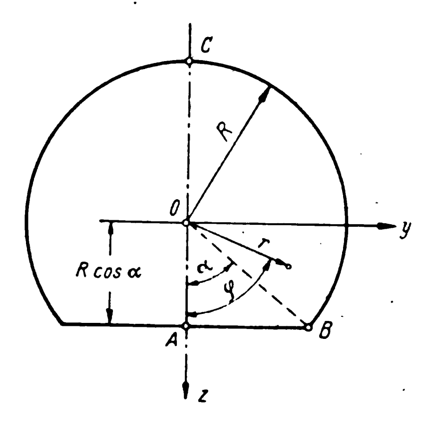


Bild 6. Bezeichnungen am Kreisabschnitt.

$$\tau_{xy} = -\frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2\lambda\cos\varphi - \sum_1^n k\, x_k\, \lambda^{k-1}\cos(k-1)\varphi\right] \quad (40)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2\lambda\cos\varphi + \sum_2^n k\, x_k\, \lambda^{k-1}\sin(k-1)\varphi\right] \quad (41)$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2\lambda - \sum_1^n k\, x_k\, \lambda^{k-1}\cos k\varphi\right] \quad \dots (42)$$

$$\tau_r = -\frac{M_d}{2\varkappa R^3}\sum_1^n k\, x_k\, \lambda^{k-1}\sin k\varphi \quad \dots (43).$$

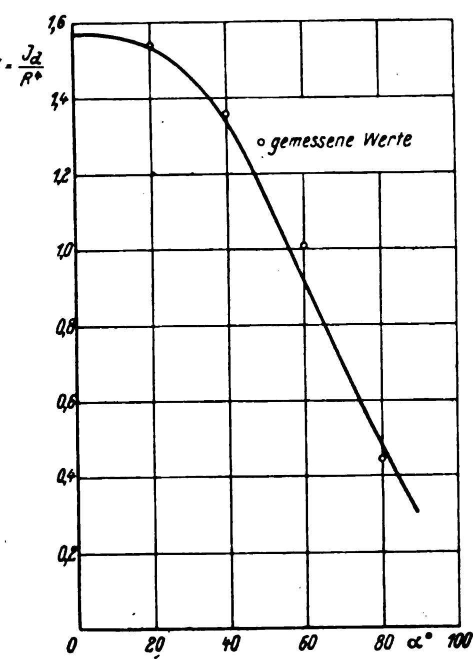
Wichtig sind insbesondere die Formeln für die Spannungen auf den Rändern. Man erhält

Zahlentafel 8. Die Koeffizienten A_{kl} und die rechten Seiten B_l des Gleichungssystems (23) in Abhängigkeit von α.

α^0	A_{00}	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}	A_{50}	A_{60}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
0	π = 3,14159	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	$\frac{\pi}{2}$	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	3,14071	−0,00264	−0,00434	−0,00597	−0,00749	−0,00887	−0,01010	1,56644	−0,00602	−0,00754	−0,00906	−0,01037
20	3,13455	−0,02063	−0,03272	−0,04247	−0,04924	−0,05262	−0,05251	1,53758	−0,04408	−0,05244	−0,05774	−0,05964
30	3,11799	0,06699	0,09968	−0,11683	−0,11651	−0,10000	−0,07143	1,46749	−0,12799	−0,13727	−0,13006	−0,10825
40	3,08625	−0,15038	−0,20373	−0,20317	−0,15391	−0,07593	+0,00365	1,35273	−0,24459	−0,22345	−0,16254	−0,08115
50	3,03497	−0,27364	0,32573	−0,25217	−0,11243	+0,04360	0,11953	1,20477	−0,35922	−0,25841	−0,11017	+0,02214
60	2,96042	−0,43301	−0,43301	−0,21651	+0,04330	0,17321	0,12372	1,04720	−0,43301	−0,21651	0,00000	0,10825
70	2,85956	−0,61830	−0,48806	−0,07954	0,21147	0,17907	−0,03490	0,90916	−0,44352	−0,12180	+0,08882	0,10030
80	2,73014	0,81380	−0,45969	+0,12798	0,28926	0,01578	−0,19320	0,81686	−0,39819	−0,03306	0,10238	0,03324

α^0	A_{16}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{44}	A_{45}
0	0,00000	$\frac{\pi}{2}$	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	$\frac{\pi}{2}$	0,00000	0,00000	0,00000	$\frac{\pi}{2}$	0,00000
10	−0,01152	1,56316	−0,00915	−0,01054	−0,01179	−0,01278	1,65020	−0,01192	−0,01309	−0,01409	1,55763	−0,01427
20	−0,05811	1,51724	−0,06052	−0,06446	−0,06517	−0,06266	1,50095	−0,06905	−0,06899	−0,06607	1,49955	−0,07096
30	−0,07615	1,42574	−0,14845	−0,13793	−0,11549	−0,08488	1,42150	−0,14005	−0,12220	−0,09866	1,37016	−0,12379
40	−0,00323	1,31838	−0,23081	−0,17387	−0,10820	−0,04464	1,35679	−0,18916	−0,15487	−0,11441	1,36711	−0,20866
50	+0,09043	1,23693	−0,26244	−0,16859	−0,07796	−0,01005	1,30337	−0,26029	−0,22327	−0,15017	1,23249	−0,35332
60	0,08660	1,19875	−0,28146	−0,17939	−0,07732	+0,00773	1,19875	−0,39590	−0,29383	−0,10052	1,06112	−0,44229
70	0,00008	1,17772	−0,34199	−0,23029	−0,05523	0,08821	1,02084	−0,51914	−0,23139	+0,07240	0,98608	−0,41085
80	−0,04833	1,11997	−0,46668	−0,24891	+0,07134	0,18163	0,84906	−0,51685	−0,07622	0,16559	0,99088	−0,43332

α^0	A_{46}	A_{55}	A_{56}	A_{66}	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
0	0,00000	$\frac{\pi}{2}$	0,00000	$\frac{\pi}{2}$	π	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,01518	1,55551	−0,01616	1,55387	3,13722	−0,00608	−0,00771	0,00924	−0,01065	−0,01191	−0,01299
20	0,06784	1,49977	−0,06923	1,50187	3,10788	−0,04569	−0,05565	0,06285	−0,06676	−0,06714	−0,06399
30	−0,11065	1,43861	0,13284	1,42295	3,03466	−0,13916	−0,15801	0,16013	−0,14508	−0,11547	−0,07639
40	−0,17969	1,31970	0,25970	1,26975	2,90919	−0,28602	−0,29300	0,24914	−0,16596	−0,06679	+0,02124
50	−0,25712	1,16030	−0,36888	1,18899	2,73528	−0,46628	−0,41439	−0,26394	−0,07524	+0,07570	0,13652
60	−0,21033	1,10596	−0,36623	1,12647	2,52745	−0,65052	−0,47631	−0,17321	+0,09279	0,18867	0,10825
70	−0,13485	1,06098	−0,45178	0,95862	2,30638	−0,80750	−0,45506	−0,00143	0,23550	0,15234	−0,06247
80	−0,16127	0,88529	−0,53599	0,92319	2,09340	−0,92437	−0,35538	+0,18899	0,25968	−0,02243	−0,18709



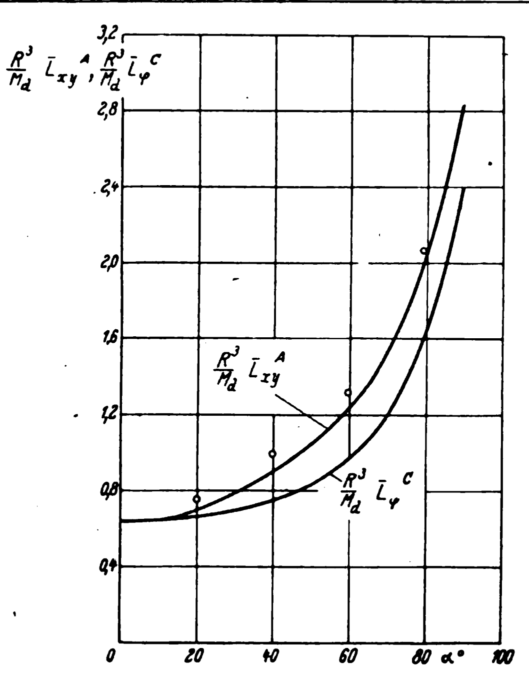


Bild 7. Der Drillwiderstand J_d nebst den Schubspannungen τ_φ^C und $\tau_{xy}^A = \tau_{\max}$ des kreisabschnittförmigen Querschnittes in Abhängigkeit vom Zentriwinkel α; Vergleich zwischen den berechneten Werten (ausgezogene Kurve) und den gemessenen.

auf AB

$$\tau_{xy}^{AB} = \frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2\cos\alpha - \sum_1^n k\, x_k \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)^{k-1}\cos(k-1)\varphi\right] \quad \ldots (40a)$$

$$\tau_{xz}^{AB} = -\frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi + \sum_2^n k\, x_k \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)^{k-1}\sin(k-1)\varphi\right] \quad (41a)$$

auf BC

$$\tau_\varphi^{BC} = \frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2 - \sum_1^n k\, x_k \cos k\varphi\right] \quad \ldots (42a)$$

$$\tau_r^{BC} = -\frac{M_d}{2\varkappa R^3}\sum_1^n k\, x_k \sin k\varphi \quad \ldots (43a).$$

Von diesen Ausdrücken müssen (41a) und (43a) (wenigstens näherungsweise) verschwinden.

Schließlich seien noch die Formeln für die Schubspannungen in A und C ($\varphi = \pi$) angegeben. Sie lauten

$$\tau_{xy}^A = \tau_{\max} = \frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2\cos\alpha - \sum_1^n k\, x_k \cdot \cos^{k-1}\alpha\right] \quad (40b)$$

$$\tau_\varphi^C = \frac{M_d}{2\varkappa R^3}\left[2 + \sum_1^n (-1)^{k-1} k\, x_k\right] \quad \ldots (42b).$$

Die Zahlenwerte für den Drillwiderstand und die in erster Linie interessierenden Schubspannungen τ_{xy}^A und τ_φ^C ergeben sich aus den Gleichungen (38), (40b) und (42b). Sie sind ebenfalls in Zahlentafel 4 angegeben und außerdem in Bild 7 in Abhängigkeit von α dargestellt.

b) Lösungsansatz mittels Fourier-Reihen. — Das Torsionsproblem für den kreisabschnittförmigen Querschnitt kann auch mit Hilfe von Fourier-Reihen gelöst werden. Das Verfahren, auf dessen zahlenmäßige Auswertung verzichtet wurde, soll nun erläutert werden.

Um die Differentialgleichung (1a) umzuformen, machen wir den Ansatz

$$f = -\frac{r^2}{4} + \Phi(r, \varphi) \quad \ldots \ldots (44).$$

Φ muß eine Potentialfunktion sein, die am Rand des Querschnittes die Werte

$$\overline{\Phi} = \frac{r^2}{4} \quad \ldots \ldots (45)$$

annimmt. Es ist also

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \frac{R^2}{4}\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi} & 0 < \varphi \leqq \alpha \\ \frac{R^2}{4} & \alpha \leqq \varphi \leqq \pi \end{cases} \quad \ldots (46).$$

Diese gerade Funktion von φ entwickeln wir im Intervall $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ in eine Fourier-Reihe

$$\overline{\Phi} = \sum_0^\infty a_n \cos n\varphi \quad \ldots \ldots (47)$$

Zahlentafel 4. Die Lösungen des linearen Gleichungssystems (23) nebst dem Drillwiderstand und den Schubspannungen τ_{xy}^A und τ_φ^C in Abhängigkeit von α.

$\alpha°$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\varkappa = \frac{J_d}{R^4}$	$\frac{R^3}{M_d}\tau_{xy}^A$	$\frac{R^3}{M_d}\tau_\varphi^C$
0	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,571	0,637	0,637
10	0,9990	—0,0023	—0,0022	—0,0022	—0,0021	—0,0021	—0,0020	1,567	0,642	0,638
20	0,9903	—0,0191	—0,0183	—0,0171	—0,0155	—0,0136	—0,0116	1,541	0,694	0,66
30	0,9642	—0,0697	—0,0644	—0,0562	—0,0478	—0,0347	—0,0237	1,470	0,794	0,70
40	0,9106	—0,1715	—0,1515	—0,1219	—0,0871	—0,0544	—0,0261	1,342	0,91	0,74
50	0,8209	—0,3375	—0,2814	—0,2046	—0,1255	—0,0609	—0,0163	1,155	1,054	0,83
60	0,6867	—0,5790	—0,4511	—0,2900	—0,1443	—0,0464	+0,0004	0,933	1,24	0,96
70	0,5060	—0,8865	—0,6309	—0,3355	—0,1092	+0,0035	+0,0230	0,706	1,52	1,19
80	0,2743	—1,2704	—0,8331	—0,3711	—0,0705	+0,0339	+0,0261	0,479	2,03	1,65
90	—0,0002	—1,6978	—0,9967	—0,3251	+0,0308	+0,0900	+0,0359	0,298	2,85	2,41

mit

$$a_0 = \frac{R^2}{4}\frac{1}{\pi}\left(\pi - \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{R^2}{4}\frac{2}{\pi}\cos^2\alpha\left[\int_0^\alpha \frac{\cos n\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi - \frac{\sin n\alpha}{n}\right] \quad (47a).$$

Die Potentialfunktion $\Phi(r, \varphi)$ wird mit Hilfe von noch zu bestimmenden Koeffizienten b_n aus Partikularlösungen aufgebaut

$$\Phi = \sum_0^\infty b_n r^n \cos n\varphi \quad \ldots\ldots (48).$$

Auf dem Rand nimmt Φ folgende Werte an

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad \overline{\Phi} &= \sum_0^\infty b_n R^n \frac{\cos^n\alpha}{\cos^n\varphi}\cos n\varphi \\ \alpha \leq \varphi \leq \pi \quad \overline{\Phi} &= \sum_0^\infty b_n R^n \cos n\varphi \end{aligned}\right\} \quad (49).$$

Diese gerade Funktion von φ wird im Intervall $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ ebenfalls in eine Fourier-Reihe entwickelt

$$\overline{\Phi} = \sum_0^\infty B_n \cos n\varphi \quad \ldots\ldots (50)$$

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= 2\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\alpha\left(\sum_0^\infty b_k R^k \frac{\cos^k\alpha}{\cos^k\varphi}\cos k\varphi\right)d\varphi + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\pi\left(\sum_0^\infty l_k R^k \cos k\varphi\right)d\varphi\right] \\ B_n &= 2\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha\left(\sum_0^\infty b_k R^k \frac{\cos^k\alpha}{\cos^k\varphi}\cos k\varphi\right)\cos n\varphi\,d\varphi + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha\left(\sum_0^\infty b_k R^k \cos k\varphi\right)\cos n\varphi\,d\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad (50a)$$

Die Fourier-Reihen (47) und (50), die sich für die Randwerte der Potentialfunktion Φ ergeben hatten, müssen identisch sein. Es muß also

$$B_n = a_n \qquad n = 0, 1, \ldots \quad \ldots\ldots (51)$$

sein. Dies ist ein unendliches lineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten b_n. Setzt man noch

$$b_n R^n = \frac{R^2}{4} x_n \quad \ldots\ldots (52),$$

so lautet das System

$$\pi x_0 + \sum_1^\infty a_{0n} x_n = \pi - \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\sum_1^\infty a_{kn} x_n = \cos^2\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos k\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi - \frac{\sin k\alpha}{k} \quad \ldots (53)$$

Die Koeffizienten a_{0n} bzw. a_{kn} sind durch folgende Ausdrücke gegeben

$$\left.\begin{aligned} a_0 n &= \cos^n\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}\,d\varphi - \frac{\sin n\alpha}{n} \quad n = 1, 2, \ldots \\ a_{nn} &= \cos^n\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos^2 n\varphi}{\cos^n\varphi}\,d\varphi + \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\sin 2n\alpha}{4n} \\ a_{kn} &= \cos^n\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos k\varphi \cos n\varphi}{\cos^n\varphi}\,d\varphi - \frac{\sin(n-k)\alpha}{2(n-k)} - \frac{\sin(n+k)\alpha}{2(n+k)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (54)$$

Offenbar ist $a_{kn} \neq a_{nk}$, d. h. die Matrix (a_{kn}) ist nicht symmetrisch.

Will man für gegebene α das Torsionsproblem auf dem eben gezeigten Weg lösen, so muß man sich in den Fourier-Reihen auf endlich viele Glieder beschränken; man muß m. a. W. das System (53) nach dem Abschnittsverfahren näherungsweise lösen. Geht man z. B. bis x_7 einschließlich, so hat man schon $7^2 = 49$ Koeffizienten a_{kn} zu berechnen. Die Zahlenrechnung wird deshalb recht langwierig und es wurde auf ihre Durchführung verzichtet.

III. Prüfung der rechnerischen Ergebnisse durch den Versuch.

Mit Hilfe der in [3] beschriebenen Vorrichtung wurde auf optischem Wege der Drillwiderstand J_d eines Stabes von kreisabschnittförmigem Querschnitt ermittelt; außerdem wurde mittels Dehnungsmessungen die größte Schubspannung τ_{max} (Punkt A in Bild 6) bestimmt. Die in [3], Bild 1 skizzierte Welle wurde auf $d = 70$ mm abgedreht und eine ebene Fläche derart angefräst, daß der gewünschte Querschnitt entstand. Die angefrästen Flächen entsprachen den Winkeln $\alpha = 20^0, 40^0, 60^0$ und 80^0. In Bild 7 sind die gemessenen Werte mit den berechneten verglichen; die Übereinstimmung ist offenbar ausreichend.

IV. Zusammenfassung.

Das Torsionsproblem für den prismatischen Stab von kreisabschnittförmigem Querschnitt wird dadurch näherungsweise gelöst, daß man einen die Differentialgleichung der Spannungsfunktion erfüllenden Ansatz macht und die in ihm vorkommenden Beiwerte so bestimmt, daß die Randbedingung möglichst gut erfüllt ist. Beim Halbkreis, für den die Lösung bekannt ist, ergibt das Verfahren recht genaue Werte; insbesondere stimmt die näherungsweise ermittelte Spannungsverteilung mit der genau berechneten gut überein. Für den beliebigen kreisabschnittförmigen Querschnitt zeigen Verformungs- und Dehnungsmessungen die Brauchbarkeit des Verfahrens.

V. Schrifttum.

[1] E. Trefftz, Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verhandlungen des 2. internationalen Kongresses für technische Mechanik, Zürich 1926, S. 131.
[2] St. Bergmann, Ein Näherungsverfahren zur Lösung gewisser partieller, linearer Differentialgleichungen. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 11 (1931), S. 323.
[3] A. Weigand, Ermittlung der Formziffer der auf Verdrehung beanspruchten abgesetzten Welle mit Hilfe von Feindehnungsmessungen. Luftf.-Forschg. Bd. 20 (1943), Lfg. 7, S. 217.

Untersuchung einiger mit den Zylinderfunktionen nullter Ordnung verwandter Funktionen*).

Von L. Schwarz.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V., Institut für instationäre Vorgänge.

In Arbeiten über das ebene Problem der schwingenden Tragfläche in kompressiblem Medium treten vier mit den Zylinderfunktionen nullter Ordnung verwandte Funktionen zweier Veränderlicher λ und x auf, die durch die Integrale

$$\int_0^x J_0(\lambda u) \frac{\cos u}{\sin u}\, du, \quad \text{bzw.} \quad \int_0^x N_0(\lambda u) \frac{\cos u}{\sin u}\, du$$

definiert sind. Für diese vier Funktionen sind hier die Bezeichnungen $Jc(\lambda, x)$, $Js(\lambda, x)$ bzw. $Nc(\lambda, x)$, $Ns(\lambda, x)$ eingeführt. Sie werden für λ von 0 bis 1 im Schritt 0,1 und x von 0 bis 2 im Schritt 0,02 bzw. bis 5 im Schritt 0,1 vertafelt; außerdem sind zur Erleichterung der Interpolation auch Zahlenwerte für Hilfsfunktionen angegeben. Eine genauere funktionentheoretische Untersuchung liefert eine Fülle von Beziehungen: Potenzreihen, asymptotische Darstellung, Umlaufrelationen, Differentiationsformeln u. a. m. Die bekannten Sonderfälle werden aufgezählt und Zusammenhänge mit anderweitig eingeführten Funktionen werden aufgedeckt.

Gliederung.

Einleitung.

In Arbeiten zur Theorie des schwingenden Tragflügels sind in der letzten Zeit mehrfach neue mit den Zylinderfunktionen verwandte Funktionen von zwei Veränderlichen aufgetreten. An ihrer Bedeutung für den schwingenden Tragflügel ist kaum zu zweifeln. Da sie jedoch darüber hinaus von allgemeinerem Interesse scheinen, werden sie hier von diesem Ursprung losgelöst und unter rein mathematischen Gesichtspunkten betrachtet. Dazu bot sich ein willkommener Anlaß, als es notwendig wurde, einige geeignet ausgewählte dieser Funktionen zu vertafeln. Übrigens handelt es sich in den genannten Arbeiten nicht nur um eine, sondern um zwei Funktionsklassen, doch besteht zwischen beiden ein enger rein algebraischer Zusammenhang: Die eine Klasse läßt sich durch die andere ausdrücken, wobei in die Beziehung außer den beteiligten Vertretern beider Funktionsklassen nur noch elementare und Zylinderfunktionen eingehen. Andererseits ist aber dieser Zusammenhang nicht so durchsichtig, daß er die eine der beiden Funktionsklassen ganz überflüssig machte. Wahrscheinlich wird man später für die Funktionen der zweiten Klasse ebenso Tafeln bereitstellen, wie dies im vorliegenden Bericht für die erste Klasse geschehen ist. Das Ausmaß der Vertafelung wurde natürlich von den Erfordernissen der Anwendungen diktiert. Zunächst müssen wir kurz auf die erwähnten Arbeiten eingehen.

*) A 2541, A 1.

Die erste Funktionsklasse kommt in Arbeiten von Possio [1] und Borbély [5] vor. Es handelt sich in der Bezeichnung des vorliegenden Berichts um die in Formelgruppe (1) definierten Funktionen Jc, Js, Nc, Ns der beiden Veränderlichen λ und x. Bei Possio finden sich alle vier Funktionen, doch hat er keine besonderen Bezeichnungen für sie eingeführt. Bei Borbély treten davon nur Jc und Js auf, und zwar im wesentlichen als Real- und Imaginärteil der komplexen Funktion

$$f_0(\lambda, x) = \frac{1}{x}\left[J c(\lambda, x) - i\, J s(\lambda, x)\right].$$

Der Index 0 erklärt sich bei ihm dadurch, daß das als Integral definierte f_0 einer Folge ähnlich gebauter Integrale angehört, die rekursiv auf f_0 zurückgeführt werden können. Unsere Bezeichnungsweise Jc, Js, Nc, Ns hat den Vorzug, daß sie den Aufbau der Funktionen nach der in (1) gegebenen Definition widerspiegelt und sich infolgedessen leicht einprägt. Auch erweist sie sich als modulationsfähig, indem man den ersten Buchstaben entsprechend der verwendeten Zylinderfunktion, den zweiten je nach dem trigonometrischen oder Exponentialfaktor variieren kann, s. die Definitionen (1) bis (3). In einer anderen Gestalt, als bestimmtes Integral, kam die erste Funktionsklasse schon in der Arbeit des Verf. [4] vor, vgl. dort die Funktion $F(x)$ in Formel (69). Für dieses von ω abhängige $F(x)$ gilt

$$-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, e^{-\omega x} \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{e^{\omega x} F(x)\right\} = i H_0^{(2)}(-i\omega) + H_1^{(2)}(-i\omega).$$

Die dort geforderte unbestimmte Integration von $F(x)$ legte es nahe, eine Darstellung als Integral mit variabler oberer Grenze x zu suchen, um eine unvollständige Integration zu ermöglichen, und führte mich damals zu dem hier in Abschnitt 6 geschilderten Zusammenhang mit der zweiten Funktionsklasse; jedoch war dieser Weg für den genannten Zweck etwas zu umständlich und ließ sich später leicht umgehen.

Bei der zweiten Funktionsklasse handelt es sich um die auf der linken Seite unserer Formeln (58′) angegebenen Integrale in Abhängigkeit von λ und x, allgemeiner um Integrale der Gestalt (58*). Zu diesen gehört insbesondere die von Schmeidler [2] eingeführte Funktion $\mathfrak{C}(\lambda, \sigma)$, s. unsere Formel (62), die bei ihm in der exakten Integralgleichung einer in inkompressiblem Medium schwingenden Tragfläche auftritt. Sie muß sich also implizit auch bei Küssner [3] finden, der seine Näherungstheorie der Tragfläche großer Streckung aus dem exakten Zusammenhang zwischen Abwind und Drucksprung herleitet; in der Tat läßt sich seiner Formel (46), in der noch $z = 0$ zu setzen ist, eine entsprechende Gestalt geben.

Überblickt man die angeführten Schrifttumstellen, so bemerkt man nahezu sämtliche bis heute behandelten Teile der instationären Tragflügeltheorie: Das ebene und das räumliche Problem in inkompressiblem Medium, sowie das ebene Problem in kompressiblem Medium bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit. Wenn im ebenen inkompressiblen Problem die neuen Funktionen nur gewissermaßen am Rand auftreten und vermieden werden können, so ge-

hören sie doch in den übrigen genannten Problemen zum nicht auswechselbaren Bestandteil der Theorie, indem sie teils in die mathematische Formulierung, teils in die Ergebnisse eingehen. Ihre eingangs behauptete Wichtigkeit für die Tragflügeltheorie ist damit wohl genügend erhärtet.

Von der Stellung der neuen Funktionen im Rahmen der Theorie der Zylinderfunktionen sei noch kurz die Rede. Die Zylinderfunktionen nullter, allgemeiner: ganzzahliger Ordnung, sind Laplacetransformierte von Funktionen aus dem Körper $(x, \sqrt{1 \pm x^2})$. Dabei enden die Integrationswege, soweit sie nicht geschlossene Kurven sind, in den Verzweigungsstellen der Wurzel oder in der singulären Stelle des Exponentialfaktors, ∞. Ebenso, wie man bei elliptischen Integralen nicht mit den vollständigen elliptischen Integralen auskommt, weil man die Integrationsgrenzen nicht stets in die Verzweigungspunkte legen kann, treten in den Anwendungen auch »unvollständige Laplacetransformierte«, d. h. Laplacetransformationen mit variabler oberer Grenze, auf. Diese führen hier, also bei Funktionen des Körpers $(x, \sqrt{1 \pm x^2})$, auf die zweite Funktionsklasse. Die Funktionen der ersten Klasse sind als unvollständige Laplacetransformierte der Zylinderfunktionen zu kennzeichnen. Damit aber können wir den Tatbestand in Abschnitt 6 so interpretieren, daß zwischen den »unvollständigen« Laplacetransformierten gewisser Funktionen und den »unvollständigen« Laplacetransformierten ihrer (»vollständigen«) Laplacetransformierten ein enger algebraischer Zusammenhang besteht.

Einen anderen systematischen Zugang zu den hier behandelten Funktionen kann man gewinnen, wenn man von der Bemerkung ausgeht, daß die Funktionen (58″) inhomogenen Besselschen Differentialgleichungen genügen.

In der vorliegenden Arbeit werden von den Funktionen Jc, Js, Nc, Ns nach ihrer Einführung in **1.** die einfachsten funktionentheoretischen Eigenschaften, wie Mehrdeutigkeit und Verzweigungscharakter, auseinandergesetzt (2). Danach folgen Potenzreihenentwicklungen (3) sowie die Aufzählung bereits bekannter Sonderfälle (4). Formeln für Differentiation nach beiden Veränderlichen (5) führen leicht zu einer Klasse unbestimmter Integrale (6), der oben sog. »zweiten Funktionsklasse«, zu der auch die Schmeidlersche Funktion $\mathfrak{E}(\lambda, \sigma)$ gehört (7). Asymptotische Entwicklung für große λx (8) sowie Bemerkungen zur Zahlenrechnung (9) bilden den Abschluß des theoretischen Berichtteils. Anschließend sind die berechneten Zahlentafeln der Funktionen Jc, Js, Nc und $Ns(\lambda, x)$ für λ von 0 bis 1 im Schritt 0,1 und für x von 0 bis 2 im Schritt 0,02 bzw. bis 5 im Schritt 0,1 wiedergegeben.

Beiseite blieb die Ausdehnung der asymptotischen Entwicklung für großes λx auf beliebiges komplexes Argument sowie eine zweite davon unabhängige asymptotische Entwicklung, die das Verhalten bei festem λx für $\lambda \to 0$ beschreibt. Ebenso wurden die Beziehungen zu den inhomogenen Besselschen Differentialgleichungen und anderen Klassen unbestimmter Integrale nicht weiter ausgebaut.

1. Einführung der Funktionen und Bezeichnungen.

Wir stellen im folgenden die in dieser Arbeit benützten Bezeichnungen zusammen.

$$\left.\begin{aligned} Jc(\lambda, x) &= \int_0^x J_0(\lambda u)\cos u\, du \\ Js(\lambda, x) &= \int_0^x J_0(\lambda u)\sin u\, du \\ Nc(\lambda, x) &= \int_0^x N_0(\lambda u)\cos u\, du \\ Ns(\lambda, x) &= \int_0^x N_0(\lambda u)\sin u\, du \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Darin bedeutet, wie üblich, $J_0(x)$ die Besselsche, $N_0(x)$ die Neumannsche Funktion nullter Ordnung. Sei allgemein $Z_0(x)$ eine beliebige Zylinderfunktion nullter Ordnung, so werde gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} Zc(\lambda, x) &= \int_0^x Z_0(\lambda u)\cos u\, du \\ Zs(\lambda, x) &= \int_0^x Z_0(\lambda u)\sin u\, du \\ Ze(\lambda, x) &= \int_0^x Z_0(\lambda u)\, e^{iu}\, du \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Offenbar gehen die Gleichungen (1) aus zwei der Gleichungen (2) hervor, wenn man in den Funktionssymbolen Z durch J oder N ersetzt. Folgerichtig gelten dann also auch die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} Je(\lambda, x) &= \int_0^x J_0(\lambda u)\, e^{iu}\, du \\ Ne(\lambda, x) &= \int_0^x N_0(\lambda u)\, e^{iu}\, du \\ He^{(1)}(\lambda, x) &= \int_0^x H_0^{(1)}(\lambda u)\, e^{iu}\, du \\ He^{(2)}(\lambda, x) &= \int_0^x H_0^{(2)}(\lambda u)\, e^{iu}\, du \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Gelegentlich ist die Abkürzung nützlich

$$\lim_{x \to 0} x Z_0'(x) = \varrho \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Der Limes existiert unabhängig von dem Weg, auf dem x nach 0 rückt. Übrigens ist

$$\varrho = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{für } Z_0 = J_0 \\ +\frac{2}{\pi} & \text{„ } Z_0 = N_0 \\ \pm\frac{2i}{\pi} & \text{„ } Z_0 = H_0^{(1)} \text{ bzw. } H_0^{(2)} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Weiter sei noch folgende Bezeichnung eingeführt, jedoch nicht in der Absicht, diese zu allgemeinem Gebrauch vorzuschlagen, sondern nur, sie im Verlauf dieser Arbeit als Abkürzung zu benutzen.

$$\left.\begin{aligned} Cc(\lambda, x) &= Nc(\lambda, x) - \frac{2}{\pi}\ln \lambda x \cdot Jc(\lambda, x) \\ Cs(\lambda, x) &= Ns(\lambda, x) - \frac{2}{\pi}\ln \lambda x \cdot Js(\lambda, x) \\ Ce(\lambda, x) &= Ne(\lambda, x) - \frac{2}{\pi}\ln \lambda x \cdot Je(\lambda, x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Die Funktionen Ce, Cc, Cs erweisen sich nämlich als ganz, sie sind also für $x = 0$ eindeutig und regulär. Diese Bezeichnung entspricht der in BAMT VI [10] benutzten:

$$C_0(x) = N_0(x) - \frac{2}{\pi}\ln x \cdot J_0(x), \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wobei $C_0(x)$ ebenfalls ganz ist. Ihre Bedeutung liegt also hier wie dort darin, daß sie nach Abspaltung des mit dem Logarithmus behafteten Bestandteils als Rest auftreten.

An Stelle von $Ze(\lambda, x)$ ist manchmal auch

$$\frac{1}{\lambda} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right) = \int_0^x Z_0(u)\, e^{i\lambda u}\, du \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

von Wert. Dieses Integral läßt sich als »unvollständige« Laplacetransformierte auffassen. Der Integrationsweg ist allerdings so geführt, daß der Exponentialfaktor nicht Dämpfungs-, sondern Schwingungscharakter aufweist. Mit der »Unvollständigkeit« ist nach dem Vorbild der unvollständigen Γ-Funktion gemeint, daß der Integrationsweg nicht bis ins Unendliche erstreckt ist, sondern bei einer variablen oberen Grenze endigt. Ursprünglich wollte ich

diese Funktion näher betrachten und für sie die neuen Funktionssymbole einführen; einesteils wegen ihrer Beziehung zur Laplacetransformation; sodann kann auch die Tatsache, daß eine asymptotische Entwicklung für große λx besteht, als Hinweis auf die Natürlichkeit der Funktion (8) gedeutet werden. Da die gestellte Aufgabe aber die Tabulierung von $Ze(\lambda, x)$ für runde λ-Werte verlangte, habe ich mich dann doch für die hier benutzte Bezeichnung entschieden.

Beide Funktionen, $Ze(\lambda, x)$ und $\frac{1}{\lambda} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right)$, sind selbstverständlich gleichwertig und der Übergang von der einen zur anderen kann leicht vollzogen werden, so lange die Funktionaldeterminante der Variabelntransformation endlich und $\neq 0$ bleibt, d. h. so lange $\lambda \neq 0$ und ∞ ist. Für $\lambda = 0$ ist in (8) die Funktion

$$\left[\frac{1}{\lambda} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right)\right]_{\lambda=0} = \int_0^x Z_0(u)\, du \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

enthalten, die mit den Struweschen Funktionen zusammenhängt (s. [6]).

Die Theorie wird weitgehend für Ze entwickelt, da hierin Je und Ne einbegriffen sind. Der Übergang von Ze zu Zc und Zs läßt sich bei reellem Z_0 dadurch bewerkstelligen, daß man in dem »reellen Zweig« von Ze unter Beschränkung auf reelles Argument nach Real- und Imaginärteil trennt. Nach Beendigung dieser Operation läßt sich das Argument durch analytische Fortsetzung natürlich wieder auf beliebige komplexe Werte ausdehnen. Mit diesem Verfahren sind also insbesondere Je und Ne zu trennen in Jc und Js bzw. Nc und Ns. Dabei haben wir eine Funktion Z_0 reell genannt, wenn sie einen reellen Zweig besitzt, das soll heißen, daß sie in diesem Zweig für positives Argument reell ausfällt; vergleiche hierzu die Zuordnung der Blätter der Riemannschen Fläche von Z_0 und der Riemannschen Mannigfaltigkeit von Ze in Abschnitt 2.

2. Einfachste Eigenschaften.

Da $J_0(x)$ eine ganze Funktion von x ist, sind $Je(\lambda, x)$ sowie $Jc(\lambda, x)$ und $Js(\lambda, x)$ ebenfalls ganze Funktionen von λ und x. Betrachten wir nun $Ze(\lambda, x)$ mit $Z_0(x) \neq$ konst. $\cdot J_0(x)$.

Bei festem $\lambda \neq 0$ ist $Z_0(\lambda x)$ eindeutig und regulär auf der ∞-blättrigen Riemannschen Fläche mit den logarithmischen Windungspunkten bei $x = 0$ und ∞, die mit $\mathfrak{R}_x$ bezeichnet sei. Da diese einfach zusammenhängend ist, ist $Ze(\lambda, x)$ dort ebenfalls eindeutig und regulär. $\lambda = 0$ ist aus dem Definitionsbereich auszuschließen, damit der Integrand in (2) endlich bleibt. Da in einer Umgebung jedes beliebigen von 0 und ∞ verschiedenen λ-Wertes Ze eindeutig (und regulär bzgl. λ) ist, variiert λ in einer logarithmischen Windungsfläche $\mathfrak{R}_\lambda$; also ist $Ze(\lambda, x)$ (regulär und) eindeutig in der Produktmannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_x \times \mathfrak{R}_\lambda$. Übereinanderliegende Punkte aus verschiedenen »Blättern« können durch symbolische Faktoren $e^{2n\pi i}$ (n ganz) unterschieden werden. Aber nicht alle Zweige $Ze(e^{2m\pi i}\lambda, e^{2n\pi i}x)$ sind voneinander verschieden; solche mit gleichem $m + n$ stimmen überein. Dazu genügt der Nachweis im einfachsten Fall

$$Ze(e^{2\pi i}\lambda, e^{-2\pi i}x) = Ze(\lambda, x) \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

In der Tat ist bei einem Wechsel der Integrationsvariabeln $u = e^{-2\pi i} v$:

$$Ze(e^{2\pi i}\lambda, x) = \int_0^x Z_0(e^{2\pi i}\lambda u)\, e^{iu}\, du$$

$$= \int_0^{x e^{2\pi i}} Z_0(\lambda v)\, e^{iv}\, dv = Ze(\lambda, e^{2\pi i}x).$$

Daraus folgt (10), wenn x durch $xe^{-2\pi i}$ ersetzt wird. Bei einer halben gegenläufigen Umdrehung von λ und x erhält man auf ganz entsprechende Weise

$$-Ze(e^{\pi i}\lambda, e^{-\pi i}x) = \int_0^x Z_0(\lambda u)\, e^{-iu}\, du \quad . \; . \quad (11)$$

Folglich gelten die Gleichungspaare:

$$\left.\begin{aligned} Ze(\lambda, x) &= Zc(\lambda, x) + i\, Zs(\lambda, x) \\ Ze(e^{\pi i}\lambda, e^{-\pi i}x) &= -Zc(\lambda, x) + i\, Zs(\lambda, x) \end{aligned}\right\} \quad (12')$$

und

$$\left.\begin{aligned} Zc(\lambda, x) &= \frac{1}{2}\left[Ze(\lambda, x) - Ze(e^{\pi i}\lambda, e^{-\pi i}x)\right] \\ Zs(\lambda, x) &= \frac{1}{2i}\left[Ze(\lambda, x) + Ze(e^{\pi i}\lambda, e^{-\pi i}x)\right] \end{aligned}\right\} \quad (12'')$$

D. h.: Zc und Zs können stets auf Ze zurückgeführt werden; insbesondere ist es unnötig, das Integral (11) als neue Transzendente neben $Ze(\lambda, x)$ einzuführen.

Aus den Umlaufrelationen der Zylinderfunktionen leitet man leicht entsprechende Relationen für Ze ab. Aus

$$\left.\begin{aligned} J_0(xe^{\pi i}) &= J_0(x) \\ N_0(xe^{\pi i}) &= N_0(x) + 2i\, J_0(x) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

folgert man nämlich

$$Ne(\lambda e^{\pi i}, x) = \int_0^x N_0(\lambda t e^{\pi i})\, e^{it}\, dt$$

$$= \int_0^x [N_0(\lambda t) + 2i\, J_0(\lambda t)]\, e^{it}\, dt$$

$$= Ne(\lambda, x) + 2i\, Je(\lambda, x),$$

also lauten die Umlaufrelationen für Ze

$$\left.\begin{aligned} Je(\lambda e^{\pi i}, x) &= Je(\lambda, x) \\ Ne(\lambda e^{\pi i}, x) &= 2i\, Je(\lambda, x) + Ne(\lambda, x) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (14)$$

Der Drehung $e^{\pi i}$ ist somit die Substitution $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2i, & 1 \end{pmatrix}$ zugeordnet. Für beliebiges ganzzahliges n gilt dann

$$\left.\begin{aligned} Je(e^{n\pi i}\lambda, x) &= Je(\lambda, x) \\ Ne(e^{n\pi i}\lambda, x) &= 2in\, Je(\lambda, x) + Ne(\lambda, x) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (15)$$

Diese Umlaufrelationen gelten ebenso wie für Ze auch für Zc und Zs. Man hat nur in den Formeln (14), (15) den Buchstaben e des Funktionssymbols durch c oder auch durch s zu ersetzen. Die Formeln (10) und (14) bzw. (15) geben die Möglichkeit, sich zur zahlenmäßigen Beherrschung der Funktionen $Ze(\lambda, x)$ auf die Werteverteilung von Je und Ne in dem »Sektor« $0 < \operatorname{arc} x < 2\pi$, $0 \leq \operatorname{arc} \lambda < \pi$ zu beschränken.

Soweit war kein Blatt der Riemannschen Mannigfaltigkeit ausgezeichnet, nur waren von (12) ab mehrere Funktionen auf derselben Mannigfaltigkeit definiert. Das ist aber ohne weiteres möglich, wenn wir in den definierenden Integralen (1) bis (3) dieselben Integrationswege zugrundelegen.

Aus (10) folgt, daß bei festgehaltenem λx ein Umlauf von λ um $\lambda = 0$ auf Ze keinen Einfluß hat. Demgemäß ist für die Blattnummer eines Zweiges von Ze allein $\operatorname{arc}(\lambda x)$ verantwortlich. Das kann man auch folgendermaßen einsehen: Wandert in den Integralen (1) bis (3) u längs eines Weges von 0 bis x, so läuft das Argument λu von Z_0 im Integrand von 0 bis λx. Da der Exponentialfaktor in der schlichten Ebene eindeutig ist, hängt der Wert des Integrals $Ze(\lambda, x)$, abgesehen von den Zahlwerten λ und x, nur von dem Blatt der Riemannschen Fläche von Z_0 ab, auf dem λx gelegen ist. Man kann den Blättern der (λ, x)-Mannigfaltigkeit von Ze die Blätter der Fläche von Z_0 eineindeutig zuordnen. Der dem reellen Zweig von Z_0 zugeordnete Zweig von Ze ist oben »reeller Zweig« von Ze genannt worden.

3. Potenzreihenentwicklungen.

Eine Zylinderfunktion nullter Ordnung läßt sich bekanntlich in reine oder mit $\ln x$ behaftete Potenzreihen nach x entwickeln. Mit ihrer Hilfe lassen sich entsprechende Reihen für $e^{-ix} Ze(\lambda, x)$ finden. Wir beginnen mit der Entwicklung von $e^{-ix} Je(\lambda, x)$ und benutzten dazu

Hilfssatz 1: Ist

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad . . . . (16)$$

konvergent für $|x| < R$, so gilt für $|\lambda x| < R$

$$e^{-ix} \int_0^x f(\lambda t)\, e^{it}\, dt = i \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \nu! \left[e^{-ix} - \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(-ix)^\mu}{\mu!} \right] (i\lambda)^\nu \quad . . . . . (17)$$

$$= i \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{a_\nu \nu!}{\mu!} (-ix)^\mu (i\lambda)^\nu \quad (18)$$

Diese Potenzreihe in λ und x konvergiert für $|\lambda x| < R$ absolut und in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich dieses Gebiets sogar gleichmäßig.

Beweis: Es sei $|\lambda x| < R$; t laufe auf der die Punkte 0 und x verbindenden Strecke. Dann ist die Reihe für $f(\lambda t)$, wenn x auf einen endlichen Bereich beschränkt wird, in x und t gleichmäßig konvergent, darf also, mit e^{it} multipliziert, gliedweise integriert werden:

$$\int_0^x f(\lambda t)\, e^{it}\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \lambda^\nu \int_0^x t^\nu e^{it}\, dt.$$

Wegen

$$\frac{(-1)^\nu i^{\nu+1}}{\nu!} \int_0^x t^\nu e^{it}\, dt = e^{ix} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(-ix)^\mu}{\mu!} - 1 \quad (19)$$

folgt dann Gl. (17). In dieser steht in der eckigen Klammer auf der rechten Seite die Größe e^{-ix} vermindert um den Anfang ihrer Potenzreihe, also das Restglied der Taylorschen Entwicklung von e^{-ix}.

Trägt man für e^{-ix} die Potenzreihe in (17) ein, so daß das erwähnte Restglied in Evidenz gesetzt ist, so entsteht die Potenzreihe (18) in x und λ. Diese ist absolut konvergent, denn ersetzt man in ihr alle Summanden durch ihre absoluten Beträge, so entsteht, von einem Faktor i abgesehen, ein Ausdruck gleichen Bildungsgesetzes, nur ausgehend von $\Sigma |a_\nu|\, x^\nu$ statt von $\Sigma a_\nu x^\nu$ und für das Argument $i\,|x|, -i\,|\lambda|$ statt für x, λ. Er ist infolgedessen für $|\lambda x| < R$ konvergent und erweist sich damit als eine Majorante.

Der erste Hilfssatz wird nun auf

$$f(x) = J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 4^k} \quad . . . . . (20)$$

angewandt. Danach ist zu setzen

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2 4^k}, \quad a_{2k+1} = 0 \quad . . . . . . (21)$$

Folglich ist nach den Formeln (17) und (18)

$$e^{-ix} J e(\lambda, x) = i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left[e^{-ix} - \sum_{\mu=0}^{2k} \frac{(-ix)^\mu}{\mu!} \right] \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}$$

$$= i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=2k+1}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{\mu!} (-ix)^\mu \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \quad . (22)$$

Beide Entwicklungen gelten für alle endlichen λ und x, da $J_0(x)$ eine ganze Funktion ist. Die Potenzreihe in x und λ konvergiert absolut und in jedem endlichen abgeschlossenen (x, λ)-Bereich gleichmäßig.

Um eine entsprechende Entwicklung für $e^{-ix} Ne(\lambda, x)$ zu bekommen, gehen wir auf die »Potenzreihe« für $N_0(x)$ zurück:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln x \cdot J_0(x) + C_0(x), \quad . . . . . (7)$$

wobei die ganze Funktion $C_0(x)$ durch die Gleichung

$$-\frac{\pi}{2} C_0(x) = \ln 2 \cdot J_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k)}{(k!)^2 4^k} x^{2k} \quad . . (23)$$

gegeben ist, vgl. dazu eines der Lehrbücher über Zylinderfunktionen, etwa Weyrich [9], S. 38, oder BAMT VI [10], S. 174. ψ bedeutet die logarithmische Ableitung der Fakultät, vgl. Jahnke-Emde [11], S. 19:

$$\psi(k) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} - C \quad . . . . (24)$$

(C = Eulersche Konstante.) Setzt man (7) in die Definition für Ne ein, so ergibt sich bei unvollständiger Integration

$$Ne(\lambda, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \ln(\lambda t) \frac{\partial Je(\lambda, t)}{\partial t} dt + \int_0^x C_0(\lambda t)\, e^{it}\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \ln \lambda x \cdot Je(\lambda, x) + \int_0^x \left[C_0(\lambda t)\, e^{it} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} Je(\lambda, t) \right] dt$$

oder mit der Bezeichnung (6)

$$Ce(\lambda, x) = Ne(\lambda, x) - \frac{2}{\pi} \ln \lambda x \cdot Je(\lambda, x)$$

$$= \int_0^x \left[C_0(\lambda t)\, e^{it} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} Je(\lambda, t) \right] dt \quad . . . (25)$$

Der erste Bestandteil dieses Integrales erledigt sich nach Hilfssatz 1, der auf Gl. (23) anzuwenden ist. Danach ist

$$-\frac{\pi}{2} \int_0^x C_0(\lambda t)\, e^{it}\, dt = \ln 2 \cdot Je(\lambda, x)$$

$$+ i e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \psi(k) \left[e^{-ix} - \sum_{\mu=0}^{2k} \frac{(-ix)^\mu}{\mu!} \right] \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \quad (26)$$

Zur Behandlung des zweiten Integralbestandteils von (25) benötigten wir

Hilfssatz 2: Gilt für $|x| < R$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \quad . . . . (16)$$

so ist für $|\lambda x| < R$

$$i e^{-ix} \int_0^x \int_0^t f(\lambda u)\, e^{iu}\, du \cdot \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \nu!\, \psi(\nu) \left[e^{-ix} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{(-ix)^\mu}{\mu!} \right] (i\lambda)^\nu$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \nu! \left[e^{-ix} \int_0^x \frac{e^{ix} - 1}{x} dx + C e^{-ix} \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{(-ix)^\mu}{\mu!} \psi(\mu) \right] (i\lambda)^\nu \quad . . . . (27)$$

Dazu sei angemerkt, daß die eckigen Klammern in beiden Potenzreihen nach λ Reste von Taylorschen Entwicklungen nach x darstellen. Für die erste war es oben schon bemerkt worden, für die zweite folgt es aus der leicht zu bestätigenden Beziehung

$$e^{-ix} \int_0^x \frac{e^{ix} - 1}{x} dx + C e^{-ix} = -\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-ix)^\mu}{\mu!} \psi(\mu) \quad (28)$$

Man kann demnach wie in Hilfssatz 1 daraus eine Entwicklung nach Potenzen von x und λ gewinnen, von völlig gleichem Konvergenzverhalten. Der Nachweis dieser Tatsache überträgt sich fast wörtlich.

Beweis: Wir multiplizieren (17) mit $\frac{e^{ix}}{x}$ und integrieren gliedweise, was wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz erlaubt ist. Dabei ist folgende Umformung wichtig, die unter abermaliger Benutzung von (19) abzuleiten ist:

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} -\frac{i}{\mu}\int_0^x e^{it}\frac{(-it)^{\mu-1}}{(\mu-1)}\,dt =$$

$$-e^{ix}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{(-ix)^\mu}{\mu!}[\psi(\nu)-\psi(\mu)]+\psi(\nu)+C$$

$$=\psi(\nu)\,e^{ix}\left[e^{-ix}-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{(-ix)^\mu}{\mu!}\right]$$

$$+e^{ix}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{(-ix)^\mu}{\mu!}\psi(\mu)+C.$$

Daraus folgt (27) unmittelbar.

Wendet man diesen Hilfssatz nun auf $f(x) = J_0(x)$ an, so folgt bei Beachtung von (20) und (21)

$$i\int_0^x Je(\lambda,t)\frac{dt}{t}$$

$$= e^{ix}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\psi(2k)\left[e^{-ix}-\sum_{\mu=0}^{2k-1}\frac{(-ix)^\mu}{\mu!}\right]\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left[e^{ix}\sum_{\mu=0}^{2k-1}\frac{(-ix)^\mu}{\mu!}\psi(\mu)+C+\int_0^x\frac{e^{ix}-1}{x}dx\right]\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \quad \ldots . (29)$$

Damit sind beide Bestandteile des Integrals (25) in Potenzreihenform gesetzt, der letzte soeben in (29), der erste in (26). Die Konvergenz ist für alle λ und x nach den beiden Hilfssätzen gesichert, da diese auf ganze Funktionen, nämlich $J_0(x)$ bzw. $C_0(x)$, angewandt wurden.

Man erhält jetzt die gewünschte Endformel, wenn man noch beachtet, daß in (26) die Summe in der eckigen Klammer bis $2k$ läuft anstatt bis $2k-1$:

$$\frac{\pi}{2}Ne(\lambda,x) = \ln\frac{\lambda x}{2}\cdot Je(\lambda,x)$$

$$-ie^{ix}\left[\frac{\pi}{2}N_0(\lambda x)-\ln\frac{\lambda x}{2}J_0(\lambda x)\right]$$

$$+i\cdot e^{ix}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}[\psi(2k)-\psi(k)]\left\{e^{-ix}-\sum_{\mu=0}^{2k-1}\frac{(-ix)^\mu}{\mu!}\right\}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}$$

$$+i\cdot e^{ix}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left[e^{-ix}\int_0^x\frac{e^{ix}-1}{x}dx+Ce^{-ix}\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=0}^{2k-1}\frac{(-ix)^\mu}{\mu!}\psi(\mu)\right]\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \quad \ldots . (30)$$

Die Formeln (22) und (30) stellen die am Beginn dieses Abschnitts angekündigten Entwicklungen dar, die für alle λ und x konvergieren. Von ihnen wird bei der Zahlenrechnung ein nützlicher Gebrauch gemacht.

Borbély [5] gibt für $Jc - iJs$ eine Entwicklung nach Besselfunktionen an, deren Analogon bei beliebigem Ze folgendermaßen lautet:

$$Ze(\lambda,x)$$

$$= xe^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(2n+1)}\left[\frac{(1-\lambda^2)\,x}{2}\right]^n[Z_n(x)-i\,Z_{n+1}(x)]$$

$$-\frac{i\varrho}{\sqrt{1-\lambda^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\quad \text{für } |1-\lambda^2|<1 \quad \ldots (30^*)$$

Diese Reihe kann bei der numerischen Rechnung an die Stelle der Potenzreihen (22) und (30) treten; sie ist bei größerem x nur für die λ-Werte in der Nähe von 1 günstig.

4. Bekannte Sonderfälle.

$Ze(\lambda, x)$ läßt sich für $\lambda = 0$ und ± 1 sowie für $x = \infty$ auf bekannte Funktionen zurückführen. Das wird in diesem Abschnitt näher ausgeführt.

4, 1. $\lambda = 0$. Es wird wegen $J_0(0) = 1$

$$\left.\begin{aligned} Jc(0,x) &= \sin x \\ Js(0,x) &= 1-\cos x \\ Je(0,x) &= i(1-e^{ix}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

Für die Funktionen Ne, Nc, Ns ist die Mannigfaltigkeit $\lambda x = 0$ singulär, gleichwohl kann man das Verhalten in der Nähe von $\lambda = 0$ übersehen. Dazu schließen wir an Formel (25) an. Der Grenzübergang kann unter dem $\int$-Zeichen vorgenommen werden; er liefert

$$Ce(0,x) = \frac{2i}{\pi}\left[\ln\frac{\gamma}{2}\cdot(1-e^{ix})-\int_0^x\frac{1-e^{it}}{t}dt\right] \quad (32)$$

Dabei wurde die Formel

$$C_0(0) = \frac{2}{\pi}(C-\ln 2) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma}{2} \quad \ldots . (33)$$

benützt, die man aus (23) herleiten kann (wie üblich $e^C = \gamma$ gesetzt). Bedenkt man noch, daß

$$\int_0^x\frac{1-e^{it}}{t}dt = \ln\gamma x - Ci\,x - i\,Si\,x \quad \ldots (34)$$

gilt, s. Jahnke-Emde [11], S. 3, so hat man

$$Ce(0,x) = \lim_{\lambda\to 0}\left[Ne(\lambda,x)-\frac{2}{\pi}\ln\lambda x\cdot Je(\lambda,x)\right]$$

$$= \frac{2i}{\pi}\left[\ln\frac{\gamma}{2}\cdot(1-e^{ix})-\ln\gamma x+Ci\,x+i\,Si\,x\right] \quad (35)$$

Natürlich hätte man auch von der Entwicklung (30) ausgehen können, doch ist diese für vorliegenden Zweck viel zu gut. Trennt man in (35) Real- und Imaginärteil, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} Cc(0,x) &= \lim_{\lambda\to 0}\left[Nc(\lambda,x)-\frac{2}{\pi}\ln\lambda x\cdot Jc(\lambda,x)\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{\gamma}{2}\cdot\sin x - Si\,x\right] \\ Cs(0,x) &= \lim_{\lambda\to 0}\left[Ns(\lambda,x)-\frac{2}{\pi}\ln\lambda x\cdot Js(\lambda,x)\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{\gamma}{2}\cdot(1-\cos x)-\ln\gamma x+Ci\,x\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (36)$$

4, 2. $\lambda = 1 = e^{2k\pi i}$ (k ganz). Für diesen λ-Wert lassen sich die Funktionen sämtlich berechnen. Bei den mit J_0 zusammenhängenden Funktionen sind entsprechende Ausdrücke bekannt als Kapteyns trigonometrische Integrale, vgl. Watson [8] § 12.21:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x\cos(x-t)\,J_0(t)\,dt &= x\,J_0(x) \\ \int_0^x\sin(x-t)\,J_0(t)\,dt &= -x\,J_0'(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (37)$$

Die zweite dieser Gleichungen werde mit $-i$ multipliziert zur ersten addiert. Dann ergibt sich

$$Je(1,x) = x\,e^{ix}[J_0(x)+i\,J_0'(x)] \quad \ldots . (38)$$

Durch Trennung von Real- und Imaginärteil folgen daraus Ausdrücke für $Jc(1, x)$ und $Js(1, x)$. $Jc(1, x)$ ist auch bei Müller hergeleitet (s. [6], Formel (16)).

Um eine Formel für ein beliebiges Ze zu finden, setzen wir

$$x\,e^{ix}[Z_0(x)+i\,Z_0'(x)] = f(x) \quad \ldots\ldots (39)$$

Dann folgt wegen der Besselschen Differentialgleichung für $Z_0(x)$

$$f'(x) = e^{ix}Z_0(x) \quad \text{und} \quad f(0) = i\varrho.$$

Hierbei ist die Definition von ϱ in Formel (5) benutzt. Durch Integration von 0 bis $xe^{2k\pi i}$ findet man schließlich unter Heranziehung von (10)

$$Ze(e^{2k\pi i},x) = x\,e^{ix}[Z_0(e^{2k\pi i}\cdot x)+i\,Z_0'(e^{2k\pi i}\cdot x)]-i\varrho \quad \ldots\ldots (40)$$

4, 3. Für $\lambda = -1 = e^{(2k+1)\pi i}$ kann eine ähnliche Formel abgeleitet werden:

$$Ze(e^{(2k+1)\pi i}, x) = x e^{ix}[Z_0(e^{(2k+1)\pi i} \cdot x) - i Z_0'(e^{(2k+1)\pi i} \cdot x)] - i\varrho \quad . . (41)$$

Auf ihren Beweis sei hier verzichtet, weil sich ein neuer Beweis für beide Formeln (40) und (41) später ohne jede Mühe von selbst einstellt, s. Abschnitt 5, Formel (52).

4, 4. $x \to \infty$. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall, daß x durch positive Werte, d. h. solche mit arc $x = 0$, gegen ∞ läuft. λ sei fest und ebenfalls positiv (arc $\lambda = 0$). Dann ist, wie hier ohne Beweis angegeben sei:

$$He^{(1)}(\lambda, \infty) = \int_0^\infty H_0^{(1)}(\lambda x)\, e^{ix}\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\arccos \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} & \text{für } \lambda > 1 \\ -\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \dfrac{1 - \sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad . (42)$$

$$He^{(2)}(\lambda, \infty) = \int_0^\infty H_0^{(2)}(\lambda x)\, e^{ix}\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} - \dfrac{2 \arccos \frac{1}{\lambda}}{\pi\sqrt{\lambda^2 - 1}} & \text{für } \lambda > 1 \\ \dfrac{2i}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \dfrac{1 - \sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad . . . (43)$$

Der Integrand im ersten Integral läßt sich für große $x > 0$ nach dem bekannten asymptotischen Verhalten der Hankelschen Funktion bis auf ein absolut integrables Fehlerglied durch konst. $(\lambda x)^{-\frac{1}{2}} e^{ix(1+\lambda)}$ darstellen, so daß für $\lambda > 0$ Konvergenz gewährleistet ist. $\lambda = 1$ hätte dabei nicht ausgeschlossen zu werden brauchen, vielmehr ist

$$He^{(1)}(1, \infty) = \int_0^\infty H_0^{(1)}(x)\, e^{ix}\, dx = \frac{2}{\pi} \quad . . . . (42')$$

wie sich aus (40) ergibt. Im zweiten Fall ist der Integrand für große x angenähert konst. $(\lambda x)^{-\frac{1}{2}} e^{ix(1-\lambda)}$, so daß für $\lambda \geq 0$ Konvergenz höchstens bei $\lambda = 0$ und 1 nicht eintritt. Beide Integrale konvergieren nicht nur für reelles λ, sondern das erste in der oberen, das zweite in der unteren Halbebene. Im Inneren der komplementären Halbebenen herrscht Divergenz.

Infolgedessen konvergieren die folgenden beiden Integrale, die durch Bildung von Summe und Differenz aus den vorigen entstehen, für $\lambda > 0$, aber sicher nicht für nichtreelles λ.

$$Je(\lambda, \infty) = \int_0^\infty J_0(\lambda x)\, e^{ix}\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} & \text{für } \lambda > 1 \\ \dfrac{i}{\sqrt{1-\lambda^2}} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad (44)$$

$$Ne(\lambda, \infty) = \int_0^\infty N_0(\lambda x)\, e^{ix}\, dx = \begin{cases} \dfrac{2i}{\pi} \dfrac{\arcsin \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} & \text{für } \lambda > 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \dfrac{2i}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \dfrac{1 - \sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad . . . (45)$$

Bei den vier Integralen (42) bis (45) erweisen sich die für $0 < \lambda < 1$ und $\lambda > 1$ angegebenen Werte nur formal als verschieden; sie gehören jeweils derselben analytischen Funktion in λ an, wenn man zwischen ihnen durch ein nach unten ausbiegendes Wegstück die Brücke schlägt.

Zur Aufklärung dieses Verhaltens dient folgende Bemerkung: $He^{(2)}(\lambda, \infty)$ ist bei $\lambda = 1$ verzweigt. Der Übergang zwischen den für $\lambda >$ und < 1 angegebenen Funktionen ist in der Konvergenzhalbebene vorzunehmen, und dies ist die untere. Da jedoch die Funktion $He^{(1)}(\lambda, \infty)$ für $\lambda = 1$ noch regulär ist, darf bei ihr die analytische Fortsetzung sowohl in der oberen wie auch in der unteren Halbebene vollzogen werden. Dann ist aber der Übergang bei $Je(\lambda, \infty)$ und $Ne(\lambda, \infty)$ immer noch auf einem Weg durch die untere Halbebene möglich, obwohl, wie erwähnt, die diese Funktionen definierenden Integrale für nichtreelle λ divergieren.

Durch Trennung von Real- und Imaginärteil erhält man aus diesen beiden letzten Formeln die interessanten unstetigen Integrale von Weber (Jc, Js) und Nielsen (Nc, Ns), bei denen ein solcher Übergang nicht mehr möglich ist.

$$Jc(\lambda, \infty) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} & \text{für } \lambda > 1 \\ 0 & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad . . (46')$$

$$Js(\lambda, \infty) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad (46)$$

$$Nc(\lambda, \infty) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

$$Ns(\lambda, \infty) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\arcsin \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}} & \text{für } \lambda > 1 \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \dfrac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} & \text{für } 0 < \lambda < 1 \end{cases} \quad (47)$$

Wie man sieht, genügt es, die Formeln (42) und (43) zu beweisen, da die später folgenden sich aus diesen ergeben, und hierbei dann auch nur je einen der Fälle $\lambda >$ oder < 1. Als Literaturstelle sei Nielsen [7] erwähnt: S. 186 erhält man aus den Formeln (11) oder (13) und (14) für $\nu = 0$, $y = -i$ die Funktionen $Je(\lambda, \infty)$ und $Ne(\lambda, \infty)$. In der genannten Formel (14) ist der Zahlfaktor $\frac{1}{2}$ durch $\frac{2}{\pi}$ zu ersetzen. Desgleichen finden sich S. 195/96 in den Formeln (1) bis (4), (7), (8), (13) und (14) bis auf den Faktor $\frac{1}{x}$ die Funktionen Js, Jc, Ns und Nc für das Argument $\frac{1}{x}, \infty$. Dabei ist in (1) bis (4) noch $\nu = 0$ zu setzen.

5. Differentiationsformeln.

Die Ableitung von $Ze(\lambda, x)$ nach x folgt aus der Definition. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x} Ze(\lambda, x) = Z_0(\lambda x)\, e^{ix} \quad . . . . . . (48)$$

Aber auch die Ableitung nach λ zwingt uns nicht, den Bereich der bekannten Funktionen zu verlassen. Bei Differentiation unter dem Integralzeichen ist

$$\frac{\partial Ze(\lambda, x)}{\partial \lambda} = \int_0^x x Z_0'(\lambda x)\, e^{ix}\, dx \quad . . . . (49)$$

Unvollständige Integration liefert dann, wegen

$$\frac{\partial}{\partial x}\{x Z_0'(\lambda x)\} = -\lambda x Z_0(\lambda x),$$

$$\frac{\partial Ze(\lambda, x)}{\partial \lambda} = -i x Z_0'(\lambda x)\, e^{ix} + \frac{i\varrho}{\lambda} - \lambda \int_0^x x Z_0(\lambda x) \cdot i e^{ix} dx \quad . . . (50)$$

Das letzte Integral wird nochmals unvollständig integriert, wobei $i e^{ix}$ als Ableitung aufzufassen ist. Es tritt erneut das Integral (49) auf; man findet

$$\int_0^x x Z_0(\lambda x) \cdot i e^{ix} dx = x Z_0(\lambda x) e^{ix} - Ze(\lambda, x) - \lambda \frac{\partial Ze(\lambda, x)}{\partial \lambda}.$$

Dies in (50) eingesetzt, ergibt eine Formel, in der außer $\frac{\partial Ze}{\partial \lambda}$ nur solche Funktionen vorkommen, die als bekannt anzusehen sind, nämlich Ze, Z_0, Z_0':

$$(1-\lambda^2)\frac{\partial Ze(\lambda, x)}{\partial \lambda} - \lambda Ze(\lambda, x) = -x e^{ix}[\lambda Z_0(\lambda x) + i Z_0'(\lambda x)] + \frac{i\varrho}{\lambda} \quad . . . (51)$$

Die Ableitung von Ze nach λ läßt sich also berechnen, falls $\lambda \neq \pm 1$. Wir geben diese triviale Umformung der Gl. (51) an, weil wir sogleich auf sie zurückgreifen müssen.

$$\frac{\partial Ze(\lambda, x)}{\partial \lambda} = \frac{\lambda Ze(\lambda, x) - x e^{ix}[\lambda Z_0(\lambda x) + i Z_0'(\lambda x)] + \frac{i\varrho}{\lambda}}{1-\lambda^2} \quad . . . (51')$$

Ist dagegen $\lambda = \pm 1$, genauer $\lambda = e^{n\pi i}$ (n ganz), so reduziert sich (51) auf die folgende Formel, die für gerades n mit (40) und für ungerades n mit (41) übereinstimmt:

$$Ze(e^{n\pi i}, x) = x e^{ix}[Z_0(e^{n\pi i} x) + i e^{n\pi i} Z_0'(e^{n\pi i} x)] - i\varrho \quad (52)$$

Damit hat sich in der Tat, wie angekündigt, ein gemeinsamer Beweis der Formeln (40) und (41) ohne jede Mühe von selbst eingestellt. Um auch an den ausgeschlossenen Stellen $\lambda = \pm 1$ die Ableitung nach λ zu gewinnen, werde die sog. L'Hospitalsche Regel herangezogen. Nach ihr ist, wenn wir den Zähler in Formel (51') vorübergehend mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnen,

$$\left[\frac{\partial Ze(\lambda, x)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda = e^{n\pi i}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \lambda}\right]_{\lambda = e^{n\pi i}}.$$

Andererseits findet man

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \lambda} = Ze(\lambda, x) + \lambda \frac{\partial Ze(\lambda, x)}{\partial \lambda} - x e^{ix}\left[(1 - i x) Z_0(\lambda x) + \left(\lambda x - \frac{i}{\lambda}\right) Z_0'(\lambda x)\right] - \frac{i\varrho}{\lambda^2}.$$

Hierin ist $\lambda = e^{n\pi i}$ zu setzen. Zusammen mit der vorangehenden Formel folgt dann die gewünschte Gleichung

$$\left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right)\frac{\partial Ze}{\partial \lambda}(e^{n\pi i}, x) = -\frac{x e^{ix}}{2}[i x Z_0(e^{n\pi i} x) - (-1)^n (x - 2i) Z_0'(e^{n\pi i} x)] + i\varrho \quad . . . (53)$$

Der Zahlfaktor auf der linken Seite ist $\frac{3}{2}$ oder $\frac{1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, d. h. je nachdem $\lambda = +1$ oder -1 ist. $\frac{\partial Ze}{\partial \lambda}$ ist damit auch an den Ausnahmestellen bestimmt.

Die Differentiationsformel (51) hat den Charakter einer linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung. Indem man auf sie wohlbekannte Methoden aus der Theorie der Differentialgleichungen anwendet, gelangt man zu neuen Darstellungen für Ze. So wird z. B., wenn man durch $\sqrt{1-\lambda^2}$ dividiert,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[\sqrt{1-\lambda^2}\, Ze(\lambda, x)] = \frac{-x e^{ix}}{\sqrt{1-\lambda^2}}[\lambda Z_0(\lambda x) + i Z_0'(\lambda x)] + \frac{i\varrho}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \quad . . (54)$$

Integration bezüglich λ liefert dann

$$\frac{-e^{-ix}\sqrt{1-\lambda^2}}{x} \cdot Ze(\lambda, x) = \int_1^\lambda Z_0(\lambda x)\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda + i\int_1^\lambda Z_0'(\lambda x)\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda - \frac{i\varrho e^{-ix}}{x}\int_1^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}};$$

also nach einer weiteren unvollständigen Integration

$$Ze(\lambda, x) = \frac{-x e^{ix}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int_1^\lambda Z_0'(\lambda x)\left[\frac{i}{\sqrt{1-\lambda^2}} + x\sqrt{1-\lambda^2}\right] d\lambda + x e^{ix} Z_0(\lambda x) + \frac{i\varrho}{\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \quad . . (55)$$

Auf diese Darstellung wollen wir aber nicht näher eingehen.

6. Zusammenhang mit einer Klasse von unbestimmten Integralen.

Um eine Integraldarstellung zu bekommen, in der keine Zylinderfunktionen mehr im Integranden auftreten, liegt es nahe, in Formel (54) neue Veränderliche einzuführen, so daß das Argument der Zylinderfunktion λx von der Differentiationsveränderlichen auf der linken Seite frei wird. Wir ersetzen zu diesem Zweck λ durch $\frac{1}{\mu}$ und x durch μt und finden, da für eine beliebige Funktion $h(\lambda, x)$

$$\frac{\partial h\left(\frac{1}{\mu}, \mu t\right)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial h}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{\mu}, \mu t\right) + t\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}, \mu t\right)$$

gilt, die folgende Gleichung, in der wir statt μ und t wieder λ und x geschrieben haben:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right)\right\} = \frac{x e^{i\lambda x}}{\sqrt{\lambda^2-1}}[\lambda Z_0(x) + i Z_0'(x)] - \frac{i\varrho}{\sqrt{\lambda^2-1}} \quad . . (56')$$

oder, mit $i = -\frac{1}{i}$ multipliziert,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right)\right\} = -\frac{x e^{i\lambda x}}{\sqrt{1-\lambda^2}}[\lambda Z_0(x) + i Z_0'(x)] + \frac{i\varrho}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad . . (56'')$$

Bei positivem λ verwenden wir beide Formeln, die erste für $\lambda > 1$, die zweite für $0 < \lambda < 1$, und haben dann offenbar nur Wurzeln aus positiven Größen vor uns. Diese sollen positiv gerechnet werden. Indem wir von 1 bzw. -1 bis λ integrieren, erhalten wir die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda x} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right) = Z_0(x) \cdot \int_1^\lambda \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}} e^{i\mu x} d\mu + i Z_0'(x) \cdot \int_1^\lambda \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} e^{i\mu x} d\mu - \frac{\varrho i}{x}\ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}) \quad (57')$$

bzw.

$$-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda x} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right) = Z_0(x)\int_{-1}^\lambda \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{i\mu x} d\mu + i Z_0'(x)\int_{-1}^\lambda \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{i\mu x} d\mu - \frac{i\varrho}{x}(\pi - \arccos\lambda) \quad (57'')$$

Hieraus kann erneut $Ze(1, x)$ erschlossen werden. Dazu hat man, etwa in der ersten der beiden Gleichungen, beiderseits durch $\sqrt{\lambda^2-1}$ zu dividieren und den Grenzübergang

$\lambda \to 1$ durchzuführen. Die Anwendung der L'Hospitalschen Regel führt jedoch nicht geradewegs zum Ziel, da $\lambda = 1$ Verzweigungspunkt von Zähler und Nenner ist. Man muß deshalb eine bei $\lambda = 1$ verzweigte Größe, etwa $\sqrt{\lambda^2 - 1}$, als neue Veränderliche anstatt λ einführen und nach ihr die notwendigen Differentiationen vornehmen.

Die nächsten Erörterungen mögen an die letzte Gleichung angeschlossen werden. Für Z_0 können die beiden voneinander unabhängigen Funktionen J_0 und N_0 eingesetzt werden. Es ergeben sich dann für die beiden Integrale auf der rechten Seite zwei lineare Gleichungen, deren Determinante im wesentlichen die Wronskische Determinante für J_0 und N_0 ist. Löst man das Gleichungssystem auf, so wird

$$\left.\begin{aligned}\int_{-1}^{\lambda} \frac{e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} &= -\frac{i\pi\sqrt{1-\lambda^2}}{2\lambda}\begin{vmatrix} Je\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) & Ne\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) \\ J_0(x) & N_0(x)\end{vmatrix} + J_0(x)\cdot(\pi - \operatorname{arc}\cos\lambda) \\ \int_{-1}^{\lambda} \frac{\mu e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} &= \frac{-\pi\sqrt{1-\lambda^2}}{2\lambda}\begin{vmatrix} Je\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) & Ne\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) \\ J_0'(x) & N_0'(x)\end{vmatrix} - i\,J_0'(x)\,(\pi - \operatorname{arc}\cos\lambda)\end{aligned}\right\} \quad \ldots (58'')$$

Für $\lambda = 1$ werden die rechten Seiten $\pi J_0(x)$ bzw. $-i\pi J_0'(x)$, so daß sich als gern vermerkte Probe bekannte Integraldarstellungen der Besselschen Funktion J_0 und ihrer Ableitung J_0' einstellen:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad J_0'(x) = \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\mu e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (59)$$

Aus (58) und (59) folgt dann leicht die später zu benutzende Gleichung

$$\int_{\lambda}^{1} \frac{\mu e^{i\mu x}}{\sqrt{1-\mu^2}}\,d\mu = -\frac{\pi\sqrt{1-\lambda^2}}{2\lambda}\begin{vmatrix} Je\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) & Ne\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) \\ J_1(x) & N_1(x)\end{vmatrix} + i\,J_1(x)\cdot\operatorname{arc}\cos\lambda \quad \ldots (60)$$

Ebenso kennt man die Grenzwerte der Integrale (58) für $\lambda \to \infty$. Es ist nämlich

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{i\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}, \quad H_0^{(1)\prime}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}; \quad (61)$$

dabei muß aus Konvergenzgründen $x \neq 0$, und bei der ersten Formel $0 \leq \operatorname{arc} x \leq \pi$, bei der letzten $0 < \operatorname{arc} x < \pi$ vorausgesetzt werden. Derselbe Grenzübergang auf der rechten Seite von (58) erforderte die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens von $\frac{1}{\lambda} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right)$ für $\lambda \to \infty$. Man kann umgekehrt die Gleichungen (61) dazu benutzen, um sich mit Hilfe von (57) einen ersten, wenn auch unvollständigen Aufschluß über das Verhalten von $\frac{1}{\lambda} Ze\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x\right)$ für große λ zu verschaffen.

Dem Formelpaar (58''), das für $0 < \lambda < 1$ geeignet ist, entspricht das nachstehend angeführte Paar, das für $\lambda > 1$ gedacht ist und sich ebenso an (57') anschließt wie (58'') an (57'').

$$\left.\begin{aligned}\int_{1}^{\lambda} \frac{e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{\mu^2-1}} &= -\frac{\pi\sqrt{\lambda^2-1}}{4\lambda}\begin{vmatrix} He^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) & He^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) \\ H_0^{(1)}(x) & H_0^{(2)}(x)\end{vmatrix} + \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}\right)\cdot J_0(x) \\ \int_{1}^{\lambda} \frac{\mu e^{i\mu x}\,d\mu}{\sqrt{\mu^2-1}} &= \frac{\pi i\sqrt{\lambda^2-1}}{4\lambda}\begin{vmatrix} He^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) & He^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda},\lambda x\right) \\ H_0^{(1)\prime}(x) & H_0^{(2)\prime}(x)\end{vmatrix} - i\ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}\right)\cdot J_0'(x)\end{aligned}\right\} \quad \ldots (58')$$

Nach der Einführung der Funktionen Je und Ne sind auch die beiden Integrale (58'') dem Kreis der bekannten Funktionen zuzuzählen. Auf sie lassen sich alle Integrale der Form

$$\int_{a}^{b} \frac{R(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\,e^{i\mu x}\,d\mu \quad \ldots \ldots (58^*)$$

zurückführen, wenn $R(\mu)$ rational ist und höchstens bei ± 1 und ∞ Pole besitzt. D. h. $R(\mu)$ soll von der Form $(1-\mu^2)^{-m}\,G(\mu)$ sein, wobei m eine ganze Zahl und $G(\mu)$ ein Polynom bedeuten. Wir verzichten darauf, das Reduktionsverfahren und die dazu gehörigen Formeln im einzelnen darzulegen. Es handelt sich hier wie in ähnlichen Fällen im Grunde um fortgesetzte partielle Integration. Natürlich ist es auch unerheblich, daß unter der Wurzel gerade $1-\mu^2$ steht. Ein beliebiger anderer quadratischer Ausdruck kann durch lineare Transformation in die Gestalt $1-\mu^2$ gebracht werden, sofern er keine Doppelwurzeln besitzt und nicht in einen linearen Ausdruck ausgeartet ist.

Im folgenden Abschnitt betrachten wir ein Beispiel etwas ausführlicher:

7. Die Funktion $\mathfrak{E}(\lambda, \sigma)$ aus der dreidimensionalen Tragflächentheorie.

Schmeidler definiert (s. in [2] die auf (4) unmittelbar folgende unnumerierte Formel):

$$\mathfrak{E}(\lambda,\sigma) = \int_{\lambda/\sigma}^{\infty} \frac{e^{i\sigma r}}{\left(\sqrt{1+r^2}\right)^3}\,dr \qquad \text{für } \lambda > 0,\ \sigma > 0. \quad (62)$$

Diese Funktion soll auf die Funktionen Ze zurückgeführt werden. Unvollständige Integration ergibt mit $\frac{\lambda}{\sigma} = t$ (> 0) wegen

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1+r^2}\right)^3} = \frac{d}{dr}\left\{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} - 1\right\},$$

$$\mathfrak{E}(\lambda,\sigma) = -e^{i\lambda}\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}} - 1\right\} - i\sigma\int_{t}^{\infty}\left\{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} - 1\right\}e^{i\sigma r}\,dr. \quad \ldots (63)$$

Damit ist der Grad $\frac{3}{2}$ des Nenners bereits auf $\frac{1}{2}$ reduziert, und zwar sind wir auf den Typ des zweiten Integrals (58) gestoßen. Allerdings sind die Verzweigungsstellen $\pm i$ des Integranden noch nach ± 1 zu überführen. Zuvor wollen wir den Integrationsweg verschieben, damit er durch eine der Verzweigungsstellen hindurchgeht, da unsere »Normal-Integrale« (58) an solchen Stellen beginnen. Der Weg von t nach ∞ wird also in einen Weg deformiert, der über reelle Werte von t nach 0 läuft und dann der positiven imaginären Achse folgt. Der Teil von t bis i sei mit I bezeichnet, der restliche Teil II setzt sich in dem Blatt der Riemannschen Fläche fort, in das man durch eine nach rechts ausbiegende halbe Umkreisung von i gelangt (siehe Bild 1).

Um den Cauchyschen Integralsatz anwenden zu können, schneide man beide Integrationswege im Endlichen ab und verbinde sie durch eine Kurve (in unserem Bild 1 durch den gestrichelten Viertelkreis). Läßt man diese in ihrer gesamten Erstreckung nach ∞ wandern, so bringt sie im Limes keinen Beitrag, so daß sich ergibt

$$\int_{t}^{\infty}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+1}} - 1\right)e^{i\sigma r}\,dr = \int_{t}^{i} + \int_{i}^{\infty i} = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Der Wert der Wurzel auf dem Weg II ist positiv imaginär; führt man $r = u\,i$ ein, so wird nach (61)

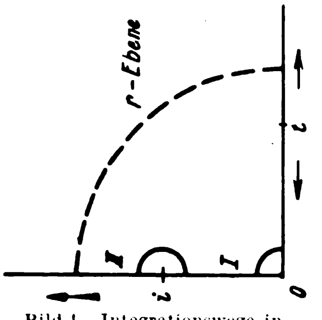


Bild 1. Integrationswege in der r-Ebene.

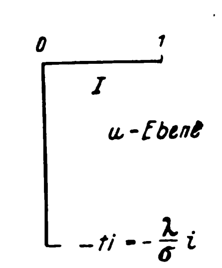


Bild 2. Integrationsweg in der u-Ebene.

$$\mathrm{II} = i\int_1^\infty \left(\frac{u}{\sqrt{u^2-1}} - 1\right) e^{-\sigma u}\, du = -\frac{\pi i}{2} H_1^{(1)}\left(\sigma e^{i\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{i e^{-\sigma}}{\sigma};$$

andererseits ist

$$\mathrm{I} = -\int_{-ti}^{1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} e^{-\sigma u}\, du + \frac{i}{\sigma}\left(e^{-\sigma} - e^{\sigma t i}\right).$$

Der Integrationsweg I in der u-Ebene läuft von $-ti$ über 0 nach $+1$ (s. Bild 2). $\sqrt{1-u^2}$ ist dort positiv zu nehmen. Zusammengefaßt erhalten wir die Formel

$$\mathfrak{E}(\lambda, \sigma) = i\sigma \int_{-\frac{\lambda}{\sigma} i}^{1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} e^{-\sigma u}\, du$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}} e^{i\lambda} - \frac{\pi}{2}\sigma H_1^{(1)}\left(\sigma e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \quad \ldots \quad (64)$$

Damit sind wir zu einem Integral der Form (60) gelangt. Will man an seiner Stelle Funktionen Ze einführen, so ersetze man dort μ, λ, x durch u, $\frac{\lambda}{\sigma} e^{-i\pi/2}$, $\sigma e^{i\pi/2}$. Dann wird, wenn man noch

$$\arccos(-ti) = \frac{\pi}{2} + i \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right)$$

beachtet

$$\mathfrak{E}(\lambda, \sigma) = \frac{\pi\sigma}{2\lambda}\sqrt{\lambda^2+\sigma^2} \begin{vmatrix} Je\left(\frac{\sigma}{\lambda} e^{i\frac{\pi}{2}}, \lambda\right) & Ne\left(\frac{\sigma}{\lambda} e^{i\frac{\pi}{2}}, \lambda\right) \\ J_1(\sigma i) & N_1\left(\sigma e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \end{vmatrix}$$

$$- \frac{\lambda e^{i\lambda}}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}} - \frac{\pi\sigma}{2}\left[J_1(\sigma i) + H_1^{(1)}\left(\sigma e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$- \sigma i J_1(\sigma i) \ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{\sigma} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

Die Formeln (64) und (65) sind als das Ergebnis dieses Abschnittes anzusehen.

8. Asymptotische Entwicklung für große λx.

Die Zylinderfunktionen können in ihrem Verhalten für großes Argument durch die sog. Hankelschen asymptotischen Entwicklungen beschrieben werden. Ganz entsprechend lassen sich über unsere Funktionen Ze unter Benutzung dieser Hankelschen Reihen asymptotische Aussagen gewinnen. Das ist das Ziel dieses Abschnitts.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber dabei auf positive λ und x. Das können wir um so mehr, als wir beabsichtigen, in einer späteren Arbeit an dieselbe Frage mit schärferen Hilfsmitteln nochmals heranzugehen und sie vollständig ohne unsachgemäße Einschränkung des Variabelnbereiches zu erledigen. Die hier befolgte Methode hat den Vorzug, auf sehr einfache Weise zur richtigen asymptotischen Reihenentwicklung zu führen, während sie jedoch bei der Restabschätzung im Komplexen anscheinend etwas schwieriger zu handhaben ist.

Man stellt $He^{(1)}(\lambda, x)$, das als Integral von 0 bis x definiert ist, als Differenz der Integrale von 0 bis ∞ und x bis ∞ dar:

$$He^{(1)}(\lambda, x) = \int_0^\infty - \int_x^\infty H_0^{(1)}(\lambda u)\, e^{iu}\, du \quad \ldots \quad (66)$$

Von diesen beiden Integralen ist das erste bekannt und in der ihm gebührenden Bezeichnung $He^{(1)}(\lambda, \infty)$ in Formel (42) in Abschnitt 4, 4 angegeben. In das zweite von x bis ∞ erstreckte Integral setzt man nun die Hankelsche asymptotische Darstellung ein. Diese ist bekanntlich

$$H_0^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{m=0}^{p-1} \frac{\left[\binom{2m}{m} 4^{-m}\right]^2 m!}{(2iz)^m} + O(z^{-p})\right] \quad \ldots \quad (67)$$

Unter $O(f(z))$ sei dabei, wie üblich, eine Funktion verstanden, die, durch $f(z)$ dividiert, beim gerade interessierenden Grenzübergang, hier also $z \to \infty$, beschränkt bleibt. Benutzt man die leicht zu beweisende Hilfsformel

$$\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)!}{(i\lambda)^m} \int_x^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{x^{m+\frac{1}{2}}}\, dx = \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)!}{(i\lambda)^p} \int_x^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$- \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=m}^{p-1} \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}{(i\lambda x)^\nu} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

so findet man als Ergebnis die folgende asymptotische Reihe

$$He^{(1)}(\lambda, x) = He^{(1)}(\lambda, \infty) - \frac{1+i}{1+\lambda} \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda x}} e^{i(1+\lambda)x}$$

$$\times \left[\sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{2\nu}{\nu} \nu! \left[4i(1+\lambda)x\right]^{-\nu} \cdot \sum_{m=0}^{\nu} \binom{2m}{m} \left(\frac{\lambda+1}{8\lambda}\right)^m + \text{Rest}\right] \quad \ldots \quad (69')$$

Diese Formel besagt natürlich erst dann etwas, wenn über den Rest eine einschränkende Aussage gemacht wird. Da nun die Hankelsche Reihe (67) nur für $z > \lambda x$ ausgenützt wird, ist anzunehmen, daß der Gütegrad von der Kombination λx abhängt. In der Tat ist für $\lambda > 0$, $x > 0$ der

$$\text{Rest in (69)} = O((\lambda x)^{-p}) \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

gleichmäßig für alle λ, die größer als ein positives δ sind.

Der Beweis folgt durch leichte Abschätzung. Wir bemerken dazu, daß der Rest sich aus zwei Anteilen zusammensetzt. Der eine rührt daher, daß bei der mehrfachen Anwendung der Formel (68) das Integral der rechten Seite dem Restglied zugeschlagen wird; der andere Anteil entsteht aus dem Restglied der Hankelschen Entwicklung von $H_0^{(2)}$. Zu seiner Bewältigung muß man

$$\int_x^\infty e^{i(\lambda+1)x} O\left((\lambda x)^{-p-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{e^{i(\lambda+1)x}}{\lambda} O\left((\lambda x)^{-p+\frac{1}{2}}\right) \text{ für } \lambda > 0,\ x > 0$$

wissen, was sich sofort ergibt, wenn man den Exponentialfaktor durch 1 abschätzt. Auch den ersten Restgliedanteil wird man zweckmäßig mit dieser Formel erledigen, da sich danach eine genauere Aussage nicht mehr lohnt. Man erhält dann den Gesamtrest nur mit dem Exponenten $p-1$. Verschlechtert man aber die Aussage der Formel (69′), indem man den letzten Summanden mit dem Exponenten $\nu = p-1$ noch in das Restglied aufnimmt, so hat man die asymptotische Aussage gleichwohl bewiesen, nämlich mit $p-1$ statt p, was der Allgemeingültigkeit keinen Abbruch tut.

Für $He^{(2)}$ gilt eine entsprechende asymptotische Darstellung, die ebenso bewiesen wird. Es ist

$$He^{(2)}(\lambda, x) = He^{(2)}(\lambda, \infty) + \frac{(1-i)\,e^{i(1-\lambda)x}}{(1-\lambda)\sqrt{\pi\lambda x}}$$
$$\times\left[\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{2\nu}{\nu}\nu!\,[4i(1-\lambda)x]^{-\nu}\cdot\sum_{m=0}^{\nu}\binom{2m}{m}\left(\frac{\lambda-1}{8\lambda}\right)^m + \text{Rest}\right] \quad \ldots (69'')$$

Der Rest ist wie oben nach Formel (70) eingeschränkt. Für eine schnelle Abschätzung, etwa zum Nachweis der Konvergenz bei Integralen, genügt meist schon der Sonderfall $p = 1$:

$$\left.\begin{aligned} He^{(1)}(\lambda, x) &\approx He^{(1)}(\lambda, \infty) - \frac{(1+i)\,e^{i(1+\lambda)x}}{(1+\lambda)\sqrt{\pi\lambda x}} \\ He^{(2)}(\lambda, x) &\approx He^{(2)}(\lambda, \infty) + \frac{(1-i)\,e^{i(1-\lambda)x}}{(1-\lambda)\sqrt{\pi\lambda x}} \end{aligned}\right\} \text{für } \lambda > 0,\ x > 0,\ \lambda x \gg 0 \quad \ldots (71)$$

9. Zahlenrechnung.

Zur Berechnung der Funktionen Jc, Js, Nc und $Ns(\lambda, x)$ geht man zweckmäßig auf die Definition (1) zurück. Wir haben für $Jc(\lambda, x)$ und $Js(\lambda, x)$ die unbestimmten Integrale mit Hilfe der integrierten Besselschen Interpolationsformel ausgewertet, und zwar von $x = 0$ bis 2 im Schritt 0,02 für die neun λ-Werte 0,1 bis 0,9 (Zahlentafel 1 bis 9). Da Rechenfehler sich dabei bis zum Endargument $x = 2$ fortpflanzen, verbürgt eine Nachprüfung von $Jc(\lambda, 2)$ und $Js(\lambda, 2)$ auch die Richtigkeit für kleinere x-Werte. Dazu steht die Potenzreihenentwicklung (22) zur Verfügung. Um den Zeitaufwand einer etwaigen Fehlersuche herabzusetzen, wurden ebenso auch $Jc(\lambda, 1)$ und $Js(\lambda, 1)$ unabhängig berechnet.

Die Funktionen $Nc(\lambda, x)$ und $Ns(\lambda, x)$ besitzen eine logarithmische Singularität bei $x = 0$, die von der Singularität von N_0 im Integranden herrührt. Aus diesem Grunde wurde in der Nähe von $x = 0$ der logarithmische Bestandteil nach (6) abgespalten und die Restbestandteile $Cc(\lambda, x)$ und $Cs(\lambda, x)$ nach Formel (25) ausintegriert. Cc und Cs sind hier mittabuliert (Zahlentafel 20* bis 30), weil die logarithmische Singularität sich nicht nur auf die Integration störend auswirkt, sondern auch die Interpolation in den Zahlentafeln für Nc und Ns beeinträchtigt. Nc und Ns sollen also in der Nähe von $x = 0$ für unrundes Argument nicht aus den Zahlentafeln 11 bis 20 durch direkte Interpolation gewonnen werden, sondern es sei vorgeschlagen, Jc und Cc bzw. Js und Cs zu interpolieren und gemäß (6) zu Nc bzw. Ns zusammenzusetzen.

In genügender Entfernung von $x = 0$ wurde die Berechnung der Zahlentafeln 11 bis 19 analog zu dem bei Jc und Js verwendeten Verfahren vorgenommen. Die Werte bei $x = 1$ bzw. 2 wurden mit der Potenzreihenentwicklung (30) nachgeprüft.

Die numerische Integration wurde später bis $x = 5$ im gröberen Schritt 0,1 fortgesetzt, bei Nc und Ns mit gleicher Genauigkeit bei 2 beginnend (Zahlentafel 41 bis 49), bei Jc und Js mit höherer Genauigkeit von $x = 0$ an (Zahlentafel 31 bis 39). Zur Nachprüfung bei $x = 5$ wurde für Nc und Ns wieder (30), für Jc und Js dagegen die Reihe (30*) benützt.

Die Berechnung für $\lambda = 1$ erfolgte bei allen Funktionen nach Formel (40) in Abschnitt 4, 2 (Zahlentafel 10, 20, 40, 50).

In den Zahlentafeln 31 bis 39 für Jc und Js von $\lambda = 0{,}1$ bis 0,9 wird eine Fehlerschranke von $3 \cdot 10^{-8}$ verbürgt. Die übrigen Zahlentafeln sollen in dem durch ihre Stellenzahl vorgeschriebenen Rahmen exakt sein.

In Bild 3 bis 6 sind die vier Funktionen Jc, Js, Nc, Ns in dem tabulierten Ausmaß graphisch dargestellt.

10. Schrifttum.

1. Aus der instationären Tragflügeltheorie.

[1] C. Possio, L'azione aerodinamica sul profilo oscillante in un fluido compressibile a velocità iposonora. L'Aerotecnica Bd. 18 (1938), S. 441 bis 458.

[2] W. Schmeidler, Vortrieb und Widerstand. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 65 bis 86.

[3] H. G. Küssner, Allgemeine Tragflächentheorie. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 370 bis 378.

[4] L. Schwarz, Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 379 bis 386.

[5] S. v. Borbély, Über die Luftkräfte, die auf einen harmonisch schwingenden zweidimensionalen Flügel bei Überschallgeschwindigkeit wirken. Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 190 bis 205.

2. Zur Theorie der Zylinderfunktionen.

[6] R. Müller, Über die zahlenmäßige Beherrschung und Anwendung einiger den Besselschen verwandten Funktionen nebst Bemerkungen zum Gebiet der Bessel-Funktionen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 36 bis 54.

[7] N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. Leipzig 1904.

[8] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge (1922).

[9] R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig-Berlin (1937).

[10] British Association Mathematical Tables, Bd. VI, Cambridge Press 1937.

[11] Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 3. Auflage. Leipzig-Berlin 1938.

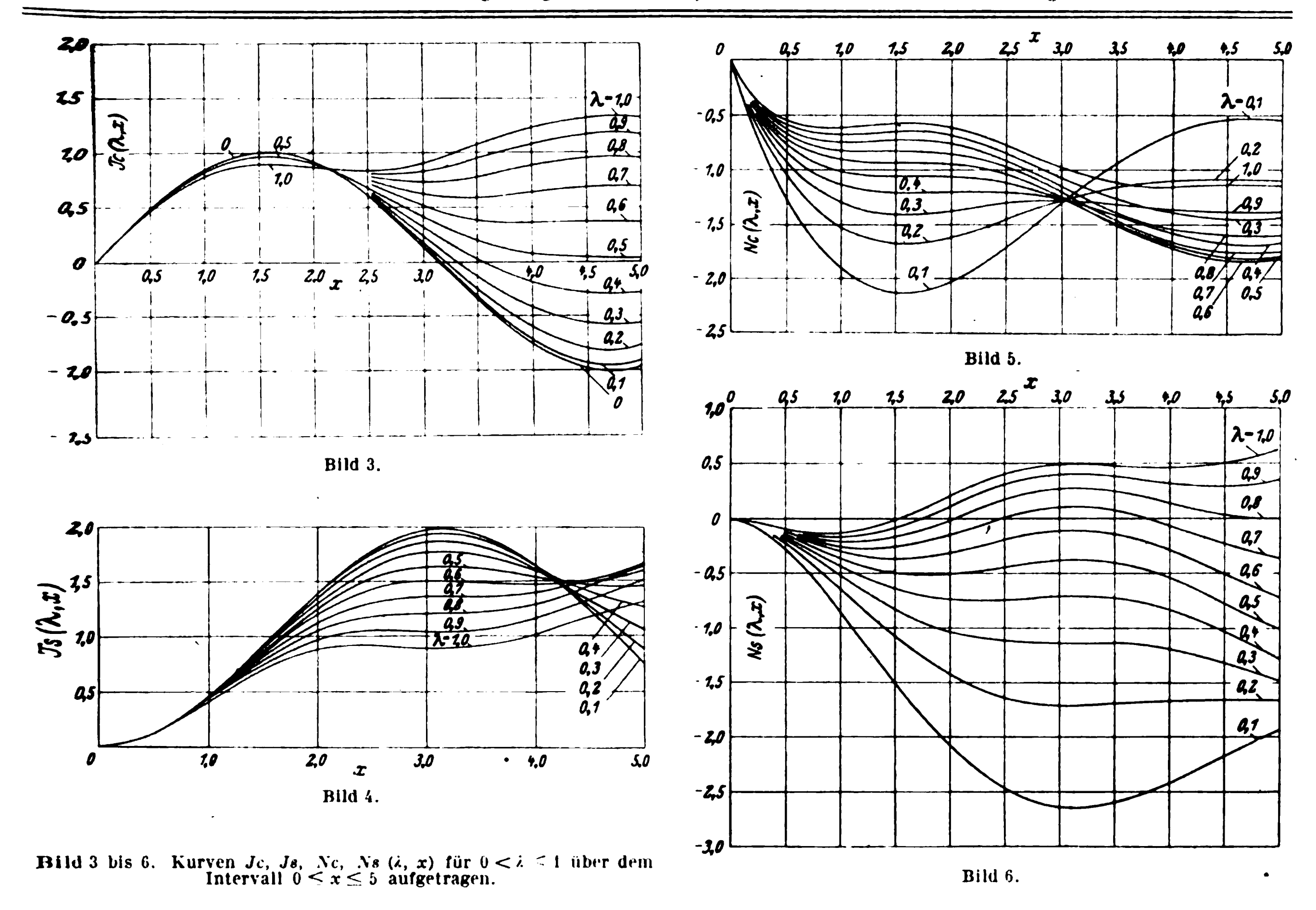


Bild 3.

Bild 4.

Bild 5.

Bild 6.

Bild 3 bis 6. **Kurven** Jc, Js, Nc, Ns (λ, x) **für** $0 < \lambda \leq 1$ **über dem Intervall** $0 < x \leq 5$ **aufgetragen.**

11. Zahlentafeln.

Zahlentafel 1. $\lambda = 0{,}1$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,840 873	0,459 140
0,02	0,019 999	0,000 200	1,02	0,851 483	0,476 033
0,04	0,039 989	0,000 800	1,04	0,861 752	0,493 133
0,06	0,059 964	0,001 799	1,06	0,871 676	0,510 434
0,08	0,079 914	0,003 198	1,08	0,881 251	0,527 927
0,10	0,099 833	0,004 996	1,10	0,890 473	0,545 607
0,12	0,119 711	0,007 191	1,12	0,899 339	0,563 465
0,14	0,139 541	0,009 784	1,14	0,907 845	0,581 496
0,16	0,159 315	0,012 772	1,16	0,915 987	0,599 690
0,18	0,179 025	0,016 156	1,18	0,923 763	0,618 042
0,20	0,198 663	0,019 932	1,20	0,931 170	0,636 543
0,22	0,218 221	0,024 101	1,22	0,938 205	0,655 187
0,24	0,237 691	0,028 660	1,24	0,944 864	0,673 965
0,26	0,257 066	0,033 607	1,26	0,951 146	0,692 870
0,28	0,276 338	0,038 941	1,28	0,957 047	0,711 895
0,30	0,295 498	0,044 658	1,30	0,962 567	0,731 032
0,32	0,314 540	0,050 758	1,32	0,967 702	0,750 272
0,34	0,333 455	0,057 237	1,34	0,972 450	0,769 609
0,36	0,352 237	0,064 093	1,36	0,976 810	0,789 034
0,38	0,370 877	0,071 323	1,38	0,980 780	0,808 540
0,40	0,389 368	0,078 923	1,40	0,984 359	0,828 119
0,42	0,407 702	0,086 892	1,42	0,987 545	0,847 763
0,44	0,425 873	0,095 225	1,44	0,990 338	0,867 464
0,46	0,443 872	0,103 920	1,46	0,992 735	0,887 213
0,48	0,461 693	0,112 973	1,48	0,994 737	0,907 004
0,50	0,479 329	0,122 379	1,50	0,996 342	0,926 828
0,52	0,496 772	0,132 136	1,52	0,997 550	0,946 677
0,54	0,514 016	0,142 240	1,54	0,998 361	0,966 543
0,56	0,531 053	0,152 686	1,56	0,998 774	0,986 419
0,58	0,547 877	0,163 469	1,58	0,998 790	1,006 295
0,60	0,564 482	0,174 587	1,60	0,998 409	1,026 165
0,62	0,580 859	0,186 033	1,62	0,997 630	1,046 020
0,64	0,597 003	0,197 804	1,64	0,996 454	1,065 852
0,66	0,612 908	0,209 895	1,66	0,994 883	1,085 654
0,68	0,628 566	0,222 300	1,68	0,992 916	1,105 417
0,70	0,643 973	0,235 016	1,70	0,990 554	1,125 133
0,72	0,659 121	0,248 036	1,72	0,987 799	1,144 795
0,74	0,674 004	0,261 355	1,74	0,984 653	1,164 394
0,76	0,688 617	0,274 969	1,76	0,981 115	1,183 923
0,78	0,702 954	0,288 870	1,78	0,977 188	1,203 374
0,80	0,717 008	0,303 055	1,80	0,972 874	1,222 739
0,82	0,730 775	0,317 517	1,82	0,968 174	1,242 010
0,84	0,744 250	0,332 250	1,84	0,963 091	1,261 180
0,86	0,757 425	0,347 248	1,86	0,957 626	1,280 241
0,88	0,770 297	0,362 505	1,88	0,951 783	1,299 186
0,90	0,782 860	0,378 016	1,90	0,945 562	1,318 006
0,92	0,795 109	0,393 773	1,92	0,938 968	1,336 694
0,94	0,807 040	0,409 771	1,94	0,932 003	1,355 244
0,96	0,818 647	0,426 002	1,96	0,924 670	1,373 646
0,98	0,829 927	0,442 461	1,98	0,916 972	1,391 895
1,00	0,840 873	0,459 140	2,00	0,908 911	1,409 983

Zahlentafel 2. $\lambda = 0{,}2$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,839 083	0,457 469
0,02	0,019 999	0,000 200	1,02	0,849 612	0,474 233
0,04	0,039 989	0,000 800	1,04	0,859 799	0,491 197
0,06	0,059 963	0,001 799	1,06	0,869 641	0,508 355
0,08	0,079 913	0,003 198	1,08	0,879 134	0,525 698
0,10	0,099 830	0,004 996	1,10	0,888 274	0,543 220
0,12	0,119 706	0,007 191	1,12	0,897 057	0,560 914
0,14	0,139 534	0,009 783	1,14	0,905 482	0,578 772
0,16	0,159 305	0,012 771	1,16	0,913 544	0,596 786
0,18	0,179 010	0,016 154	1,18	0,921 240	0,614 949
0,20	0,198 643	0,019 929	1,20	0,928 569	0,633 254
0,22	0,218 195	0,024 097	1,22	0,935 526	0,651 693
0,24	0,237 657	0,028 654	1,24	0,942 110	0,670 259
0,26	0,257 023	0,033 599	1,26	0,948 318	0,688 943
0,28	0,276 284	0,038 929	1,28	0,954 148	0,707 738
0,30	0,295 433	0,044 643	1,30	0,959 599	0,726 636
0,32	0,314 461	0,050 739	1,32	0,964 668	0,745 629
0,34	0,333 361	0,057 212	1,34	0,969 353	0,764 709
0,36	0,352 125	0,064 062	1,36	0,973 654	0,783 869
0,38	0,370 745	0,071 284	1,38	0,977 568	0,803 101
0,40	0,389 215	0,078 876	1,40	0,981 095	0,822 397
0,42	0,407 526	0,086 835	1,42	0,984 234	0,841 748
0,44	0,425 672	0,095 157	1,44	0,986 983	0,861 147
0,46	0,443 644	0,103 838	1,46	0,989 343	0,880 585
0,48	0,461 436	0,112 876	1,48	0,991 312	0,900 056
0,50	0,479 040	0,122 266	1,50	0,992 891	0,919 550
0,52	0,496 449	0,132 004	1,52	0,994 078	0,939 060
0,54	0,513 656	0,142 086	1,54	0,994 875	0,958 578
0,56	0,530 655	0,152 508	1,56	0,995 281	0,978 096
0,58	0,547 438	0,163 265	1,58	0,995 297	0,997 606
0,60	0,563 999	0,174 353	1,60	0,994 922	1,017 099
0,62	0,580 331	0,185 768	1,62	0,994 159	1,036 569
0,64	0,596 427	0,197 504	1,64	0,993 007	1,056 007
0,66	0,612 281	0,209 556	1,66	0,991 467	1,075 404
0,68	0,627 887	0,221 920	1,68	0,989 541	1,094 755
0,70	0,643 238	0,234 590	1,70	0,987 230	1,114 049
0,72	0,658 329	0,247 561	1,72	0,984 536	1,133 280
0,74	0,673 153	0,260 827	1,74	0,981 459	1,152 441
0,76	0,687 704	0,274 383	1,76	0,978 003	1,171 522
0,78	0,701 977	0,288 223	1,78	0,974 168	1,190 517
0,80	0,715 966	0,302 341	1,80	0,969 957	1,209 417
0,82	0,729 666	0,316 732	1,82	0,965 373	1,228 216
0,84	0,743 070	0,331 389	1,84	0,960 417	1,246 906
0,86	0,756 174	0,346 306	1,86	0,955 092	1,265 479
0,88	0,768 973	0,361 477	1,88	0,949 402	1,283 927
0,90	0,781 462	0,376 895	1,90	0,943 348	1,302 244
0,92	0,793 635	0,392 554	1,92	0,936 934	1,320 423
0,94	0,805 488	0,408 448	1,94	0,930 163	1,338 455
0,96	0,817 017	0,424 570	1,96	0,923 038	1,356 334
0,98	0,828 217	0,440 912	1,98	0,915 563	1,374 053
1,00	0,839 083	0,457 469	2,00	0,907 742	1,391 605



Zahlentafel 3. $\lambda = 0{,}3$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,836 107	0,454 693
0,02	0,019 999	0,000 200	1,02	0,846 502	0,471 243
0,04	0,039 989	0,000 800	1,04	0,856 553	0,487 982
0,06	0,059 962	0,001 799	1,06	0,866 259	0,504 902
0,08	0,079 911	0,003 198	1,08	0,875 616	0,521 997
0,10	0,099 826	0,004 995	1,10	0,884 620	0,539 258
0,12	0,119 699	0,007 190	1,12	0,893 268	0,556 679
0,14	0,139 523	0,009 782	1,14	0,901 558	0,574 251
0,16	0,159 288	0,012 769	1,16	0,909 486	0,591 967
0,18	0,178 986	0,016 150	1,18	0,917 051	0,609 818
0,20	0,198 610	0,019 924	1,20	0,924 249	0,627 799
0,22	0,218 151	0,024 089	1,22	0,931 078	0,645 899
0,24	0,237 601	0,028 643	1,24	0,937 538	0,664 112
0,26	0,256 951	0,033 585	1,26	0,943 624	0,682 430
0,28	0,276 195	0,038 910	1,28	0,949 337	0,700 845
0,30	0,295 323	0,044 618	1,30	0,954 673	0,719 349
0,32	0,314 328	0,050 706	1,32	0,959 633	0,737 933
0,34	0,333 203	0,057 171	1,34	0,964 215	0,756 590
0,36	0,351 938	0,064 010	1,36	0,968 417	0,775 312
0,38	0,370 527	0,071 220	1,38	0,972 239	0,794 091
0,40	0,388 961	0,078 798	1,40	0,975 681	0,812 919
0,42	0,407 234	0,086 740	1,42	0,978 741	0,831 787
0,44	0,425 338	0,095 042	1,44	0,981 420	0,850 688
0,46	0,443 264	0,103 702	1,46	0,983 718	0,869 614
0,48	0,461 007	0,112 714	1,48	0,985 634	0,888 557
0,50	0,478 558	0,122 076	1,50	0,987 168	0,907 508
0,52	0,495 911	0,131 782	1,52	0,988 322	0,926 459
0,54	0,513 058	0,141 829	1,54	0,989 095	0,945 403
0,56	0,529 992	0,152 211	1,56	0,989 489	0,964 332
0,58	0,546 707	0,162 925	1,58	0,989 504	0,983 238
0,60	0,563 195	0,173 965	1,60	0,989 141	1,002 113
0,62	0,579 451	0,185 326	1,62	0,988 403	1,020 948
0,64	0,595 467	0,197 004	1,64	0,987 289	1,039 737
0,66	0,611 238	0,208 993	1,66	0,985 802	1,058 472
0,68	0,626 756	0,221 287	1,68	0,983 944	1,077 144
0,70	0,642 016	0,233 882	1,70	0,981 716	1,095 745
0,72	0,657 011	0,246 771	1,72	0,979 120	1,114 270
0,74	0,671 736	0,259 948	1,74	0,976 160	1,132 709
0,76	0,686 185	0,273 409	1,76	0,972 836	1,151 056
0,78	0,700 352	0,287 146	1,78	0,969 153	1,169 302
0,80	0,714 232	0,301 154	1,80	0,965 112	1,187 441
0,82	0,727 819	0,315 427	1,82	0,960 716	1,205 465
0,84	0,741 108	0,329 957	1,84	0,955 969	1,223 367
0,86	0,754 094	0,344 739	1,86	0,950 874	1,241 140
0,88	0,766 771	0,359 766	1,88	0,945 434	1,258 777
0,90	0,779 136	0,375 032	1,90	0,939 652	1,276 271
0,92	0,791 183	0,390 529	1,92	0,933 533	1,293 614
0,94	0,802 908	0,406 250	1,94	0,927 079	1,310 801
0,96	0,814 307	0,422 190	1,96	0,920 296	1,327 824
0,98	0,825 374	0,438 340	1,98	0,913 186	1,344 677
1,00	0,836 107	0,454 693	2,00	0,905 755	1,361 353

Zahlentafel 4. $\lambda = 0{,}4$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,831 959	0,450 826
0,02	0,019 999	0,000 200	1,02	0,842 166	0,467 078
0,04	0,039 988	0,000 800	1,04	0,852 030	0,483 504
0,06	0,059 961	0,001 799	1,06	0,861 547	0,500 096
0,08	0,079 908	0,003 198	1,08	0,870 715	0,516 845
0,10	0,099 820	0,004 995	1,10	0,879 530	0,533 744
0,12	0,119 689	0,007 189	1,12	0,887 990	0,550 786
0,14	0,139 507	0,009 780	1,14	0,896 093	0,567 962
0,16	0,159 264	0,012 766	1,16	0,903 836	0,585 264
0,18	0,178 953	0,016 146	1,18	0,911 218	0,602 684
0,20	0,198 564	0,019 917	1,20	0,918 236	0,620 214
0,22	0,218 090	0,024 079	1,22	0,924 889	0,637 846
0,24	0,237 522	0,028 629	1,24	0,931 175	0,655 572
0,26	0,256 851	0,033 565	1,26	0,937 093	0,673 383
0,28	0,276 070	0,038 884	1,28	0,942 643	0,691 272
0,30	0,295 170	0,044 583	1,30	0,947 822	0,709 231
0,32	0,314 143	0,050 661	1,32	0,952 631	0,727 250
0,34	0,332 981	0,057 113	1,34	0,957 069	0,745 323
0,36	0,351 677	0,063 938	1,36	0,961 136	0,763 440
0,38	0,370 221	0,071 130	1,38	0,964 831	0,781 594
0,40	0,388 606	0,078 688	1,40	0,968 155	0,799 776
0,42	0,406 825	0,086 606	1,42	0,971 107	0,817 979
0,44	0,424 870	0,094 882	1,44	0,973 689	0,836 194
0,46	0,442 733	0,103 511	1,46	0,975 900	0,854 413
0,48	0,460 407	0,112 488	1,48	0,977 743	0,872 628
0,50	0,477 884	0,121 810	1,50	0,979 217	0,890 831
0,52	0,495 158	0,131 472	1,52	0,980 324	0,909 014
0,54	0,512 220	0,141 470	1,54	0,981 065	0,927 169
0,56	0,529 065	0,151 797	1,56	0,981 442	0,945 288
0,58	0,545 684	0,162 450	1,58	0,981 456	0,963 364
0,60	0,562 072	0,173 422	1,60	0,981 110	0,981 389
0,62	0,578 222	0,184 710	1,62	0,980 406	0,999 354
0,64	0,594 127	0,196 306	1,64	0,979 345	1,017 253
0,66	0,609 780	0,208 206	1,66	0,977 930	1,035 077
0,68	0,625 176	0,220 403	1,68	0,976 164	1,052 819
0,70	0,640 308	0,232 892	1,70	0,974 050	1,070 472
0,72	0,655 171	0,245 667	1,72	0,971 590	1,088 029
0,74	0,669 758	0,258 722	1,74	0,968 788	1,105 481
0,76	0,684 065	0,272 049	1,76	0,965 647	1,122 823
0,78	0,698 084	0,285 643	1,78	0,962 170	1,140 046
0,80	0,711 811	0,299 498	1,80	0,958 361	1,157 144
0,82	0,725 242	0,313 605	1,82	0,954 223	1,174 110
0,84	0,738 370	0,327 960	1,84	0,949 761	1,190 938
0,86	0,751 190	0,342 554	1,86	0,944 979	1,207 620
0,88	0,763 699	0,357 381	1,88	0,939 880	1,224 150
0,90	0,775 892	0,372 434	1,90	0,934 469	1,240 521
0,92	0,787 763	0,387 705	1,92	0,928 751	1,256 728
0,94	0,799 309	0,403 187	1,94	0,922 730	1,272 764
0,96	0,810 527	0,418 873	1,96	0,916 410	1,288 623
0,98	0,821 411	0,434 755	1,98	0,909 797	1,304 298
1,00	0,831 959	0,450 826	2,00	0,902 896	1,319 785



Zahlentafel 5. $\lambda = 0,5$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,826 654	0,445 887
0,02	0,019 999	0,000 200	1,02	0,836 624	0,461 761
0,04	0,039 988	0,000 800	1,04	0,846 249	0,477 788
0,06	0,059 960	0,001 799	1,06	0,855 526	0,493 962
0,08	0,079 904	0,003 198	1,08	0,864 454	0,510 272
0,10	0,099 813	0,004 994	1,10	0,873 029	0,526 712
0,12	0,119 676	0,007 188	1,12	0,881 250	0,543 272
0,14	0,139 486	0,009 778	1,14	0,889 116	0,559 945
0,16	0,159 234	0,012 763	1,16	0,896 624	0,576 722
0,18	0,178 909	0,016 140	1,18	0,903 774	0,593 595
0,20	0,198 505	0,019 909	1,20	0,910 564	0,610 554
0,22	0,218 011	0,024 066	1,22	0,916 992	0,627 593
0,24	0,237 420	0,028 611	1,24	0,923 060	0,644 702
0,26	0,256 722	0,033 539	1,26	0,928 765	0,661 872
0,28	0,275 909	0,038 849	1,28	0,934 109	0,679 096
0,30	0,294 973	0,044 538	1,30	0,939 089	0,696 365
0,32	0,313 905	0,050 603	1,32	0,943 708	0,713 671
0,34	0,332 697	0,057 039	1,34	0,947 965	0,731 005
0,36	0,351 341	0,063 845	1,36	0,951 860	0,748 359
0,38	0,369 828	0,071 015	1,38	0,955 394	0,765 724
0,40	0,388 150	0,078 547	1,40	0,958 569	0,783 093
0,42	0,406 300	0,086 435	1,42	0,961 386	0,800 456
0,44	0,424 270	0,094 676	1,44	0,963 845	0,817 807
0,46	0,442 051	0,103 266	1,46	0,965 949	0,835 137
0,48	0,459 637	0,112 199	1,48	0,967 699	0,852 437
0,50	0,477 019	0,121 470	1,50	0,969 097	0,869 699
0,52	0,494 191	0,131 075	1,52	0,970 145	0,886 917
0,54	0,511 146	0,141 009	1,54	0,970 846	0,904 082
0,56	0,527 875	0,151 266	1,56	0,971 201	0,921 185
0,58	0,544 372	0,161 840	1,58	0,971 215	0,938 221
0,60	0,560 631	0,172 727	1,60	0,970 889	0,955 180
0,62	0,576 645	0,183 919	1,62	0,970 228	0,972 055
0,64	0,592 407	0,195 411	1,64	0,969 233	0,988 840
0,66	0,607 911	0,207 197	1,66	0,967 909	1,005 526
0,68	0,623 150	0,219 270	1,68	0,966 259	1,022 106
0,70	0,638 119	0,231 625	1,70	0,964 286	1,038 575
0,72	0,652 812	0,244 254	1,72	0,961 996	1,054 923
0,74	0,667 223	0,257 150	1,74	0,959 391	1,071 145
0,76	0,681 347	0,270 308	1,76	0,956 477	1,087 234
0,78	0,695 178	0,283 719	1,78	0,953 257	1,103 184
0,80	0,708 710	0,297 377	1,80	0,949 737	1,118 987
0,82	0,721 941	0,311 274	1,82	0,945 920	1,134 638
0,84	0,734 863	0,325 404	1,84	0,941 812	1,150 130
0,86	0,747 473	0,339 758	1,86	0,937 418	1,165 458
0,88	0,759 767	0,354 330	1,88	0,932 743	1,180 615
0,90	0,771 739	0,369 111	1,90	0,927 792	1,195 595
0,92	0,783 387	0,384 094	1,92	0,922 570	1,210 394
0,94	0,794 706	0,399 271	1,94	0,917 084	1,225 006
0,96	0,805 692	0,414 634	1,96	0,911 338	1,239 425
0,98	0,816 343	0,430 176	1,98	0,905 339	1,253 646
1,00	0,826 654	0,445 887	2,00	0,899 092	1,267 665

Zahlentafel 6. $\lambda = 0,6$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,820 217	0,439 900
0,02	0,019 998	0,000 200	1,02	0,829 899	0,455 317
0,04	0,039 987	0,000 800	1,04	0,839 236	0,470 864
0,06	0,059 958	0,001 799	1,06	0,848 224	0,486 533
0,08	0,079 899	0,003 197	1,08	0,856 862	0,502 315
0,10	0,099 804	0,004 994	1,10	0,865 149	0,518 201
0,12	0,119 661	0,007 187	1,12	0,873 083	0,534 183
0,14	0,139 461	0,009 775	1,14	0,880 663	0,550 251
0,16	0,159 196	0,012 758	1,16	0,887 889	0,566 397
0,18	0,178 856	0,016 133	1,18	0,894 760	0,582 612
0,20	0,198 432	0,019 898	1,20	0,901 275	0,598 887
0,22	0,217 915	0,024 050	1,22	0,907 436	0,615 213
0,24	0,237 295	0,028 588	1,24	0,913 241	0,631 582
0,26	0,256 564	0,033 508	1,26	0,918 691	0,647 984
0,28	0,275 713	0,038 808	1,28	0,923 787	0,664 412
0,30	0,294 733	0,044 483	1,30	0,928 530	0,680 857
0,32	0,313 615	0,050 532	1,32	0,932 921	0,697 309
0,34	0,332 350	0,056 949	1,34	0,936 961	0,713 760
0,36	0,350 931	0,063 731	1,36	0,940 652	0,730 202
0,38	0,369 348	0,070 875	1,38	0,943 995	0,746 627
0,40	0,387 594	0,078 375	1,40	0,946 993	0,763 025
0,42	0,405 659	0,086 226	1,42	0,949 647	0,779 389
0,44	0,423 537	0,094 425	1,44	0,951 960	0,795 711
0,46	0,441 219	0,102 967	1,46	0,953 936	0,811 982
0,48	0,458 697	0,111 845	1,48	0,955 576	0,828 194
0,50	0,475 964	0,121 055	1,50	0,956 883	0,844 340
0,52	0,493 013	0,130 591	1,52	0,957 862	0,860 412
0,54	0,509 835	0,140 447	1,54	0,958 514	0,876 401
0,56	0,526 424	0,150 618	1,56	0,958 845	0,892 301
0,58	0,542 773	0,161 097	1,58	0,958 858	0,908 104
0,60	0,558 875	0,171 878	1,60	0,958 557	0,923 803
0,62	0,574 723	0,182 955	1,62	0,957 945	0,939 390
0,64	0,590 311	0,194 320	1,64	0,957 029	0,954 859
0,66	0,605 633	0,205 968	1,66	0,955 811	0,970 202
0,68	0,620 682	0,217 891	1,68	0,954 297	0,985 413
0,70	0,635 453	0,230 082	1,70	0,952 492	1,000 485
0,72	0,649 940	0,242 533	1,72	0,950 401	1,015 412
0,74	0,664 137	0,255 238	1,74	0,948 029	1,030 187
0,76	0,678 039	0,268 189	1,76	0,945 381	1,044 805
0,78	0,691 641	0,281 378	1,78	0,942 463	1,059 259
0,80	0,704 938	0,294 798	1,80	0,939 281	1,073 544
0,82	0,717 925	0,308 441	1,82	0,935 840	1,087 654
0,84	0,730 599	0,322 298	1,84	0,932 147	1,101 583
0,86	0,742 954	0,336 362	1,86	0,928 207	1,115 327
0,88	0,754 986	0,350 625	1,88	0,924 026	1,128 881
0,90	0,766 693	0,365 077	1,90	0,919 611	1,142 239
0,92	0,778 070	0,379 712	1,92	0,914 969	1,155 397
0,94	0,789 114	0,394 520	1,94	0,910 105	1,168 350
0,96	0,799 821	0,409 493	1,96	0,905 027	1,181 095
0,98	0,810 190	0,424 623	1,98	0,899 741	1,193 626
1,00	0,820 217	0,439 900	2,00	0,894 253	1,205 941



Zahlentafel 7. $\lambda = 0{,}7$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,812 672	0,432 895
0,02	0,019 998	0,000 200	1,02	0,822 021	0,447 780
0,04	0,039 987	0,000 800	1,04	0,831 022	0,462 769
0,06	0,059 955	0,001 799	1,06	0,839 674	0,477 852
0,08	0,079 894	0,003 197	1,08	0,847 976	0,493 020
0,10	0,099 793	0,004 993	1,10	0,855 928	0,508 263
0,12	0,119 642	0,007 185	1,12	0,863 528	0,523 573
0,14	0,139 432	0,009 772	1,14	0,870 778	0,538 941
0,16	0,159 152	0,012 753	1,16	0,877 677	0,554 356
0,18	0,178 794	0,016 124	1,18	0,884 225	0,569 809
0,20	0,198 347	0,019 885	1,20	0,890 424	0,585 292
0,22	0,217 802	0,024 031	1,22	0,896 274	0,600 796
0,24	0,237 148	0,028 561	1,24	0,901 776	0,616 310
0,26	0,256 378	0,033 471	1,26	0,906 932	0,631 827
0,28	0,275 482	0,038 758	1,28	0,911 743	0,647 337
0,30	0,294 449	0,044 418	1,30	0,916 212	0,662 831
0,32	0,313 272	0,050 448	1,32	0,920 341	0,678 301
0,34	0,331 941	0,056 842	1,34	0,924 132	0,693 737
0,36	0,350 447	0,063 598	1,36	0,927 587	0,709 132
0,38	0,368 782	0,070 709	1,38	0,930 711	0,724 476
0,40	0,386 936	0,078 171	1,40	0,933 505	0,739 762
0,42	0,404 903	0,085 980	1,42	0,935 974	0,754 980
0,44	0,422 672	0,094 129	1,44	0,938 120	0,770 124
0,46	0,440 237	0,102 614	1,46	0,939 949	0,785 184
0,48	0,457 589	0,111 428	1,48	0,941 463	0,800 153
0,50	0,474 720	0,120 565	1,50	0,942 667	0,815 024
0,52	0,491 623	0,130 020	1,52	0,943 566	0,829 788
0,54	0,508 290	0,139 786	1,54	0,944 164	0,844 439
0,56	0,524 714	0,149 855	1,56	0,944 467	0,858 968
0,58	0,540 888	0,160 222	1,58	0,944 478	0,873 370
0,60	0,556 806	0,170 880	1,60	0,944 205	0,887 636
0,62	0,572 460	0,181 820	1,62	0,943 651	0,901 761
0,64	0,587 844	0,193 037	1,64	0,942 823	0,915 738
0,66	0,602 952	0,204 522	1,66	0,941 726	0,929 560
0,68	0,617 778	0,216 268	1,68	0,940 366	0,943 222
0,70	0,632 316	0,228 267	1,70	0,938 750	0,956 716
0,72	0,646 560	0,240 510	1,72	0,936 884	0,970 038
0,74	0,660 507	0,252 991	1,74	0,934 774	0,983 182
0,76	0,674 149	0,265 700	1,76	0,932 426	0,996 143
0,78	0,687 483	0,278 629	1,78	0,929 848	1,008 916
0,80	0,700 504	0,291 770	1,80	0,927 046	1,021 494
0,82	0,713 207	0,305 115	1,82	0,924 027	1,033 875
0,84	0,725 590	0,318 653	1,84	0,920 798	1,046 053
0,86	0,737 646	0,332 378	1,86	0,917 366	1,058 025
0,88	0,749 374	0,346 279	1,88	0,913 738	1,069 785
0,90	0,760 770	0,360 349	1,90	0,909 923	1,081 332
0,92	0,771 831	0,374 577	1,92	0,905 926	1,092 659
0,94	0,782 554	0,388 954	1,94	0,901 756	1,103 766
0,96	0,792 937	0,403 473	1,96	0,897 420	1,114 648
0,98	0,802 977	0,418 123	1,98	0,892 925	1,125 302
1,00	0,812 672	0,432 895	2,00	0,888 280	1,135 727

Zahlentafel 8. $\lambda = 0{,}8$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,804 051	0,424 905
0,02	0,019 998	0,000 200	1,02	0,813 022	0,439 188
0,04	0,039 986	0,000 800	1,04	0,821 643	0,453 544
0,06	0,059 952	0,001 799	1,06	0,829 915	0,467 964
0,08	0,079 887	0,003 197	1,08	0,837 837	0,482 438
0,10	0,099 780	0,004 992	1,10	0,845 411	0,496 956
0,12	0,119 620	0,007 183	1,12	0,852 635	0,511 508
0,14	0,139 398	0,009 769	1,14	0,859 512	0,526 085
0,16	0,159 102	0,012 747	1,16	0,866 043	0,540 677
0,18	0,178 722	0,016 115	1,18	0,872 228	0,555 274
0,20	0,198 248	0,019 870	1,20	0,878 070	0,569 866
0,22	0,217 671	0,024 009	1,22	0,883 571	0,584 445
0,24	0,236 979	0,028 530	1,24	0,888 733	0,599 000
0,26	0,256 164	0,033 429	1,26	0,893 559	0,613 523
0,28	0,275 214	0,038 701	1,28	0,898 051	0,628 004
0,30	0,294 122	0,044 344	1,30	0,902 213	0,642 435
0,32	0,312 876	0,050 351	1,32	0,906 049	0,656 805
0,34	0,331 469	0,056 719	1,34	0,909 561	0,671 108
0,36	0,349 889	0,063 443	1,36	0,912 754	0,685 333
0,38	0,368 129	0,070 518	1,38	0,915 633	0,699 473
0,40	0,386 180	0,077 937	1,40	0,918 200	0,713 519
0,42	0,404 032	0,085 696	1,42	0,920 462	0,727 463
0,44	0,421 677	0,093 789	1,44	0,922 423	0,741 297
0,46	0,439 107	0,102 208	1,46	0,924 089	0,755 013
0,48	0,456 313	0,110 948	1,48	0,925 463	0,768 604
0,50	0,473 288	0,120 002	1,50	0,926 553	0,782 061
0,52	0,490 024	0,129 363	1,52	0,927 364	0,795 379
0,54	0,506 512	0,139 024	1,54	0,927 902	0,808 550
0,56	0,522 747	0,148 978	1,56	0,928 173	0,821 567
0,58	0,538 721	0,159 217	1,58	0,928 184	0,834 423
0,60	0,554 427	0,169 732	1,60	0,927 940	0,847 113
0,62	0,569 858	0,180 517	1,62	0,927 450	0,859 630
0,64	0,585 008	0,191 563	1,64	0,926 719	0,871 968
0,66	0,599 871	0,202 862	1,66	0,925 754	0,884 122
0,68	0,614 442	0,214 405	1,68	0,924 564	0,896 085
0,70	0,628 714	0,226 184	1,70	0,923 155	0,907 854
0,72	0,642 682	0,238 190	1,72	0,921 534	0,919 423
0,74	0,656 341	0,250 414	1,74	0,919 710	0,930 787
0,76	0,669 687	0,262 847	1,76	0,917 689	0,941 943
0,78	0,682 715	0,275 479	1,78	0,915 480	0,952 885
0,80	0,695 421	0,288 302	1,80	0,913 091	0,963 610
0,82	0,707 800	0,301 307	1,82	0,910 530	0,974 115
0,84	0,719 851	0,314 482	1,84	0,907 804	0,984 396
0,86	0,731 568	0,327 820	1,86	0,904 922	0,994 450
0,88	0,742 949	0,341 310	1,88	0,901 892	1,004 274
0,90	0,753 992	0,354 943	1,90	0,898 722	1,013 866
0,92	0,764 693	0,368 709	1,92	0,895 420	1,023 224
0,94	0,775 052	0,382 598	1,94	0,891 996	1,032 345
0,96	0,785 065	0,396 600	1,96	0,888 456	1,041 228
0,98	0,794 732	0,410 706	1,98	0,884 810	1,049 871
1,00	0,804 051	0,424 905	2,00	0,881 066	1,058 274



Zahlentafel 9. $\lambda = 0{,}9$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,794 390	0,415 969
0,02	0,019 998	0,000 200	1,02	0,802 941	0,429 583
0,04	0,039 985	0,000 800	1,04	0,811 141	0,443 239
0,06	0,059 949	0,001 799	1,06	0,818 992	0,456 924
0,08	0,079 880	0,003 196	1,08	0,826 494	0,470 630
0,10	0,099 766	0,004 991	1,10	0,833 649	0,484 346
0,12	0,119 596	0,007 181	1,12	0,840 458	0,498 061
0,14	0,139 359	0,009 765	1,14	0,846 923	0,511 766
0,16	0,159 044	0,012 740	1,16	0,853 047	0,525 449
0,18	0,178 640	0,016 103	1,18	0,858 833	0,539 102
0,20	0,198 136	0,019 853	1,20	0,864 283	0,552 715
0,22	0,217 522	0,023 985	1,22	0,869 400	0,566 277
0,24	0,236 787	0,028 495	1,24	0,874 189	0,579 779
0,26	0,255 921	0,033 381	1,26	0,878 652	0,593 211
0,28	0,274 912	0,038 637	1,28	0,882 795	0,606 565
0,30	0,293 751	0,044 259	1,30	0,886 621	0,619 832
0,32	0,312 429	0,050 242	1,32	0,890 136	0,633 001
0,34	0,330 934	0,056 580	1,34	0,893 345	0,646 065
0,36	0,349 258	0,063 269	1,36	0,896 252	0,659 015
0,38	0,367 391	0,070 302	1,38	0,898 863	0,671 843
0,40	0,385 323	0,077 673	1,40	0,901 184	0,684 540
0,42	0,403 046	0,085 376	1,42	0,903 222	0,697 099
0,44	0,420 551	0,093 403	1,44	0,904 981	0,709 512
0,46	0,437 829	0,101 749	1,46	0,906 470	0,721 771
0,48	0,454 871	0,110 406	1,48	0,907 694	0,733 869
0,50	0,471 670	0,119 366	1,50	0,908 660	0,745 800
0,52	0,488 217	0,128 622	1,52	0,909 376	0,757 556
0,54	0,504 505	0,138 165	1,54	0,909 849	0,769 132
0,56	0,520 527	0,147 988	1,56	0,910 086	0,780 520
0,58	0,536 275	0,158 082	1,58	0,910 095	0,791 716
0,60	0,551 742	0,168 438	1,60	0,909 884	0,802 713
0,62	0,566 923	0,179 048	1,62	0,909 461	0,813 506
0,64	0,581 810	0,189 902	1,64	0,908 834	0,824 091
0,66	0,596 398	0,200 992	1,66	0,908 011	0,834 462
0,68	0,610 682	0,212 308	1,68	0,907 001	0,844 614
0,70	0,624 655	0,223 840	1,70	0,905 812	0,854 545
0,72	0,638 312	0,235 579	1,72	0,904 453	0,864 249
0,74	0,651 650	0,247 515	1,74	0,902 932	0,873 724
0,76	0,664 664	0,259 638	1,76	0,901 258	0,882 966
0,78	0,677 349	0,271 938	1,78	0,899 440	0,891 972
0,80	0,689 702	0,284 405	1,80	0,897 487	0,900 739
0,82	0,701 720	0,297 029	1,82	0,895 408	0,909 266
0,84	0,713 399	0,309 799	1,84	0,893 212	0,917 550
0,86	0,724 737	0,322 705	1,86	0,890 908	0,925 589
0,88	0,735 731	0,335 737	1,88	0,888 504	0,933 383
0,90	0,746 380	0,348 883	1,90	0,886 010	0,940 930
0,92	0,756 681	0,362 134	1,92	0,883 435	0,948 229
0,94	0,766 633	0,375 478	1,94	0,880 788	0,955 279
0,96	0,776 236	0,388 906	1,96	0,878 078	0,962 082
0,98	0,785 488	0,402 407	1,98	0,875 313	0,968 636
1,00	0,794 390	0,415 969	2,00	0,872 503	0,974 943

Zahlentafel 10. $\lambda = 1{,}0$.

x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$	x	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,783 728	0,406 131
0,02	0,019 998	0,000 200	1,02	0,791 821	0,419 016
0,04	0,039 984	0,000 800	1,04	0,799 562	0,431 907
0,06	0,059 946	0,001 799	1,06	0,806 954	0,444 793
0,08	0,079 872	0,003 196	1,08	0,813 999	0,457 663
0,10	0,099 750	0,004 990	1,10	0,820 698	0,470 506
0,12	0,119 569	0,007 178	1,12	0,827 056	0,483 312
0,14	0,139 316	0,009 760	1,14	0,833 075	0,496 071
0,16	0,158 980	0,012 732	1,16	0,838 759	0,508 771
0,18	0,178 549	0,016 091	1,18	0,844 112	0,521 403
0,20	0,198 012	0,019 834	1,20	0,849 138	0,533 956
0,22	0,217 357	0,023 957	1,22	0,853 841	0,546 420
0,24	0,236 573	0,028 456	1,24	0,858 227	0,558 787
0,26	0,255 649	0,033 327	1,26	0,862 301	0,571 045
0,28	0,274 574	0,038 565	1,28	0,866 068	0,583 187
0,30	0,293 338	0,044 164	1,30	0,869 534	0,595 203
0,32	0,311 929	0,050 119	1,32	0,872 705	0,607 084
0,34	0,330 338	0,056 425	1,34	0,875 587	0,618 821
0,36	0,348 554	0,063 074	1,36	0,878 188	0,630 407
0,38	0,366 568	0,070 061	1,38	0,880 514	0,641 833
0,40	0,384 369	0,077 378	1,40	0,882 573	0,653 091
0,42	0,401 948	0,085 018	1,42	0,884 371	0,664 175
0,44	0,419 296	0,092 974	1,44	0,885 916	0,675 076
0,46	0,436 405	0,101 238	1,46	0,887 217	0,685 788
0,48	0,453 264	0,109 802	1,48	0,888 281	0,696 304
0,50	0,469 867	0,118 658	1,50	0,889 116	0,706 618
0,52	0,486 205	0,127 796	1,52	0,889 732	0,716 724
0,54	0,502 270	0,137 209	1,54	0,890 136	0,726 616
0,56	0,518 055	0,146 887	1,56	0,890 337	0,736 289
0,58	0,533 553	0,156 820	1,58	0,890 345	0,745 738
0,60	0,548 756	0,166 999	1,60	0,890 169	0,754 958
0,62	0,563 659	0,177 415	1,62	0,889 817	0,763 945
0,64	0,578 255	0,188 057	1,64	0,889 298	0,772 695
0,66	0,592 539	0,198 915	1,66	0,888 623	0,781 203
0,68	0,606 504	0,209 979	1,68	0,887 801	0,789 468
0,70	0,620 147	0,221 239	1,70	0,886 841	0,797 486
0,72	0,633 462	0,232 683	1,72	0,885 753	0,805 254
0,74	0,646 445	0,244 301	1,74	0,884 505	0,812 770
0,76	0,659 092	0,256 083	1,76	0,883 232	0,820 033
0,78	0,671 399	0,268 017	1,78	0,881 817	0,827 040
0,80	0,683 364	0,280 092	1,80	0,880 314	0,833 790
0,82	0,694 983	0,292 297	1,82	0,878 731	0,840 283
0,84	0,706 254	0,304 620	1,84	0,877 078	0,846 519
0,86	0,717 175	0,317 052	1,86	0,875 365	0,852 496
0,88	0,727 744	0,329 579	1,88	0,873 601	0,858 215
0,90	0,737 960	0,342 192	1,90	0,871 796	0,863 677
0,92	0,747 823	0,354 878	1,92	0,869 960	0,868 883
0,94	0,757 330	0,367 626	1,94	0,868 101	0,873 833
0,96	0,766 484	0,380 425	1,96	0,866 230	0,878 530
0,98	0,775 283	0,393 264	1,98	0,864 355	0,882 975
1,00	0,783 728	0,406 131	2,00	0,862 486	0,887 171



Zahlentafel 11. $\lambda = 0{,}1$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	1,896 441	0,859 148
0,02	0,093 330	0,000 870	1,02	1,912 692	0,885 023
0,04	0,168 979	0,003 125	1,04	1,928 293	0,911 001
0,06	0,237 914	0,006 566	1,06	1,943 247	0,937 071
0,08	0,302 450	0,011 085	1,08	1,957 560	0,963 219
0,10	0,363 677	0,016 606	1,10	1,971 236	0,989 437
0,12	0,422 234	0,023 069	1,12	1,984 280	1,015 712
0,14	0,478 534	0,030 426	1,14	1,996 698	1,042 033
0,16	0,532 871	0,038 636	1,16	2,008 494	1,068 389
0,18	0,585 458	0,047 660	1,18	2,019 673	1,094 771
0,20	0,636 462	0,057 467	1,20	2,030 240	1,121 166
0,22	0,686 010	0,068 026	1,22	2,040 201	1,147 565
0,24	0,734 208	0,079 309	1,24	2,049 561	1,173 958
0,26	0,781 140	0,091 291	1,26	2,058 325	1,200 333
0,28	0,826 877	0,103 948	1,28	2,066 499	1,226 681
0,30	0,871 478	0,117 255	1,30	2,074 088	1,252 992
0,32	0,914 993	0,131 193	1,32	2,081 098	1,279 256
0,34	0,957 466	0,145 740	1,34	2,087 533	1,305 463
0,36	0,998 934	0,160 876	1,36	2,093 401	1,331 604
0,38	1,039 429	0,176 581	1,38	2,098 707	1,357 677
0,40	1,078 981	0,192 838	1,40	2,103 456	1,383 650
0,42	1,117 613	0,209 627	1,42	2,107 655	1,409 535
0,44	1,155 349	0,226 933	1,44	2,111 310	1,435 318
0,46	1,192 208	0,244 737	1,46	2,114 426	1,460 988
0,48	1,228 208	0,263 022	1,48	2,117 010	1,486 537
0,50	1,263 365	0,281 773	1,50	2,119 069	1,511 957
0,52	1,297 693	0,300 974	1,52	2,120 608	1,537 238
0,54	1,331 205	0,320 609	1,54	2,121 634	1,562 373
0,56	1,363 915	0,340 662	1,56	2,122 154	1,587 353
0,58	1,395 831	0,361 119	1,58	2,122 174	1,612 171
0,60	1,426 965	0,381 964	1,60	2,121 701	1,636 818
0,62	1,457 326	0,403 182	1,62	2,120 742	1,661 286
0,64	1,486 922	0,424 761	1,64	2,119 303	1,685 569
0,66	1,515 762	0,446 684	1,66	2,117 391	1,709 658
0,68	1,543 853	0,468 938	1,68	2,115 014	1,733 546
0,70	1,571 202	0,491 510	1,70	2,112 178	1,757 226
0,72	1,597 816	0,514 385	1,72	2,108 890	1,780 692
0,74	1,623 701	0,537 549	1,74	2,105 158	1,803 936
0,76	1,648 864	0,560 990	1,76	2,100 989	1,826 951
0,78	1,673 311	0,584 694	1,78	2,096 391	1,849 732
0,80	1,697 046	0,608 649	1,80	2,091 370	1,872 271
0,82	1,720 076	0,632 840	1,82	2,085 934	1,894 562
0,84	1,742 406	0,657 255	1,84	2,080 090	1,916 600
0,86	1,764 041	0,681 882	1,86	2,073 847	1,938 379
0,88	1,784 990	0,706 708	1,88	2,067 211	1,959 892
0,90	1,805 246	0,731 720	1,90	2,060 190	1,981 134
0,92	1,824 825	0,756 906	1,92	2,052 793	2,002 101
0,94	1,843 730	0,782 254	1,94	2,045 026	2,022 786
0,96	1,861 997	0,807 751	1,96	2,036 898	2,043 184
0,98	1,879 533	0,833 387	1,98	2,028 416	2,063 291
1,00	1,896 441	0,859 148	2,00	2,019 588	2,083 101

Zahlentafel 12. $\lambda = 0{,}2$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	1,521 843	0,653 368
0,02	0,084 505	0,000 781	1,02	1,533 273	0,671 566
0,04	0,151 332	0,002 772	1,04	1,544 203	0,689 765
0,06	0,211 452	0,005 772	1,06	1,554 638	0,707 957
0,08	0,267 181	0,009 674	1,08	1,564 587	0,726 133
0,10	0,319 616	0,014 401	1,10	1,574 056	0,744 284
0,12	0,369 395	0,019 895	1,12	1,583 051	0,762 404
0,14	0,416 937	0,026 107	1,14	1,591 581	0,780 483
0,16	0,462 538	0,032 996	1,16	1,599 650	0,798 514
0,18	0,506 416	0,040 525	1,18	1,607 268	0,816 490
0,20	0,548 739	0,048 663	1,20	1,614 439	0,834 402
0,22	0,589 639	0,057 378	1,22	1,621 172	0,852 245
0,24	0,629 225	0,066 645	1,24	1,627 472	0,870 010
0,26	0,667 584	0,076 438	1,26	1,633 348	0,887 691
0,28	0,704 789	0,086 733	1,28	1,638 804	0,905 280
0,30	0,740 905	0,097 532	1,30	1,643 850	0,922 772
0,32	0,775 983	0,108 744	1,32	1,648 490	0,940 159
0,34	0,810 072	0,120 419	1,34	1,652 733	0,957 436
0,36	0,843 210	0,132 514	1,36	1,656 585	0,974 596
0,38	0,875 435	0,145 012	1,38	1,660 053	0,991 634
0,40	0,906 778	0,157 894	1,40	1,663 144	1,008 543
0,42	0,937 267	0,171 144	1,42	1,665 866	1,025 317
0,44	0,967 949	0,184 975	1,44	1,668 224	1,041 952
0,46	0,995 782	0,198 684	1,46	1,670 226	1,058 442
0,48	1,023 853	0,212 942	1,48	1,671 878	1,074 781
0,50	1,051 158	0,227 505	1,50	1,673 189	1,090 966
0,52	1,077 715	0,242 359	1,52	1,674 165	1,106 990
0,54	1,103 541	0,257 490	1,54	1,674 813	1,122 849
0,56	1,128 650	0,272 883	1,56	1,675 139	1,138 539
0,58	1,155 928	0,289 383	1,58	1,675 152	1,154 055
0,60	1,176 774	0,304 306	1,60	1,674 858	1,169 394
0,62	1,199 814	0,320 508	1,62	1,674 263	1,184 550
0,64	1,222 189	0,336 821	1,64	1,673 376	1,199 520
0,66	1,243 909	0,353 332	1,66	1,672 204	1,214 301
0,68	1,264 986	0,370 029	1,68	1,670 752	1,228 888
0,70	1,285 428	0,386 900	1,70	1,669 029	1,243 279
0,72	1,305 246	0,403 933	1,72	1,667 041	1,257 470
0,74	1,324 449	0,421 117	1,74	1,664 795	1,271 458
0,76	1,343 046	0,438 441	1,76	1,662 299	1,285 240
0,78	1,361 045	0,455 893	1,78	1,659 559	1,298 813
0,80	1,378 454	0,473 463	1,80	1,656 582	1,312 174
0,82	1,395 283	0,491 140	1,82	1,653 376	1,325 322
0,84	1,411 538	0,508 913	1,84	1,649 947	1,338 254
0,86	1,427 227	0,526 772	1,86	1,646 303	1,350 967
0,88	1,442 359	0,544 707	1,88	1,642 450	1,363 460
0,90	1,456 940	0,562 709	1,90	1,638 394	1,375 730
0,92	1,470 978	0,580 766	1,92	1,634 144	1,387 777
0,94	1,484 481	0,598 870	1,94	1,629 706	1,399 598
0,96	1,497 454	0,617 011	1,96	1,625 086	1,411 192
0,98	1,509 906	0,635 180	1,98	1,620 291	1,422 557
1,00	1,521 843	0,653 368	2,00	1,615 329	1,433 693

Zahlentafel 13. $\lambda = 0{,}3$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	1,300 133	0,530 728
0,02	0,079 342	0,000 730	1,02	1,308 648	0,544 285
0,04	0,141 009	0,002 566	1,04	1,316 750	0,557 777
0,06	0,195 970	0,005 308	1,06	1,324 449	0,571 197
0,08	0,246 545	0,008 848	1,08	1,331 753	0,584 540
0,10	0,293 834	0,013 110	1,10	1,338 669	0,597 799
0,12	0,338 473	0,018 037	1,12	1,345 207	0,610 967
0,14	0,380 886	0,023 578	1,14	1,351 374	0,624 038
0,16	0,421 369	0,029 694	1,16	1,357 178	0,637 005
0,18	0,460 142	0,036 347	1,18	1,362 627	0,649 865
0,20	0,497 374	0,043 505	1,20	1,367 730	0,662 610
0,22	0,533 201	0,051 139	1,22	1,372 494	0,675 235
0,24	0,567 732	0,059 223	1,24	1,376 927	0,687 736
0,26	0,601 056	0,067 730	1,26	1,381 038	0,700 107
0,28	0,633 249	0,076 638	1,28	1,384 834	0,712 343
0,30	0,664 376	0,085 925	1,30	1,388 324	0,724 440
0,32	0,694 493	0,095 571	1,32	1,391 514	0,736 393
0,34	0,723 646	0,105 555	1,34	1,394 413	0,748 198
0,36	0,751 880	0,115 860	1,36	1,397 029	0,759 851
0,38	0,779 231	0,126 467	1,38	1,399 370	0,771 348
0,40	0,805 733	0,137 360	1,40	1,401 443	0,782 686
0,42	0,831 417	0,148 521	1,42	1,403 255	0,793 861
0,44	0,856 309	0,159 936	1,44	1,404 816	0,804 869
0,46	0,880 434	0,171 589	1,46	1,406 132	0,815 708
0,48	0,903 816	0,183 465	1,48	1,407 211	0,826 374
0,50	0,926 475	0,195 550	1,50	1,408 061	0,836 865
0,52	0,948 431	0,207 831	1,52	1,408 689	0,847 178
0,54	0,969 701	0,220 292	1,54	1,409 103	0,857 311
0,56	0,990 303	0,232 923	1,56	1,409 310	0,867 261
0,58	1,010 253	0,245 709	1,58	1,409 318	0,877 027
0,60	1,029 564	0,258 638	1,60	1,409 135	0,886 606
0,62	1,048 253	0,271 699	1,62	1,408 767	0,895 997
0,64	1,066 331	0,284 879	1,64	1,408 222	0,905 198
0,66	1,083 813	0,298 168	1,66	1,407 507	0,914 207
0,68	1,100 709	0,311 553	1,68	1,406 629	0,923 025
0,70	1,117 032	0,325 024	1,70	1,405 597	0,931 649
0,72	1,132 794	0,338 571	1,72	1,404 416	0,940 078
0,74	1,148 005	0,352 183	1,74	1,403 094	0,948 313
0,76	1,162 675	0,365 849	1,76	1,401 638	0,956 352
0,78	1,176 816	0,379 560	1,78	1,400 055	0,964 195
0,80	1,190 437	0,393 306	1,80	1,398 352	0,971 841
0,82	1,203 548	0,407 078	1,82	1,396 535	0,979 292
0,84	1,216 159	0,420 867	1,84	1,394 612	0,986 546
0,86	1,228 279	0,434 662	1,86	1,392 589	0,993 604
0,88	1,239 918	0,448 457	1,88	1,390 472	1,000 467
0,90	1,251 083	0,462 241	1,90	1,388 269	1,007 134
0,92	1,261 785	0,476 007	1,92	1,385 985	1,013 607
0,94	1,272 033	0,489 747	1,94	1,383 627	1,019 887
0,96	1,281 834	0,503 452	1,96	1,381 202	1,025 974
0,98	1,291 198	0,517 115	1,98	1,378 715	1,031 869
1,00	1,300 133	0,530 728	2,00	1,376 173	1,037 575

Zahlentafel 14. $\lambda = 0{,}4$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Nc(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	1,140 630	0,441 822
0,02	0,075 680	0,000 693	1,02	1,147 002	0,451 966
0,04	0,133 684	0,002 419	1,04	1,153 025	0,461 995
0,06	0,184 984	0,004 978	1,06	1,158 709	0,471 903
0,08	0,231 902	0,008 261	1,08	1,164 064	0,481 685
0,10	0,275 534	0,012 194	1,10	1,169 098	0,491 336
0,12	0,316 522	0,016 717	1,12	1,173 822	0,500 851
0,14	0,355 289	0,021 782	1,14	1,178 245	0,510 224
0,16	0,392 133	0,027 348	1,16	1,182 375	0,519 452
0,18	0,427 274	0,033 377	1,18	1,186 221	0,528 529
0,20	0,460 883	0,039 839	1,20	1,189 794	0,537 452
0,22	0,493 097	0,046 703	1,22	1,193 101	0,546 217
0,24	0,524 026	0,053 943	1,24	1,196 153	0,554 819
0,26	0,553 760	0,061 533	1,26	1,198 956	0,563 256
0,28	0,582 375	0,069 451	1,28	1,201 521	0,571 523
0,30	0,609 941	0,077 675	1,30	1,203 857	0,579 619
0,32	0,636 512	0,086 185	1,32	1,205 971	0,587 540
0,34	0,662 137	0,094 961	1,34	1,207 873	0,595 283
0,36	0,686 860	0,103 984	1,36	1,209 571	0,602 846
0,38	0,710 721	0,113 238	1,38	1,211 073	0,610 227
0,40	0,733 754	0,122 705	1,40	1,212 389	0,617 423
0,42	0,755 991	0,132 368	1,42	1,213 526	0,624 433
0,44	0,777 460	0,142 213	1,44	1,214 494	0,631 255
0,46	0,798 188	0,152 225	1,46	1,215 299	0,637 888
0,48	0,818 198	0,162 389	1,48	1,215 951	0,644 330
0,50	0,837 514	0,172 690	1,50	1,216 458	0,650 581
0,52	0,856 155	0,183 116	1,52	1,216 827	0,656 640
0,54	0,874 142	0,193 654	1,54	1,217 067	0,662 505
0,56	0,891 492	0,204 291	1,56	1,217 185	0,668 177
0,58	0,908 224	0,215 014	1,58	1,217 190	0,673 655
0,60	0,924 352	0,225 812	1,60	1,217 088	0,678 939
0,62	0,939 893	0,236 673	1,62	1,216 889	0,684 030
0,64	0,954 861	0,247 585	1,64	1,216 599	0,688 927
0,66	0,969 271	0,258 539	1,66	1,216 226	0,693 631
0,68	0,983 136	0,269 523	1,68	1,215 777	0,698 142
0,70	0,996 470	0,280 527	1,70	1,215 260	0,702 462
0,72	1,009 284	0,291 541	1,72	1,214 682	0,706 592
0,74	1,021 593	0,302 555	1,74	1,214 049	0,710 532
0,76	1,033 407	0,313 560	1,76	1,213 370	0,714 285
0,78	1,044 738	0,324 546	1,78	1,212 650	0,717 850
0,80	1,055 598	0,335 506	1,80	1,211 898	0,721 231
0,82	1,065 997	0,346 429	1,82	1,211 118	0,724 429
0,84	1,075 948	0,357 308	1,84	1,210 318	0,727 446
0,86	1,085 459	0,368 135	1,86	1,209 505	0,730 284
0,88	1,094 543	0,378 902	1,88	1,208 684	0,732 946
0,90	1,103 209	0,389 600	1,90	1,207 863	0,735 433
0,92	1,111 468	0,400 223	1,92	1,207 046	0,737 748
0,94	1,119 330	0,410 764	1,94	1,206 240	0,739 895
0,96	1,126 804	0,421 215	1,96	1,205 451	0,741 876
0,98	1,133 901	0,431 570	1,98	1,204 685	0,743 693
1,00	1,140 630	0,441 822	2,00	1,203 946	0,745 351



Zahlentafel 15. $\lambda = 0{,}5$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Nc(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	1,015 054	0,371 296
0,02	0,072 838	0,000 665	1,02	1,019 705	0,378 700
0,04	0,128 002	0,002 306	1,04	1,024 058	0,385 948
0,06	0,176 461	0,004 722	1,06	1,028 123	0,393 034
0,08	0,220 539	0,007 806	1,08	1,031 911	0,399 955
0,10	0,261 333	0,011 483	1,10	1,035 433	0,406 706
0,12	0,299 485	0,015 693	1,12	1,038 699	0,413 282
0,14	0,335 418	0,020 387	1,14	1,041 718	0,419 681
0,16	0,369 431	0,025 525	1,16	1,044 501	0,425 898
0,18	0,401 746	0,031 070	1,18	1,047 058	0,431 931
0,20	0,432 534	0,036 988	1,20	1,049 398	0,437 777
0,22	0,461 933	0,043 252	1,22	1,051 532	0,443 432
0,24	0,490 052	0,049 835	1,24	1,053 470	0,448 895
0,26	0,516 985	0,056 710	1,26	1,055 221	0,454 163
0,28	0,542 809	0,063 855	1,28	1,056 794	0,459 233
0,30	0,567 591	0,071 249	1,30	1,058 200	0,464 105
0,32	0,591 388	0,078 870	1,32	1,059 447	0,468 777
0,34	0,614 251	0,086 700	1,34	1,060 545	0,473 247
0,36	0,636 225	0,094 720	1,36	1,061 503	0,477 515
0,38	0,657 349	0,102 912	1,38	1,062 331	0,481 579
0,40	0,677 660	0,111 259	1,40	1,063 037	0,485 439
0,42	0,697 190	0,119 746	1,42	1,063 630	0,489 094
0,44	0,715 969	0,128 358	1,44	1,064 120	0,492 545
0,46	0,734 023	0,137 078	1,46	1,064 514	0,495 792
0,48	0,751 380	0,145 893	1,48	1,064 822	0,498 834
0,50	0,768 060	0,154 790	1,50	1,065 052	0,501 672
0,52	0,784 088	0,163 754	1,52	1,065 213	0,504 307
0,54	0,799 483	0,172 773	1,54	1,065 313	0,506 740
0,56	0,814 264	0,181 834	1,56	1,065 359	0,508 972
0,58	0,828 450	0,190 926	1,58	1,065 361	0,511 004
0,60	0,842 059	0,200 037	1,60	1,065 327	0,512 838
0,62	0,855 106	0,209 155	1,62	1,065 263	0,514 475
0,64	0,867 609	0,218 270	1,64	1,065 177	0,515 918
0,66	0,879 582	0,227 372	1,66	1,065 079	0,517 168
0,68	0,891 041	0,236 449	1,68	1,064 973	0,518 228
0,70	0,901 999	0,245 492	1,70	1,064 869	0,519 100
0,72	0,912 471	0,254 492	1,72	1,064 773	0,519 787
0,74	0,922 469	0,263 439	1,74	1,064 693	0,520 291
0,76	0,932 008	0,272 324	1,76	1,064 634	0,520 616
0,78	0,941 100	0,281 140	1,78	1,064 604	0,520 765
0,80	0,949 757	0,289 876	1,80	1,064 610	0,520 741
0,82	0,957 993	0,298 526	1,82	1,064 658	0,520 547
0,84	0,965 818	0,307 082	1,84	1,064 753	0,520 187
0,86	0,973 246	0,315 536	1,86	1,064 903	0,519 665
0,88	0,980 287	0,323 881	1,88	1,065 113	0,518 985
0,90	0,986 953	0,332 110	1,90	1,065 389	0,518 151
0,92	0,993 256	0,340 217	1,92	1,065 737	0,517 166
0,94	0,999 206	0,348 195	1,94	1,066 162	0,516 036
0,96	1,004 815	0,356 038	1,96	1,066 669	0,514 764
0,98	1,010 094	0,363 740	1,98	1,067 263	0,513 356
1,00	1,015 054	0,371 296	2,00	1,067 950	0,511 815

Zahlentafel 16. $\lambda = 0{,}6$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,910 891	0,312 391
0,02	0,070 517	0,000 642	1,02	0,914 093	0,317 489
0,04	0,123 358	0,002 213	1,04	0,917 040	0,322 394
0,06	0,169 496	0,004 513	1,06	0,919 742	0,327 104
0,08	0,211 251	0,007 435	1,08	0,922 211	0,331 614
0,10	0,249 723	0,010 902	1,10	0,924 459	0,335 922
0,12	0,285 553	0,014 855	1,12	0,926 495	0,340 024
0,14	0,319 165	0,019 246	1,14	0,928 333	0,343 918
0,16	0,350 859	0,024 033	1,16	0,929 982	0,347 601
0,18	0,380 856	0,029 180	1,18	0,931 453	0,351 071
0,20	0,409 329	0,034 653	1,20	0,932 757	0,354 327
0,22	0,436 416	0,040 425	1,22	0,933 904	0,357 367
0,24	0,462 227	0,046 466	1,24	0,934 905	0,360 189
0,26	0,486 855	0,052 753	1,26	0,935 771	0,362 792
0,28	0,510 380	0,059 262	1,28	0,936 511	0,365 176
0,30	0,532 869	0,065 971	1,30	0,937 135	0,367 341
0,32	0,554 379	0,072 860	1,32	0,937 655	0,369 285
0,34	0,574 963	0,079 909	1,34	0,938 078	0,371 009
0,36	0,594 665	0,087 100	1,36	0,938 416	0,372 513
0,38	0,613 528	0,094 414	1,38	0,938 678	0,373 798
0,40	0,631 586	0,101 836	1,40	0,938 874	0,374 864
0,42	0,648 875	0,109 349	1,42	0,939 012	0,375 712
0,44	0,665 423	0,116 938	1,44	0,939 102	0,376 345
0,46	0,681 261	0,124 587	1,46	0,939 153	0,376 762
0,48	0,696 413	0,132 283	1,48	0,939 174	0,376 966
0,50	0,710 905	0,140 011	1,50	0,939 173	0,376 958
0,52	0,724 759	0,147 760	1,52	0,939 160	0,376 742
0,54	0,737 996	0,155 515	1,54	0,939 144	0,376 319
0,56	0,750 638	0,163 264	1,56	0,939 131	0,375 691
0,58	0,762 702	0,170 996	1,58	0,939 130	0,374 862
0,60	0,774 209	0,178 700	1,60	0,939 151	0,373 835
0,62	0,785 176	0,186 364	1,62	0,939 199	0,372 612
0,64	0,795 619	0,193 977	1,64	0,939 283	0,371 198
0,66	0,805 555	0,201 530	1,66	0,939 411	0,369 595
0,68	0,815 000	0,209 012	1,68	0,939 589	0,367 807
0,70	0,823 970	0,216 414	1,70	0,939 825	0,365 839
0,72	0,832 479	0,223 727	1,72	0,940 125	0,363 695
0,74	0,840 542	0,230 941	1,74	0,940 498	0,361 378
0,76	0,848 173	0,238 049	1,76	0,940 948	0,358 894
0,78	0,855 386	0,245 043	1,78	0,941 483	0,356 247
0,80	0,862 195	0,251 914	1,80	0,942 108	0,353 441
0,82	0,868 613	0,258 655	1,82	0,942 830	0,350 482
0,84	0,874 653	0,265 258	1,84	0,943 655	0,347 374
0,86	0,880 328	0,271 718	1,86	0,944 587	0,344 123
0,88	0,885 652	0,278 027	1,88	0,945 632	0,340 734
0,90	0,890 636	0,284 179	1,90	0,946 797	0,337 213
0,92	0,895 292	0,290 169	1,92	0,948 084	0,333 565
0,94	0,899 634	0,295 990	1,94	0,949 500	0,329 795
0,96	0,903 674	0,301 637	1,96	0,951 048	0,325 910
0,98	0,907 422	0,307 106	1,98	0,952 733	0,321 916
1,00	0,910 891	0,312 391	2,00	0,954 560	0,317 818



Zahlentafel 17. $\lambda = 0{,}7$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Nc(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,821 529	0,261 560
0,02	0,068 554	0,000 622	1,02	0,823 476	0,264 659
0,04	0,119 432	0,002 134	1,04	0,825 204	0,267 536
0,06	0,163 605	0,003 768	1,06	0,826 726	0,270 188
0,08	0,203 395	0,007 120	1,08	0,828 054	0,272 613
0,10	0,239 900	0,010 409	1,10	0,829 199	0,274 808
0,12	0,273 763	0,014 146	1,12	0,830 174	0,276 771
0,14	0,305 408	0,018 279	1,14	0,830 991	0,278 501
0,16	0,335 134	0,022 769	1,16	0,831 661	0,279 997
0,18	0,363 164	0,027 578	1,18	0,832 195	0,281 257
0,20	0,389 670	0,032 673	1,20	0,832 605	0,282 280
0,22	0,414 790	0,038 025	1,22	0,832 903	0,283 067
0,24	0,438 637	0,043 607	1,24	0,833 098	0,283 617
0,26	0,461 304	0,049 393	1,26	0,833 203	0,283 930
0,28	0,482 870	0,055 360	1,28	0,833 227	0,284 008
0,30	0,503 401	0,061 485	1,30	0,833 182	0,283 849
0,32	0,522 959	0,067 748	1,32	0,833 078	0,283 456
0,34	0,541 595	0,074 130	1,34	0,832 924	0,282 830
0,36	0,559 355	0,080 612	1,36	0,832 732	0,281 973
0,38	0,576 281	0,087 175	1,38	0,832 511	0,280 885
0,40	0,592 410	0,093 804	1,40	0,832 271	0,279 570
0,42	0,607 776	0,100 481	1,42	0,832 022	0,278 030
0,44	0,622 411	0,107 192	1,44	0,831 772	0,276 267
0,46	0,636 345	0,113 922	1,46	0,831 532	0,274 284
0,48	0,649 603	0,120 655	1,48	0,831 510	0,272 085
0,50	0,662 211	0,127 379	1,50	0,831 115	0,269 672
0,52	0,674 194	0,134 081	1,52	0,830 955	0,267 049
0,54	0,685 573	0,140 747	1,54	0,830 840	0,264 220
0,56	0,696 370	0,147 366	1,56	0,830 778	0,261 188
0,58	0,706 605	0,153 925	1,58	0,830 775	0,257 959
0,60	0,716 298	0,160 414	1,60	0,830 841	0,254 537
0,62	0,725 467	0,166 821	1,62	0,830 983	0,250 925
0,64	0,734 130	0,173 137	1,64	0,831 209	0,247 129
0,66	0,742 305	0,179 351	1,66	0,831 524	0,243 155
0,68	0,750 009	0,185 453	1,68	0,831 938	0,239 006
0,70	0,757 258	0,191 435	1,70	0,832 455	0,234 689
0,72	0,764 068	0,197 287	1,72	0,833 083	0,230 209
0,74	0,770 454	0,203 002	1,74	0,833 828	0,225 571
0,76	0,776 433	0,208 570	1,76	0,834 696	0,220 781
0,78	0,782 018	0,213 985	1,78	0,835 692	0,215 846
0,80	0,787 224	0,219 239	1,80	0,836 823	0,210 772
0,82	0,792 067	0,224 325	1,82	0,838 094	0,205 564
0,84	0,796 559	0,229 236	1,84	0,839 509	0,200 229
0,86	0,800 715	0,233 967	1,86	0,841 073	0,194 773
0,88	0,804 549	0,238 510	1,88	0,842 791	0,189 203
0,90	0,808 074	0,242 861	1,90	0,844 668	0,183 526
0,92	0,811 304	0,247 015	1,92	0,846 707	0,177 749
0,94	0,814 251	0,250 966	1,94	0,848 912	0,171 878
0,96	0,816 929	0,254 710	1,96	0,851 286	0,165 919
0,98	0,819 351	0,258 242	1,98	0,853 834	0,159 881
1,00	0,821 529	0,261 560	2,00	0,856 557	0,153 770

Zahlentafel 18. $\lambda = 0{,}8$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,743 060	0,216 726
0,02	0,066 854	0,000 605	1,02	0,743 901	0,218 064
0,04	0,116 030	0,002 066	1,04	0,744 556	0,219 156
0,06	0,158 501	0,004 183	1,06	0,745 040	0,219 998
0,08	0,196 586	0,006 847	1,08	0,745 365	0,220 590
0,10	0,231 385	0,009 983	1,10	0,745 543	0,220 931
0,12	0,263 541	0,013 530	1,12	0,745 587	0,221 019
0,14	0,293 476	0,017 441	1,14	0,745 510	0,220 854
0,16	0,321 491	0,021 672	1,16	0,745 324	0,220 436
0,18	0,347 809	0,026 187	1,18	0,745 040	0,219 765
0,20	0,372 603	0,030 953	1,20	0,744 670	0,218 842
0,22	0,396 010	0,035 940	1,22	0,744 228	0,217 666
0,24	0,418 143	0,041 120	1,24	0,743 722	0,216 240
0,26	0,439 096	0,046 468	1,26	0,743 166	0,214 565
0,28	0,458 949	0,051 961	1,28	0,742 570	0,212 643
0,30	0,477 770	0,057 576	1,30	0,741 945	0,210 475
0,32	0,495 619	0,063 292	1,32	0,741 302	0,208 064
0,34	0,512 549	0,069 089	1,34	0,740 652	0,205 413
0,36	0,528 606	0,074 949	1,36	0,740 004	0,202 524
0,38	0,543 832	0,080 854	1,38	0,739 368	0,199 401
0,40	0,558 266	0,086 786	1,40	0,738 756	0,196 047
0,42	0,571 944	0,092 729	1,42	0,738 175	0,192 466
0,44	0,584 896	0,098 668	1,44	0,737 636	0,188 662
0,46	0,597 153	0,104 588	1,46	0,737 148	0,184 639
0,48	0,608 743	0,110 474	1,48	0,736 720	0,180 402
0,50	0,619 692	0,116 313	1,50	0,736 361	0,175 955
0,52	0,630 025	0,122 091	1,52	0,736 078	0,171 303
0,54	0,639 764	0,127 797	1,54	0,735 880	0,166 451
0,56	0,648 933	0,133 417	1,56	0,735 775	0,161 406
0,58	0,657 552	0,138 941	1,58	0,735 772	0,156 172
0,60	0,665 641	0,144 356	1,60	0,735 876	0,150 755
0,62	0,673 222	0,149 653	1,62	0,736 096	0,145 162
0,64	0,680 311	0,154 821	1,64	0,736 437	0,139 398
0,66	0,686 929	0,159 851	1,66	0,736 908	0,133 469
0,68	0,693 092	0,164 733	1,68	0,737 514	0,127 383
0,70	0,698 818	0,169 458	1,70	0,738 262	0,121 146
0,72	0,704 124	0,174 017	1,72	0,739 156	0,114 764
0,74	0,709 027	0,178 404	1,74	0,740 203	0,108 245
0,76	0,713 542	0,182 609	1,76	0,741 408	0,101 596
0,78	0,717 686	0,186 627	1,78	0,742 775	0,094 823
0,80	0,721 474	0,190 449	1,80	0,744 310	0,087 935
0,82	0,724 922	0,194 070	1,82	0,746 017	0,080 938
0,84	0,728 045	0,197 484	1,84	0,747 899	0,073 840
0,86	0,730 857	0,200 684	1,86	0,749 961	0,066 649
0,88	0,733 374	0,203 666	1,88	0,752 206	0,059 372
0,90	0,735 609	0,206 425	1,90	0,754 637	0,052 016
0,92	0,737 577	0,208 956	1,92	0,757 258	0,044 591
0,94	0,739 293	0,211 255	1,94	0,760 070	0,037 102
0,96	0,740 769	0,213 319	1,96	0,763 076	0,029 559
0,98	0,742 020	0,215 144	1,98	0,766 278	0,021 969
1,00	0,743 060	0,216 726	2,00	0,769 678	0,014 340



Zahlentafel 19. $\lambda = 0{,}9$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,673 001	0,176 583
0,02	0,065 354	0,000 590	1,02	0,672 859	0,176 355
0,04	0,113 029	0,002 006	1,04	0,672 562	0,175 860
0,06	0,153 997	0,004 048	1,06	0,672 125	0,175 098
0,08	0,190 577	0,006 606	1,08	0,671 562	0,174 067
0,10	0,223 869	0,009 606	1,10	0,670 885	0,172 768
0,12	0,254 514	0,012 987	1,12	0,670 107	0,171 201
0,14	0,282 937	0,016 699	1,14	0,669 242	0,169 367
0,16	0,309 437	0,020 701	1,16	0,668 303	0,167 266
0,18	0,334 238	0,024 959	1,18	0,667 301	0,164 901
0,20	0,357 512	0,029 430	1,20	0,666 249	0,162 272
0,22	0,379 399	0,034 092	1,22	0,665 159	0,159 382
0,24	0,400 009	0,038 916	1,24	0,664 043	0,156 234
0,26	0,419 439	0,043 876	1,26	0,662 912	0,152 830
0,28	0,437 768	0,048 947	1,28	0,661 778	0,149 173
0,30	0,455 065	0,054 107	1,30	0,660 652	0,145 266
0,32	0,471 391	0,059 335	1,32	0,659 544	0,141 114
0,34	0,486 798	0,064 610	1,34	0,658 466	0,136 721
0,36	0,501 334	0,069 915	1,36	0,657 427	0,132 090
0,38	0,515 042	0,075 231	1,38	0,656 437	0,127 226
0,40	0,527 961	0,080 540	1,40	0,655 507	0,122 135
0,42	0,540 127	0,085 826	1,42	0,654 645	0,116 821
0,44	0,551 572	0,091 074	1,44	0,653 862	0,111 289
0,46	0,562 327	0,096 268	1,46	0,653 165	0,105 546
0,48	0,572 422	0,101 395	1,48	0,652 564	0,099 598
0,50	0,581 882	0,106 440	1,50	0,652 066	0,093 449
0,52	0,590 734	0,111 390	1,52	0,651 680	0,087 108
0,54	0,599 001	0,116 233	1,54	0,651 414	0,080 580
0,56	0,606 708	0,120 957	1,56	0,651 275	0,073 872
0,58	0,613 875	0,125 549	1,58	0,651 270	0,066 991
0,60	0,620 524	0,130 001	1,60	0,651 405	0,059 944
0,62	0,626 676	0,134 299	1,62	0,651 688	0,052 738
0,64	0,632 351	0,138 436	1,64	0,652 125	0,045 382
0,66	0,637 568	0,142 401	1,66	0,652 720	0,037 882
0,68	0,642 346	0,146 186	1,68	0,653 480	0,030 246
0,70	0,646 703	0,149 781	1,70	0,654 410	0,022 483
0,72	0,650 658	0,153 179	1,72	0,655 515	0,014 600
0,74	0,654 227	0,156 372	1,74	0,656 799	0,006 605
0,76	0,657 428	0,159 353	1,76	0,658 266	−0,001 494
0,78	0,660 277	0,162 115	1,78	0,659 921	−0,009 688
0,80	0,662 792	0,164 652	1,80	0,661 766	−0,017 969
0,82	0,664 989	0,166 959	1,82	0,663 805	−0,026 328
0,84	0,666 883	0,169 029	1,84	0,666 040	−0,034 758
0,86	0,668 491	0,170 858	1,86	0,668 475	−0,043 249
0,88	0,669 828	0,172 442	1,88	0,671 110	−0,051 793
0,90	0,670 909	0,173 776	1,90	0,673 949	−0,060 382
0,92	0,671 749	0,174 856	1,92	0,676 993	−0,069 007
0,94	0,672 364	0,175 679	1,94	0,680 242	−0,077 660
0,96	0,672 768	0,176 243	1,96	0,683 698	−0,086 331
0,98	0,672 976	0,176 545	1,98	0,687 360	−0,095 013
1,00	0,673 001	0,176 583	2,00	0,691 230	−0,103 698

Zahlentafel 20. $\lambda = 1{,}0$.

x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$	x	$-Nc(\lambda, x)$	$-Ns(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,609 682	0,140 263
0,02	0,064 012	0,000 576	1,02	0,608 662	0,138 637
0,04	0,110 344	0,001 952	1,04	0,607 516	0,136 728
0,06	0,149 966	0,003 926	1,06	0,606 260	0,134 538
0,08	0,185 199	0,006 391	1,08	0,604 908	0,132 067
0,10	0,217 139	0,009 268	1,10	0,603 474	0,129 316
0,12	0,246 431	0,012 499	1,12	0,601 971	0,126 287
0,14	0,273 496	0,016 035	1,14	0,600 412	0,122 981
0,16	0,298 635	0,019 831	1,16	0,598 810	0,119 402
0,18	0,322 072	0,023 852	1,18	0,597 179	0,115 551
0,20	0,343 980	0,028 062	1,20	0,595 531	0,111 432
0,22	0,364 496	0,032 433	1,22	0,593 877	0,107 049
0,24	0,383 734	0,036 936	1,24	0,592 231	0,102 405
0,26	0,401 790	0,041 544	1,26	0,590 603	0,097 504
0,28	0,418 743	0,046 234	1,28	0,589 005	0,092 351
0,30	0,434 663	0,050 983	1,30	0,587 448	0,086 951
0,32	0,449 611	0,055 770	1,32	0,585 942	0,081 309
0,34	0,463 640	0,060 574	1,34	0,584 499	0,075 431
0,36	0,476 799	0,065 376	1,36	0,583 128	0,069 321
0,38	0,489 131	0,070 158	1,38	0,581 839	0,062 987
0,40	0,500 676	0,074 902	1,40	0,580 642	0,056 435
0,42	0,511 470	0,079 592	1,42	0,579 545	0,049 670
0,44	0,521 547	0,084 213	1,44	0,578 558	0,042 701
0,46	0,530 939	0,088 748	1,46	0,577 688	0,035 534
0,48	0,539 674	0,093 184	1,48	0,576 944	0,028 176
0,50	0,547 782	0,097 507	1,50	0,576 334	0,020 635
0,52	0,555 287	0,101 705	1,52	0,575 864	0,012 919
0,54	0,562 216	0,105 763	1,54	0,575 543	0,005 461
0,56	0,568 592	0,109 671	1,56	0,575 376	−0,003 007
0,58	0,574 438	0,113 417	1,58	0,575 369	−0,011 201
0,60	0,579 777	0,116 991	1,60	0,575 530	−0,019 538
0,62	0,584 630	0,120 382	1,62	0,575 862	−0,028 008
0,64	0,589 018	0,123 580	1,64	0,576 372	−0,036 604
0,66	0,592 962	0,126 577	1,66	0,577 064	−0,045 317
0,68	0,596 480	0,129 364	1,68	0,577 942	−0,054 137
0,70	0,599 593	0,131 932	1,70	0,579 010	−0,063 056
0,72	0,602 320	0,134 275	1,72	0,580 272	−0,072 064
0,74	0,604 678	0,136 384	1,74	0,581 732	−0,081 153
0,76	0,606 686	0,138 254	1,76	0,583 392	−0,090 314
0,78	0,608 362	0,139 878	1,78	0,585 254	−0,099 536
0,80	0,609 723	0,141 251	1,80	0,587 320	−0,108 812
0,82	0,610 786	0,142 367	1,82	0,589 593	−0,118 131
0,84	0,611 569	0,143 222	1,84	0,592 074	−0,127 485
0,86	0,612 088	0,143 812	1,86	0,594 763	−0,136 864
0,88	0,612 360	0,144 133	1,88	0,597 661	−0,146 259
0,90	0,612 400	0,144 182	1,90	0,600 769	−0,155 661
0,92	0,612 225	0,143 956	1,92	0,604 085	−0,165 062
0,94	0,611 851	0,143 453	1,94	0,607 611	−0,174 451
0,96	0,611 292	0,142 670	1,96	0,611 345	−0,183 820
0,98	0,610 564	0,141 607	1,98	0,615 285	−0,193 163
1,00	0,609 682	0,140 263	2,00	0,619 431	−0,202 464

Zahlentafel 20*. $\lambda = 0$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$	x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,664 399	0,186 597
0,02	0,014 208	0,000 079	1,02	0,675 860	0,193 748
0,04	0,028 414	0,000 314	1,04	0,687 217	0,201 011
0,06	0,042 615	0,000 706	1,06	0,698 470	0,208 384
0,08	0,056 810	0,001 254	1,08	0,709 617	0,215 865
0,10	0,069 995	0,001 960	1,10	0,720 656	0,223 452
0,12	0,085 169	0,002 821	1,12	0,731 587	0,231 144
0,14	0,099 329	0,003 839	1,14	0,742 407	0,238 939
0,16	0,113 473	0,005 013	1,16	0,753 116	0,246 836
0,18	0,127 599	0,006 342	1,18	0,763 712	0,254 831
0,20	0,141 704	0,007 827	1,20	0,774 193	0,262 925
0,22	0,155 787	0,009 467	1,22	0,784 560	0,271 114
0,24	0,169 844	0,011 261	1,24	0,794 809	0,279 396
0,26	0,183 875	0,013 209	1,26	0,804 941	0,287 771
0,28	0,197 875	0,015 311	1,28	0,814 953	0,296 236
0,30	0,211 844	0,017 567	1,30	0,824 846	0,304 789
0,32	0,225 779	0,019 975	1,32	0,834 617	0,313 428
0,34	0,239 678	0,022 535	1,34	0,844 266	0,322 152
0,36	0,253 539	0,025 247	1,36	0,853 792	0,330 958
0,38	0,267 359	0,028 109	1,38	0,863 193	0,339 844
0,40	0,281 136	0,031 122	1,40	0,872 469	0,348 809
0,42	0,294 868	0,034 284	1,42	0,881 619	0,357 851
0,44	0,308 554	0,037 595	1,44	0,890 642	0,366 966
0,46	0,322 190	0,041 054	1,46	0,899 537	0,376 154
0,48	0,335 774	0,044 659	1,48	0,908 303	0,385 413
0,50	0,349 306	0,048 412	1,50	0,916 939	0,394 740
0,52	0,362 781	0,052 309	1,52	0,925 445	0,404 133
0,54	0,376 199	0,056 351	1,54	0,933 820	0,413 590
0,56	0,389 558	0,060 537	1,56	0,942 064	0,423 109
0,58	0,402 855	0,064 846	1,58	0,950 175	0,432 688
0,60	0,416 087	0,069 334	1,60	0,958 153	0,442 326
0,62	0,429 255	0,073 944	1,62	0,965 997	0,452 019
0,64	0,442 354	0,078 694	1,64	0,973 707	0,461 766
0,66	0,455 384	0,083 581	1,66	0,981 283	0,471 564
0,68	0,468 341	0,088 606	1,68	0,988 723	0,481 412
0,70	0,481 226	0,093 767	1,70	0,996 028	0,491 308
0,72	0,494 034	0,099 062	1,72	1,003 197	0,501 248
0,74	0,506 765	0,104 491	1,74	1,010 230	0,511 232
0,76	0,519 417	0,110 052	1,76	1,017 126	0,521 257
0,78	0,531 988	0,115 744	1,78	1,023 885	0,531 321
0,80	0,544 476	0,121 566	1,80	1,030 507	0,541 421
0,82	0,556 878	0,127 515	1,82	1,036 991	0,551 556
0,84	0,569 194	0,133 592	1,84	1,043 338	0,561 724
0,86	0,581 422	0,139 794	1,86	1,049 547	0,571 922
0,88	0,593 560	0,146 120	1,88	1,055 618	0,582 148
0,90	0,605 606	0,152 569	1,90	1,061 552	0,592 400
0,92	0,617 558	0,159 139	1,92	1,067 347	0,602 676
0,94	0,629 415	0,165 828	1,94	1,073 004	0,612 974
0,96	0,641 176	0,172 635	1,96	1,078 523	0,623 292
0,98	0,652 837	0,179 558	1,98	1,083 904	0,633 627
1,00	0,664 399	0,186 597	2,00	1,089 148	0,643 978

Zahlentafel 21. $\lambda = 0{,}1$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$	x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0	1,00	0,663 829	0,186 108
0,02	0,014 208	0,000 078	1,02	0,675 262	0,193 221
0,04	0,028 414	0,000 314	1,04	0,686 592	0,200 444
0,06	0,042 615	0,000 706	1,06	0,697 817	0,207 775
0,08	0,056 809	0,001 254	1,08	0,708 937	0,215 212
0,10	0,070 994	0,001 960	1,10	0,719 948	0,222 753
0,12	0,085 167	0,002 821	1,12	0,730 851	0,230 397
0,14	0,099 327	0,003 839	1,14	0,741 643	0,238 141
0,16	0,113 470	0,005 012	1,16	0,752 323	0,245 984
0,18	0,127 594	0,006 341	1,18	0,762 891	0,253 924
0,20	0,141 698	0,007 826	1,20	0,773 345	0,261 959
0,22	0,155 778	0,009 465	1,22	0,783 684	0,270 087
0,24	0,169 834	0,011 259	1,24	0,793 906	0,278 307
0,26	0,183 861	0,013 207	1,26	0,804 011	0,286 616
0,28	0,197 859	0,015 308	1,28	0,813 997	0,295 013
0,30	0,211 824	0,017 562	1,30	0,823 863	0,303 495
0,32	0,225 755	0,019 969	1,32	0,833 609	0,312 061
0,34	0,239 649	0,022 528	1,34	0,843 233	0,320 709
0,36	0,253 504	0,025 237	1,36	0,852 735	0,329 436
0,38	0,267 318	0,028 098	1,38	0,862 113	0,338 240
0,40	0,281 089	0,031 108	1,40	0,871 367	0,347 121
0,42	0,294 814	0,034 267	1,42	0,880 496	0,356 075
0,44	0,308 491	0,037 575	1,44	0,889 498	0,365 100
0,46	0,322 119	0,041 030	1,46	0,898 374	0,374 195
0,48	0,335 695	0,044 631	1,48	0,907 123	0,383 358
0,50	0,349 216	0,048 378	1,50	0,915 743	0,392 586
0,52	0,362 681	0,052 270	1,52	0,924 234	0,401 877
0,54	0,376 088	0,056 306	1,54	0,932 596	0,411 230
0,56	0,389 434	0,060 485	1,56	0,940 828	0,420 642
0,58	0,402 718	0,064 805	1,58	0,948 930	0,430 110
0,60	0,415 937	0,069 266			
0,62	0,429 090	0,073 867			
0,64	0,442 174	0,078 606			
0,66	0,455 188	0,083 483			
0,68	0,468 129	0,088 495			
0,70	0,480 996	0,093 643			
0,72	0,493 787	0,098 924			
0,74	0,506 499	0,104 337			
0,76	0,519 131	0,109 881			
0,78	0,531 681	0,115 555			
0,80	0,544 148	0,121 358			
0,82	0,556 529	0,127 287			
0,84	0,568 823	0,133 341			
0,86	0,581 028	0,139 519			
0,88	0,593 142	0,145 820			
0,90	0,605 163	0,152 242			
0,92	0,617 091	0,158 783			
0,94	0,628 923	0,165 441			
0,96	0,640 657	0,172 216			
0,98	0,652 293	0,179 106			
1,00	0,663 829	0,186 108			

Zahlentafel 22. $\lambda = 0{,}2$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0
0,02	0,014 208	0,000 078
0,04	0,028 414	0,000 314
0,06	0,042 614	0,000 706
0,08	0,056 808	0,001 254
0,10	0,070 992	0,001 959
0,12	0,085 163	0,002 821
0,14	0,099 320	0,003 838
0,16	0,113 460	0,005 011
0,18	0,127 581	0,006 340
0,20	0,141 680	0,007 823
0,22	0,155 754	0,009 461
0,24	0,169 802	0,011 254
0,26	0,183 821	0,013 199
0,28	0,197 809	0,015 298
0,30	0,211 763	0,017 549
0,32	0,225 681	0,019 952
0,34	0,239 561	0,022 506
0,36	0,253 400	0,025 210
0,38	0,267 197	0,028 064
0,40	0,280 948	0,031 067
0,42	0,294 651	0,034 217
0,44	0,308 305	0,037 515
0,46	0,321 907	0,040 958
0,48	0,335 455	0,044 547
0,50	0,348 947	0,048 279
0,52	0,362 380	0,052 155
0,54	0,375 753	0,056 172
0,56	0,389 063	0,060 330
0,58	0,402 309	0,064 627
0,60	0,415 487	0,069 063
0,62	0,428 597	0,073 636
0,64	0,441 636	0,078 344
0,66	0,454 602	0,083 187
0,68	0,467 494	0,088 164
0,70	0,480 308	0,093 271
0,72	0,493 045	0,098 509
0,74	0,505 700	0,103 876
0,76	0,518 274	0,109 370
0,78	0,530 763	0,114 990
0,80	0,543 167	0,120 734
0,82	0,555 483	0,126 601
0,84	0,567 710	0,132 589
0,86	0,579 846	0,138 696
0,88	0,591 889	0,144 921

Zahlentafel 23. $\lambda = 0{,}3$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$	x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0	0,30	0,211 662	0,017 527
0,02	0,014 208	0,000 078	0,32	0,225 559	0,019 924
0,04	0,028 413	0,000 314	0,34	0,239 415	0,022 470
0,06	0,042 614	0,000 706	0,36	0,253 227	0,025 166
0,08	0,056 806	0,001 254	0,38	0,266 994	0,028 009
0,10	0,070 988	0,001 959	0,40	0,280 712	0,030 999
0,12	0,085 157	0,002 820	0,42	0,294 380	0,034 135
0,14	0,099 310	0,003 837	0,44	0,307 995	0,037 415
0,16	0,113 445	0,005 010	0,46	0,321 555	0,040 839
0,18	0,127 559	0,006 337	0,48	0,335 057	0,044 406
0,20	0,141 649	0,007 819	0,50	0,348 500	0,048 114
0,22	0,155 714	0,009 455	0,52	0,361 880	0,051 962
0,24	0,169 750	0,011 245	0,54	0,375 196	0,055 948
0,26	0,183 755	0,013 187	0,56	0,388 446	0,060 072
0,28	0,197 727	0,015 282	0,58	0,401 628	0,064 331
			0,60	0,414 738	0,068 725
			0,62	0,427 777	0,073 251

Zahlentafel 24. $\lambda = 0{,}4$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$	x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0	0,30	0,211 520	0,017 497
0,02	0,014 208	0,000 078	0,32	0,225 388	0,019 885
0,04	0,028 413	0,000 314	0,34	0,239 210	0,022 420
0,08	0,042 612	0,000 706	0,36	0,252 985	0,025 103
0,08	0,056 803	0,001 254	0,38	0,266 711	0,027 931
0,10	0,070 982	0,001 959	0,40	0,280 384	0,030 903
0,12	0,085 147	0,002 819	0,42	0,294 001	0,034 019
0,14	0,099 295	0,003 836	0,44	0,307 562	0,037 276
0,16	0,113 423	0,005 007	0,46	0,321 062	0,040 673
0,18	0,127 528	0,006 333	0,48	0,334 500	0,044 210
0,20	0,141 607	0,007 813			
0,22	0,155 657	0,009 446			
0,24	0,169 677	0,011 232			
0,26	0,183 662	0,013 170			
0,28	0,197 611	0,015 258			

Zahlentafel 25. $\lambda = 0{,}5$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$	x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0	0,20	0,141 552	0,007 805
0,02	0,014 208	0,000 078	0,22	0,155 585	0,009 435
0,04	0,028 413	0,000 314	0,24	0,169 583	0,011 216
0,06	0,042 611	0,000 706	0,26	0,183 543	0,013 148
0,08	0,056 800	0,001 254	0,28	0,197 463	0,015 229
0,10	0,070 976	0,001 958	0,30	0,211 338	0,017 458
0,12	0,085 135	0,002 818	0,32	0,225 168	0,019 834
0,14	0,099 276	0,003 834	0,34	0,238 947	0,022 356
0,16	0,113 395	0,005 004	0,36	0,252 675	0,025 022
0,18	0,127 488	0,006 328	0,38	0,266 347	0,027 830

Zahlentafel 26. $\lambda = 0,6$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0
0,02	0,014 208	0,000 078
0,04	0,028 412	0,000 314
0,06	0,042 609	0,000 705
0,08	0,056 795	0,001 254
0,10	0,070 967	0,001 958
0,12	0,085 121	0,002 817
0,14	0,099 253	0,003 831
0,16	0,113 360	0,005 000
0,18	0,127 439	0,006 322
0,20	0,141 485	0,007 796
0,22	0,155 496	0,009 421
0,24	0,169 468	0,011 196
0,26	0,183 397	0,013 121
0,28	0,197 281	0,015 192
0,30	0,211 116	0,017 410
0,32	0,224 899	0,019 772
0,34	0,238 626	0,022 277
0,36	0,252 295	0,024 923
0,38	0,265 903	0,027 708

Zahlentafel 27. $\lambda = 0,7$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
	0	0
0,02	0,014 208	0,000 078
0,04	0,028 411	0,000 314
0,06	0,042 607	0,000 705
0,08	0,056 790	0,001 253
0,10	0,070 957	0,001 957
0,12	0,085 104	0,002 816
0,14	0,099 226	0,003 829
0,16	0,113 319	0,004 995
0,18	0,127 381	0,006 314
0,20	0,141 406	0,007 784
0,22	0,155 391	0,009 404
0,24	0,169 332	0,011 173
0,26	0,183 226	0,013 089
0,28	0,197 068	0,015 149
0,30	0,210 855	0,017 354
0,32	0,224 583	0,019 699
0,34	0,238 248	0,022 184
0,36	0,251 849	0,024 807
0,38	0,265 380	0,027 564

Zahlentafel 28. $\lambda = 0,8$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0
0,02	0,014 208	0,000 078
0,04	0,028 411	0,000 314
0,06	0,042 605	0,000 705
0,08	0,056 784	0,001 253
0,10	0,070 946	0,001 956
0,12	0,085 084	0,002 814
0,14	0,099 194	0,003 826
0,16	0,113 273	0,004 990
0,18	0,127 314	0,006 306
0,20	0,141 315	0,007 771
0,22	0,155 270	0,009 385
0,24	0,169 176	0,011 146
0,26	0,183 027	0,013 052
0,28	0,196 820	0,015 100

Zahlentafel 29. $\lambda = 0,9$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
	0	0
0,02	0,014 208	0,000 078
0,04	0,028 410	0,000 314
0,06	0,042 602	0,000 705
0,08	0,056 778	0,001 253
0,10	0,070 933	0,001 955
0,12	0,085 061	0,002 812
0,14	0,099 159	0,003 822
0,16	0,113 220	0,004 984
0,18	0,127 239	0,006 296
0,20	0,141 212	0,007 757
0,22	0,155 133	0,009 364
0,24	0,168 999	0,011 116
0,26	0,182 803	0,013 010
0,28	0,196 541	0,015 044

Zahlentafel 30. $\lambda = 1,0$.

x	$-Cc(\lambda, x)$	$-Cs(\lambda, x)$
0,00	0	0
0,02	0,014 208	0,000 078
0,04	0,028 409	0,000 314
0,06	0,042 599	0,000 705
0,08	0,056 770	0,001 252
0,10	0,070 918	0,001 954
0,12	0,085 036	0,002 810
0,14	0,099 119	0,003 818
0,16	0,113 160	0,004 977
0,18	0,127 155	0,006 285
0,20	0,141 097	0,007 740



Zahlentafel 81. $\lambda = 0{,}1$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 832 59	0,004 995 77
0,2	0,198 662 74	0,019 932 43
0,3	0,295 498 31	0,044 658 50
0,4	0,389 367 54	0,078 923 29
0,5	0,479 329 07	0,122 379 45
0,6	0,564 481 52	0,174 586 59
0,7	0,643 972 70	0,235 015 80
0,8	0,717 008 35	0,303 055 13
0,9	0,782 860 19	0,378 015 89
1,0	0,840 873 35	0,459 139 81
1,1	0,890 473 01	0,545 606 78
1,2	0,931 170 20	0,636 543 35
1,3	0,962 566 73	0,731 031 74
1,4	0,984 359 15	0,828 119 23
1,5	0,996 341 74	0,926 828 00
1,6	0,998 408 53	1,026 165 16
1,7	0,990 554 18	1,125 132 92
1,8	0,972 873 90	1,222 738 84
1,9	0,945 562 35	1,318 005 93
2,0	0,908 911 44	1,409 982 68
2,1	0,863 307 17	1,497 752 71
2,2	0,809 225 52	1,580 444 09
2,3	0,747 227 37	1,657 238 19
2,4	0,677 952 61	1,727 377 94
2,5	0,602 113 40	1,790 175 42
2,6	0,520 486 70	1,845 018 79
2,7	0,433 906 21	1,891 378 31
2,8	0,343 253 64	1,928 811 61
2,9	0,249 449 60	1,956 967 94
3,0	0,153 444 06	1,975 591 56
3,1	0,056 206 51	1,984 524 05
3,2	−0,041 283 93	1,983 705 69
3,3	−0,138 048 67	1,973 175 74
3,4	−0,233 119 58	1,953 071 74
3,5	−0,325 548 91	1,923 627 80
3,6	−0,414 418 92	1,885 171 87
3,7	−0,498 851 13	1,838 122 07
3,8	−0,578 015 27	1,782 982 10
3,9	−0,651 137 49	1,720 335 75
4,0	−0,717 508 15	1,650 840 66
4,1	−0,776 488 83	1,575 221 27
4,2	−0,827 518 56	1,494 261 18
4,3	−0,870 119 28	1,408 794 85
4,4	−0,903 900 38	1,319 698 88
4,5	−0,928 562 32	1,227 882 83
4,6	−0,943 899 33	1,134 279 77
4,7	−0,949 801 08	1,039 836 63
4,8	−0,946 253 40	0,945 504 43
4,9	−0,933 337 95	0,852 228 53
5,0	−0,911 230 94	0,760 938 94

Zahlentafel 82. $\lambda = 0{,}2$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 830 09	0,004 995 59
0,2	0,198 642 99	0,019 929 44
0,3	0,295 432 64	0,044 643 47
0,4	0,389 215 20	0,078 876 15
0,5	0,479 039 80	0,122 265 55
0,6	0,563 998 92	0,174 353 36
0,7	0,643 238 28	0,234 590 11
0,8	0,715 966 10	0,302 341 39
0,9	0,781 461 66	0,376 894 98
1,0	0,839 082 97	0,457 468 91
1,1	0,888 273 61	0,543 220 21
1,2	0,928 568 52	0,633 254 42
1,3	0,959 598 76	0,726 635 53
1,4	0,981 095 14	0,822 396 50
1,5	0,992 890 75	0,919 549 98
1,6	0,994 922 26	1,017 099 26
1,7	0,987 230 09	1,114 049 22
1,8	0,969 957 37	1,209 417 33
1,9	0,943 347 74	1,302 244 32
2,0	0,907 742 03	1,391 604 56
2,1	0,863 573 90	1,476 616 07
2,2	0,811 364 32	1,556 449 86
2,3	0,751 715 25	1,630 338 66
2,4	0,685 302 36	1,697 584 90
2,5	0,612 866 93	1,757 567 82
2,6	0,535 207 18	1,809 749 62
2,7	0,453 168 89	1,853 680 68
2,8	0,367 635 66	1,889 003 66
2,9	0,279 518 74	1,915 456 54
3,0	0,189 746 73	1,932 874 58
3,1	0,099 255 06	1,941 191 08
3,2	0,008 975 61	1,940 437 04
3,3	−0,080 173 61	1,930 739 74
3,4	−0,167 298 44	1,912 320 15
3,5	−0,251 538 26	1,885 489 36
3,6	−0,332 075 06	1,850 643 99
3,7	−0,408 142 06	1,808 260 67
3,8	−0,479 031 50	1,758 889 66
3,9	−0,544 101 77	1,703 147 68
4,0	−0,602 783 61	1,641 710 12
4,1	−0,654 585 38	1,275 302 58
4,2	−0,699 097 45	1,504 692 07
4,3	−0,735 995 50	1,430 677 68
4,4	−0,765 042 79	1,354 081 16
4,5	−0,786 091 41	1,275 737 33
4,6	−0,799 082 46	1,196 484 42
4,7	−0,804 045 15	1,117 154 57
4,8	−0,801 094 97	1,038 564 57
4,9	−0,790 430 76	0,961 506 83
5,0	−0,772 330 98	0,886 740 91

Zahlentafel 83. $\lambda = 0{,}3$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 825 94	0,004 995 27
0,2	0,198 610 06	0,019 924 46
0,3	0,295 323 21	0,044 618 42
0,4	0,388 961 41	0,078 797 64
0,5	0,478 558 03	0,122 075 87
0,6	0,563 195 44	0,173 965 09
0,7	0,642 015 99	0,233 881 77
0,8	0,714 232 22	0,301 154 34
0,9	0,779 136 12	0,375 031 78
1,0	0,836 107 29	0,454 693 22
1,1	0,884 620 00	0,539 258 35
1,2	0,924 248 88	0,627 798 57
1,3	0,954 673 40	0,719 348 67
1,4	0,975 680 87	0,812 918 96
1,5	0,987 168 07	0,907 507 56
1,6	0,989 141 45	1,002 112 81
1,7	0,981 715 87	1,095 745 52
1,8	0,965 111 95	1,187 441 00
1,9	0,939 652 12	1,276 270 61
2,0	0,905 755 31	1,361 352 75
2,1	0,863 930 47	1,441 863 09
2,2	0,814 769 01	1,517 043 94
2,3	0,758 936 19	1,586 212 69
2,4	0,697 161 72	1,648 769 04
2,5	0,630 229 58	1,704 201 13
2,6	0,558 967 27	1,752 090 46
2,7	0,484 234 68	1,792 115 36
2,8	0,406 912 66	1,824 053 24
2,9	0,327 891 46	1,847 781 46
3,0	0,248 059 35	1,863 276 85
3,1	0,168 291 31	1,870 613 84
3,2	0,089 438 18	1,869 961 42
3,3	0,012 316 34	1,861 578 79
3,4	−0,062 302 00	1,845 809 94
3,5	−0,133 697 72	1,823 077 08
3,6	−0,201 212 73	1,793 873 24
3,7	−0,264 257 05	1,758 753 99
3,8	−0,322 314 67	1,718 328 47
3,9	−0,374 948 33	1,673 249 89
4,0	−0,421 803 13	1,624 205 62
4,1	−0,462 608 83	1,571 906 99
4,2	−0,497 180 97	1,517 079 05
4,3	−0,525 420 72	1,460 450 33
4,4	−0,547 313 52	1,402 742 80
4,5	−0,562 926 59	1,344 662 15
4,6	−0,572 405 27	1,286 888 64
4,7	−0,575 968 39	1,230 068 40
4,8	−0,573 902 58	1,174 805 55
4,9	−0,566 555 88	1,121 655 14
5,0	−0,554 330 52	1,071 116 94

Zahlentafel 84. $\lambda = 0{,}4$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 820 13	0,004 994 84
0,2	0,198 563 97	0,019 917 50
0,3	0,295 170 06	0,044 583 37
0,4	0,388 606 35	0,078 687 80
0,5	0,477 884 30	0,121 810 65
0,6	0,562 072 34	0,173 422 50
0,7	0,640 308 42	0,232 892 52
0,8	0,711 811 46	0,299 497 74
0,9	0,775 891 54	0,372 433 73
1,0	0,831 958 71	0,450 826 39
1,1	0,879 530 16	0,533 744 68
1,2	0,918 235 84	0,620 214 14
1,3	0,947 822 28	0,709 230 97
1,4	0,968 154 59	0,799 776 33
1,5	0,979 216 78	0,890 830 84
1,6	0,981 110 17	0,981 388 86
1,7	0,974 050 08	1,070 472 41
1,8	0,958 360 84	1,157 144 47
1,9	0,934 469 23	1,240 521 59
2,0	0,902 896 39	1,319 785 36
2,1	0,864 248 46	1,394 192 85
2,2	0,819 206 05	1,463 085 62
2,3	0,768 512 69	1,525 897 35
2,4	0,712 962 54	1,582 159 93
2,5	0,653 387 53	1,631 507 81
2,6	0,590 644 13	1,673 680 82
2,7	0,525 599 99	1,708 525 12
2,8	0,459 120 65	1,735 992 61
2,9	0,392 056 59	1,756 138 53
3,0	0,325 230 77	1,769 117 60
3,1	0,259 426 88	1,775 178 51
3,2	0,195 378 45	1,774 657 12
3,3	0,133 759 10	1,767 968 33
3,4	0,075 173 97	1,755 596 93
3,5	0,020 152 37	1,738 087 40
3,6	−0,030 857 92	1,716 033 07
3,7	−0,077 495 08	1,690 064 65
3,8	−0,119 485 94	1,660 838 54
3,9	−0,156 647 23	1,629 024 83
4,0	−0,188 885 18	1,595 295 53
4,1	−0,216 193 64	1,560 312 97
4,2	−0,238 650 70	1,524 718 76
4,3	−0,256 413 97	1,489 123 32
4,4	−0,269 714 54	1,454 096 25
4,5	−0,278 849 83	1,420 157 77
4,6	−0,284 175 44	1,387 771 12
4,7	−0,286 096 12	1,357 336 34
4,8	−0,285 056 21	1,329 185 26
4,9	−0,281 529 45	1,303 577 89
5,0	−0,276 008 62	1,280 700 27



Zahlentafel 85. $\lambda = 0,5$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 812 65	0,004 994 27
0,2	0,198 504 72	0,019 908 54
0,3	0,294 973 27	0,044 538 33
0,4	0,388 150 29	0,078 546 73
0,5	0,477 019 36	0,121 470 21
0,6	0,560 631 41	0,172 726 54
0,7	0,638 119 24	0,231 624 74
0,8	0,708 710 50	0,297 376 82
0,9	0,771 739 08	0,369 111 21
1,0	0,826 654 48	0,445 887 40
1,1	0,873 029 13	0,526 711 82
1,2	0,910 563 58	0,610 554 31
1,3	0,939 089 33	0,696 365 25
1,4	0,958 569 41	0,783 092 70
1,5	0,969 096 60	0,869 699 48
1,6	0,970 889 50	0,955 179 70
1,7	0,964 286 29	1,038 574 55
1,8	0,949 736 61	1,118 987 04
1,9	0,927 791 55	1,195 595 44
2,0	0,899 091 91	1,267 665 08
2,1	0,864 355 18	1,334 558 49
2,2	0,824 361 32	1,395 743 57
2,3	0,779 937 62	1,450 799 70
2,4	0,731 943 07	1,499 421 72
2,5	0,681 252 43	1,541 421 73
2,6	0,628 740 32	1,576 728 69
2,7	0,575 265 67	1,605 385 84
2,8	0,521 656 81	1,627 546 11
2,9	0,468 697 42	1,643 465 53
3,0	0,417 113 69	1,653 494 85
3,1	0,367 562 85	1,658 069 56
3,2	0,320 623 26	1,657 698 54
3,3	0,276 786 34	1,652 951 58
3,4	0,236 450 29	1,644 445 92
3,5	0,199 915 84	1,632 832 37
3,6	0,167 384 00	1,618 780 95
3,7	0,138 955 87	1,602 966 56
3,8	0,114 634 43	1,586 054 97
3,9	0,094 328 29	1,568 689 25
4,0	0,077 857 18	1,551 477 06
4,1	0,064 959 27	1,534 978 94
4,2	0,055 299 80	1,519 697 91
4,3	0,048 481 16	1,506 070 43
4,4	0,044 054 00	1,494 459 09
4,5	0,041 529 09	1,485 146 87
4,6	0,040 389 85	1,478 333 36
4,7	0,040 105 10	1,474 132 75
4,8	0,040 141 86	1,472 573 70
4,9	0,039 977 94	1,473 601 08
5,0	0,039 113 96	1,477 079 46

Zahlentafel 86. $\lambda = 0,6$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 803 51	0,004 993 59
0,2	0,198 432 33	0,019 897 60
0,3	0,294 732 91	0,044 483 32
0,4	0,387 593 53	0,078 374 54
0,5	0,475 964 15	0,121 054 99
0,6	0,558 874 91	0,171 878 47
0,7	0,635 453 08	0,230 081 52
0,8	0,704 937 85	0,294 798 30
0,9	0,766 692 94	0,365 077 45
1,0	0,820 216 59	0,439 900 48
1,1	0,865 148 76	0,518 201 31
1,2	0,901 275 49	0,598 886 64
1,3	0,928 530 31	0,680 856 56
1,4	0,946 992 61	0,763 025 10
1,5	0,956 883 13	0,844 340 24
1,6	0,958 556 73	0,923 802 92
1,7	0,952 492 42	1,000 484 70
1,8	0,939 281 15	1,073 543 80
1,9	0,919 611 41	1,142 238 97
2,0	0,894 253 15	1,205 941 13
2,1	0,864 040 25	1,264 142 51
2,2	0,829 852 07	1,316 463 02
2,3	0,792 594 29	1,362 653 91
2,4	0,753 179 73	1,402 598 50
2,5	0,712 509 29	1,436 310 25
2,6	0,671 453 66	1,463 927 92
2,7	0,630 835 97	1,485 708 34
2,8	0,591 415 98	1,502 016 62
2,9	0,553 875 88	1,513 314 39
3,0	0,518 808 22	1,520 146 10
3,1	0,486 706 01	1,523 123 88
3,2	0,457 955 34	1,522 911 22
3,3	0,432 830 49	1,520 205 92
3,4	0,411 491 73	1,515 722 67
3,5	0,393 985 69	1,510 175 70
3,6	0,380 248 38	1,504 261 80
3,7	0,370 110 58	1,498 644 21
3,8	0,363 305 65	1,493 937 63
3,9	0,359 479 27	1,490 694 74
4,0	0,358 201 10	1,489 394 46
4,1	0,358 977 96	1,490 432 25
4,2	0,361 268 07	1,494 112 56
4,3	0,364 496 29	1,500 643 63
4,4	0,368 069 67	1,510 134 75
4,5	0,371 393 15	1,522 595 82
4,6	0,373 885 03	1,537 939 47
4,7	0,374 991 67	1,555 985 36
4,8	0,374 201 34	1,576 466 68
4,9	0,371 056 66	1,599 038 66
5,0	0,365 165 61	1,623 288 77

Zahlentafel 87. $\lambda = 0{,}7$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 792 71	0,004 992 78
0 2	0,198 346 81	0,019 884 68
0 3	0,294 449 08	0,044 418 37
0 4	0,386 936 50	0,078 171 37
0,5	0,474 719 86	0,120 565 49
0,6	0,556 805 65	0,170 879 79
0,7	0,632 315 66	0,228 266 60
0.8	0,700 503 90	0,291 770 31
0 9	0,760 770 42	0,360 348 53
1,0	0,812 671 75	0,432 894 91
1,1	0,855 927 61	0,508 263 30
1,2	0,890 424 03	0,585 292 49
1,3	0,916 212 42	0,662 831 05
1,4	0,933 505 11	0,739 761 57
1,5	0,942 667 14	0,815 023 87
1,6	0,944 204 64	0,887 636 53
1,7	0,938 750 26	0,956 716 21
1,8	0,927 045 77	1,021 494 48
1,9	0,909 922 54	1,081 331 56
2,0	0,888 280 16	1,135 726 92
2,1	0,863 063 98	1,184 326 30
2,2	0,835 241 90	1,226 925 21
2,3	0,805 781 20	1,263 468 71
2,4	0,775 625 79	1,294 047 67
2,5	0,745 674 59	1,318 891 59
2,6	0,716 761 39	1,338 358 18
2,7	0,689 636 87	1,352 920 10
2,8	0,664 953 00	1,363 149 13
2,9	0,643 250 26	1,369 698 30
3,0	0,624 947 98	1,373 282 39
3,1	0,610 337 90	1,374 657 37
3,2	0,599 581 12	1,374 599 31
3,3	0,592 708 49	1,373 883 26
3,4	0,589 624 24	1,373 262 69
3,5	0,590 112 83	1,373 449 98
3,6	0,593 848 72	1,375 098 46
3,7	0,600 408 78	1,378 786 43
3,8	0,609 286 91	1,385 003 45
3,9	0,619 910 57	1,394 139 44
4,0	0,631 658 61	1,406 476 49
4,1	0,643 880 02	1,422 183 92
4,2	0,655 913 05	1,441 316 26
4,3	0,667 104 13	1,463 814 56
4,4	0,676 826 24	1,489 510 58
4,5	0,684 496 10	1,518 133 88
4,6	0,689 589 84	1,549 321 61
4,7	0,691 656 68	1,582 630 45
4,8	0,690 330 39	1,617 550 70
4,9	0,685 338 23	1,653 521 72
5,0	0,676 507 02	1,689 948 61

Zahlentafel 88. $\lambda = 0{,}8$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 780 26	0,004 991 84
0,2	0,198 248 18	0,019 869 77
0,3	0,294 121 89	0,044 343 51
0,4	0,386 179 64	0,077 937 38
0,5	0,473 287 85	0,120 002 33
0,6	0,554 426 86	0,169 732 30
0,7	0,628 713 60	0,226 184 37
0,8	0,695 420 74	0,288 302 39
0,9	0,753 991 66	0,354 943 20
1,0	0,804 051 02	0,424 904 86
1,1	0,845 410 55	0,496 956 13
1,2	0,878 070 04	0,569 866 29
1,3	0,902 213 48	0,642 434 65
1,4	0,918 200 51	0,713 518 88
1,5	0,926 553 44	0,782 061 38
1,6	0,927 940 35	0,847 113 10
1,7	0,923 154 54	0,907 854 08
1,8	0,913 091 18	0,963 610 31
1,9	0,898 721 62	1,013 866 42
2,0	0,881 066 27	1,058 273 90
2,1	0,861 166 68	1,096 654 78
2,2	0,840 057 59	1,129 000 62
2,3	0,818 739 87	1,155 467 03
2,4	0,798 154 91	1,176 363 76
2,5	0,779 161 19	1,192 140 98
2,6	0,762 513 77	1,203 371 87
2,7	0,748 846 99	1,210 732 34
2,8	0,738 661 07	1,214 978 38
2.9	0,732 312 66	1,216 921 65
3,0	0,730 009 77	1,217 404 23
3,1	0,731 810 97	1,217 273 01
3,2	0,737 628 88	1,217 354 72
3,3	0,747 237 78	1,218 432 06
3,4	0,760 284 99	1,221 221 75
3,5	0,776 305 63	1,226 355 05
3,6	0,794 740 38	1,234 361 26
3,7	0,814 955 43	1,245 654 59
3,8	0,836 264 27	1,260 524 83
3,9	0,857 950 43	1,279 131 82
4,0	0,879 290 57	1,301 504 07
4,1	0,899 577 29	1,327 541 25
4,2	0,918 140 81	1,357 020 50
4,3	0,934 369 16	1,389 606 37
4,4	0,947 726 04	1,424 863 86
4,5	0,957 766 03	1,462 274 28
4,6	0,964 146 70	1,501 253 25
4,7	0,966 637 28	1,541 170 38
4,8	0,965 123 77	1,581 369 95
4,9	0,959 610 27	1,621 191 91
5,0	0,950 216 75	1,659 992 63



Zahlentafel 39. $\lambda = 0{,}9$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 766 14	0,004 990 78
0,2	0,198 136 44	0,019 852 89
0,3	0,293 751 47	0,044 258 77
0,4	0,385 323 49	0,077 672 75
0,5	0,471 669 71	0,119 366 21
0,6	0,551 742 30	0,168 438 03
0,7	0,624 654 57	0,223 839 87
0,8	0,689 702 29	0,284 405 45
0,9	0,746 379 74	0,348 882 90
1,0	0,794 389 88	0,415 969 23
1,1	0,833 648 57	0,484 345 96
1,2	0,864 282 55	0,552 714 69
1,3	0,886 621 49	0,619 831 62
1,4	0,901 184 25	0,684 540 07
1,5	0,908 659 92	0,745 799 92
1,6	0,909 884 25	0,802 713 17
1,7	0,905 812 18	0,854 544 96
1,8	0,897 487 42	0,900 739 36
1,9	0,886 010 07	0,940 929 61
2,0	0,872 503 10	0,974 942 56
2,1	0,858 079 01	1,002 797 19
2,2	0,843 807 50	1,024 697 50
2,3	0,830 685 09	1,041 019 90
2,4	0,819 607 84	1,052 295 71
2,5	0,811 347 62	1,059 189 36
2,6	0,806 532 93	1,062 473 02
2,7	0,805 634 55	1,062 998 55
2,8	0,808 956 51	1,061 667 66
2,9	0,816 632 48	1,059 401 34
3,0	0,828 627 68	1,057 109 36
3,1	0,844 746 07	1,055 661 08
3,2	0,864 642 49	1,055 858 20
3,3	0,887 839 30	1,058 410 44
3,4	0,913 746 89	1,063 914 88
3,5	0,941 687 22	1,072 839 42
3,6	0,970 919 80	1,085 511 01
3,7	1,000 668 86	1,102 108 73
3,8	1,030 151 20	1,122 662 01
3,9	1,058 603 42	1,147 053 83
4,0	1,085 307 91	1,175 028 80
4,1	1,109 616 67	1,206 205 62
4,2	1,130 972 15	1,240 093 55
4,3	1,148 924 60	1,276 112 18
4,4	1,163 145 33	1,313 613 76
4,5	1,173 435 56	1,351 907 41
4,6	1,179 730 60	1,390 284 19
4,7	1,182 099 37	1,428 042 30
4,8	1,180 739 37	1,464 511 47
4,9	1,175 967 23	1,499 075 83
5,0	1,168 205 43	1,531 194 35

Zahlentafel 40. $\lambda = 1{,}0$.

	$Jc(\lambda, x)$	$Js(\lambda, x)$
0,0	0	0
0,1	0,099 750 36	0,004 989 59
0,2	0,198 011 63	0,019 834 03
0,3	0,293 337 97	0,044 164 18
0,4	0,384 368 68	0,077 377 70
0,5	0,469 867 21	0,118 657 91
0,6	0,548 756 19	0,166 999 29
0,7	0,620 147 14	0,221 238 76
0,8	0,683 364 13	0,280 091 73
0,9	0,737 960 44	0,342 191 55
1,0	0,783 727 87	0,406 131 30
1,1	0,820 698 38	0,470 506 23
1,2	0,849 138 04	0,533 955 65
1,3	0,869 533 66	0,595 202 82
1,4	0,882 572 56	0,653 091 49
1,5	0,889 116 19	0,706 618 00
1,6	0,890 168 65	0,754 957 88
1,7	0,886 841 19	0,797 486 06
1,8	0,880 313 91	0,833 790 29
1,9	0,871 795 98	0,863 677 20
2,0	0,862 485 89	0,887 171 03
2,1	0,853 532 84	0,904 505 23
2,2	0,846 000 78	0,916 107 22
2,3	0,840 836 15	0,922 576 99
2,4	0,838 840 43	0,924 660 47
2,5	0,840 648 32	0,923 218 56
2,6	0,846 712 20	0,919 193 06
2,7	0,857 293 34	0,913 570 68
2,8	0,872 459 92	0,907 346 52
2,9	0,892 091 91	0,901 488 18
3,0	0,915 892 46	0,896 901 87
3,1	0,943 405 19	0,894 401 62
3,2	0,974 036 77	0,894 682 59
3,3	1,007 083 71	0,898 299 43
3,4	1,041 762 56	0,905 650 27
3,5	1,077 242 01	0,916 966 89
3,6	1,112 676 04	0,932 311 14
3,7	1,147 236 64	0,951 577 83
3,8	1,180 145 07	0,974 503 60
3,9	1,210 700 45	1,000 681 53
4,0	1,238 304 78	1,029 580 67
4,1	1,262 483 41	1,060 569 80
4,2	1,282 900 44	1,092 944 34
4,3	1,299 368 54	1,125 955 38
4,4	1,311 852 82	1,158 839 83
4,5	1,320 468 96	1,190 850 25
4,6	1,325 475 51	1,221 283 60
4,7	1,327 261 04	1,249 507 61
4,8	1,326 326 51	1,274 983 85
4,9	1,323 263 67	1,297 286 84
5,0	1,318 730 49	1,316 118 35



Zahlentafel 41. $\lambda = 0{,}1$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−2,019 588	−2,083 101
2,1	−1,970 540	−2,177 555
2,2	−1,914 045	−2,263 982
2,3	−1,851 114	−2,341 971
2,4	−1,782 761	−2,411 209
2,5	−1,709 999	−2,471 487
2,6	−1,633 827	−2,522 691
2,7	−1,555 222	−2,564 803
2,8	−1,475 136	−2,597 895
2,9	−1,394 482	−2,622 124
3,0	−1,314 132	−2,637 729
3,1	−1,234 908	−2,645 025
3,2	−1,157 578	−2,644 393
3,3	−1,082 849	−2,636 278
3,4	−1,011 365	−2,621 178
3,5	−0,943 700	−2,599 640
3,6	−0,880 358	−2,572 247
3,7	−0,821 773	−2,539 618
3,8	−0,768 300	−2,502 391
3,9	−0,720 225	−2,461 222
4,0	−0,677 758	−2,416 775
4,1	−0,641 034	−2,369 714
4,2	−0,610 122	−2,320 697
4,3	−0,585 020	−2,270 365
4,4	−0,565 661	−2,219 344
4,5	−0,551 919	−2,168 228
4,6	−0,543 608	−2,117 584
4,7	−0,540 494	−2,067 939
4,8	−0,542 293	−2,019 780
4,9	−0,548 682	−1,973 550
5,0	−0,559 303	−1,929 643

Zahlentafel 42. $\lambda = 0{,}2$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−1,615 329	−1,433 693
2,1	−1,588 234	−1,485 903
2,2	−1,557 929	−1,532 289
2,3	−1,525 206	−1,572 864
2,4	−1,490 814	−1,607 721
2,5	−1,455 460	−1,637 027
2,6	−1,419 799	−1,661 015
2,7	−1,384 430	−1,679 980
2,8	−1,349 891	−1,694 266
2,9	−1,316 658	−1,704 264
3,0	−1,285 140	−1,710 399
3,1	−1,255 676	−1,713 126
3,2	−1,228 537	−1,712 918
3,3	−1,203 925	−1,710 259
3,4	−1,181 973	−1,705 636
3,5	−1,162 749	−1,699 532
3,6	−1,146 254	−1,692 414
3,7	−1,132 432	−1,684 731
3,8	−1,121 169	−1,676 907
3,9	−1,112 301	−1,669 331
4,0	−1,105 616	−1,662 355
4,1	−1,100 864	−1,656 289
4,2	−1,097 760	−1,651 394
4,3	−1,095 994	−1,647 886
4,4	−1,095 235	−1,645 926
4,5	−1,095 139	−1,645 624
4,6	−1,095 355	−1,647 036
4,7	−1,095 537	−1,650 167
4,8	−1,095 342	−1,654 968
4,9	−1,094 446	−1,661 344
5,0	−1,092 542	−1,669 150

Zahlentafel 43. $\lambda = 0{,}3$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−1,376 173	−1,037 575
2,1	−1,362 841	−1,063 300
2,2	−1,348 991	−1,084 531
2,3	−1,335 278	−1,101 561
2,4	−1,322 288	−1,114 753
2,5	−1,310 531	−1,124 522
2,6	−1,300 440	−1,131 333
2,7	−1,292 366	−1,135 683
2,8	−1,286 578	−1,138 099
2,9	−1,283 262	−1,139 118
3,0	−1,282 519	−1,139 285
3,1	−1,284 370	−1,139 136
3,2	−1,288 760	−1,139 194
3,3	−1,295 556	−1,139 954
3,4	−1,304 561	−1,141 878
3,5	−1,315 512	−1,145 387
3,6	−1,328 092	−1,150 850
3,7	−1,341 935	−1,158 584
3,8	−1,356 635	−1,168 844
3,9	−1,371 756	−1,181 821
4,0	−1,386 839	−1,197 638
4,1	−1,401 415	−1,216 351
4,2	−1,415 007	−1,237 944
4,3	−1,427 148	−1,262 335
4,4	−1,437 385	−1,289 374
4,5	−1,445 288	−1,318 848
4,6	−1,450 458	−1,350 483
4,7	−1,452 537	−1,383 951
4,8	−1,451 211	−1,418 875
4,9	−1,446 220	−1,454 835
5,0	−1,437 359	−1,491 377

Zahlentafel 44. $\lambda = 0{,}4$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−1,203 946	−0,745 351
2,1	−1,200 862	−0,751 356
2,2	−1,199 237	−0,753 896
2,3	−1,199 609	−0,753 481
2,4	−1,202 419	−0,750 676
2,5	−1,208 010	−0,746 081
2,6	−1,216 625	−0,740 324
2,7	−1,228 404	−0,734 045
2,8	−1,243 390	−0,727 881
2,9	−1,261 530	−0,722 460
3,0	−1,282 677	−0,718 380
3,1	−1,306 599	−0,716 203
3,2	−1,332 985	−0,716 444
3,3	−1,361 451	−0,719 560
3,4	−1,391 556	−0,725 945
3,5	−1,422 803	−0,735 916
3,6	−1,454 657	−0,749 717
3,7	−1,486 553	−0,767 509
3,8	−1,517 911	−0,789 368
3,9	−1,548 142	−0,815 286
4,0	−1,576 667	−0,845 172
4,1	−1,602 921	−0,878 851
4,2	−1,626 368	−0,916 073
4,3	−1,646 514	−0,956 513
4,4	−1,662 909	−0,999 779
4,5	−1,675 160	−1,045 424
4,6	−1,682 938	−1,092 946
4,7	−1,685 984	−1,141 804
4,8	−1,684 112	−1,191 426
4,9	−1,677 211	−1,241 219
5,0	−1,665 253	−1,290 578

Zahlentafel 45. $\lambda = 0{,}5$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−1,067 950	−0,511 815
2,1	−1,072 929	−0,502 301
2,2	−1,080 853	−0,490 240
2,3	−1 092 133	−0,476 314
2,4	−1,107 060	−0,461 238
2,5	−1,125 809	−0,445 747
2,6	−1,148 433	−0,430 574
2,7	−1,174 876	−0,416 441
2,8	−1,204 970	−0,404 037
2,9	−1,238 445	−0,394 010
3,0	−1,274 939	−0,386 949
3,1	−1,314 008	−0,383 377
3,2	−1,355 137	−0,383 738
3,3	−1,397 751	−0,388 390
3,4	−1,441 233	−0,397 598
3,5	−1,484 935	−0,411 532
3,6	−1,528 193	−0,430 263
3,7	−1,570 343	−0,453 761
3,8	−1,610 731	−0,481 903
3,9	−1,648 734	−0,514 470
4,0	−1,683 764	−0,551 158
4,1	−1,715 286	−0,591 580
4,2	−1,742 827	−0,635 282
4,3	−1,765 984	−0,681 745
4,4	−1,784 431	−0,730 404
4,5	−1,797 928	−0,780 655
4,6	−1,806 320	−0,831 868
4,7	−1,809 542	−0,883 402
4,8	−1,807 619	−0,934 617
4,9	−1,800 662	−0,984 888
5,0	−1,788 867	−1,033 613

Zahlentafel 46. $\lambda = 0{,}6$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−0,954 560	−0,317 818
2,1	−0,965 937	−0,295 987
2,2	−0,981 329	−0,272 503
2,3	−1,001 002	−0,248 177
2,4	−1,025 080	−0,223 833
2,5	−1,053 556	−0,200 282
2,6	−1,086 293	−0,178 311
2,7	−1,123 032	−0,158 659
2,8	−1,163 406	−0,142 005
2,9	−1,206 947	−0,128 951
3,0	−1,253 105	−0,120 010
3,1	−1,301 262	−0,115 597
3,2	−1,350 745	−0,116 022
3,3	−1,400 850	−0,121 482
3,4	−1,450 855	−0,132 062
3,5	−1,500 039	−0,147 734
3,6	−1,547 698	−0,168 360
3,7	−1,593 162	−0,193 696
3,8	−1,635 814	−0,223 403
3,9	−1,675 094	−0,257 054
4,0	−1,710 523	−0,294 145
4,1	−1,741 703	−0,334 113
4,2	−1,768 328	−0,376 344
4,3	−1,790 193	−0,420 191
4,4	−1,807 188	−0,464 992
4,5	−1,819 310	−0,510 082
4,6	−1,826 650	−0,554 810
4,7	−1,829 396	−0,598 554
4,8	−1,827 822	−0,640 734
4,9	−1,822 285	−0,680 826
5,0	−1,813 209	−0,718 371

Zahlentafel 47. $\lambda = 0{,}7$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−0,856 556	−0,153 770
2,1	−0,872 900	−0,122 373
2,2	−0,893 950	−0,090 232
2,3	−0,919 799	−0,058 248
2,4	−0,950 388	−0,027 304
2,5	−0,985 514	+0,001 760
2,6	−1,024 841	0,028 166
2,7	−1,067 911	0,051 215
2,8	−1,114 169	0,070 306
2,9	−1,162 971	0,084 947
3,0	−1,213 610	0,094 765
3,1	−1,265 337	0,099 515
3,2	−1,317 380	0,099 077
3,3	−1,368 966	0,093 465
3,4	−1,419 344	0,082 816
3,5	−1,467 801	0,067 385
3,6	−1,513 684	0,047 539
3,7	−1,556 413	0,023 739
3,8	−1,595 496	−0,003 470
3,9	−1,630 540	−0,033 478
4,0	−1,661 262	−0,065 626
4,1	−1,687 489	−0,099 226
4,2	−1,709 162	−0,133 580
4,3	−1,726 338	−0,167 999
4,4	−1,739 182	−0,201 820
4,5	−1,747 960	−0,234 423
4,6	−1,753 032	−0,265 251
4,7	−1,754 839	−0,293 817
4,8	−1,753 887	−0,319 721
4,9	−1,750 734	−0,342 655
5,0	−1,745 974	−0,362 413

Zahlentafel 48. $\lambda = 0{,}8$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−0,769 678	−0,014 340
2,1	−0,789 683	+0,024 115
2,2	−0,814 726	0,062 371
2,3	−0,844 706	0,099 482
2,4	−0,879 362	0,134 553
2,5	−0,918 285	0,166 771
2,6	−0,960 940	0,195 423
2,7	−1,006 683	0,219 912
2,8	−1,054 787	0,239 775
2,9	−1,104 463	0,254 688
3,0	−1,154 894	0,264 476
3,1	−1,205 250	0,269 109
3,2	−1,254 723	0,268 703
3,3	−1,302 544	0,263 511
3,4	−1,348 010	0,253 911
3,5	−1,390 501	0,240 392
3,6	−1,429 498	0,223 537
3,7	−1,464 596	0,204 001
3,8	−1,495 513	0,182 492
3,9	−1,522 094	0,159 748
4,0	−1,544 319	0,136 512
4,1	−1,562 291	0,113 510
4,2	−1,576 238	0,091 430
4,3	−1,586 499	0,070 903
4,4	−1,593 512	0,052 482
4,5	−1,597 799	0,036 630
4,6	−1,599 944	0,023 705
4,7	−1,600 581	0,013 956
4,8	−1,600 366	0,007 510
4,9	−1,599 960	0,004 381
5,0	−1,600 008	0,004 463

Zahlentafel 49. $\lambda = 0{,}9$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−0,691 230	0,103 698
2,1	−0,713 674	0,146 860
2,2	−0,741 150	0,188 851
2,3	−0,773 348	0,228 721
2,4	−0,809 794	0,265 616
2,5	−0,849 875	0,298 804
2,6	−0,892 865	0,327 692
2,7	−0,937 954	0,351 843
2,8	−0,984 278	0,370 982
2,9	−1,030 950	0,385 004
3,0	−1,077 090	0,393 970
3,1	−1,121 858	0,398 100
3,2	−1,164 476	0,397 762
3,3	−1,204 259	0,393 455
3,4	−1,240 630	0,385 789
3,5	−1,273 142	0,375 459
3,6	−1,301 485	0,363 224
3,7	−1,325 497	0,349 876
3,8	−1,345 163	0,336 214
3,9	−1,360 616	0,323 015
4,0	−1,372 122	0,311 011
4,1	−1,380 076	0,300 864
4,2	−1,384 979	0,293 143
4,3	−1,387 423	0,288 309
4,4	−1,388 065	0,286 703
4,5	−1,387 604	0,288 535
4,6	−1,386 757	0,293 878
4,7	−1,386 236	0,302 674
4,8	−1,386 716	0,314 734
4,9	−1,388 321	0,329 752
5,0	−1,393 098	0,347 313

Zahlentafel 50. $\lambda = 1{,}0$.

x	$Nc(\lambda, x)$	$Ns(\lambda, x)$
2,0	−0,619 431	0,202 464
2,1	−0,643 163	0,248 123
2,2	−0,671 614	0,291 621
2,3	−0,704 255	0,332 054
2,4	−0,740 400	0,368 659
2,5	−0,779 245	0,400 837
2,6	−0,819 897	0,428 167
2,7	−0,861 416	0,450 417
2,8	−0,902 847	0,467 546
2,9	−0,943 259	0,479 701
3,0	−0,981 782	0,487 199
3,1	−1,017 632	0,490 520
3,2	−1,050 143	0,490 277
3,3	−1,078 787	0,487 191
3,4	−1,103 190	0,482 064
3,5	−1,123 143	0,475 743
3,6	−1,138 606	0,469 089
3,7	−1,149 704	0,462 945
3,8	−1,156 717	0,458 101
3,9	−1,160 071	0,455 273
4,0	−1,160 312	0,455 070
4,1	−1,158 086	0,457 977
4,2	−1,154 112	0,464 341
4,3	−1,149 152	0,474 360
4,4	−1,143 981	0,488 077
4,5	−1,139 359	0,505 386
4,6	−1,136 000	0,526 037
4,7	−1,134 547	0,549 649
4,8	−1,135 547	0,575 729
4,9	−1,139 437	0,603 693
5,0	−1,146 522	0,632 890

Luftfahrt-Forschung

Band 21 — 28. Februar 1944 — Lfg. 1

Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung*).

Von Karl Federhofer.

Für die gleichförmig belastete, am Rande eingespannte dünne Kreisplatte, deren Durchbiegung die Dicke um ein Mehrfaches übersteigt, werden die Zusammenhänge zwischen Belastung, Formänderung und Spannungen in geschlossenen Formeln dargestellt, die den Entwurf zweier für den praktischen Gebrauch bestimmten Schaulinien ermöglichen, aus denen bei gegebener Belastung und bekannten Abmessungen der Kreisplatte unmittelbar die größte Durchbiegung und Inanspruchnahme des Plattenstoffes abgelesen werden können. Sodann werden für die Berechnung der Kreis- und Kreisringmembrane einfache Näherungsformeln entwickelt, welche die nur durch Reihenentwicklungen darstellbaren strengen Lösungen sehr gut annähern. Zwei Zahlentafeln ermöglichen die unmittelbare Berechnung solcher Membranen.

Gliederung.

I. Einleitung.

Das Problem der Ermittlung der Formänderungen und Spannungen einer dünnen ebenen Platte von beliebiger Umrißform, bei der die Durchbiegung vergleichbar mit der Plattendicke oder sogar erheblich größer als diese wird, erfordert bei strenger Lösung die Integration zweier partieller nichtlinearer Differentialgleichungen vierter Ordnung, die zuerst von Th. Kármán[1]) aufgestellt worden sind. Sie wurde bisher nur für den praktisch sehr wichtigen Sonderfall der am Rande eingespannten gleichmäßig belasteten Kreisplatte von St. Way[2]) mit Hilfe von Reihenentwicklungen durchgeführt; die beiden allgemeinen Grundgleichungen vereinfachen sich hier in zwei totale nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Nach Kenntnis der genauen Lösung dieses Problems konnte auch der Genauigkeitsgrad der schon viel früher bekannten Näherungslösungen dieses Problems beurteilt werden, die vom Verfasser[3]) (1918), A. Nádai[4]) (1925) und S. Timoshenko[5]) (1932) angegeben worden sind, wobei sich zeigte[6]), daß die strengen Ergebnisse — wenigstens was die Durchbiegungen anlangt — durch die Näherungstheorie des Verfassers innerhalb des Bereiches, den St. Way in seinen numerischen Rechnungen behandelte (größte Durchbiegung w_0 zu Plattendicke h gleich Null bis 1,2) am besten angenähert werden. Hingegen liefert die Näherungstheorie Nádais bessere Übereinstimmung mit den genauen Spannungen der Kreisplatte. Aus den im Wege eines graphischen Interpolationsverfahrens gewonnenen und in Kurven dargestellten Ergebnissen der strengen Theorie Ways läßt sich das Verhalten der Kreisplatte nur bis zur Grenze $\frac{w_0}{h} \sim 1{,}2$ beurteilen.

Da nun aus einem besonderen Anlasse die Kenntnis des Verhaltens von Kreisplatten erwünscht war, deren Durchbiegung die Dicke um ein Mehrfaches übersteigt, so hat der Verfasser in Ermangelung numerischer Ergebnisse der strengen Theorie die für solche Kreisplatten geltenden Zusammenhänge zwischen Belastung, Formänderung und Spannungen in geschlossenen Formeln dargestellt; sie wurden aus den in eine besonders einfache Form gebrachten Grundgleichungen durch Benutzung des Näherungsverfahrens von A. Nádai gewonnen und sodann für den praktischen Gebrauch in zwei Schaulinien wiedergegeben, aus denen bei gegebener Belastung und bekannten Abmessungen der Kreisplatte unmittelbar die größte Durchbiegung und Inanspruchnahme des Plattenstoffes abgelesen werden können.

Zur Beurteilung des Genauigkeitsgrades der hier entwickelten Näherungslösung wurden für einen weit außerhalb des von Way behandelten Bereiches gelegenen Sonderfall $\left(\frac{w_0}{h} \sim 5\right)$ die Grundgleichungen mit Hilfe von Reihenentwicklungen in (4) streng integriert und sodann die größte Durchbiegung und die Spannungen berechnet: der Vergleich der hierbei gewonnenen Ergebnisse mit jenen der Näherungslösung zeigte eine sehr befriedigende Übereinstimmung, die Abweichung beträgt bei der größten Durchbiegung 2% und liegt bei der größten Spannung noch unter 5%. Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der Spannungen und Formänderungen einer Kreis- und Kreisringmembrane. Die für diesen Sonderfall geltenden Grundgleichungen ergeben sich aus jenen des Abschnittes II durch Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit. Ihre bereits bekannten, mit Hilfe von Reihenentwicklungen gewonnenen Lösungen werden hier durch ganz einfache geschlossene Ansätze mit Hilfe des Verfahrens von Galerkin sehr gut angenähert, das auch bei Kontrollrechnungen im ersten Teil dieser Arbeit nützliche Dienste leistete.

II. Die Kreisplatte.

1. Grundgleichungen.

Infolge der auf die Platte wirkenden Drücke p je Flächeneinheit, die symmetrisch um den Plattenmittelpunkt verteilt sein sollen, so daß in der Entfernung r die Druckverteilung $p = p_0\,\Theta(r)$ herrscht, entsteht als elastische Fläche eine Umdrehungsfläche, deren Verzerrung durch die radiale Verschiebung $v(r)$ und die Neigung $\varphi(r)$ der Meridiantangente gegeben ist. Für die Dehnung ε_1 im Meridian und ε_2 im Parallelkreise gilt dann

$$\varepsilon_1 = \frac{dv}{dr} + \left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right), \qquad (1)$$

*) A 22 23.

[1]) Enzykl. d. math. Wiss. Bd. 4 (1907—1914), Heft 27, S. 350.

[2]) St. Way, Trans. Amer. Soc. Mech. Engr. Bd. 56 (1934), S. 627.

[3]) K. Federhofer, Eisenbau Bd. 9 (1918), S. 152.

[4]) A. Nádai, Elastische Platten. Berlin 1925. S. 288.

[5]) S. Timoshenko, Schwingungsprobleme der Technik. Berlin 1932. S. 344.

[6]) K. Federhofer, Forschung a. d. Gebiete d. Ing.-Wesens 7 (1936), S. 148.

$$\varepsilon_2 = \frac{v}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Krümmung $\varkappa_1$ des Meridians an der Stelle r beträgt genau

$$\varkappa_1 = \frac{d \sin \varphi}{d r}, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

die Krümmung des an der Stelle r gelegten zweiten Hauptschnittes ergibt sich mit

$$\varkappa_2 = \frac{\sin \varphi}{r} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Mit

$$\sin \varphi = u \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

gelten daher die Formeln

$$\varepsilon_1 \cong \frac{d v}{d r} + \frac{u^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{v}{r}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\varkappa_1 = \frac{d u}{d r}, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\varkappa_2 = \frac{u}{r} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Bezeichnet ferner T_1 die Spannkraft, G_1 das Biegungsmoment im Meridianschnitte, T_2 und G_2 Spannkraft und Biegungsmoment im zweiten Hauptschnitte, so gelten die bekannten Beziehungen

$$T_1 = \frac{12 D}{h^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) = \frac{12 D}{h^2} \left(\frac{d v}{d r} + \frac{u^2}{2} + \mu \frac{v}{r} \right), \quad \ldots \quad (10)$$

$$T_2 = \frac{12 D}{h^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) = \frac{12 D}{h^2} \left(\frac{v}{r} + \mu \frac{d v}{d r} + \mu \frac{u^2}{2} \right), \quad \ldots \quad (11)$$

$$G_1 = - D [\varkappa_1 + \mu \varkappa_2 + \varkappa_2 (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2)] = - D \left[\varkappa_1 + \mu \varkappa_2 + \frac{h^2}{12 D} \varkappa_2 T_1 \right], \quad \ldots \quad (12)$$

$$G_2 = - D [\varkappa_2 + \mu \varkappa_1 + \varkappa_1 (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1)] = - D \left[\varkappa_2 + \mu \varkappa_1 + \frac{h^2}{12 D} \varkappa_1 T_2 \right] \quad \ldots \quad (13)$$

Hierin bedeuten: E die Elastizitätszahl,
μ die Poissonsche Zahl,
h die Dicke der Platte,
$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}$ deren Biegungssteifigkeit.

Das Gleichgewicht der am deformierten Elemente der Platte wirkenden Spannkräfte und Biegungsmomente ist durch folgende drei Bedingungen ausgedrückt

$$\frac{d}{d r} (r T_1) - T_2 = \frac{N r}{R \cos \varphi} = f(r), \quad \ldots \quad (14)$$

$$\frac{d}{d r} (r G_1) - G_2 = \frac{N r}{\cos \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

$$r (T_1 \sin \varphi + N \cos \varphi) = p_0 \int_{r=0}^{r} \Theta r \, d r, \quad \ldots \quad (16)$$

worin N die in der Meridiannormalen wirkende Querkraft und $R = \frac{1}{\varkappa_1}$ den Krümmungshalbmesser des Meridians bedeutet. Mit der durch die Festlegung

$$\varrho = \frac{r}{a} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

(a gleich Plattenhalbmesser) dimensionslos gemachten unabhängigen Veränderlichen ϱ lautet die erste Gleichgewichtsgleichung

$$\frac{d}{d \varrho} (\varrho T_1) - T_2 = f(\varrho), \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

die wir durch Einführung einer dimensionslosen Funktion $\Psi(\varrho)$ gemäß den Ansätzen

$$T_1 = \frac{D}{a^2} \frac{\Psi}{\varrho}, \quad \ldots \ldots \quad (19\text{a})$$

$$T_2 = \frac{D}{a^2} \frac{d \Psi}{d \varrho} - f(\varrho) \quad \ldots \ldots \quad (19\text{b})$$

befriedigen. Um die Differentialgleichung für die Funktion φ zu gewinnen, beseitigen wir aus den beiden Gleichungen (10) und (11) die radiale Verschiebung v und ihre Abgeleitete $\frac{d v}{d r}$, wodurch die Gleichung

$$\varrho \frac{d}{d \varrho} (T_2 - \mu T_1) + (1 + \mu) (T_2 - T_1) = - \frac{E h}{2} u^2$$

entsteht, die sich mit Beachtung der ersten Gleichgewichtsgleichung (14) überführen läßt in die einfache Beziehung

$$\varrho \frac{d}{d \varrho} (T_1 + T_2) + \frac{E h}{2} u^2 = (1 + \mu) f(\varrho) \quad \ldots \quad (20)$$

Hieraus folgt mit der Festsetzung

$$\Phi(\varrho) = 2 \sqrt{3} \frac{a}{h} u(\varrho) \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

und mit dem homogenen Differentialoperator

$$L(\;) = \frac{d^2}{d \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d \varrho} - \frac{1}{\varrho^2}$$

als erste der beiden Grundgleichungen für die Funktionen Φ und Ψ

$$L(\Psi) + \frac{1 - \mu^2}{2} \frac{\Phi^2}{\varrho} = \Omega(\varrho) = \frac{a^2}{D} \left[\frac{d f}{d \varrho} + (1 + \mu) \frac{f}{\varrho} \right] \quad (\text{I})$$

Um zur zweiten Grundgleichung für Φ und φ zu gelangen tragen wir in der zweiten Gleichgewichtsgleichung (15) die den Spannungsmomenten G_1 und G_2 gemäß den Gl. (12) und (13) bei Beachtung von (8) und (9) zukommenden Werte ein, womit sich zunächst ergibt

$$L(u) + \frac{h^2 a}{12 D} \left[\frac{d}{d \varrho} (\varkappa_2 T_1) + \frac{\varkappa_2 T_1 - \varkappa_1 T_2}{\varrho} \right] = - \frac{N a^2}{D \cos \varphi},$$

zufolge der dritten Gleichgewichtsgleichung (16) gilt aber

$$N = \frac{1}{\cos \varphi} \left[- T_1 \sin \varphi + \frac{p_0}{\varrho} \int_0^{\varrho} \Theta \varrho \, d \varrho \right], \quad \ldots \quad (22)$$

womit bei Beachtung der für T_1 und T_2 gemachten Ansätze (19) und (20) und mit der Näherung $\frac{1}{\cos^2 \varphi} \sim 1 + u^2$ folgt

$$L(\Phi) - \frac{\Phi \Psi}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} \Theta^* \varrho \, d \varrho = \Gamma(\varrho), \quad \ldots \quad (\text{II})$$

worin

$$\Gamma(\varrho) = \frac{h^2}{12 a^2} \left[\frac{\Phi^2}{\varrho} \left(\Phi \Psi - \int_0^{\varrho} \Theta^* \varrho \, d \varrho \right) - \frac{d}{d \varrho} \left(\frac{\Phi \Psi}{\varrho^2} \right) - \frac{\frac{\Phi \Psi}{\varrho^2} - \frac{d \Phi}{d \varrho} \frac{d \Psi}{d \varrho}}{\varrho} \right] \quad \ldots \quad (23)$$

Darin gilt für die dimensionslose Belastungsfunktion

$$\Phi^* = 24 \sqrt{3 (1 - \mu^2)} \frac{p_0 a^4}{E h^4} \cdot \Theta(\varrho), \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

oder mit Einführung des Plattenparameters

$$r = \frac{p_0 a^4}{E h^4} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

in welchem die für die Platte charakteristischen Größen in dimensionsloser Form zusammengefaßt sind

$$\Theta^* = 24 \sqrt{3 (1 - \mu^2)} \, r \, \Theta(\varrho) \quad \ldots \ldots \quad (24\text{a})$$

Um die Funktion

$$\Omega(\varrho) = \frac{a^2}{D} \left[\frac{d f}{d \varrho} + (1 + \mu) \frac{f}{\varrho} \right]$$

in der Grundgleichung (I) durch die neuen dimensionslosen Veränderlichen Φ und Ψ darzustellen, gehen wir aus von

$$f(\varrho) \cong N \varrho \frac{d u}{a \, d \varrho},$$

ersetzen hierin die Querkraft N durch den in (22) dargestellten Ausdruck und erhalten mit Verwendung des für die Spannkraft T_1 gemachten Ansatzes (19)

$$\frac{a^2}{D} f(\varrho) = \frac{h^2}{12\,a^2}\,\vartheta(\varrho),$$

worin

$$\vartheta(\varrho) = \int_0^\varrho \Theta^* \varrho\, d\varrho - \Phi\,\Psi \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

so daß schließlich folgt

$$\Omega(\varrho) = \frac{h^2}{12\,a^2}\left[\frac{d\,\vartheta}{d\,\varrho} + (1+\mu)\,\frac{\vartheta}{\varrho}\right] \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Die beiden Differentialgleichungen

$$L(\Phi) - \frac{\Phi\,\Psi}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \Theta^* \varrho\, d\varrho = \Gamma(\varrho), \quad \ldots \quad (\mathrm{I\,a})$$

$$L(\Psi) + \frac{1-\mu^2}{2}\,\frac{\Phi^2}{\varrho} = \Omega(\varrho), \quad \ldots \quad (\mathrm{II\,a})$$

in denen außer der Poissonschen Zahl μ nur numerische Konstanten vorkommen, bilden die Grundgleichungen der Berechnung der Kreisplatten mit großer Ausbiegung. Die Berücksichtigung der beiden Funktionen Γ und Ω, die gemäß (23) und (27) klein von der Ordnung $\frac{h^2}{a^2}$ sind, liefert selbst bei sehr hohen Werten von Θ^* nur ganz geringfügige Verbesserungen für die das Problem lösenden Funktionen Φ und Ψ, so daß wir sie im folgenden unterdrücken wollen; dies ist gleichbedeutend damit, daß wir in den Ansätzen für die Spannungsmomente die zusätzlichen mit T_1 und T_2 behafteten Terme streichen und $\cos\varphi \sim 1$ und $\sin\varphi = u \sim \varphi$ setzen. Es gelten daher bei mit ϱ veränderlicher Belastung p die Grundgleichungen

$$L(\Phi) - \frac{\Phi\,\Psi}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \Theta^* \varrho\, d\varrho = 0, \quad \ldots \quad (\mathrm{I\,b})$$

$$L(\Psi) + \frac{1-\mu^2}{2}\,\frac{\Phi^2}{\varrho} = 0, \quad \ldots \quad (\mathrm{II\,b})$$

die sich im Falle einer gleichmäßigen Belastung $p = p_0$, d. h. $\Theta(\varrho) = 1$, und daher gemäß (24)

$$\Theta^* = 24\sqrt{3}\,(1-\mu^2)\,\frac{p_0\,a^4}{E\,h^4} = \text{konstant}$$

vereinfachen zu

$$L(\Phi) - \frac{\Phi\,\Psi}{\varrho} + \frac{\Theta^*\varrho}{2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I\,c})$$

$$L(\Psi) + \frac{1-\mu^2}{2}\,\frac{\Phi^2}{\varrho} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II\,c})$$

Die Verwendung der Spannungsfunktion Ψ anstatt der radialen Verschiebung v ermöglicht — wie der Vergleich mit den vom Verfasser seinerzeit entwickelten, später auch von A. Nádai verwendeten Grundgleichungen für Φ und v zeigt — nicht nur eine besonders einfache Darstellung der Grundgleichungen, sondern auch die bequeme Berechnung der Membranspannkräfte T_1 und T_2.

2. Näherungslösung der Grundgleichungen für die am Rande eingespannte Kreisplatte.

Machen wir für die der Neigung φ der Meridiantangente gegen die Plattenebene verhältige Funktion Φ in erster Näherung den Ansatz

$$\Phi(\varrho) = C\,(\varrho^3 - \varrho), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

der die Bedingung der Einspannung des Plattenrandes $\Phi(\varrho) = 0$ für $\varrho = \pm 1$ und jene der Antisymmetrie für Φ erfüllt und der mit dem Sonderwert

$$C = -\frac{\Theta^*}{16}$$

die bekannte Lösung für den Fall unendlich kleiner Durchbiegung darstellt, so ist aus der Grundgleichung (IIc) die Funktion Ψ durch Ausführung einfacher Quadraturen bestimmbar und es kann nun der Freiwert C nach irgendeinem der bekannten Näherungsverfahren — am einfachsten nach dem Verfahren von Galerkin aus der Grundgleichung (Ic) — berechnet werden. Hierbei ergibt sich für C und damit auch für $\frac{w_0}{h}$ eine Gleichung dritten Grades, aus der nach einer früheren vergleichenden Untersuchung des Verfassers[7]) die Formänderungen der Kreisplatte in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der strengen Lösung von St. Way einfach zu gewinnen sind; das gleiche gilt auch noch für die Membranspannung, während die Übereinstimmung hinsichtlich der Biegungsspannungen nicht sehr befriedigend ist. Der Grund hierfür liegt, worauf schon E. O. Waters hingewiesen hat, darin, daß mit dem Ansatze (28) die gleiche geometrische Form für die durchgebogene Platte angenommen wird, wie sie der Kirchhoffschen linearen Theorie zugrunde liegt. Aus den Ergebnissen der strengen Lösung von St. Way ist aber bekannt, daß die Biegungsspannungen einer sehr dünnen eingespannten Platte mit ihrer zunehmenden Wölbung gegen den eingeklemmten Rand hin sehr stark ansteigen, wo sich in einem ziemlich schmalen Randring eine sehr scharfe Krümmung ausbildet, während in den übrigen Gebieten nahezu konstante Krümmung besteht. Mit dem von A. Nádai[8]) benutzten Ansatz

$$\Phi(\varrho) = C\,(\varrho^n - \varrho) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

wo $n > 3$, wird diesem Umstande besser Rechnung getragen, wie aus den in Bild 1 eingetragenen Formen der Plattenmeridiane, die mit den Annahmen $n = 3, 5, 10, 15$ und 30 aus der nachstehend entwickelten allgemeinen Gleichung (32) für die Meridianform berechnet worden sind, zu entnehmen ist. Vgl. auch Zahlentafel 1. Mit $w(r)$ als Durchbiegung am Orte r gilt (vgl. Bild 1)

$$-\frac{d\,w}{d\,r} = \operatorname{tg}\varphi \sim \sin\varphi = u,$$

woraus bei Beachtung von (21)

$$w = -\frac{h}{2\sqrt{3}}\int \Phi\, d\varrho + c_0 = -\frac{h\,C}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\varrho^{n+1}}{n+1} - \frac{\varrho^2}{2}\right) + C_0$$

folgt. Die Randbedingung $\varrho = 1$, $w = 0$ liefert für die Integrationskonstante

$$C_0 = \frac{h\,C}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right),$$

[7]) Vgl. Fußnote 6.
[8]) Vgl. Fußnote 4.

Zahlentafel 1.

Exponent n in Gl. (29)	Meridianform nach Gl. (32) $\frac{w(\varrho)}{w_0}$	ϱ_w für Wendepunkt (Gl. 33)	$\frac{w(\varrho_w)}{w_0}$
3	$(1-\varrho^2)^2$	0,577	0,445
5	$1 - \frac{3\,\varrho^2}{2} + \frac{\varrho^6}{2}$	0,669	0,373
10	$1 - \frac{11}{9}\,\varrho^2 + \frac{2}{9}\,\varrho^{11}$	0,744	0,281
15	$1 - \frac{8}{7}\,\varrho^2 + \frac{1}{7}\,\varrho^{16}$	0,824	0,230
30	$1 - \frac{31}{29}\,\varrho^2 + \frac{2}{29}\,\varrho^{31}$	0,889	0,156

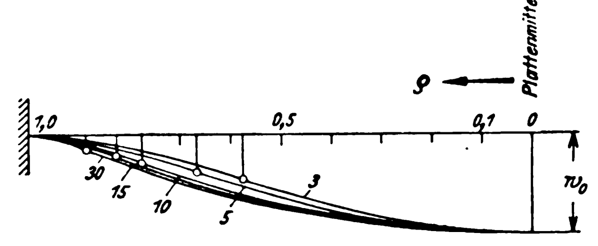


Bild 1. Meridianformen der Platte nach Gleichung (32) mit den Annahmen $n = 3, 5, 10, 15$ und 30.

somit

$$w(\varrho) = \frac{h\,C}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^{n+1}}{n+1} \right) \quad . . (30)$$

Es gilt hienach für den Biegungspfeil in Plattenmitte ($\varrho = 0$)

$$\frac{w_0}{h} = \frac{C}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \right) \quad . . . . . . (31)$$

so daß im Vereine mit (30) folgt

$$\frac{w(\varrho)}{w_0} = \frac{2(n+1)}{1-n} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^{n+1}}{n+1} \right] \quad (32)$$

Die Lage ϱ_w des Wendepunktes der elastischen Linie ist aus

$$\frac{d^2 w}{d\varrho^2} = 0$$

bestimmt durch

$$\varrho_w = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad . . . . (33)$$

Mit zunehmendem Exponenten n im Ansatze (29) rückt der Wendepunkt, der für $n = 3$ durch $\varrho_w = 0{,}577$ bestimmt ist, immer näher an den Rand und liegt z. B. für $n = 30$ bei $\varrho_w = 0{,}889$ (Zahlentafel 1).

Mit dem Ansatze (29) liefert die Grundgleichung (IIc) nach Durchführung der einfachen Quadraturen und mit den Integrationskonstanten c_1, c_2

$$\psi(\varrho) = c_1 \varrho + \frac{c_2}{\varrho} - m\,C^2 \left[\frac{\varrho^{2n+1}}{4n(n+1)} - 2\frac{\varrho^{n+2}}{(n+1)(n+3)} + \frac{\varrho^3}{8} \right], \quad . . . . (34)$$

worin zur Abkürzung

$$\frac{1-\mu^2}{2} = m \quad . . . . (35)$$

gesetzt worden ist.

Da die mit $\frac{\Psi}{\varrho}$ verhältnisgleiche Membranspannkraft T_1 in Plattenmitte $\varrho = 0$ einen endlichen Wert haben muß, ist $c_2 = 0$ zu setzen. Die zweite Integrationskonstante c_1 bestimmt sich aus der Bedingung, daß auf dem Rande der eingespannten Platte die radiale Verschiebung v und damit auch die tangentiale Dehnung $\varepsilon_2 = \frac{1}{E\,h}(T_2 - \mu T_1)$ verschwinden muß. Gemäß den Ansätzen (19) gilt demnach für $\varrho = 1$ die Randbedingung

$$\frac{d\Psi}{d\varrho} - \mu \frac{\Psi}{\varrho} = 0,$$

die für c_1 den Wert $c_1 = m\,C^2 \alpha$ liefert, wo

$$\alpha = \frac{1}{1-\mu} \left[\frac{2n+1-\mu}{4n(n+1)} - 2\frac{n+2-\mu}{(n+1)(n+3)} + \frac{3-\mu}{8} \right] = \quad (36)$$

$$= \frac{1}{1-\mu} \; \frac{(n-1)^2 [3(n+2) - \mu(n+6)]}{8n(n+1)(n+3)} \quad . . (36a)$$

ist. Hiermit wird aus (34)

$$\Psi(\varrho) = m\,C^2 \left[\alpha\varrho - \frac{\varrho^{2n+1}}{4n(n+1)} + 2\frac{\varrho^{n+2}}{(n+1)(n+3)} - \frac{\varrho^3}{8} \right] \quad (37)$$

Geht man mit den Ansätzen (29) und (37) in die Grundgleichung (Ic) ein, die wir kurz $E(\Phi) = 0$ schreiben wollen, so erfüllt nach Galerkin jener Wert C diese Gleichung am besten, der sich aus der Forderung

$$\int E(\Phi)(\varrho^n - \varrho)\,dF = 0 \quad . . . . . . (38)$$

ergibt, wobei $E(\Phi)$ durch die Näherungsansätze (29) und (37) auszudrücken und die Integration über die ganze Kreisplattenfläche F zu erstrecken ist; aus der Bedingungsgleichung

$$\int_{\varrho=0}^{\varrho=1} E(\Phi)(\varrho^n - \varrho)\,\varrho\,d\varrho = 0 \quad . . . . . (39)$$

folgt nach Ausführung der Integrationen

$$\frac{C(n-1)^2}{2n} + m\,C^3 N - \frac{\Theta^*}{2} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{4} \right) = 0, \quad (40)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha N_\alpha - \frac{N_1}{n_1} + \frac{2N_2}{n_2} - \frac{N_3}{n_3} \\ N_\alpha &= \frac{(n-1)^2}{4(n+1)(n+3)}, \\ N_1 &= \frac{(n-1)^2}{6(n+1)(n+2)(2n+1)}, \\ N_2 &= \frac{(n-1)^2}{3(n+1)(n+2)(n+5)}, \\ N_3 &= \frac{(n-1)^2}{6(n+2)(n+5)}, \\ n_1 &= 4n(n+1),\; n_2 = (n+1)(n+3),\; n_3 = 8 \end{aligned} \right\} \quad . . . (41)$$

Mit dem für die späteren Zahlenrechnungen benützten Wert $\mu = \frac{1}{4}$ für die Poissonsche Zahl wird aus (36a)

$$\alpha = \frac{(n-1)^2(11n+18)}{24n(n+1)(n+3)} \quad . . . . . (42)$$

und es läßt sich mit Hilfe der vorstehenden Ausdrücke der nur von n abhängige Beiwert N in Gl. (40) darstellen durch

$$N = \frac{(n-1)^4 [18n^3 + 159n^2 + 383n + 254]}{96(n+1)^2(n+3)^2(n+2)(n+5)(2n+1)} \quad (43)$$

Durch die Gleichung (40) ist der Freiwert C in seiner Abhängigkeit vom Exponenten n und von Θ^* (und damit gemäß (24a) auch vom Plattenparameter ν) dargestellt.

Bei der Anwendung dieser Gleichung zur Berechnung des Beiwertes C, dessen Kenntnis die Ermittlung der größten Durchbiegung und Spannungen ermöglicht, ist nun nach der früheren Bemerkung über die Form der Meridianlinie der durchgebogenen Platte die richtige Wahl des Exponenten n im Ansatze (29) von ausschlaggebender Bedeutung. Für kleine Plattenparameter (etwa bis $\nu = 8$), denen Durchbiegungsverhältnisse $\frac{w_0}{h}$ kleiner als 1 entsprechen, ist die Annahme $n = 3$ gerechtfertigt, womit Ansatz (29) in den Kirchhoffschen Ansatz übergeht; dann lautet Gl. (40)

$$C\frac{2}{3} + \frac{m\,C^3}{96} \left[\frac{5-3\mu}{12(1-\mu)} - \frac{1}{7} \right] + \frac{\Theta^*}{24} = 0;$$

sie kann bei Beachtung der aus (31) mit $n = 3$ hervorgehenden Beziehung

$$\frac{w_0}{h} = -\frac{C}{8\sqrt{3}}$$

und wegen $\Theta^* = 24\sqrt{3}(1-\mu^2)\,\nu$ (vgl. Gl. (24a) mit $\Theta(\varrho) = 1$) übergeführt werden in[9])

$$\left(\frac{w_0}{h} \right) + \frac{(23-9\mu)(1+\mu)}{56} \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = \frac{3}{16}(1-\mu^2)\,\nu \quad (44)$$

Solange die größte Einsenkung w_0 klein gegenüber der Plattendicke h ist, kann das den Faktor $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$ enthaltende Glied dieser Gleichung gegenüber $\frac{w_0}{h}$ unterdrückt werden, womit (44) übergeht in die aus der Plattentheorie bekannte Formel[10])

$$\frac{w_0}{h} = \frac{3}{16}(1-\mu^2)\,\nu.$$

Anstatt des linearen Zusammenhanges von w_0 und ν ergibt sich bei Platten mit großer Ausbiegung angenähert eine kubische Beziehung. Für wachsende Parameter ν (> 8), also für dünne Platten, bei denen die größten Durchbiegungen ein Mehrfaches der Dicke ausmachen können, gibt aber auch die Gl. (44) den hier bestehenden Zusammenhang von $\left(\frac{w_0}{h}\right)$ mit ν wegen der ihr zugrunde gelegten Annahme $n = 3$ nicht mehr genügend genau an.

---

[9]) Zu einer davon im Beiwerte von $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$ etwas abweichenden Gleichung gelangte kürzlich D. J. Panov, Appl. Math. a. Mech. Bd. 3 (1939), S. 139. Die Abweichung rührt davon her, daß das in Gleichung (38) angeschriebene Integral bei Panov nicht über die Plattenoberfläche, sondern nur über einen Durchmesser erstreckt wird, so daß im Ansatze Gleichung (39) der Faktor ϱ fehlt.

[10]) S. D. Poisson, Paris Mém. Acad. Bd. 8 (1829), S. 237.

Es ist daher zwecks richtiger Ausnutzung der Gl. (40) zunächst die Frage des Zusammenhanges von n mit $\frac{w_0}{h}$ bzw. ν zu klären. Dazu betrachten wir nach dem Vorgange von A. Nádai die im Ansatze (29) gewählte Funktion Φ und die mit ihr aus der zweiten Grundgleichung (IIc) berechnete Funktion Ψ (Gl. 37) als strenge Lösungen der bei veränderlicher Belastung gültigen Grundgleichungen (Ib, IIb) und bestimmen die diesen Funktionen Φ und Ψ nach Gleichung (Ib) zugehörige Belastungsfunktion Θ^*; nach kurzer Rechnung ergibt sich

$$-\Theta^* = C(n^2-1)(n-1)\varrho^{n-3} - m C^3 \left\{\alpha\left[(n+1)\varrho^{n-1}-2\right] - \frac{(3n+1)\varrho^{3n-1}-(2n+2)\varrho^{2n}}{n_1} + 2\frac{(2n+2)\varrho^{2n}-(n+3)\varrho^{n+1}}{n_2} - \frac{(n+3)\varrho^{n+1}-4\varrho^2}{n_3}\right\} \quad . . . . (45)$$

Diese Belastungsfunktion, die ersichtlich nur im Falle $n = 3$ und bei unendlich kleinen Ausbiegungen einer gleichförmigen Belastung zugehören kann, wird bei vorgegebenem Werte n von ihrem Mittelwerte $\bar{\Theta}^* = \int_0^1 \Theta^* d\varrho$ sich möglichst wenig unterscheiden, wenn das Quadrat der Abweichungen

$$\int_0^1 (\Theta^* - \bar{\Theta}^*)^2 d\varrho$$

als Funktion des Freiwertes C am kleinsten ist. Diese Forderung ergibt eine Bedingungsgleichung für C, die in $C = 0$ und in eine quadratische Gleichung für C^2 zerfällt, aus der jener Wert C berechnet werden kann, für den die mit vorgegebenem Werte n gewählte Funktion Φ (Ansatz (29) zu einer Belastungsfunktion Θ^* führt, welche die Belastung durch gleichförmigen Druck p_0 am besten annähert.

Von A. Nádai wurde diese Rechnung schon für die Exponenten $n = 4, 5, 7$ durchgeführt; mit $\mu = \frac{1}{4}$ erhielt er folgende zusammengehörige Werte

$n =$	4	5	7
$C =$	—12,04	—15,4	—21,02
$\frac{w_0}{h} =$	1,04	1,49	2,28
$\nu =$	9,19	18,9	52,6.

In erster Näherung hat Nádai diesen Zusammenhang von $\frac{w_0}{h}$ mit ν durch die mit (44) formal übereinstimmende Gleichung[11])

$$\frac{w_0}{h} + 0{,}583\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 = \frac{3}{16}\frac{p_0 a^4}{E h^4}(1-\mu^2) \quad . . . (46)$$

dargestellt mit einem Gültigkeitsbereich bis etwa $\frac{w_0}{h} = 2{,}5$. Nach dem vorbeschriebenen Rechnungsgange ermittelte der Verfasser mit den Exponenten $n = 10, 15, 30$ und mit $\mu = \frac{1}{4}$ folgende Zusammenhänge

$n =$	10	15	30
$C =$	—28,7	—41,4	—80,8
$\frac{w_0}{h} =$	3,39	5,23	10,91
$\nu =$	150,5	502,2	4127,9.

Zur Überprüfung der ziemlich umfangreichen Rechnungen, die zur Kenntnis dieser Zusammenhänge führten, wurden die oben angegebenen Werte von C auch mit Hilfe der Gleichung (40) berechnet. Wird beachtet, daß gemäß (24 a) mit $\Theta(\varrho) = 1$ (d. h. für die gleichförmige Belastung) $\Theta^* = \frac{45\sqrt{3}}{2}\nu = \bar{\Theta}^*$ ist, so ergibt sich mit den ob gegebenen ν-Werten der Reihe nach für

$n =$	10	15	30
$\Theta^* =$	5866,7	19569,5	160868
$N =$	0,0336	0,0469	0,0659

und hiermit aus der kubischen Gleichung (40)

$C =$	—29,1	—42,0	—81,2

in sehr guter Übereinstimmung mit den nach dem Verfahren von A. Nádai berechneten C-Werten[12]). In Bild 2 ist der den drei Annahmen $n = 10, 15$ und 30 entsprechende Verlauf der Belastungsfunktionen Θ^* (Gl. 45) und deren Mittelwert $\bar{\Theta}^*$ entlang eines Plattenhalbmessers dargestellt; die Abweichungen vom zugehörigen Mittelwert wachsen mit zunehmendem n und steigen von 14% bis auf 28% an.

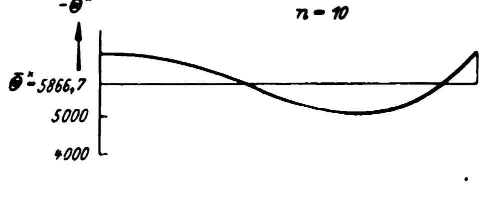
Der Zusammenhang von $\frac{w_0}{h}$ mit dem Exponenten n ist im Bereiche $n = 7$ bis 30 — wie Bild 3 zeigt — mit sehr großer Annäherung ein linearer, ebenso jener von C mit n. Trägt man die nach den obigen Zahlenangaben einander entsprechenden Werte (n, ν) in logarithmischem Maßstabe auf, so ist dieser Zusammenhang sehr gut durch die in Bild 4 dargestellte Gerade mit $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ dargestellt; da hiernach

[11]) Der Koeffizient von $\left(\frac{w_0}{h}\right)^3$ in Gl. (44) ergibt sich zu 0,463, wenn $\mu = \frac{1}{4}$.

[12]) Der Einfluß der in den vereinfachten Grundgleichungen (Ia), (IIa) vernachlässigten Funktionen $\Gamma(\varrho)$ und $\Omega(\varrho)$ auf die Größe des Beiwertes C läßt sich bei Anwendung des Galerkinschen Verfahrens verhältnismäßig einfach ermitteln. Stellt man mit Hilfe der Ansätze für $\Phi(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ die durch (23) erklärte Funktion $\Gamma(\varrho)$ in ihrer Abhängigkeit von C und ϱ dar, berücksichtigt sie sodann in der ersten Grundgleichung (Ia), die wieder kurz $E(\Phi) = 0$ geschrieben werden möge, und führt die durch Gl. (39) geforderte Integration durch, so ergibt sich anstatt der kubischen Gleichung eine solche fünften Grades für C. Auf die ausführliche Wiedergabe der notwendigen Rechnungen und der hieraus folgenden verbesserten Gleichung für C kann verzichtet werden, denn ihre numerische Auflösung ergab mit der Annahme $\frac{h}{a} = \frac{1}{50}$

und	$n =$	10	15	30
die Werte	$C =$	—29,168	—42,037	—81,341.

Die Abweichungen gegenüber den aus der kubischen Gl. (40) gerechneten oben angegebenen C-Werten sind praktisch ohne Belang.



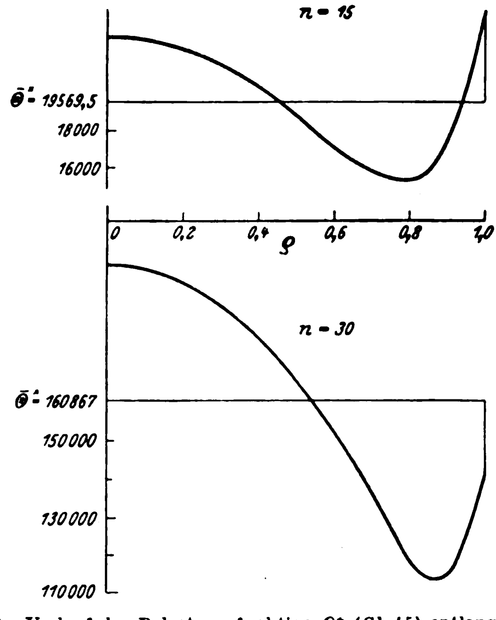


Bild 2. Verlauf der Belastungsfunktion Θ^* (Gl. 45) entlang eines Plattenhalbmessers für $n = 10, 15$ und 30; Mittelwert $\bar{\Theta}^*$.

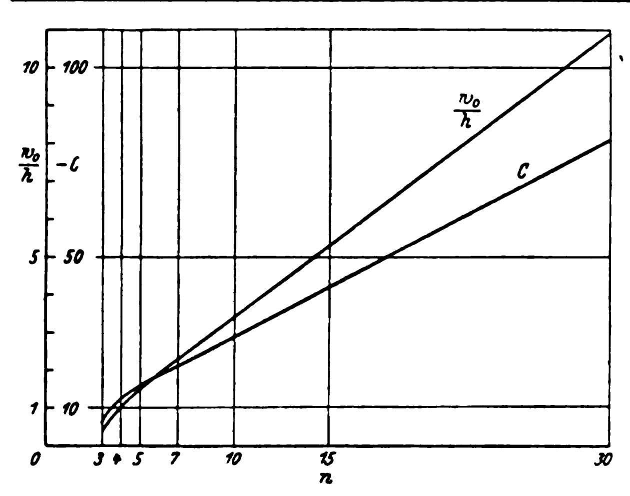


Bild 3. Abhängigkeit der Werte $\frac{w_0}{h}$ und C vom Exponenten n.

$$\lg \frac{n}{4} = \frac{1}{3} \lg \frac{\nu}{9{,}19}$$

ist, so folgt die einfache Beziehung

$$n = 1{,}9\, \nu^{1/3}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

aus der für gegebenen Plattenparameter ν unmittelbar der im Ansatze für Φ einzutragende Exponent n berechnet werden kann. In Bild 5 sind schließlich über den logarithmisch aufgetragenen Zahlen $\nu = \frac{p_0 a^4}{E h^4}$ die zugehörigen $\frac{w_0}{h}$ für den Bereich großer Durchbiegungen, und zwar von $\frac{w_0}{h} = 1{,}04$ bis $10{,}91$ in gewöhnlichem Maßstabe aufgetragen. Für jeden gegebenen Kennwert ν der Platte kann daher das zugehörige $\frac{w_0}{h}$ unmittelbar entnommen werden; da aus der in Bild 4 eingetragenen Geraden der entsprechende Exponent n abgelesen oder aus der obigen Formel (47) berechnet werden kann, so steht sodann der Berechnung der größten Spannungen (Abschnitt 3) nichts im Wege.

Es ist bemerkenswert, daß die Gleichung (46), die von A. Nádai für Durchbiegungen bis etwa gleich dem 2½-fachen der Plattendicke angegeben worden ist, auch noch darüber hinaus den Zusammenhang von $\frac{w_0}{h}$ mit ν recht gut wiedergibt; denn man erhält hieraus z. B. für

ν	= 150	502	4128
$\frac{w_0}{h}$	= 3,4	5,22	10,70

in sehr guter Übereinstimmung mit den eben angegebenen unmittelbar gerechneten Durchbiegungen.

3. Ermittlung der Spannungen.

Die Membranspannkräfte T_1 und T_2 in radialer und tangentialer Richtung berechnen sich aus

$$T_1 = \frac{D}{a^2} \frac{\Psi}{\varrho} \qquad \text{und} \qquad T_2 = \frac{D}{a^2} \frac{d\Psi}{d\varrho}$$

mit Beachtung der Gl. (37) zu

$$T_1 = \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \left[\alpha - \frac{\varrho^{2n}}{n_1} + 2 \frac{\varrho^{n+1}}{n_2} - \frac{\varrho^2}{n_3}\right],$$

$$T_2 = \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \left[\alpha - \frac{2n+1}{n_1} \varrho^{2n} + \frac{2(n+2)}{n_2} \varrho^{n+1} - \frac{3 \varrho^2}{n_3}\right].$$

Für die Spannungsmomente G_1 und G_2 erhält man aus (12) und (13) bei Vernachlässigung der mit T_1 und T_2 behafteten unbedeutenden Korrekturglieder

$$G_1 = -D\left[\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r}\right],$$

$$G_2 = -D\left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr}\right],$$

oder wegen (21) und (29)

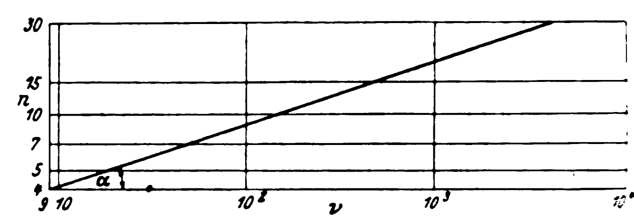


Bild 4. Zusammenhang des Exponenten n mit dem Plattenparameter ν.

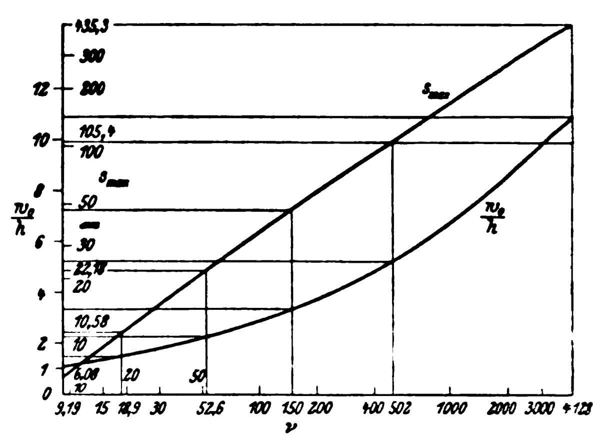


Bild 5. Durchbiegungsverhältnis $\frac{w_0}{h}$ und radiale Rundspannung s_{max} (Gl. 48) in Abhängigkeit von der Platten-Kennzahl ν.

$$G_1 = -\frac{E h^2}{24 \sqrt{3}\,(1-\mu^2)} \frac{h^2}{a^2} C \left[(n+\mu)\, \varrho^{n-1} - (1+\mu)\right],$$

$$G_2 = -\frac{E h^2}{24 \sqrt{3}\,(1-\mu^2)} \frac{h^2}{a^2} C \left[(1+n\mu)\, \varrho^{n-1} - (1+\mu)\right].$$

Für die Plattenmitte ($\varrho = 0$) gilt daher

$$T_1^0 = T_2^0 = \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \alpha,$$

oder wegen Gl. (36a)

$$= \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \frac{(n-1)^2 [3(n+2) - \mu(n+6)]}{(1-\mu)\, 8 n (n+1)(n+3)},$$

und am Plattenrande ($\varrho = 1$)

$$T_1^1 = \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \left[\alpha - \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} - \frac{1}{n_3}\right] = \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \frac{(n-1)^2}{4(1-\mu)(n+1)(n+3)},$$

$$T_2^1 = \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \left[\alpha - \frac{2n+1}{n_1} + \frac{2(n+2)}{n_2} - \frac{3}{n_3}\right] = \frac{E h}{24} \frac{h^2}{a^2} C^2 \frac{\mu (n-1)^2}{4(1-\mu)(n+1)(n+3)},$$

demnach

$$T_2^1 = \mu\, T_1^1.$$

In Plattenmitte werden die beiden Spannungsmomente G_1^0 und G_2^0 einander gleich, und zwar

$$G_1^0 = G_2^0 = \frac{E h^2}{24 \sqrt{3}\,(1-\mu)} \frac{h^2}{a^2} C,$$

für den Plattenrand gilt

$$G_1^1 = -\frac{E h^2}{24 \sqrt{3}\,(1-\mu^2)} \frac{h^2}{a^2} C (n-1)$$

$$G_2^1 = \mu\, G_1^1.$$

Die größte Materialbeanspruchung σ_{max} ergibt sich in der radialen Randspannung aus

$$\sigma_{max} = \frac{6 G_1^1}{h^2} + \frac{T_1^1}{h}$$

zu

$$\sigma_{max} = E \frac{h^2}{a^2} \left[\frac{C}{4\sqrt{3}\,(1-\mu^2)} (n-1) + \frac{C^2}{24} \frac{(n-1)^2}{4(1-\mu)(n+1)(n+3)}\right],$$

wo C mit dem Absolutbetrag einzusetzen ist. Wird hierin C ersetzt durch den aus Gl. (31) folgenden Wert

$$|C| = 4\sqrt{3}\,\frac{n+1}{n-1}\left(\frac{w_0}{h}\right),$$

so folgt schließlich für die Dimensionslose s_{max}

$$s_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{n+1}{1-\mu^2}\left(\frac{w_0}{h}\right) + \frac{n+1}{2(1-\mu)(n+3)}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 \quad \ldots (48)$$

Die hieraus für die früher gewählten Exponenten n und den ihnen nach Bild 3 zugehörigen $\frac{w_0}{h}$ gerechneten Werte von s_{max} betragen

$$n = 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 10 \quad 15 \quad 30$$

$$s_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2 = 1{,}73\;6{,}08\;10{,}58\;22{,}18\;46{,}25\;105{,}44\;435{,}31.$$

Sie sind in der Schaulinie (Bild 5) über den den jeweiligen Werten n entsprechenden Kennwerten ν der Kreisplatte logarithmisch aufgetragen, so daß nun innerhalb des dargestellten Bereiches der ν-Werte für jeden beliebigen Wert des Plattenparameters $\nu = \frac{p_0 a^4}{E h^4}$ die zugehörige Durchbiegung w_0 und größte Materialinanspruchnahme unmittelbar zu entnehmen ist.

4. Strenge Lösung der Grundgleichungen (Ic) und (IIc).

Wir bringen vorerst die beiden Grundgleichungen

$$L(\Psi) + m\frac{\Phi^2}{\varrho} = 0,$$

$$L(\Phi) - \frac{\Phi\Psi}{\varrho} + \frac{\Theta^*\varrho}{2} = 0$$

durch Einführung neuer Funktionen $\overline{\Psi}$, $\overline{\Phi}$ und ξ gemäß

$$\Psi = \alpha_1\overline{\Psi},\quad \Phi = \alpha_2\overline{\Phi},\quad \varrho = \alpha_3\xi$$

in die von den Zahlenwerten m und Θ^* freie Form

$$L(\overline{\Psi}) + \frac{\overline{\Phi}^2}{\xi} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (49)$$

$$L(\overline{\Phi}) - \frac{\overline{\Phi}\,\overline{\Psi}}{\xi} + \xi = 0. \quad \ldots\ldots (50)$$

Hierbei sind die konstanten Beiwerte α_1, α_2, α_3, wie der Vergleich mit den Ausgangsgleichungen zeigt, bestimmt durch

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{\frac{2}{\Theta^*\sqrt{m}}};\quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_3};\quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}\,\frac{1}{\alpha_3} \quad . (51)$$

Da die Formänderung und die Spannungen der durch gleichmäßigen Druck belasteten Kreisplatte durchwegs endliche Größen sind, so können die Funktionen Φ und Ψ und daher auch $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ durch unendliche Reihen mit positiven Potenzen von ϱ bzw. von ξ dargestellt werden; beachten wir, daß Φ und Ψ ungerade Funktionen von ϱ, demnach $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ ungerade Funktionen von ξ sein müssen, so kommen die Ansätze

$$\overline{\Phi}(\xi) = \gamma_1\xi + \gamma_3\xi^3 + \gamma_5\xi^5 + \ldots = \sum_{k=1,3\ldots}\gamma_k\xi^k, \quad (52)$$

$$\overline{\Psi}(\xi) = \beta_1\xi + \beta_3\xi^3 + \beta_5\xi^5 + \ldots = \sum_{k=1,3\ldots}\beta_k\xi^k \quad (53)$$

in Frage. Ihre Eintragung in die beiden Grundgleichungen liefert folgende Beziehungen zwischen den Koeffizienten β_k und γ_k

$$\beta_k = -\frac{\sum\limits_{s=1,3\ldots}^{k-2}\gamma_s\gamma_{k-1-s}}{k^2-1},\quad (k = 3, 5, \ldots) \;. (54)$$

$$\gamma_k = \frac{\sum\limits_{s=1,3\ldots}^{k-2}\gamma_s\beta_{k-1-s}}{k^2-1},\quad (k = 5, 7 \ldots) \quad (55a)$$

$$8\gamma_3 - \beta_1\gamma_1 + 1 = 0. \quad \ldots\ldots (55b)$$

Es bleiben demnach zunächst unbestimmt die beiden Konstanten γ_1 und β_1, die nach Gl. (19) bzw. den Gl. (12) und (13) verhältnisgleich sind der Membrankraft T_1 bzw. dem Biegungsmoment in Plattenmitte. Die Bedingung der Einspannung des Plattenrandes verlangt, daß Φ für $\varrho = 1$, d. h. für $\xi_1 = \frac{1}{\alpha_3}$ verschwinde (es ist $\xi_1 = \alpha_1$). Damit folgt aus Gl. (52)

$$\sum_{k=1,3,5\ldots}\gamma_k\xi_1^k = 0 \quad \ldots\ldots (56)$$

Die zweite Randbedingung fordert das Verschwinden der tangentialen Dehnung und dies ist gleichbedeutend mit $\frac{d\Psi}{d\varrho} - \mu\frac{\Psi}{\varrho} = 0$ an der Stelle $\varrho = 1$

$$\text{oder}\quad \frac{d\overline{\Psi}}{d\xi} - \mu\frac{\overline{\Psi}}{\xi} = 0 \quad \text{für } \xi = \xi_1.$$

Mit dem Ansatze (53) lautet daher die zweite Randbedingung

$$\Delta = \sum_{k=1,3,5\ldots}\beta_k\xi_1^k(k-\mu) = 0. \quad \ldots (57)$$

Um nun bei gegebenem Plattenparameter ν (d. h. für einen bekannten Wert Θ^*) die strenge Rechnung numerisch durchführen zu können, ist vorerst auf Grund mehrerer Annahmen des Wertepaares γ_1, β_1 und Berechnung der ihnen nach (54) und (55) zugehörigen β_k, γ_k ein für die weitere Rechnung passendes Ausgangswertepaar β_1, γ_1 zu ermitteln, wobei die Ergebnisse der Näherungsrechnung mit Vorteil zu verwerten sind.

Geht man mit den den Ausgangswerten β_1, γ_1 entsprechenden γ_k-Werten in die Bedingungsgleichung (56) und ermittelt aus ihr die Wurzel ξ_1, so ist für dieses ξ_1 die 1. Randbedingung erfüllt. Mit dem sodann bekannten ξ_1-Wert und den schon berechneten Koeffizienten β_k, γ_k wird sich aus der 2. Randbedingung (Gl. 57) eine von Null verschiedene Differenz Δ ergeben. Wir wiederholen nun die Rechnung bei Festhaltung eines der beiden Ausgangswerte (z. B. γ_1) und Änderung des zweiten (β_1), rechnen nach dem eben beschriebenen Verfahren die entsprechenden Werte ξ_1 und Δ. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir dann bei festgehaltenem γ_1 eine Reihe von zusammengehörigen Werten ξ_1 und Δ, für welche zwar die 1. Randbedingung, nicht aber die 2. Randbedingung erfüllt ist; durch Interpolation kann sodann das beide Randbedingungen befriedigende β_1 ermittelt werden, mit dem auch der zugehörige Wert ξ_1 und zufolge $\xi_1 = \frac{1}{\alpha_3}$ (Gl. 51) auch Θ^* bestimmt ist.

Die numerische Durchführung solcher Rechnungen erfordert einen sehr bedeutenden Arbeitsaufwand, denn es muß in den Reihen (52) und (53) eine große Zahl von Gliedern (im folgenden Beispiel bis zu 22) berücksichtigt werden, um eine befriedigende Genauigkeit zu erreichen; die Werte ξ_1 und Δ erweisen sich als außerordentlich empfindlich gegenüber kleinen Änderungen der Ausgangswerte β_1, γ_1.

Im folgenden sind die Ergebnisse einer für den Plattenparameter $\nu = 502$ und ein diesem entsprechendes $\Theta^* = 19570$ durchgeführten strengen Rechnung kurz zusammengestellt.

Nach mehrfachen Versuchsberechnungen wurde als Ausgangswertepaar

$$\beta_1 = 3{,}34947,\quad \gamma_1 = 0{,}30109$$

gewählt; bei Festhaltung von γ_1 und kleinen Änderungen von β_1 ergaben sich folgende zusammengehörige Werte

β_1	ξ_1	Δ	Θ^*
3,34947	8,5053	3,50	15287
3,34952	8,8561	1,16	17969
3,349537	9,0235	—0,106	19367

daraus ist endgültig

$$\beta_1 = 3{,}349536, \quad \xi_1 = 9{,}01155, \quad \Theta^* = 19264.$$

Hiermit berechnet sich die Einsenkung $\frac{w(\varrho)}{h}$ an den Stellen

	$\varrho = 0$ (Mitte)	$\varrho = 0{,}8$	$\varrho = 0{,}9$
zu	5,12	1,50	0,56,

während die Formeln (31) und (32) der Näherungslösung mit den dem Plattenparameter $\nu = 502$ zugehörigen Werten $n = 15$ und $C = -41{,}4$ die Einsenkungen

$$\frac{w(\varrho)}{h} = 5{,}22 \qquad 1{,}42 \qquad 0{,}52$$

liefern mit einer Abweichung von rd. 2% in der größten Durchbiegung. Ersichtlich wird durch den einfachen Ansatz (32) mit $n = 15$ die Meridianform der durchgebogenen Platte auch in der Nähe der Einspannstelle ($\varrho = 0{,}9$, $0{,}8$) recht gut angenähert. Die Biegungsmomente am Rande und in der Mitte der Platte ergeben sich nach der genauen Rechnung mit

$$G_1{}^1 = \frac{E h^3}{24\sqrt{3}\,(1-\mu^2)}\,\frac{h^2}{a^2}\,610 \quad (580),$$

$$G_1{}^0 = -\frac{E h^3}{24\sqrt{3}\,(1-\mu^2)}\,\frac{h^2}{a^2}\,44{,}6 \quad (51{,}7).$$

Die in Klammern gesetzten Zahlen gelten bei Benutzung der in (3) abgeleiteten Näherungsformeln mit $n = 15$, $C = -41{,}4$.

Für die Membrankräfte findet man

$$T_1{}^1 = \frac{E h}{24}\cdot\frac{h^2}{a^2}\cdot 400{,}8 \quad (389)$$

$$T_1{}^0 = \frac{E h}{24}\cdot\frac{h^2}{a^2}\cdot 580{,}3 \quad (593{,}3).$$

Hieraus rechnet sich die größte Materialbeanspruchung σ_{max} am Plattenrande zu

$$s_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2 = 110{,}6 \quad (105{,}5).$$

Die Näherungsrechnung ergibt also eine um 4,6% niedrigere Größtspannung der Platte als die strenge Rechnung.

III. Die kreisförmige Membran und die Kreisringmembran.

Wenn die Kreisplatte so dünn ist, daß ihre Biegungssteifigkeit als verschwindend angesehen werden kann, dann liegt der Fall einer kreisförmigen Membrane vor, deren Spannungen und Formänderungen bei Vorhandensein einer gleichmäßig verteilten Belastung von H. Hencky[13]) durch Reihenentwicklungen dargestellt worden ist; die kreisringförmige Membran wurde in gleicher Weise von E. Schwerin[14]) erledigt. Auch hier lassen sich mit Hilfe des Näherungsverfahrens von Galerkin sehr einfache Formeln angeben, die als praktisch vollkommen ausreichender Ersatz für die vorerwähnten umständlichen Reihenentwicklungen gelten können. Mit $N = 0$, $\Theta = 1$ liefern (14) und (16) die Gleichgewichtsgleichungen für eine Ringmembrane in der Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dr}(r\,T_1) - T_2 = 0, \\ &r\,T_1 \sin\varphi = \frac{p}{2}(r^2 - r_i^2) + \frac{P}{2\pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(A)}$$

wo r_i den Innenhalbmesser der durch gleichmäßig verteilten Druck p belasteten ringförmigen Membrane angibt und angenommen ist, daß auf die innere starre Kreisscheibe (Bild 6) eine Einzelkraft P wirke.

[13]) H. Hencky, Z. f. Math. u. Phys. Bd. 63 (1915), S. 311.
[14]) E. Schwerin, Z. f. techn. Phys. Bd. 10 (1929), S. 651.

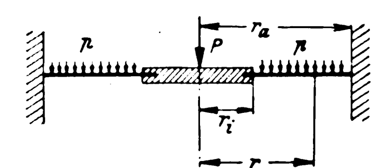


Bild 6. Ringförmige, innen und außen eingespannte Membran.

Mit Einführung der dimensionslosen Membrankonstanten

$$\beta = \frac{p\,r_a}{E\,h} \quad \ldots \ldots \ldots \text{(58)}$$

setzen wir (ähnlich wie in den Gl. (19a) und (19b)) für die Membranspannkräfte

$$T_1 = \frac{E h}{2}\sqrt[3]{\beta^2}\cdot\frac{\Psi}{\varrho} \quad \ldots \ldots \text{(59)}$$

$$T_2 = \frac{E h}{2}\sqrt[3]{\beta^2}\,\frac{d\Psi}{d\varrho} \quad \ldots \ldots \text{(60)}$$

womit die erste der Gleichgewichtsgleichungen (A) befriedigt ist. An Stelle von $\sin\varphi = u$ (Gl. 5) führen wir eine Funktion $\Phi(\varrho)$ ein gemäß

$$\Phi(\varrho) = \frac{u}{\sqrt[3]{\beta}} \quad \ldots \ldots \text{(61)}$$

Mit diesen Festsetzungen geht die Beziehung (20) über in

$$L(\Psi) + \frac{\Phi^2}{\varrho} = 0 \quad \ldots \ldots \text{(62)}$$

und die zweite der obigen Gleichgewichtsgleichungen in

$$\Psi\,\Phi = \varrho^2 - \varrho_i^2(1 + c_0), \quad \ldots \ldots \text{(63)}$$

worin

$$c_0 = -\frac{P}{p\,r_i^2\,\pi} \quad \ldots \ldots \text{(64)}$$

gesetzt worden ist.

1. Die Kreisringmembran mit freiem Innenrande und gleichförmiger Oberflächenbelastung p.

Wegen $P = 0$ wird $c_0 = 0$, somit vereinfachen sich die beiden Grundgleichungen (62) und (63) in

$$L(\Psi) + \frac{\Phi^2}{\varrho} = 0 \quad \ldots \ldots \text{(65)}$$

$$\Psi\,\Phi = \varrho^2 - \varrho_i^2. \quad \ldots \ldots \text{(66)}$$

Da die Membran am Außenrande ($\varrho = 1$) eingespannt ist, muß dort $\frac{d\Psi}{d\varrho} - \mu\,\frac{\Psi}{\varrho}$ verschwinden, hingegen muß am freien Innenrande ($\varrho = \varrho_i$) die radiale Spannkraft T_1 gleich Null, d. h. $\Psi_{\varrho=\varrho_i} = 0$ sein.

Diesen beiden Randbedingungen genügt der einfache Näherungsansatz

$$\Psi(\varrho) = C\,\frac{(\varrho^2 - \varrho_i^2)(1 - \gamma\varrho^2)}{\varrho} \quad \ldots \ldots \text{(67)}$$

mit

$$\gamma = \frac{(1-\mu) + (1+\mu)\,\varrho_i^2}{(3-\mu) - (1-\mu)\,\varrho_i^2} \quad \ldots \ldots \text{(68)}$$

Den Beiwert C berechnen wir nach dem Galerkinschen Verfahren; aus (66) folgt bei Beachtung von (67)

$$\Phi = \frac{\varrho}{C(1 - \gamma\varrho^2)}. \quad \ldots \ldots \text{(69)}$$

Geht man mit den Ansätzen (67) und (69) in die Grundgleichung (65), die wir kurz $E(\varrho) = 0$ schreiben, so wird

$$E(\varrho) = -8\gamma C\varrho + \frac{\varrho}{C^2(1-\gamma\varrho^2)^2}$$

und es liefert die Bedingung

$$\int_{\varrho=\varrho_i}^{1} E(\varrho)\,\frac{(\varrho^2-\varrho_i^2)(1-\gamma\varrho^2)}{\varrho}\,\varrho\,d\varrho = 0$$

folgende Bestimmungsgleichung für C

$$C^3 J_1 + J_2 = 0, \quad \ldots \ldots \text{(70)}$$

worin

$$J_1 = 2\gamma\left[\left(\frac{2\gamma}{3} - 1\right) + (2-\gamma)\,\varrho_i^2 - \varrho_i^4 + \frac{\gamma\varrho_i^6}{3}\right],$$

$$J_2 = -\frac{1}{2\gamma^2}\left[\gamma(1-\varrho_i^2) + (1-\gamma\varrho_i^2)\ln\frac{1-\gamma}{1-\gamma\varrho_i^2}\right].$$

Aus

$$u = -\frac{dw}{dr} = \sqrt[3]{\beta}\cdot\Phi = \sqrt[3]{\beta}\,\frac{\varrho}{C(1-\gamma\varrho^2)}$$

folgt mit der Randbedingung $w = 0$ für $\varrho = 1$ als Gleichung der Meridianlinie $w(\varrho)$ der elastischen Fläche

$$w(\varrho) = \frac{r_a \sqrt[3]{\beta}}{2\gamma C} \ln \frac{1-\gamma\varrho^2}{1-\gamma}, \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

woraus sich für die Durchbiegung w_i des Innenrandes ($\varrho = \varrho_i$)

$$w_i = \frac{r_a \sqrt[3]{\beta}}{2\gamma C} \ln \frac{1-\gamma\varrho_i^2}{1-\gamma} = r_a \sqrt[3]{\beta}\ \omega_i$$

ergibt, wenn zur Abkürzung

$$\omega_i = \frac{1}{2\gamma C} \ln \frac{1-\gamma\varrho_i^2}{1-\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

gesetzt wird.

Die Membranspannkräfte T_1 und T_2 berechnen sich mit dem Ansatze (67) aus den Gleichungen (59) und (60) zu

$$T_1 = \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\beta^2}\, C \frac{(\varrho^2-\varrho_i^2)(1-\gamma\varrho^2)}{\varrho^2},$$

$$T_2 = \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\beta^2}\, \frac{C}{\varrho^2} [\varrho_i^2 + \varrho^2(1+\gamma\varrho_i^2) - 3\gamma\varrho^4]$$

und es gilt hiernach für den Außenrand ($\varrho = 1$)

$$\left.\begin{aligned} T_{1,a} &= \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\beta^2}\, C (1-\varrho_i^2)(1-\gamma) = E h \sqrt[3]{\beta^2}\, t_{1,a}, \\ T_{2,a} &= \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\beta^2}\, C [\varrho_i^2(1+\gamma) + 1 - 3\gamma] = E h \sqrt[3]{\beta^2}\, t_{2,a} \end{aligned}\right\} (73)$$

und für den Innenrand ($\varrho = \varrho_i$)

$$\left.\begin{aligned} T_{1,i} &= 0, \\ T_{2,i} &= E h \sqrt[3]{\beta^2}\, C (1-\gamma\varrho_i^2) = E h \sqrt[3]{\beta^2}\, t_{2,i} \end{aligned}\right\}. \quad (74)$$

worin die Zahlenwerte t aus

$$t_{1,a} = \frac{C}{2}(1-\varrho_i^2)(1-\gamma), \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

$$t_{2,a} = \frac{C}{2}[\varrho_i^2(1+\gamma) + 1 - 3\gamma] \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

$$t_{2,i} = C(1-\gamma\varrho_i^2) \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

zu berechnen sind.

Nach den vorstehenden einfachen Formeln wurden mit einer Poissonschen Zahl $\mu = 0{,}3$ die Spannkräfte und Formänderungen der Kreisringmembrane für die Lochverhältniszahlen $\varrho_i = \frac{r_i}{r_a} = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}5,\ 0{,}9$ bestimmt und in Zahlentafel 2 zusammengestellt.

Die zum Vergleich herangezogenen und in Zahlentafel 2 eingetragenen genauen Zahlenwerte wurden im Falle $\varrho_i = 0$ der Arbeit von H. Hencky, in den übrigen Fällen ($\varrho_i \neq 0$) jener von E. Schwerin entnommen. Für die Membrane ohne Innenbohrung folgt mit $\varrho_i = 0$:

$$T_1 = \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\beta^2}\, C (1-\gamma\varrho^2), \quad T_2 = \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\beta^2}\, C (1-3\gamma\varrho^2),$$

somit ist

$$t_{1,a} = \frac{C}{2}(1-\gamma), \quad t_{2a} = \frac{C}{2}(1-3\gamma), \quad t_{1,i} = t_{2,i} = \frac{C}{2}.$$

Da für die kreisringförmige Membrane mit unendlich kleiner Innenöffnung ($\varrho_i \to 0$)

$$t_{2,i} = C$$

wird, so ist die Randspannung an der sehr kleinen Innenbohrung doppelt so groß als jene in der Mitte der vollen Membran, ein Ergebnis, das bereits aus der strengen Lösung von E. Schwerin bekannt ist.

Der Vergleich der nach der einfachen Näherungsrechnung gewonnenen Ergebnisse mit der bekannten genauen Lösung zeigt, daß der Ansatz (71) die Formänderung der Kreis- und Kreisringmembrane sehr gut wiedergibt und daß die Abweichungen in den Spannungen erst im Falle $\varrho_i = 0{,}9$, d. h. beim Übergange zum schmalen Kreisring, beträchtlich werden; immer aber liegen die Abweichungen bei der für die Membranbemessung maßgebenden tangentialen Innenrandspannung auf der sicheren Seite.

2. Die am Innenrand belastete, innen und außen eingespannte Kreisringmembran ohne Oberflächenbelastung.

In diesem Falle lassen sich — wie E. Schwerin gezeigt hat — die beiden Grundgleichungen (62) und (63) in eine besonders einfache Form bringen und in geschlossener Form integrieren. Auch hier führt das Galerkinsche Verfahren zu sehr bequem auswertbaren vorzüglichen Näherungsgleichungen.

Mit Einführung der dimensionslosen Membrankonstanten

$$\vartheta = \frac{P}{\pi r_a E h} \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

setzen wir

$$T_1 = \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\vartheta^2}\, \frac{\Psi}{\varrho}, \quad T_2 = \frac{E h}{2} \sqrt[3]{\vartheta^2}\, \frac{d\Psi}{d\varrho}, \quad \ldots \quad (79)$$

womit die erste der Gleichgewichtsgleichungen (A) befriedigt ist. Ferner führen wir anstatt $\sin\varphi = u$ eine Funktion $\Phi(\varrho)$ ein gemäß

$$\Phi(\varrho) = \frac{u}{\sqrt[3]{\vartheta}}, \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

womit sich, da zufolge (A): $r T_1 \sin\varphi = \frac{P}{2\pi}$, die beiden Grundgleichungen

$$L(\Psi) + \frac{\Phi^2}{\varrho} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

$$\Psi\Phi = 1 \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

ergeben.

Zahlentafel 2. $\frac{p\, r_a}{E h} = \beta;\quad w_i = r_a \sqrt[3]{\beta}\, \omega_i;\quad T_{1,a} = E h \sqrt[3]{\beta^2}\, t_{1,a};\quad T_{2,a} = E h \sqrt[3]{\beta^2}\, t_{2,a};\quad T_{2,i} = E h \sqrt[3]{\beta^2}\, t_{2,i}.\ \mu = 0{,}3.$

$\varrho_i = \frac{r_i}{r_a}$		0		0,1		0,5		0,9	
C	(Gl. 70)	0,89143		0,88854		0,86313		1,43268	
ω_i	Gl. (72)	0,649	— 2%	0,6481	— 0,73%	0,5905	— 0,81%	0,2673	— 0,96%
	genau	0,662		0,6528		0,5953		0,2699	
$t_{1,a}$	Gl. (75)	0,330	+ 0,6%	0,32338	— 1,3	0,19228	— 1,5	0,02425	— 3,8
	genau	0,328		0,32758		0,19529		0,02520	
$t_{2,a}$	Gl. (76)	0,099	— 1,8%	0,0970	— 0,6	0,0577	— 3,6	0,00727	— 3,8
	genau	0,1008		0,0976		0,05985		0,00756	
$t_{2,i}$	Gl. (77)	0,44572	+ 3,4%	0,88619	+ 3,4%	0,77554	+ 5,7%	0,47895	+ 11%
	genau	0,4309		0,85738*)		0,73390		0,43152	
γ	(Gl. 68)	0,2593		0,2648		0,4059		0,8218	

*) Die Zahlenangabe $\overline{\omega}_i = 2{,}272$ in der Arbeit Schwerins (S. 655) muß richtig lauten 2,722.

Aus der strengen Lösung dieser nicht linearen Differentialgleichungen ist bekannt, daß die Ringdehnungen ε_2, die an den beiden Rändern zufolge der Einspannung verschwinden müssen, sehr klein ausfallen gegenüber den Radialdehnungen ε_1.

Für die Zwecke einer einfachen Näherungsrechnung wollen wir daher ε_2 überhaupt vernachlässigen, setzen demnach

$$\frac{d\Psi}{d\varrho} - \mu \frac{\Psi}{\varrho} = 0$$

und machen für die Funktion Ψ den diese Gleichung erfüllenden Ansatz

$$\Psi = C\,\varrho^{\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

Nach der zweiten Grundgleichung (82) ist dann

$$\Phi = \frac{1}{C}\,\varrho^{-\mu}$$

und es liefert die Eintragung beider Ansätze in die erste Grundgleichung (81)

$$E(\varrho) = C(\mu^2 - 1)\,\varrho^{\mu-2} + \frac{1}{C^2}\,\varrho^{-(2\mu+1)}.$$

Der Beiwert C bestimmt sich aus der Galerkinschen Bedingung

$$\int\limits_{\varrho_i}^{\varrho} E(\varrho)\,\varrho^{\mu}\cdot\varrho\,d\varrho = 0$$

zu

$$C^3 = \frac{2\mu}{(1-\mu^2)(1-\mu)}\,\frac{1-\varrho_i^{1-\mu}}{1-\varrho_i^{2\mu}}. \quad \ldots \quad (84)$$

Aus

$$\sin\varphi = u = -\frac{dw}{dr} = \sqrt[3]{\vartheta}\cdot\Phi = \sqrt[3]{\vartheta}\cdot\frac{1}{C}\,\varrho^{-\mu}$$

folgt

$$\frac{dw}{d\varrho} = -\frac{r_a\sqrt[3]{\vartheta}}{C(1-\mu)}\,\varrho^{-\mu}$$

und nach Integration mit Erfüllung der Randbedingung $w = 0$ für $\varrho = 1$

$$w(\varrho) = \frac{r_a\sqrt[3]{\vartheta}}{C(1-\mu)}\,(1-\varrho^{1-\mu}).$$

Hiermit ist die Meridianlinie der elastischen Fläche festgelegt und es ergibt sich die Durchbiegung w_i am Innenrand zu

$$w_i = \frac{r_a\sqrt[3]{\vartheta}}{C(1-\mu)}\,(1-\varrho_i^{1-\mu}) = r_a\sqrt[3]{\vartheta}\,\omega_i \quad \ldots \quad (85)$$

wenn zur Abkürzung

$$\omega_i = \frac{1}{C(1-\mu)}\,(1-\varrho_i^{1-\mu}) \quad \ldots \ldots \quad (86)$$

gesetzt wird.

Die Spannkraft T_1 — die wegen $\frac{\Psi}{\varrho} = \frac{1}{\mu}\frac{d\Psi}{d\varrho}$ gleich $\frac{1}{\mu}T_2$ ist, so daß $T_1 > T_2$ — berechnet sich zu

$$T_1 = \frac{Eh}{2}\sqrt[3]{\vartheta^2}\,C\,\varrho^{\mu-1}$$

und es gilt hiernach für den Außenrand

$$T_{1,a} = Eh\sqrt[3]{\vartheta^2}\,t_{1,a},$$

für den Innenrand

$$T_{1,i} = Eh\sqrt[3]{\vartheta^2}\,t_{1,i}$$

mit

$$t_{1,a} = \frac{C}{2}, \qquad t_{1,i} = \frac{C}{2}\,\varrho_i^{\mu-1} \quad \ldots \quad (87\,\text{a, b})$$

Zahlentafel 3 enthält die mit $\mu = 0{,}3$ aus vorstehenden Formeln gerechneten Spannkräfte und Durchbiegungen für $\varrho_i = 0{,}1$ bis $0{,}9$ und den Vergleich mit den aus der strengen Lösung von E. Schwerin erhaltenen Werten.

Die strenge Lösung von E. Schwerin führt zwar auf geschlossene Ausdrücke für die Formänderung und Spannungen, erfordert aber die Auflösung zweier komplizierter transzendenten Gleichungen für zwei in die Lösung eingehende Hilfsfunktionen.

Durch die vorstehende einfache Näherungsrechnung wird diese umständliche Rechnung ganz vermieden, ihre zahlenmäßigen Ergebnisse stehen in sehr guter Übereinstimmung mit den aus der strengen Lösung berechneten Werten. Da die Kreis- und Kreisringmembrane sehr häufig für Regelorgane und für Druckmeßinstrumente[15]) Verwendung finden, so werden dem Konstrukteur die entwickelten einfachen Bemessungsformeln nicht unerwünscht sein.

Für die sorgfältige Durchführung sämtlicher numerischen Rechnungen, die besonders im Abschnitte (4) beträchtlichen Umfang annahmen, danke ich meinem Mitarbeiter Herrn H. Egger bestens.

[15]) In der Theorie der Druckmeßdosen fanden die Ergebnisse meiner in Fußnote 6 angeführten Arbeit ihre Anwendung durch A. Möller, Forschung Bd. 10 (1939), S. 80.

Zahlentafel 3. $\frac{P}{\pi r_a E h} = \vartheta;\quad w_i = r_a\sqrt[3]{\vartheta}\,\omega_i;\quad T_{1,a} = Eh\sqrt[3]{\vartheta^2}\,t_{1,a};\quad T_{1,i} = Eh\sqrt[3]{\vartheta^2}\,t_{1,i};\quad \mu = 0{,}3.$

$\varrho_i = \frac{r_i}{r_a}$		0.1		0.3		0,5		0,7		0,9	
C	(Gl. 84)	1,0023		1,0141		1,0210		1,0261		1,0301	
ω_i	Gl. (86)	1,14092	− 0,2%	0,80228	0%	0,53790	− 0,4%	0,3076	− 0,3%	0,0986	+ 0,2%
	genau	1,143		0,802		0,540		0,3095		0,0984	
$t_{1,a}$	Gl. (87a)	0,50115	− 1,2%	0,5070	− 0,7%	0,5105	+ 0,04%	0,5130	− 0,08%	0,5151	0%
	genau	0,5071		0,5103		0,5103		0,5134		0,5150	
$t_{1,i}$	Gl. (87b)	2,5117	+ 2,5%	1,1777	+ 1,3%	0,8293	0,16%	0,6585	+ 0,03%	0,5545	0%
	genau	2,451		1,162		0,828		0,6583		0,5544	

Die Ausrollstrecke eines Flugzeuges mit und ohne Bremsen bei Gegenwind*).

Von H. Winter und W. Meyer.

Bericht des Institutes für Flugzeugbau der Technischen Hochschule Braunschweig.

Gliederung.

1. Einleitung.

Den Anflug- und den Landevorgang eines Flugzeuges behandeln in der deutschen Fachliteratur die grundlegenden Arbeiten von Blenk [1][1]) und von Mathias [2, 3], wie im Schluß dieses Berichtes zu ersehen ist. In der neuesten Untersuchung [3] geht Mathias ausführlich auf den Auslauf bei Windstille ein und auf die damit zusammenhängenden Fragen der Bremsbeanspruchung und der Überschlagsmöglichkeit beim Landen.

Als eine Abrundung der obigen Arbeiten dürfte es sich aus verschiedenen Gründen rechtfertigen, eine zusammenfassende Darstellung über die Ausrollstrecke zu geben, bei der alsdann in der allgemeinsten Form der Windeinfluß mit berücksichtigt wird. Einmal ist es zu wenig bekannt, daß es unter bestimmten, vereinfachten Voraussetzungen möglich ist, einen geschlossenen Ausdruck für die Ausrollstrecke bei Gegenwind zu finden. Zum anderen muß der Entwurfsingenieur die Möglichkeit der schnellen Abschätzung der voraussichtlichen Anlauf- oder Auslaufstrecke haben, da man zur Steigerung der Flugzeuggeschwindigkeit heute immer mehr größere Flächenbelastungen in Kauf nimmt, und damit auch zwangsläufig größere Anlauf- und Auslaufstrecken erhält. Im allgemeinen ist nun die Anlaufstrecke immer kleiner als die Auslaufstrecke, so daß die letztere die erforderliche Flugplatzgröße bestimmt. Durch Starthilfen läßt sich auch neuerdings der Anlauf wirksam verkürzen, daher muß man nun besonders bei höheren Flächenbelastungen dem Auslauf Beachtung schenken. Da ferner bei Flugmessungen selten völlige Windstille anzutreffen ist, ist eine schnelle Umrechnung der Landestrecke bei einem bestimmten Gegenwind auf die Verhältnisse bei Windstille wünschenswert. Für andere Sonderzwecke gewinnt auch die Landestrecke auf einem im Sinne der Landerichtung bewegten Fahrzeug Bedeutung, was praktisch einer Landung mit Gegenwind gleichkommt. Aus Gründen der Klarheit schien es zweckmäßig, die vollständige Ableitung der Ergebnisse zu bringen.

2. Bezeichnungen.

G	(kg)	= Fluggewicht,
A	(kg)	= Auftrieb,
W	(kg)	= Luftwiderstand,
P_R	(kg)	= ruhende Last auf dem Hauptfahrwerk,
P_{SP}	(kg)	= ruhende Last auf dem Sporn,
T_B	(kg)	= Bremskraft am Radumfang,
F	(m²)	= Flügelfläche,
g	(m/s²)	= Erdbeschleunigung,
ϱ	$\left(\frac{kg\,s^2}{m^4}\right)$	= Luftdichte,
t^*	(s)	= Zeit,
μ_r		= Rollreibungsbeiwert am Hauptfahrwerk,
μ_{sp}		= Reibungsbeiwert am Sporn,
μ_b		= Bremsreibungsbeiwert am Radumfang,
μ_R		= Gesamtreibungsbeiwert am Hauptfahrwerk aus Roll- und Bremsreibung,
μ		= Gesamtreibungsbeiwert am Hauptfahrwerk und Sporn,
c_{wr}		= Widerstandsbeiwert des Flugzeuges beim Rollen,
c_{ar}		= Auftriebsbeiwert des Flugzeuges beim Rollen,
c_{aL}		= Auftriebsbeiwert des Flugzeuges beim Landen,
v	(m/s)	= Relativgeschwindigkeit zwischen Flugzeug und Luft,
v_L	(m/s)	= Relativgeschwindigkeit zwischen Flugzeug und Luft beim Landen,
v^*	(m/s)	= Relativgeschwindigkeit zwischen Flugzeug und Boden,
v_L^*	(m/s)	= Relativgeschwindigkeit zwischen Flugzeug und Boden beim Landen,
w	(m/s)	= Windgeschwindigkeit,
s^*	(m)	= Ausrollstrecke mit Windeinfluß,
s	(m)	= Ausrollandestrecke ohne Windeinfluß.

*) P 31 91.
[1]) Die eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttum in Abschnitt 7.

3. Voraussetzungen, Aufstellung und Lösung der Gleichungen.

Die Bremsung eines Flugzeuges beim Ausrollen erfolgt einmal durch aerodynamische Kräfte, den Luftwiderstand, und zum anderen durch reine Bodenkräfte, die Reibungskräfte der rollenden bzw. gleitenden Reibung am Hauptfahrwerk, am Sporn und durch die zusätzlichen gesteuerten Bremskräfte am Hauptfahrwerk. Der Schraubenschub im Leerlauf spielt während des Rollens nur eine untergeordnete Rolle und wird daher vernachlässigt.

Damit folgt die Grundgleichung aus dem Gleichgewicht der Horizontalkräfte, s. Bild 1.

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{d v^*}{d t^*} + W + \mu_r \cdot P_R + T_B + \mu_{sp} \cdot P_{sp} = 0 \quad . (1)$$

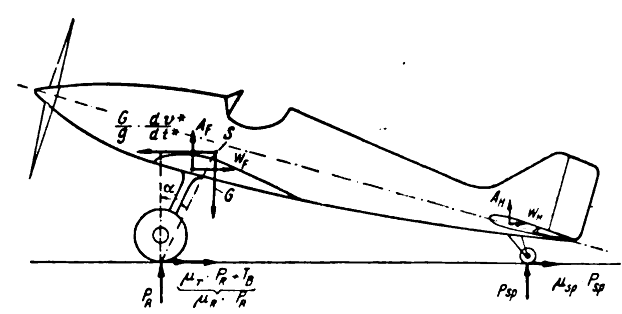


Bild 1. Luftkräfte und Bodenkräfte am Flugzeug bei der gebremsten Landung.

Setzen wir nun in Übereinstimmung mit den Überlegungen von Mathias die gesteuerte Bremsreibungskraft T_B

$$T_B = \mu_b \cdot P_R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

und ferner

$$\mu_R = \mu_r + \mu_b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

so geht mit Benutzung der Gleichungen (2) und (3) die Gleichung (1) über in:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{d v^*}{d t^*} + W + \mu_R \cdot P_R + \mu_{sp} \cdot P_{sp} = 0 \quad \ldots (1b)$$

Mit der Gleichgewichtsbedingung für die vertikalen Kräfte

$$G - A_F - A_H - P_R - P_{sp} = 0 \quad \ldots \ldots (4)$$

wird aus der Bewegungsgleichung (1b):

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{d v^*}{d t^*} + W + \mu_R (G - A_F - A_H) - (\mu_R - \mu_{sp}) \cdot P_{sp} = 0 \quad \ldots (1c)$$

Denkt man sich das Glied $(\mu_R - \mu_{sp}) \cdot P_{sp}$ zum Reibungsanteil des Hauptfahrwerkes $\mu_R \cdot P_R$ hinzugeschlagen und vernachlässigt den Auftriebsanteil A_H des Höhenleitwerkes, so wird schließlich, wenn an Stelle von μ_R kurz μ und an Stelle A_F: A geschrieben wird, die vereinfachte Bewegungsgleichung:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{d v^*}{d t^*} + W + \mu (G - A) = 0 \quad \ldots . (1d)$$

Die Gleichung (1d) gilt sowohl für die ungebremste als auch für die gebremste Landung. Bei der ungebremsten Landung ist in Gleichung (3) $\mu_b = 0$. Will man den Reibungsanteil $\mu_{sp} \cdot P_{sp}$ des Spornes nicht vernachlässigen, so läßt sich dies durch eine Erhöhung des μ-Wertes in Gleichung (1d) berücksichtigen.

Bei der gebremsten Landung kann die Größe von μ_b über den ganzen Ausrollweg vermöge des Kraftverlaufes in der Bremsbetätigung durch den Führer gesteuert werden. Beim kürzesten Auslauf muß μ_b offenbar ständig auf den größtmöglichsten Wert gehalten werden, bei dem unter Berücksichtigung von μ_r gerade noch ein Überschlag vermieden wird. Näherungsweise ist dieser Zustand beiläufig dadurch gekennzeichnet, daß der Sporndruck verschwindet, also $P_{sp} = 0$ wird. Bei der gebremsten Landung ist somit die Vernachlässigung des Sporndruckes gerechtfertigt, und der μ-Wert von Gleichung (1d) ist unter diesen Annahmen ausschließlich von den Reibungsverhältnissen am Hauptfahrwerk abhängig.

Aus Gleichung (1d) folgt:

$$\frac{d v^*}{d t^*} = v^* \cdot \frac{d v^*}{d s^*} = [-W - \mu (G - A)] \frac{g}{G} \quad \ldots (5)$$

Werden A, W und G durch die entsprechenden Ausdrücke

$$A = c_{ar} \cdot (v^* + w)^2 \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot F; \quad W = c_{wr} \cdot (v^* + w)^2 \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot F;$$

$$G = c_{aL} \cdot v_L^2 \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot F$$

mit den dimensionslosen Größen ersetzt, so folgt

$$\frac{d s^*}{d v^*} = \frac{v^*}{g} \left[\frac{c_{aL} \cdot v_L^2}{- c_{wr} (v^* + w)^2 - \mu \cdot c_{aL} \cdot v_L^2 + \mu \cdot c_{ar} (v^* + w)^2} \right]$$

Für die Ausrollstrecke mit Windeinfluß ergibt sich:

$$s^* = \frac{c_{aL} \cdot v_L^2}{g} \int\limits_{v^*_L = v_L - w}^{0} \frac{v^*}{(v^* + w)^2 \cdot (\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}) - \mu \cdot c_{aL} \cdot v_L^2} \cdot d v^* \quad \ldots (6)$$

Die Relativgeschwindigkeit v^* zwischen Flugzeug und Boden wird im allgemeinen nicht gemessen, sondern die Fluggeschwindigkeit v am Fahrtmesser abgelesen und die Windgeschwindigkeit w durch Schalenkreuzanemometer am Boden bestimmt.

Die Beziehungen zwischen v^*, v und w lauten:

$$v^* = v - w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7a)$$

$$d v^* = d v \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7b)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (7) ergibt sich aus Gleichung (6):

$$s^* = \frac{c_{aL} \cdot v_L^2}{g} \int\limits_{v_L}^{w} \frac{v - w}{v^2 (\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}) - \mu \cdot c_{aL} \cdot v_L^2} \cdot d v$$

Wird noch $\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}$ vor das Integral genommen, so folgt

$$s^* = \frac{1}{g} \frac{c_{aL} \cdot v_L^2}{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}} \int\limits_{v_L}^{w} \frac{v - w}{v^2 - \frac{\mu \cdot c_{aL} \cdot v_L^2}{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}} \cdot d v \quad (8)$$

Nach Lösung des Integrals folgt daraus:

$$s^* = \frac{1}{g} \cdot \frac{c_{aL} \cdot v_L^2}{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\mu \cdot c_{aL} - \frac{w^2}{v_L^2} \cdot (\mu \cdot c_{ar} - c_{wr})}{\mu \cdot c_{aL} - (\mu \cdot c_{ar} - c_{wr})} + \frac{w}{v_L} \sqrt{\frac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}}} \left(\mathfrak{Artg} \cdot \frac{w}{v_L} \sqrt{\frac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}}} - \mathfrak{Artg} \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}}} \right) \right] \quad \ldots (9)$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks wird

$$\frac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}} = C \quad \ldots \ldots (9a)$$

gesetzt, so daß die endgültige Gleichung lautet:

$$\mu \cdot s^* = \frac{1}{g} \cdot v_L^2 \cdot \frac{1}{C} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 - \frac{w^2}{v_L^2} \cdot C}{1 - C} + \frac{w}{v_L} \sqrt{C} \left(\mathfrak{Artg} \frac{w}{v_L} \cdot \sqrt{C} - \mathfrak{Artg} \cdot \sqrt{C} \right) \right] \quad \ldots (10)$$

In dieser Lösung sind im Ausdruck C der Reibungswert μ, der jeweils von der Bodenbeschaffenheit und der Bremsung abhängt, und die rein konstruktiven Größen eines bestimmten Flugzeugmusters c_{ar}, c_{wr} und c_{aL} enthalten. Außerdem gehen in die Formel die Windgeschwindigkeit und die Landegeschwindigkeit, letztere quadratisch, ein.

4. Auswertung der Lösungen und Darstellung der Ergebnisse.

Auf Grund von Abschätzungen wurde eine Begrenzung und Unterteilung des praktisch vorkommenden Anwendungsbereiches durchgeführt. Für die Windgeschwindigkeit w wurden folgende Werte gewählt:

$w = 0$, 1, 3, 5, 10, 15 (m/s), für die Landegeschwindigkeit Werte zwischen $v_L = 0$ bis 70 (m/s).

Zur Abschätzung der C-Werte soll zunächst eine Betrachtung der auftretenden Reibungsbeiwerte erfolgen. Erfahrungswerte aus Versuchen wurden an mehreren Stellen gesammelt, so daß über ihre Größenwerte eine gewisse Klarheit besteht. Die Reibungsbeiwerte sind sehr stark abhängig von der Bodenbeschaffenheit. Mit wachsender Rollgeschwindigkeit nehmen sie sehr schwach geradlinig zu, so daß es gerechtfertigt ist, hier mit einem Mittelwert zu rechnen. Die Reifenform ist auf den Reibungswert von untergeordnetem Einfluß, wohl spielt bei weicherem Boden, wie leicht verständlich, der Reifendruck eine gewisse Rolle. Im allgemeinen wird es daher ausreichen, die Reibungsbeiwerte μ als nur von der Bodenart abhängig anzusehen. Versuchswerte von μ für reine Rollreibung und für Gleitreibung sind in Zahlentafel 1 wiedergegeben.

Zahlentafel 1.

Bodenart	Reibungswerte μ	
	Rollreibung	Gleitreibung (Blockierte Räder)
Beton (Asphalt)	0,01	**0,5 bis 1,35**
Fester Rasen	0,015 bis 0,02	**0,5 bis 0,85**
Weicher Rasen	0,03 bis 0,06	**0,5 bis 1,2**

Die hohen Gleitreibungswerte können bei der gewöhnlichen Fahrwerksanordnung mit Heckrad nicht voll ausgenutzt werden, da die Überschlaggefahr hier eine Grenze setzt. Ein Überschlag setzt dann ein, wenn die Resultierende R aus Radauflagerkraft P_R und Bremskraft μP_R über den Gesamtschwerpunkt des Flugzeuges hinaus nach hinten wandert (vorausgesetzt, daß der Sporn entlastet, also $P_R = G$ ist).

Der Grenzwert labilen Gleichgewichts tritt ein, wenn $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ wird. Dabei ist α in Dreipunktlage des Flugzeuges der Winkel zwischen Lot und Verbindungslinie vom Schwerpunkt zum Radauflagepunkt, Bild 1. Bei dieser vereinfachten Betrachtungsweise ist zu beachten, daß die Luftkräfte nicht berücksichtigt sind. Da aber erfahrungsgemäß ein Überschlag erst im letzten Ausrollstadium eintritt, ist die obige Vereinfachung für eine Abschätzung der oberen μ-Werte zu rechtfertigen. Nach den Bauvorschriften für Flugzeuge ist in Horizontallage des Flugzeuges der Winkel zwischen Lot im Radauflagepunkt und der Verbindungslinie Schwerpunkt—Radauflagepunkt bei bremsbaren Rädern mit mindestens 12° vorzusehen. Bei Dreipunktlage kommt noch der Anstellwinkel am Boden hinzu, der meistens zwischen 10 ÷ 18° liegt. Damit ergibt sich α zu 22 ÷ 30°. Bei mehreren Baumustern ist der Winkel α direkt bestimmt worden. Auch hierbei lagen die Winkel im Bereich $\alpha = 22 \div 30°$. Die entsprechenden μ-Werte betragen 0,40 ÷ 0,58, dies sind also die höchstzulässigen Werte, bei denen an Heckradflugzeugen Überschlag noch vermieden wird. Für einige Typen der Junkers Flugzeugwerke, von denen die Unterlagen zur Verfügung gestellt wurden, und für die Eigenkonstruktion sind die C-Werte errechnet worden unter Zugrundelegung obiger Wertbegrenzungen, s. Zahlentafel 2.

Zahlentafel 2. C-Werte einiger Flugzeugmuster.

Flugzeugmuster	G/F kg/m²	$c_{a\,max}$	c_{ar}	c_{wr}	C-Werte ohne Bremsg. Beton	ohne Bremsg. Rasen	mit Bremsg. Rasen
Ju 52	95	2,3	2,0	0,20	— 7,8	—0,6	0,65 bis 0,73
Ju 87	140	2,0	1,75	0,17	— 7,6	—0,5	0,66 bis 0,73
Ju 88	180 bis 200	2,3	1,95	0,236	— 9,4	—0,9	0,59 bis 0,68
Ju 90	160 bis 180	2,1	1,9	0,19	—10,3	—1,0	0,68 bis 0,75
LF 1	42	2,16*	1,8	0,210	—	+0,46	0,59 bis 0,67

*) $\beta_L = 0°$

Diese Zusammenstellung zeigt, daß die C-Werte für ungebremste Landung bei Flugzeugen (von der LF 1 abgesehen) im negativen Bereich liegen, bei gebremster Landung im positiven. In der Regel interessiert aber die gebremste Landung. Es wurde daher im Rahmen dieser Arbeit von der Auswertung negativer C-Werte abgesehen und der Bereich mit $C = 0{,}0$ bis $0{,}8$ begrenzt.

Für $C = 0$ wird $\mu \cdot c_{ar} - c_{wr} = 0$ bzw. $\mu \cdot A - W = 0$. Gleichung (5) hat dann die Form:

$$v^* \frac{d v^*}{d s^*} = -\mu \cdot g \qquad \text{daraus folgt:} \quad \frac{d s^*}{d v^*} = -\frac{1}{\mu \cdot g} \cdot v^*$$

$$s^* = -\frac{1}{\mu \cdot g} \int_{v_L - w}^{0} v^* \cdot d v^* = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot g} (v_L - w)^2$$

$$\mu \cdot s^* = \frac{1}{2 g} (v_L - w)^2 \qquad \ldots\ldots \quad (11)$$

(Aus $C = \dfrac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}}$ folgt, wenn $C \to 0$ geht, daß $\mu = \dfrac{c_{wr}}{c_{ar}}$ wird, d. h. in diesem Sonderfall der Reibungsbeiwert gleich dem Gleitwinkel des Flugzeuges wird.)

Die Ergebnisse der numerischen Auswertung von Gleichung (10) sind in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Die Auftragung ist in Bild 2 bis 6 erfolgt. In Bild 7 ist als Beispiel für $C = 0$ eine Zusammenstellung gegeben, deren Auswertung lediglich eine Berechnung des C-Wertes erfor-

Zahlentafel 3. Zahlenwerte μs^* nach Gleichung 10 bei verschiedenen Werten v_L, w und C.

C	v_L m/s	$\mu \cdot s^*$ (m) $w = 0$	$w = 1$	$w = 3$	$w = 5$	$w = 10$	$w = 15$
0	5	1,3	—	—	—	—	—
	10	5,1	4.1	2,8	1,3	—	—
	20	20,4	18.4	14,7	11,5	5,1	1,3
	30	45,8	42,8	37,2	31,8	20,4	11,5
	40	81,6	77,5	69,8	62,5	45,8	31,8
	50	127,3	122,5	112,8	103,0	81.6	62,5
	60	183,5	177.3	165.9	154.5	127,4	103,0
	70	249,5	243,0	229,0	215,5	183,5	154,5
0,2	5	1,4	0,9	—	—	—	—
	10	5,7	4,6	2,9	1,5	—	—
	20	22,8	20,6	16,6	12,0	6,0	1,5
	30	51,3	48,0	41,8	36,0	23,5	13,1
	40	91,2	86,8	78,8	70,0	52,6	36,7
	50	142,5	136,9	126,5	114,7	92,5	70,6
	60	205,0	198,4	186,2	173,0	146,3	116,6
	70	279,0	271,0	256,0	242,0	212,0	174,4
0,4	5	1,6	—	—	—	—	—
	10	6,5	5,4	3,4	1,8	—	—
	20	26,0	23,6	19,3	15,3	7,2	1,9
	30	58,5	55,0	48,2	41.7	27,8	16,2
	40	104,1	99,5	90,1	81,3	61,3	43,8
	50	162,7	156,7	143,2	133,7	108,1	83,9
	60	234,2	227,0	213,2	199,3	168,1	137,8
	70	318,0	310,5	294,0	278,5	239,0	204,0
0,6	5	2,0	—	—	—	—	—
	10	7,8	6,5	4,2	2,3	—	—
	20	31,2	28,5	22,5	18,9	9.1	2,7
	30	70,3	66,4	58,3	51,1	34,6	20,5
	40	124,8	119,5	109,0	98,8	75,5	54,6
	50	195,1	188,2	174,8	161,9	132,1	104,9
	60	281,0	272,5	257,0	241,2	204,0	170,0
	70	381,0	361,5	353,0	353,0	291,5	246,0
0,8	5	2,6	—	—	—	—	—
	10	10,4	8,8	5,9	3,9	—	—
	20	40,9	38,2	32,0	26,2	13,7	4,4
	30	92,4	88,5	78,8	70,1	48,8	30,7
	40	163,5	159,1	146,2	133,9	104,6	78,3
	50	256,0	250,9	234,0	214,0	181,8	146,4
	60	369,0	363,0	343,5	324,5	278,5	235,5
	70	502,0	493,0	468,0	446,0	392,5	341,5

μ = Reibungsbeiwert (vom Hauptfahrwerk und Sporn).

$C = \dfrac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}}$

dert und dann rein schaubildmäßig erfolgt. Aus den bekannten Daten $\dfrac{G}{F}$ und c_{a_L} wird im Kurvenblatt rechts unten v_L bestimmt, hiermit ist in die Kurve der jeweiligen Windgeschwindigkeit einzugehen und der $\mu \cdot s^*$-Wert zu entnehmen. Im linken Diagramm ist der Wert s^* direkt für den entsprechenden μ-Wert auf der Abszissenachse abzulesen. Für die praktische Auswertung von Bild 3 bis 6 stellt man sich zweckmäßig nach Bild 7 ein Transparentblatt her.

5. Anwendungsbeispiele.

Aus den Konstruktionsdaten soll für ein Flugzeugmuster die Ausrollandestrecke bei Windstille vorherbestimmt werden. Als Beispiel ist das Baumuster Ju 52 gewählt worden. Der Parameter C ist bereits in Zahlentafel 2 enthalten und beträgt für die gebremste Landung mit den größtmöglich auftretenden Reibungsbeiwerten $\mu = 0{,}4$ bzw. $0{,}6$: $C = 0{,}65$ bzw. $0{,}73$ (s. Zahlentafel 1).

Die Landegeschwindigkeit ist $v_L = 26{,}4$ m/s. Für $\mu = 0{,}4$ wird aus Bild 5 und 6 mit $v_L = 26{,}4$ (m/s) und $w = 0$ m/s $\mu \cdot s^* = 63$ m ermittelt und $s^*_{w=0} = s = \dfrac{\mu s^*}{\mu} = \dfrac{61}{0{,}4} = 152$ m gefunden.

Für $\mu = 0{,}6$ ergibt sich $s = 113$ m.

Theoretisch ist es noch interessant, den Ausrollweg für den Reibungsbeiwert $\mu = 1{,}2$ zu ermitteln, obwohl er bei den

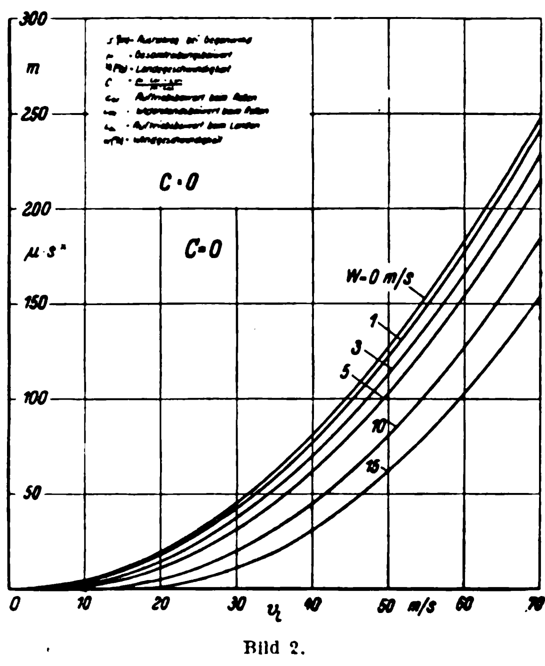


Bild 2.

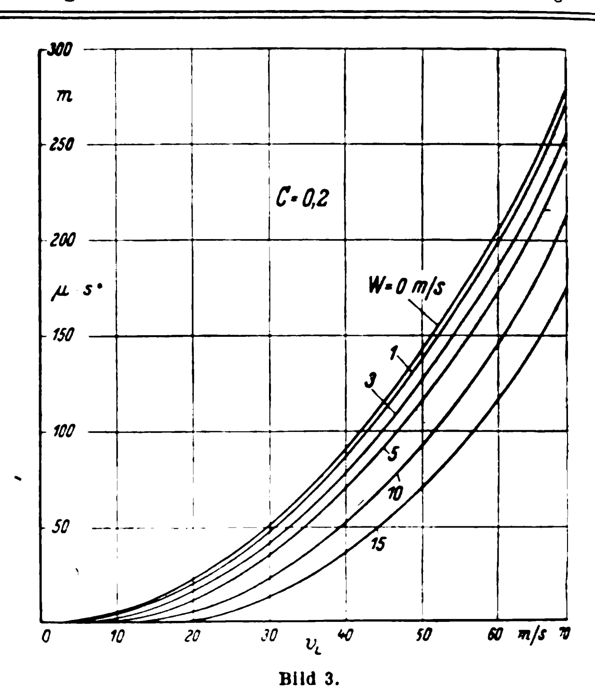


Bild 3.

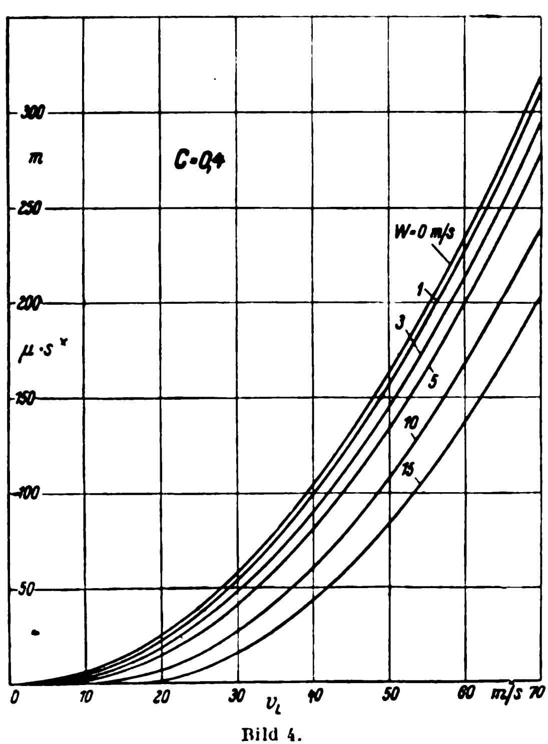


Bild 4.

Bild 2 bis 6. Ausrollweg $\mu \cdot s^*$ bei Gegenwind

s^* (m) = Ausrollweg bei Gegenwind,
μ = Gesamtreibungsbeiwert,
v_L (m/s) = Landegeschwindigkeit,
C = $\frac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}}$
c_{ar} = Auftriebsbeiwert beim Rollen,
c_{wr} = Widerstandsbeiwert beim Rollen,
c_{aL} = Auftriebsbeiwert beim Landen,
w (m/s) = Windgeschwindigkeit.

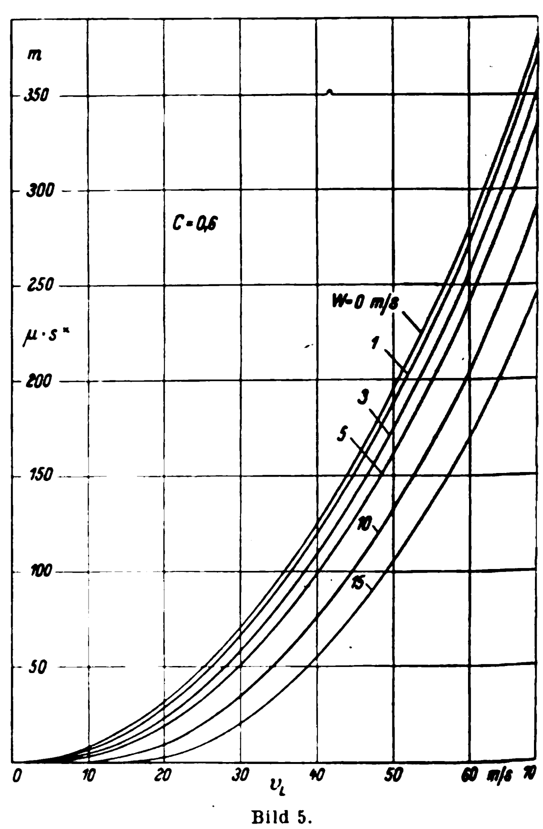


Bild 5.

gegebenen Konstruktionsverhältnissen des Fahrwerkes aus den erwähnten Gründen nicht erreicht werden kann. Hierfür wird $C = 0{,}8$, $s = 61$ m. Bei den Werten $s = 152$ bzw. 113 m ist zu beachten, daß es sich auch bei ihnen um äußerste Grenzwerte handelt, wogegen der Wert $s = 61$ m nur theoretische Bedeutung hat, da hierbei schon Überschlag eintritt.

Als weiteres Beispiel ist das Baumuster LF 1 herangezogen. Hieran soll gezeigt werden, wie auf Grund von Ausrollstreckenmessungen mit Windeinfluß über einen geschätzten μ-Wert die Ausrollstrecke bei Windstille ermittelt werden kann.

Gegebene Daten des Baumusters LF 1:

$G = 355$ kg
$F = 8{,}5\ \mathrm{m}^2$
$\frac{G}{F} = 42\ \mathrm{kg/m}^2$
$c_{aL} = 2{,}16$
$c_{ar} = 1{,}8$
$c_{wr} = 0{,}21$
} Landeklappenausschlag $\beta_L = 0°$
$s^* = 29{,}4$ m bei $w = 3$ m/s
$v_L = 17{,}6$ m/s (s. Bild 7).

Die Ermittlung der Ausrollstrecke s ohne Windeinfluß erfolgt nun in der Weise, daß zunächst bei Annahme eines μ-Wertes der Wert $\mu \cdot s^*_{(\mathrm{Messung})}$ mit dem analogen Wert $\mu \cdot s^*_{(\mathrm{Bild})}$ bei den gegebenen Größen für $v_L = 17{,}6$ m/s und $w = 3$ m/s unter Beachtung des vorhandenen C-Wertes

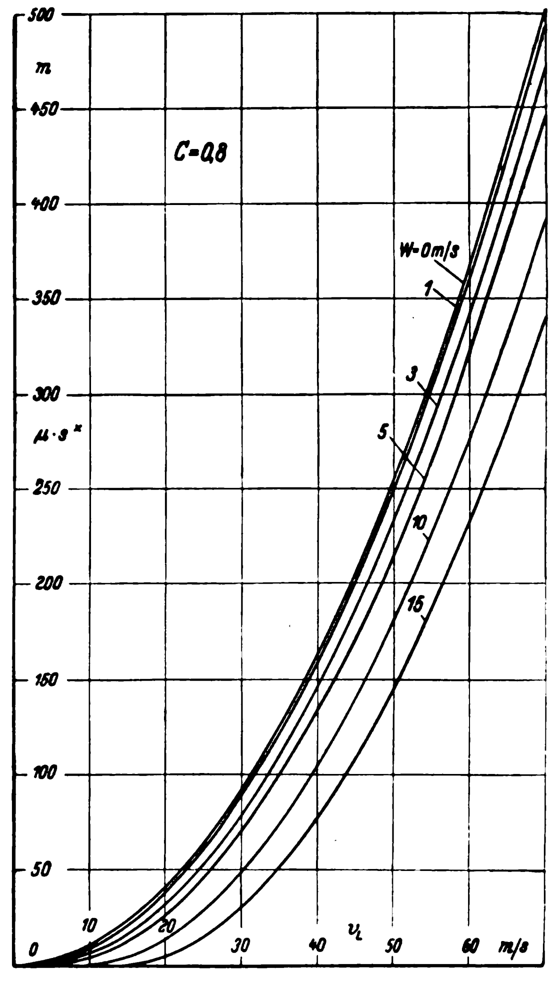


Bild 6.

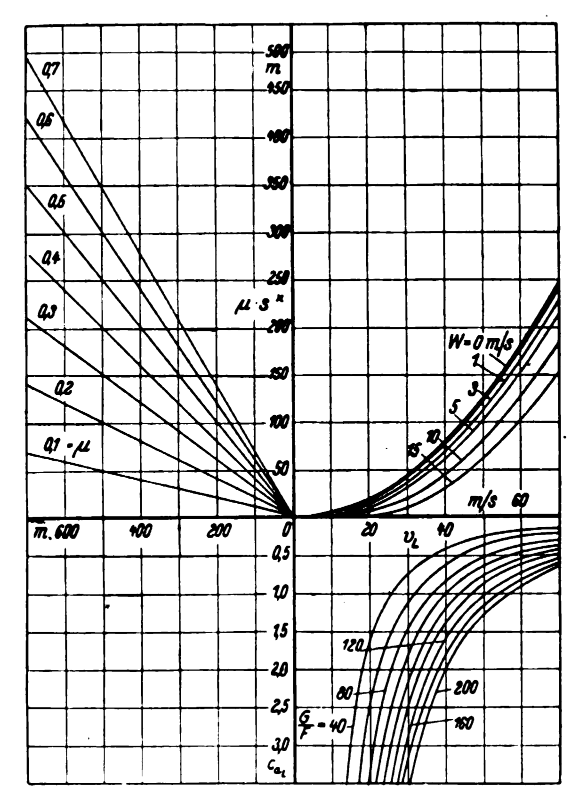


Bild 7. Ausrollweg $\mu \cdot s^*$ bei Gegenwind für $C = 0$.

$\frac{G}{F}$ (kg/m²) = Flächenbelastung,
c_{aL} = Auftriebsbeiwert beim Landen,
v_L (m/s) = Landegeschwindigkeit,
w (m/s) = Windgeschwindigkeit,
s^* (m) = Ausrollweg bei Gegenwind,
μ = Gesamtreibungsbeiwert.

verglichen wird. Durch Änderungen von μ sind die Werte $\mu s^*_{(\text{Messung})}$ und $\mu \cdot s^*_{(\text{Bild})}$ in Übereinstimmung zu bringen. Da nun μ richtig gefunden ist, kann der gesuchte Wert s für v_L über den Linienzug $w = 0$ aus den Schaubildern abgelesen werden.

Der Gesamtreibungsbeiwert wird zu $\mu = 0,6$ geschätzt. Damit errechnet sich

$$C = \frac{\mu \cdot c_{ar} - c_{wr}}{\mu \cdot c_{aL}} = 0,67$$

Die gemessene Ausrollstrecke $\mu \cdot s^*_{(\text{Messung})}$ ergibt sich mit diesem μ-Wert zu $29,4 \cdot 0,6 = 17,6$ m. Durch Interpolation der Kurven für $w = 3$ m/s in Bild 5 und 6 ergibt sich $\mu \cdot s^*_{(\text{Bild})} = 19,8$ m. Die Strecke $\mu \cdot s^*_{(\text{Bild})}$ ist größer als $\mu \cdot s^*_{(\text{Messung})}$, d. h. μ muß noch geändert werden.

Dieselbe Rechnung wird nunmehr für $\mu = 0,7$ durchgeführt.

$$C = 0,695$$
$$\mu \cdot s^*_{(\text{Messung})} = 29,4 \cdot 0,7 = 20,6 \text{ m}$$
$$\mu \cdot s^*_{(\text{Bild})} = 20,7 \text{ m}$$

Diese beiden Werte stimmen sehr gut überein, so daß der Gesamtreibungsbeiwert $\mu = 0,7$ als richtig anzusehen ist.

Damit findet man die Ausrollstrecke bei Windstille auf dem Linienzug $w = 0$ mit

$$\mu \cdot s^* = 28,4 \text{ m}$$

und

$$s = \frac{28,4}{0,7} = 40,6 \text{ m}$$

Auf einem bewegten Fahrzeug, z. B. einem Flugzeugträger kann die Ausrollstrecke eines landenden Flugzeuges erheblich verkürzt werden, wenn das Fahrzeug gegen den Wind fährt. Die relative Windgeschwindigkeit gegenüber dem Fahrzeug setzt sich dann zusammen aus dessen Eigengeschwindigkeit und der wahren Windgeschwindigkeit. Hierdurch ist es möglich, daß die relative Windgeschwindigkeit Werte erreicht, die der Landegeschwindigkeit entsprechen. Dieses würde einen Ausrollweg von $s = 0$ m zur Folge haben.

Für das Baumuster Ju 52 ist bei Gegenwind die Ausrollstrecke und die prozentuale Ausrollstreckenverkürzung $\frac{s - s^*}{s}$ errechnet worden.

In Bild 8 ist die prozentuale Verkürzung über der Windgeschwindigkeit aufgetragen. Für die gegebenen Verhältnisse des Baumusters Ju 52 ergibt sich bis zu $w = 10$ m/s etwa eine lineare Abhängigkeit von $5 \div 6\%$ Verkürzung bei einer Windgeschwindigkeitssteigerung von 1 m/s. Für kleinere C-Werte, die identisch mit kleineren μ-Werten sind, ist die prozentuale Verkürzung in diesem Bereich noch stärker, das gleiche gilt für abnehmende Landegeschwindigkeit.

6. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen.

Die Grundgleichung des Kräftegleichgewichts beim Ausrollen ist durch anschauliche Vereinfachungen und Zusammenfassungen mit Hilfe der Integration zu einer einfachen mathematischen Lösung und graphischen Darstellung geführt, welche bei bestimmter Bodenart und dadurch festliegendem μ-Wert eine direkte Ermittlung der Ausrollstrecke eines Flugzeuges aus den Baudaten auch bei Gegenwind ermöglicht. Durch Beispiele wurde die Auswertmethode an Hand der Abbildungen gezeigt.

Die Anwendungsmöglichkeiten sind:

Vorbestimmung des Ausrollweges von Neukonstruktionen auf Grund der Baudaten G/F, c_{aL}, c_{ar}, c_{wr}; unter Annahme des Reibungsbeiwertes bei einer bestimmten Bodenart; Reduktion der Ausrollandestrecken mit Windeinfluß auf Windstille; Bestimmung des Landeweges auf einem bewegten Fahrzeug.



In der vorliegenden Arbeit sind die Betrachtungen lediglich für Heckradflugzeuge durchgeführt. Für Bugradflugzeuge ergeben sich einige grundlegend andersgeartete Verhältnisse. Das Bugradflugzeug hat den Vorteil, die möglichen Reibungsbeiwerte des Bodens voll auszunutzen und somit eine starke Verkürzung der Ausrollstrecke herbeizuführen, die sich allerdings durch geringere Bremswirkung der Luftkräfte infolge Horizontallage des Flugzeuges wieder erhöht. Wird von der unabgefangenen Landung Gebrauch gemacht, bei der die Landegeschwindigkeit anwächst, so sind die Ausrollstrecken der Bugradflugzeuge wahrscheinlich nur wenig von denen der Heckradflugzeuge verschieden. Die kürzeste Ausrollstrecke wird jedoch erreicht, wenn das Bugradflugzeug mit drehbarem Flügel versehen ist und so die Landung, mit $c_{a\,max}$ durchgeführt werden kann und außerdem während des Ausrollens der Luftwiderstandsbeiwert groß ist. Für die Verhältnisse des Baumusters LF 1 als Bugradflugzeug mit drehbarem Flügel unter Ausnutzung des höchsterreichbaren Reibungsbeiwertes $\mu = 1{,}2$ soll einmal diese Strecke bei $w = 0$ m/s errechnet werden.

$G = 355$ kg, $c_{aL} = 2{,}78$
$F = 8{,}5$ m², $c_{ar} = 2{,}4$ } voller Landeklappenausschlag
$v_L = 15$ m/s, $c_{wr} = 0{,}350$
$\mu \cdot s^* = 19{,}5$ m, $s = 16$ m

Bei dem Baumuster LF 1 ergibt also die Anwendung des Bugradfahrwerkes gegenüber Heckrad noch eine Verringerung der gemessenen Landestrecke von 25 m bei Heckrad auf 16 m bei Bugrad.

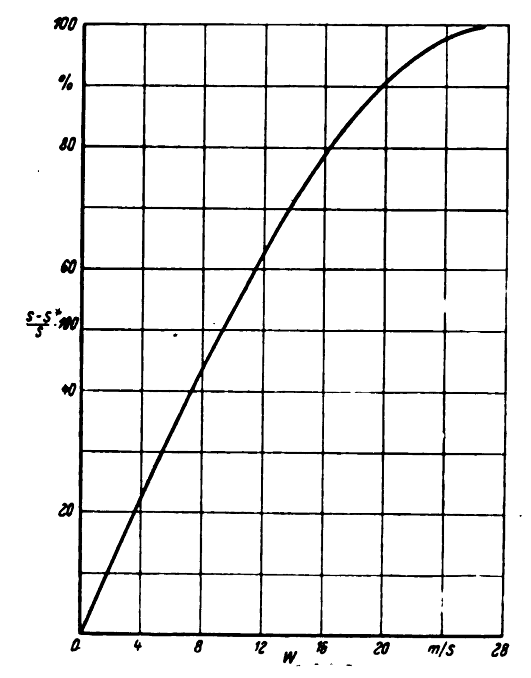


Bild 8. Ausrollwegverkürzung in % bei Gegenwind Ju 52 ($C = 0{,}7$, $v_L = 26{,}4$ m/s).
s (m) = Ausrollweg bei Windstille,
s^* (m) = Ausrollweg bei Gegenwind,
w (m/s) = Windgeschwindigkeit.

7. Schrifttum.

[1] H. Blenk, Starformeln für Landflugzeuge. Z. Flugtechn. Bd. 18 (1927), Nr. 2, S. 25/32.
[2] G. Mathias, Einfache Beziehungen für den Windeinfluß bei Abflug von Landflugzeugen. Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933), Nr. 17, S. 472/473.
[3] G. Mathias und K. Schaaff, Ausrollstrecke, Bremsbeanspruchung und Überschlagsmöglichkeit beim Landen. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 70/76.

Eigenschaften von Widerstands-Abbrennschweißverbindungen aus Stahl mit hoher Festigkeit*).

Von F. Bollenrath und H. Cornelius.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Untersuchungen an Widerstands-Abbrennschweißverbindungen in 12, 20 und 25 mm dicken Blechen aus einem Chrom-Molybdän-Vanadin- und einem Chrom-Vanadin-Vergütungsstahl über Gefüge, Schweißhärte und mit der Schweißung zusammenhängende Fehler nicht nachbehandelter Schweißungen; statische und dynamische Festigkeitseigenschaften sowie Kerbschlagzähigkeit vergüteter Schweißverbindungen mit Zugfestigkeiten bis 155 kg/mm²; vergleichende Untersuchung der Zugschwellfestigkeit an Schweißungen, glatten und gelochten Stäben, auf denen durch Punktschweißung dünne Bleche aufgeheftet waren. — Einfluß der Abkühlungsart nach dem Schweißen auf die vorstehend angeführten Eigenschaften der Schweißverbindungen. — Einfluß der Warmbehandlung auf das Verhalten bei Kerbschlagbiege- und Schlagzug-Versuchen in dem Temperaturbereich von +20 bis —70° sowie bei statischen Biegeversuchen bei Raumtemperatur. — Folgerungen.

Gliederung.

A. Einleitung.

Die Widerstands-Abbrennschweißung ist grundsätzlich auf die meisten Stähle anwendbar. Als die Aufgabe gestellt wurde, größere Querschnitte aus hochvergütbarem Stahl durch Schweißen zu verbinden, lag es daher nahe, u. a. das Widerstands-Abbrennschweißverfahren auf seine Eignung zu untersuchen[1]). Über vorläufige Ergebnisse dieser Untersuchung soll hier berichtet werden.

B. Versuchswerkstoffe.

Als Versuchsstähle, die in größeren Querschnitten auf hohe Festigkeiten vergütet werden können, dienten ein Chrom-Molybdän-Vanadin-Stahl A und ein Chrom-Vanadin-Stahl B mit der folgenden Zusammensetzung:

Stahl A: 0,27% C, 0,25% Si, 0,68% Mn, 0,018% P, 0,01% S, 2,46% Cr, 0,21% Mo und 0,19% V.

Stahl B: 0,30% C, 0,25% Si, 0,74% Mn, 0,018% P, 0,01% S, 2,38% Cr und 0,27% V.

Die beiden Stähle unterscheiden sich in ihrer chemischen Zusammensetzung nur bezüglich des Molybdängehaltes. Die Schweißversuche mit diesen Stählen wurden an 12 und 20 mm dicken Blechen aus beiden Stählen und an 25 mm dicken Blechen aus Stahl B angestellt. Sämtliche Versuchsschweißungen führte die Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft in ihrem Schweißmaschinenwerk aus. Auch an der Weiterführung der Versuche ist die AEG beteiligt. Die Versuche begannen vor mehreren Jahren, also in einer Zeit, in der über die Schweißung von Werkstoffen von der Art der Versuchsstähle noch keine nennenswerten Erfahrungen vorlagen.

Die bei den Versuchen verschweißten Querschnitte waren 12 × 120, 20 × 120 und 25 × 120 mm². Die fertiggeschweißten Stücke hatten eine Länge von 500 mm. Auf Einzelheiten der Versuchsdurchführung wird bei der Beschreibung der Versuchsergebnisse hingewiesen. Folgende Eigenschaften der Schweißungen wurden ermittelt: Gefügeaufbau und Schweißfehler, Härteverlauf quer zur Schweißnaht, Streckgrenze, Zugfestigkeit, Bruchdehnung, Einschnürung, Biegewinkel bei verschiedener Probenbreite, Kerbschlagzähigkeit, auch bei tiefen Temperaturen, und Zugschwellfestigkeit der ungeschweißten und geschweißten, auf verschiedene Festigkeiten vergüteten Versuchsstähle. Zudem wurde der Einfluß verschiedenartiger Warmbehandlungen auf einige dieser Eigenschaften untersucht.

C. Versuchsergebnisse.

1. Gefüge, Schweißfehler und Härteverlauf quer zur Naht der Schweißverbindungen.

Diese Untersuchungen wurden an Schweißverbindungen der 12- und 20-mm-Bleche aus beiden Versuchsstählen durchgeführt, die mit einem spezifischen Stauchdruck von 5,0 bis 5,5 kg/mm², einer Stauchung um 4 bis 7 mm, bei einem Abbrand von 12 bis 16 mm und rd. 30 s mittlerer Schweißzeit hergestellt worden sind. Einen der nach Oberhoffer geätzten Schnitte quer zur Naht von Schweißverbindungen, die nach dem Schweißen ohne besondere Vorsichtsmaßnahmen in Luft abkühlten, zeigt Bild 1. Die Schweißwulste sind bereits durch Schleifen entfernt. Man erkennt die Stauchung der Faser in der Nähe der Schweißfuge und das Anschneiden der gestauchten Faser beim Abschleifen der Wulste. Die Schweißnaht selbst erscheint als heller Streifen. Das Sekundärgefüge der Schweißnaht und der wärmebeeinflußten Zone ist für beide Stahlarten und Blechdicken gleich. Es genügt daher, hier die Gefügebilder für einen Fall zu zeigen, nämlich für das 20 mm dicke Blech aus Stahl B. Die Naht hat ein Zwischenstufengefüge gemäß Bild 2. Die an die Naht anschließende, beim Schweißen auf Temperaturen über den Umwandlungstemperaturen erhitzte Zone ist nach Bild 3 rein martensitisch. Mit zunehmender Entfernung von der Naht, also mit abnehmender Höhe der während des Schweißvorganges erreichten Temperatur, wird der Martensit feiner und erscheint dann schließlich neben Resten des Gefüges des unbeeinflußten Grundwerkstoffs, wie es Bild 4 zeigt. Der unbeeinflußte Grundwerkstoff, dessen sorbitisches Gefüge Bild 5 wiedergibt, tritt erst in meist großem Abstand von der Naht wieder auf, wie aus Bild 1 hervorgeht.

Da die Naht ein Zwischenstufengefüge aufweist, während die anschließende Zone martensitisch ist, erfährt die Naht beim Schweißen eine Entkohlung. Wahrscheinlich ist auch mit einem Abbrand der übrigen Zusätze, besonders des Chroms zu rechnen. Die Verarmung der Naht an Zusätzen zeigt sich in dem gegenüber dem Grundwerkstoff verstärkten Auftreten von Ferrit, wenn die Schweißungen von Temperaturen oberhalb A_{c3} langsam abgekühlt werden. Um diese langsame Abkühlung zu erreichen, wurden die Schweißungen nach dem eigentlichen Schweißvorgang durch einen Stromstoß nachgewärmt, rasch aus der Maschine ausgespannt, in einen auf 400° erhitzten Ofen eingebracht und darin langsam abgekühlt. Durch diese Behandlung wird das Auftreten von Härtungsgefügen in der Naht und der wärme-

*) J 3/25, E 21 13.

[1]) W. Denker, Abschmelzschweißung von legierten Stahlrohren. Stahl und Eisen Bd. 59 (1939), S. 396/98.

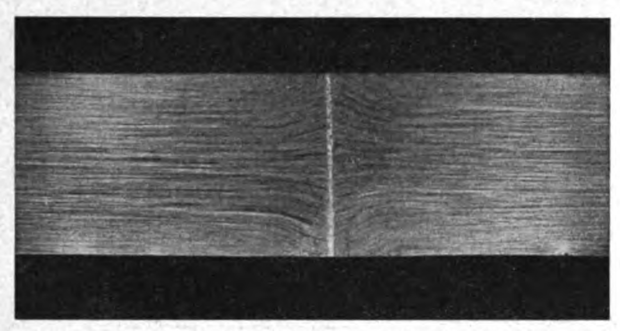


Bild 1. Schnitt quer zur Naht durch eine Schweißverbindung aus den Versuchsstählen. Nach dem Schweißen in Luft abgekühlt. Oberhoffer-Ätzung. 12-mm-Blech aus Stahl B. Vergr. 2fach.

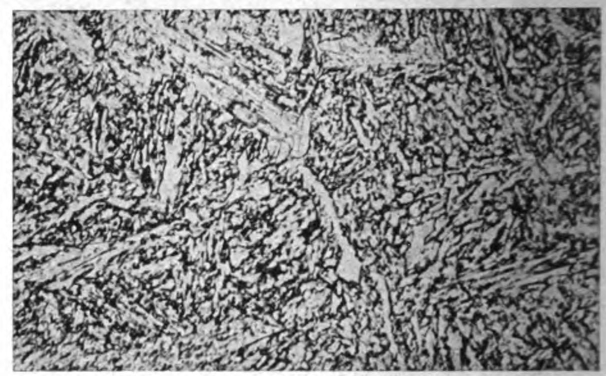


Bild 2. Zwischenstufengefüge der Naht. Vergr. 500fach.

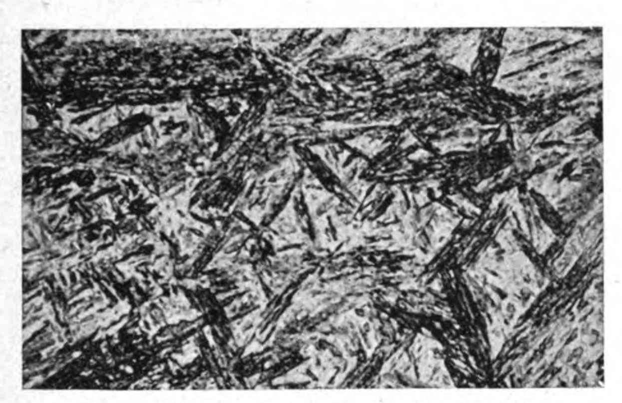


Bild 3. Martensit neben der Naht. Vergr. 500fach.



Bild 4. Gefüge am Übergang der wärmebeeinflußten Zone zum unbeeinflußten Grundwerkstoff. Vergr. 500fach.

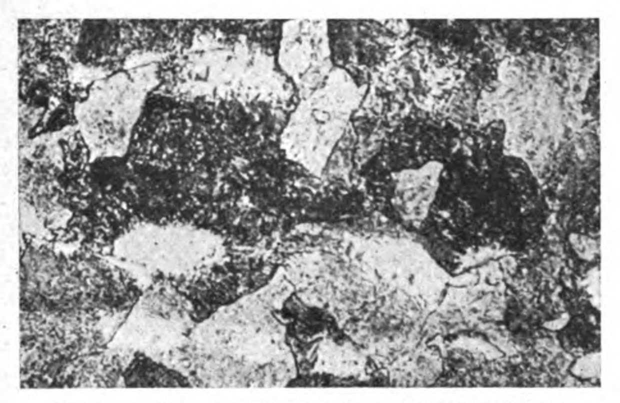


Bild 5. Gefüge des unbeeinflußten Grundwerkstoffs. Vergr. 500fach.

Bild 2 bis 5. Gefüge der Schweißnaht und ihrer Umgebung. Abkühlung nach dem Schweißen in Luft. Geätzt mit alkoh. Salpetersäure.

beeinflußten Zone vermieden. Die Naht erhält ein ferritisch sorbitisches Gefüge nach Bild 6, der benachbarte Grundwerkstoff ein sorbitisches Gefüge mit einzelnen Ferritflecken gemäß Bild 7.

Einer der häufigsten Fehler bei der Widerstands-Abbrennschweißung von Stählen ist das Auftreten von Löchern und Rissen in einem gewissen Abstand beiderseits der Naht in zeiliger Anordnung. In Bild 8, das von der Schweißung eines unlegierten Stahles stammt, liegen die genannten Fehler in den dunkel erscheinenden Streifen neben der Naht. Die außer den Löchern auftretenden Risse sind oft zahlreicher als die Hohlräume. Diese Fehler werden im folgenden kurz »Fehlerreihen« genannt[2]). Diese können sowohl bei unlegierten wie bei den verschieden legierten Stählen auftreten. Bei eigenen Schweißversuchen zeigten Stähle von der Art der Versuchswerkstoffe sowie ein Chrom-Nickel-Stahl, ein Mangan- und ein Mangan-Vanadin-Stahl den Fehler mehr oder weniger ausgeprägt. Innerhalb der

[2]) Von W. Denker[1]) wurden Warmrisse beiderseits der Naht beschrieben.

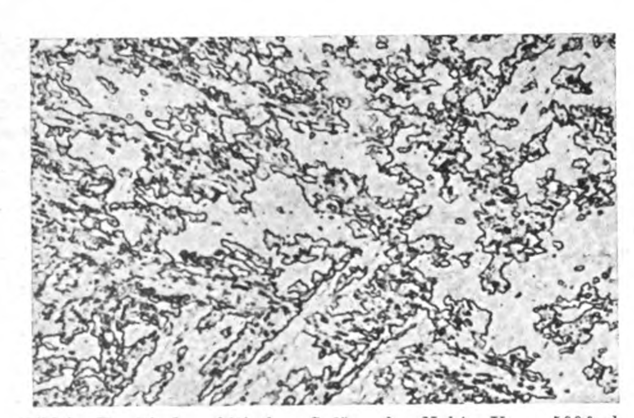


Bild 6. Ferritisch-sorbitisches Gefüge der Naht. Vergr. 500fach.

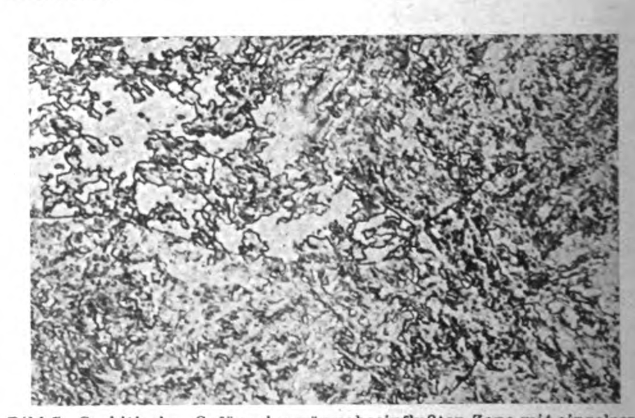


Bild 7. Sorbitisches Gefüge der wärmebeeinflußten Zone mit einzelnen Ferritflecken. Vergr. 500fach.

Bild 6 und 7. Gefüge der Schweißnaht und ihrer Umgebung. Langsame Abkühlung nach dem Schweißen im Ofen. Geätzt mit alkoh. Salpetersäure.

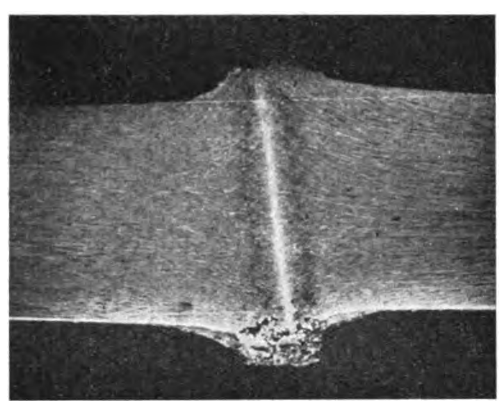


Bild 8. Fehlerreihen neben der Schweißnaht in einem unlegierten Stahl. Primärätzung. Vergr. 2 fach.



Bild 9. Kohlenstoffstahl. Vergr. 400 fach, auf zwei Drittel verkleinert.



Bild 10. Chrom-Vanadin-Stahl. Vergr. 100 fach.



Bild 11. Chrom-Vanadin-Stahl. Vergr. 500 fach.

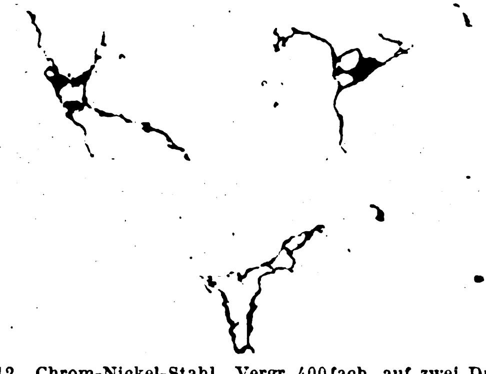


Bild 12. Chrom-Nickel-Stahl. Vergr. 400 fach, auf zwei Drittel verkleinert.



Bild 13. Chrom-Vanadin-Stahl. Vergr. 400 fach, auf zwei Drittel verkleinert.

Bild 9 bis 13. In den Fehlerreihen verschiedener Stähle auftretende Fehler. Ungeätzt.

gleichen Stahlart können anfällige und nicht anfällige Schmelzen auftreten. Als weitestgehend unempfindlich haben sich die für die hier behandelten Versuche herangezogenen beiden Bleche erwiesen. Die Fehlerreihen fehlten entweder ganz oder waren auf den Schweißwulst beschränkt, so daß nach dessen Abschleifen auf Blechdicke gesunde Schweißungen vorlagen (Bild 1). Man hat noch kein ganz klares Bild über das Entstehen der Fehlerreihen. Die Tatsache, daß die Löcher und Risse auf eine Zone in einem gewissen Abstand von der Naht beschränkt bleiben, gibt wieder Anhaltspunkte für die Entstehungsursache. Die Fehlerreihen lassen sich praktisch meist vermeiden, und zwar offenbar u. a. durch besonders hohe Stauchdrücke beim Schweißen. Dieser Ausweg ist jedoch deswegen nicht befriedigend, weil Maschinen, die die hohen Stauchdrücke hergeben, besser ausgenutzt werden, wenn sie zum Schweißen größerer Querschnitte bei üblichen Stauchdrücken herangezogen werden. Es ist daher wichtig, die Ursache der Fehlerreihen aufzuklären.

Während über den Zusammenhang zwischen den Fehlerreihen einerseits und der Stahlgüte und den Schweißbedingungen andererseits hier noch nicht berichtet werden kann, werden Ergebnisse metallographischer Untersuchungen mitgeteilt werden, die zur Charakterisierung der Einzelheiten in den Fehlerreihen dienen und Hinweise auf die Art ihres Entstehens geben können. Die Untersuchungen bezogen sich auf einen Kohlenstoffstahl mit 0,45% C, einen Chrom-Vanadin-Stahl von der Art des Versuchsstahles B und einen Chrom-Nickel-Stahl mit 0,19% C, 0,15% Si, 0,64% Mn, 0,012% P, 0,007% S, 0,30% Cu, 2,24% Cr und 2,12% Ni, der sich durch eine hohe Reinheit auszeichnete. Das mikroskopische Bild der Fehlerreihen war bei diesen Stählen, die auch unter verschiedenen Bedingungen geschweißt wurden, stets das gleiche. Lediglich das Ausmaß der Fehler wechselte mit der Stahlart und anscheinend auch mit den Schweißbedingungen.

Das kennzeichnende Aussehen der Risse und Löcher in den Fehlerreihen ungeätzter Schliffe zeigen Bild 9 bis 13. Diese legen bereits den Schluß nahe, daß die Risse auf Korngrenzen verlaufen und die Löcher sich vorwiegend dort bilden, wo mehr als zwei Körner zusammenstoßen. Durch Bild 13 wird die häufig gemachte Beobachtung belegt, daß die Löcher und Risse sich an Stellen finden, die auch von Schlackeneinschlüssen bevorzugt werden. Im



Bild 14. Kohlenstoffstahl. Vergr. 400fach, auf zwei Drittel verkleinert.



Bild 15. Chrom-Vanadin-Stahl. Vergr. 400fach, auf zwei Drittel verkleinert.

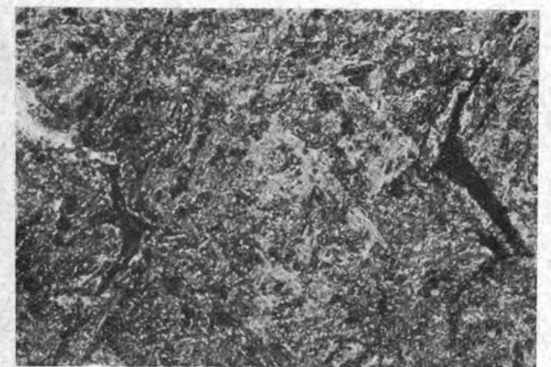


Bild 16. Chrom-Vanadin-Stahl. Vergr. 400fach, auf zwei Drittel verkleinert.

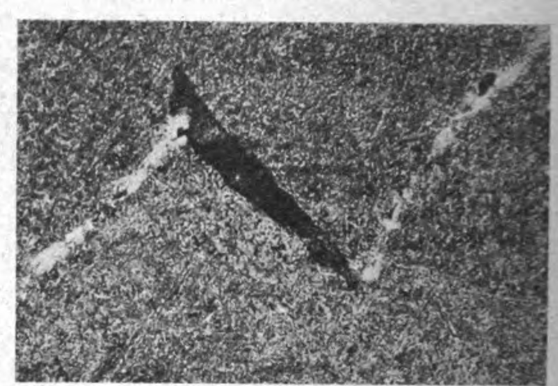


Bild 17. Chrom-Vanadin-Stahl. Vergr. 400fach, auf zwei Drittel verkleinert.

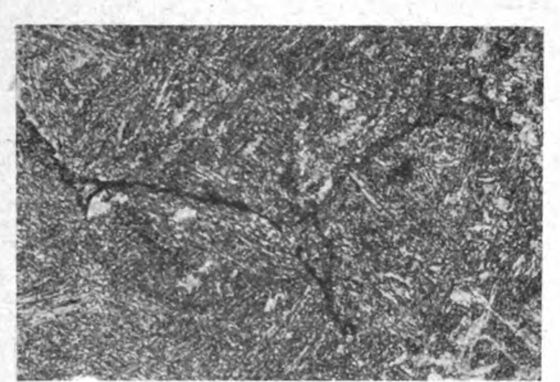


Bild 18. Chrom-Vanadin-Stahl. Vergr. 400fach, auf zwei Drittel verkleinert.



Bild 19. Chrom-Nickel-Stahl. Vergr. 200fach, auf zwei Drittel verkleinert.

Bild 14 bis 19. Fehler in den Fehlerreihen verschiedener Stähle. Geätzt mit alkoholischer Salpetersäure und Oberhoffer-Lösung.

Verlauf des Risses und ihn fortsetzend liegen in Bild 13 Sulfideinschlüsse vor. Die Lage der Risse und Löcher auf den Korngrenzen und an den Stoßstellen mehrerer Körner wird noch deutlicher belegt durch Bild 14 bis 19, die von geätzten Schliffen aufgenommen sind. Die Schliffe wurden nach Ätzung mit alkoholischer Salpetersäure noch schwach mit der Oberhoffer-Lösung nachgeätzt. Hierdurch wird die Kristallseigerung an den Kornrändern häufig an einem schwächeren Ätzangriff erkennbar. An solchen Stellen treten die Risse und Löcher vorwiegend auf. Danach handelt es sich um Primärkorngrenzenrisse und Hohlräume zwischen den Primärkristalliten. Die hellen Höfe um die Fehlstellen sind angereicherte Zonen, was besonders durch Bild 14 verdeutlicht wird. Hier hat das Korninnere ein vorwiegend sorbitisches Gefüge, während die die Hohlräume und einen Riß enthaltenden Randgebiete der Kristallite rein martensitisch sind.

Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Fehlerreihen stets einen gewissen Abstand von der Naht haben und sich nach den Schweißwulsten, also nach der Probenoberfläche keilförmig verbreitern — wobei die Größe und Zahl der Einzelfehler zunimmt — legte der wiedergegebene metallographische Befund folgende Vorstellung über die Entstehung der Risse und Löcher in den Fehlerreihen nahe: Bei der Schweißung tritt ein Temperaturgebiet auf, in dem nur teilweises Schmelzen erfolgt, das wegen der Inhomogenität der einzelnen Kristallite auf deren an Fremdelementen angereicherte Randzonen beschränkt ist. Die Kristallite, die mit ihrer wesentlichen Masse also fest bleiben, stützen sich gegeneinander ab. Mit dem Einsetzen des Stauchvorganges beim Schweißen findet eine Verschiebung der Kristallite mit aufgeschmolzener Zwischensubstanz gegeneinander statt. Hierbei können dadurch so große Hohlräume zwischen den Kristalliten entstehen, daß die geschmolzene Phase nicht mehr ausreicht, um die Zwischenräume zwischen den Kristalliten in ihrer neuen Lage auszufüllen. Durch die mit einer Volumenabnahme verbundene Erstarrung der die gebildeten Hohlräume umgebenden Schmelze nimmt die Größe der Hohlräume zu. In grundsätzlich gleicher Weise, also durch die Verschiebung angeschmolzener, in der Erstarrung begriffener Kristallite und die Schwindung beim Erstarren können auch die in den Fehlerreihen häufigen Risse zustande kommen.

Die stärksten Verformungen treten beim Stauchen in



Bild 20. Stahl B. Vergr. 200fach.

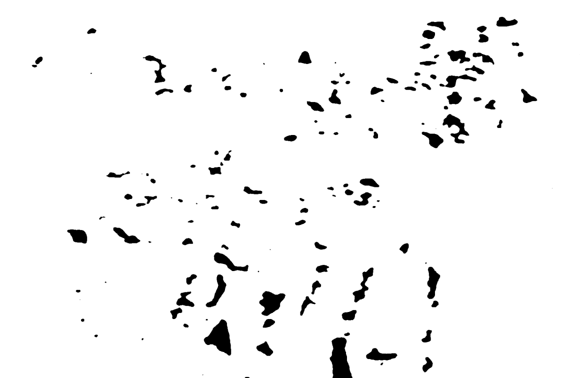


Bild 21. Stahl A. Vergr. 200fach.

den Schweißwulsten und den benachbarten Zonen des Schweißquerschnitts auf. Hier sind, in Übereinstimmung mit dem Deutungsversuch, die Fehlerreihen am breitesten und die Einzelfehler in ihnen am größten.

Ist noch kein Anschmelzen der Randzonen der Kristallite oder ein weitergehendes Schmelzen der Körner als in der Zone, in der die Fehlerreihe entsteht, eingetreten, so fehlen die dem Deutungsversuch zugrunde liegenden Voraussetzungen für die Bildung der Hohlräume und Risse. Somit erklärt der dargelegte Mechanismus, der auf dem Zusammenwirken der Kristallseigerung, der Temperatur und Verformung beim Schweißen beruht, auch den Abstand der Fehlerreihen von der Naht. Das Auftreten der Fehlerreihen müßte, wenn der Erklärungsversuch richtig ist[3]), durch solche Maßnahmen vermieden oder eingeschränkt werden können, die die Kristallseigerung vermindern. Neben einer kleinen Kristallseigerung müßte ein kleines Schmelzintervall die Vermeidung der Fehlerreihen begünstigen.

Während die hier zu behandelnden Versuchsschweißungen aus den Stählen A und B praktisch frei von den vorstehend beschriebenen Fehlerreihen waren, wurden in ihnen bei eingehenden mikroskopischen Untersuchungen einige andere Fehlererscheinungen beobachtet, die meist nur vereinzelt auftraten. Neben Mikrolunkern, die Bild 20 wiedergibt, wurden auch größere Nester kleinster Lunker nach Bild 21, in einem Falle auch in der Umgebung eines großen Schlackeneinschlusses, Bild 22, festgestellt. Diese Mikrolunker lagen ausnahmslos in der Schweißnaht. Ihre Entstehung ist damit ohne weiteres verständlich; ihr Auftreten läßt sich durch geeignete Wahl der Schweißbedingungen, besonders des Stauchdruckes, meist vermeiden. Die nach dem Schweißen in Luft abgekühlten, nicht aber naturgemäß die langsam abgekühlten Schweißungen wiesen in der wärmebeeinflußten Zone vereinzelt Härterisse auf, die senkrecht zur Naht in Faserrichtung, und zwar in den an Begleitelementen angereicherten, nach dem Ätzen mit alkoholischer Salpetersäure einen hellen Martensit aufweisenden

[3]) Unabhängig von uns kam die Fried. Krupp A.-G. zu einer Deutung, die mit der von uns vertretenen weitestgehend übereinstimmt. Persönliche Mitteilung von F. Brühl.

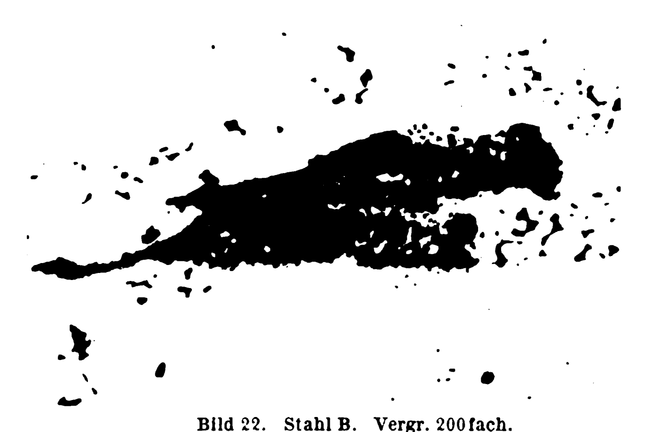


Bild 22. Stahl B. Vergr. 200fach.

Bild 20 bis 22. Mikrolunker in der Schweißnaht. Ungeätzt.

Fasern lagen. Bild 23 und 24 zeigen solche Härterisse. Die ein Zwischenstufengefüge aufweisende Naht selbst war frei von Härterissen. Nur in einem Falle wurde ein in Nahtrichtung verlaufender Schrumpfriß, Bild 25, festgestellt. Bindefehler bzw. Kaltschweißungen, die vermutlich auf die Anwesenheit von Chromoxydhäutchen in der Schweißfuge zurückgehen, wurden metallographisch nicht ermittelt, traten aber, wie später gezeigt wird, gelegentlich auf.

Die bei der Abbrennschweißung mit nachfolgender Luftabkühlung der Stähle A und B eintretende Härtung der wärmebeeinflußten Zone ist erwartungsgemäß erheblich. Es werden annähernd die bei Härtung in Öl auftretenden Härten erreicht. Die Höchsthärten sind nach Bild 26 und 27 bei den 12-mm-Blechen durchwegs etwas höher als bei den 20 mm-Blechen. Dicht neben der Naht erreicht die Schweißhärte 500 bis 600 Vickerseinheiten. Ein eindeutiger Unterschied in der Härteannahme der beiden Versuchsstähle ist nicht vorhanden. Die Naht selbst hat entsprechend ihrem Gefügecharakter mit 360 bis 470 Vickerseinheiten kleinere Härten als die Härtungszone. Auch in der Naht liegt die

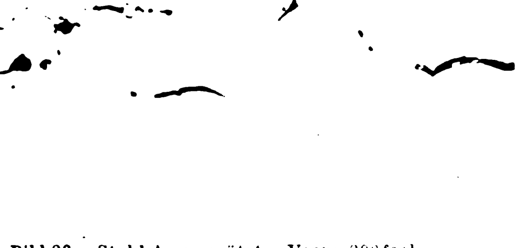


Bild 23. Stahl A, ungeätzt. Vergr. 200fach.



Bild 24. Stahl B, geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

Bild 23 und 24. Härterisse in der wärmebeeinflußten Zone.



Bild 25. Schrumpfriß in einer Schweißnaht von Stahl A. Geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

Härte der rascher abkühlenden 12-mm-Bleche höher als die der 20-mm-Bleche. Trotz des in der Naht selbst eintretenden Abbrandes des Kohlenstoffs und vermutlich auch des Chroms ergibt sich nach einstündigem Normalglühen bei 880° und anschließendem Vergüten der Schweißverbindungen aus den Versuchsstählen ein in Naht und Blech gleiches Vergütungsgefüge und eine weitgehend übereinstimmende Härte nach Bild 28. In der Nahtmitte ist jedoch die Härte meist etwas kleiner als unmittelbar neben der Naht. Hier übertrifft die Härte nach dem Vergüten die der weiter von der Naht entfernten Zone ein wenig. Vermutlich ist das darauf zurückzuführen, daß die Wärmeeinwirkung beim Schweißen zur Auflösung der Vanadinkarbide in dem Gebiet neben der Naht führte und hierdurch die Voraussetzungen für eine feine Karbidverteilung nach dem Normalglühen, also vor dem Vergüten schaffte. Die feine Karbidverteilung dürfte die Wirksamkeit der Vergütung in der ursprünglich wärmebeeinflußten Zone erhöht haben.

2. Mechanische Eigenschaften der ungeschweißten und geschweißten Versuchsbleche im vergüteten Zustand.

Die mechanischen Eigenschaften der ungeschweißten und geschweißten Versuchsbleche wurden an Proben ermittelt, die nach einstündigem Normalglühen vergütet wurden. Die geprüften Schweißverbindungen wurden unter den im vorigen Abschnitt angeführten Bedingungen hergestellt und nach dem Schweißen in Luft abgekühlt. Die Schweißverbindungen wurden in den Abmessungen 12 bzw. 20 × 120 × 500 mm³ vergütet. Die Härtung von 870° erfolgte in Rüböl. Dem einstündigen Anlassen bei 450, 550 und 650° folgte zur Vermeidung von Anlaßsprödigkeit ein Abschrekken in Öl. Zur Ermittlung der mechanischen Eigenschaften der ungeschweißten Bleche wurden im Verhältnis zu den Schweißverbindungen kleine Proben vergütet. Hierauf ist beim späteren Vergleich der mechanischen Eigenschaften der Bleche mit denen ihrer Schweißverbindungen Rücksicht zu nehmen.

Die mechanischen Eigenschaften der vergüteten Schweißproben wurden durch Zerreiß-, Kerbschlag- und Zugschwellversuche geprüft. Für die Zerreißversuche wurden aus den 12 mm dicken Schweißverbindungen Proben entnommen, deren Querschnitt in der Meßlänge 10 × 22 mm² betrug. Die entsprechenden Proben aus den 20 mm dicken Schweißungen hatten einen Prüfquerschnitt von 16 × 24 mm². Die Zerreißstäbe, die in der Mitte ihrer Meßlänge die senkrecht zur Zugkraft beim Zerreißversuch liegende Schweißnaht enthielten, wurden verschiedenen Probeschweißungen an verschiedenen Stellen entnommen. Die Kerbschlagzähigkeit wurde mit der DVM-Probe mit Rundkerb (10 × 10 × 55 mm², 3 mm tiefer Kerb mit 2 mm Dmr.) ermittelt. Besonderer Wert wurde auf die zuverlässige Kenntnis der Lage der Schweißnaht in der Kerbschlagprobe gelegt. Durch Anschleifen und Ätzen der Schweißverbindung wurde die Lage der Schweißnaht bestimmt und dementsprechend die Kerbschlagprobe für die Herstellung auf dem Schliff angerissen. Bei den Hauptversuchen bildete die Schweißnaht so

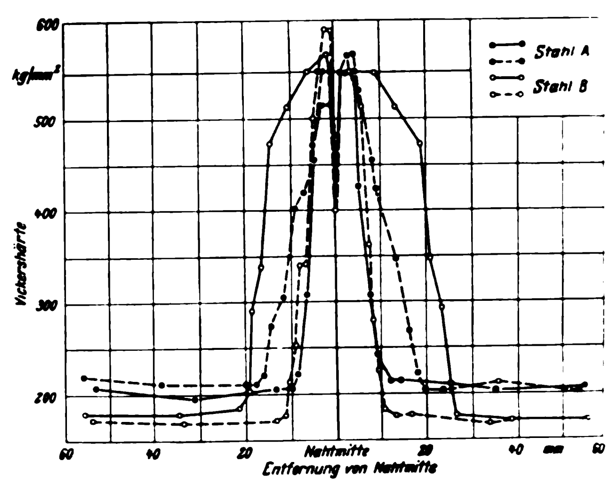


Bild 26. Härteverlauf quer zur Schweißnaht. 12-mm-Bleche.

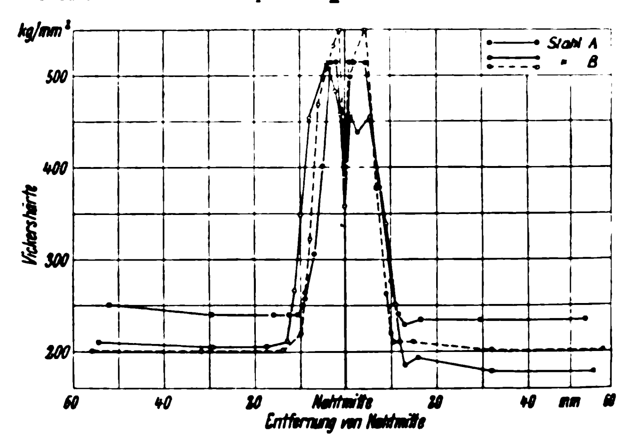


Bild 27. Härteverlauf quer zur Schweißnaht. 20-mm-Bleche.

genau wie möglich den Schlagquerschnitt der Kerbschlagproben. In einigen weiteren Versuchen wurden die Kerbschlagproben so entnommen, daß sich die Schweißnaht in verschiedenem, aber kleinem Abstand vom Schlagquerschnitt befand. Nach den Versuchsergebnissen in Zahlentafel 1 braucht die Kerbschlagzähigkeit in der Naht selbst nicht kleiner zu sein als in einem Abstande von 1 bis 5 mm von der Naht, wenn die Schweißung einwandfrei ist. Ist die Naht kerbschlagspröder als ihre unmittelbare Umgebung. so darf man als wesentliche Ursache hierfür Schweißfehler ansehen. Die Vergleichbarkeit der Kerbschlagzähigkeit der Naht mit der ihrer Umgebung oder des weiter abliegenden Blechwerkstoffs kann allerdings beeinträchtigt sein durch den Faserverlauf in verschiedener Entfernung von der Naht bzw. durch das Fehlen einer Faser in der Naht selbst.

In Bild 29 bis 33 sind die im Zerreißversuch ermittelten Festigkeitseigenschaften und die Kerbschlagzähigkeit der Versuchsbleche und der aus ihnen hergestellten Schweißverbindungen in drei Vergütungszuständen dargestellt. Die Eigenschaften der ungeschweißten Bleche sind durch Linien-

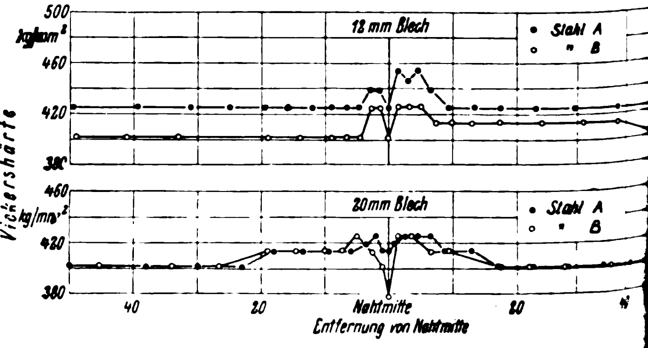


Bild 28. Härteverlauf quer zur Schweißnaht der Versuchsbleche. (Vergütung: 870°/1 h/Öl — 550°/1 h/Öl angelassen.)

Zahlentafel 1. Kerbschlagzähigkeit von elektrisch stumpfgeschweißten 12 und 20 mm dicken Blechen aus den Stählen A und B bei verschiedener Lage des Kerbes zur Schweißnaht[1])[2]).

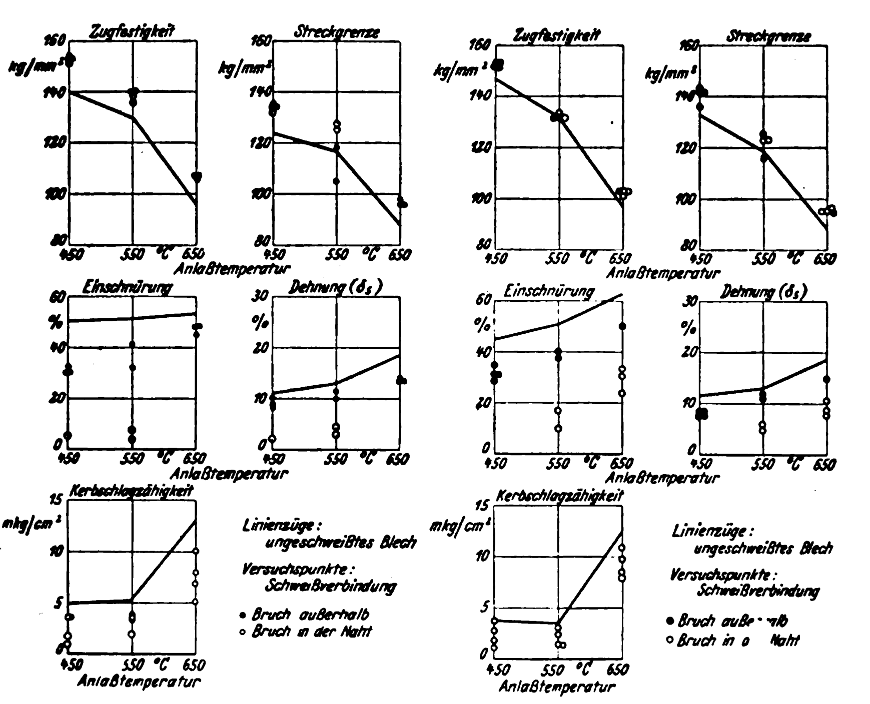
Werkstoffe	Blechstärke in mm	Kerbschlagzähigkeit in mkg/cm² — Abstand des Schlagquerschnittes von der Schweißnaht in mm: 0	1	5
Stahl A	12	4,0 (3,4 — 4,6)	3,5 (3,1 — 3,9)	4,5 (4,3 — 4,7)
	20	3,4 (2,9 — 4,0)	3,9 (3,4 — 4,5)	4,8 (4,8 — 4,8)
Stahl B	12	2,1 (1,6 — 2,7)	2,8 (2,7 — 2,9)	3,9 (3,6 — 4,3)
	20	1,6 (1,3 — 2,0)	3,5 (2,7 — 3,4)	3,3 (3,2 — 3,4)

[1]) Mittelwerte aus 2 verschiedenen Blechen.
[2]) Warmbehandlung nach dem Schweißen:
Normalisiert: 880°/1 h/Luft
Härten: 870°/1 h/Öl
Anlassen: 550°/1 h/Öl

züge, die der Schweißverbindungen durch Versuchspunkte wiedergegeben, die je nach dem gewählten Zeichen auf die Lage des Bruches beim Zerreißversuch in oder außerhalb der Schweißnaht hinweisen. Beim Kerbschlagversuch bildete die Naht stets den Schlagquerschnitt, so daß hier der Bruch immer durch die Naht gehen mußte. Die für den ungeschweißten und geschweißten Zustand behandelten mechanischen Eigenschaften sind miteinander nicht ganz streng vergleichbar, da einmal für die Prüfung der ungeschweißten Bleche ein kleinerer Vergütungsquerschnitt vorlag, zum anderen die Zerreißproben aus ihnen einen Kreisquerschnitt (8 bzw. 10 mm Dmr.), die aus den Schweißverbindungen dagegen einen (größeren) Rechteckquerschnitt besaßen. Es ist bei Bild 29 bis 33 weiter noch zu beachten, daß die Folgerungen aus den Ergebnissen der Zerreiß- und Kerbschlagversuche an den Schweißverbindungen hinsichtlich der Güte der Schweißung im Einzelfall nicht übereinzustimmen brauchen, da die Güte der Naht in einer Schweißverbindung über den Nahtquerschnitt schwanken kann.

Nach Bild 29 haben die vergüteten Schweißverbindungen aus dem 12-mm-Blech des Stahles A bei höherer Zugfestigkeit und vorwiegend höherer Streckgrenze zum Teil entsprechend kleinere Werte der Einschnürung und Bruchdehnung als der ungeschweißte Werkstoff. Die Minderung dieser Werte ist dann sehr groß und steht nicht mehr vorwiegend im Zusammenhang mit der Festigkeit, wenn der Bruch nicht außerhalb, sondern in der Naht eingetreten ist. Die Kerbschlagzähigkeit der Naht ist stets kleiner als die des Bleches in großem Abstand von der Naht. Besonders kleine Werte treten z. T. bei hoher Festigkeit (z. B. über 150 kg/mm²) der Schweißverbindung auf. Ganz ähnliche Ergebnisse wie mit den 12-mm-Blechen aus Stahl A wurden auch mit den gleich dicken Blechen aus Stahl B erzielt, wie durch Bild 30 belegt wird. Bei den Schweißverbindungen aus beiden Werkstoffen herrscht der im Zerreißversuch außerhalb der Naht eingetretene Bruch gegenüber dem Bruch in der Naht vor, was bei Schweißfestigkeiten zwischen 100 und 155 kg/mm² als beachtliches Ergebnis bezeichnet werden kann und für die Abwesenheit größerer Schweißfehler, besonders Bindefehler, spricht.

Unbefriedigende mechanische Eigenschaften hatten nach Bild 31 die zuerst hergestellten Schweißverbindungen in den 20 mm dicken Blechen aus Stahl A. Die Brüche traten beim Zerreißversuch vorwiegend in der Naht ein. Infolge ausgedehnter Bindefehler erfolgten einige Brüche in Proben, die auf Grund der Warmbehandlung 130 bzw. 100 kg/mm² Zugfestigkeit hätten erreichen sollen, schon bei Zugspannungen von 13 bzw. 54 kg/mm². Einschnürung, Dehnung und Kerbschlagzähigkeit lagen in vielen Fällen dicht bei Null. Es wurde vermutet, daß das schlechte Ergebnis dieser Versuchsschweißungen aus Stahl A auf einen ungenügenden Stauchgrad und auf eine demgemäß unzureichende Verdrängung des aufgeschmolzenen Stahles aus der Schweißfuge zurückzuführen sei, als deren Folge Chromoxydhäutchen in der Naht verblieben seien und zu Bindefehlern geführt hätten. Eine sinngemäße Änderung der Schweißbedingungen, vor allem durch Wahl einer kleinen Einspannlänge, führte zu Schweißverbindungen, die denen in den 12-mm-Blechen gleichwertig sind, wie aus Bild 32 zu



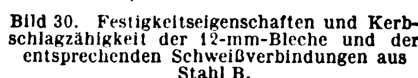


Bild 29. Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit der 12-mm-Bleche und der entsprechenden Schweißverbindungen aus Stahl A.

Bild 30. Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit der 12-mm-Bleche und der entsprechenden Schweißverbindungen aus Stahl B.

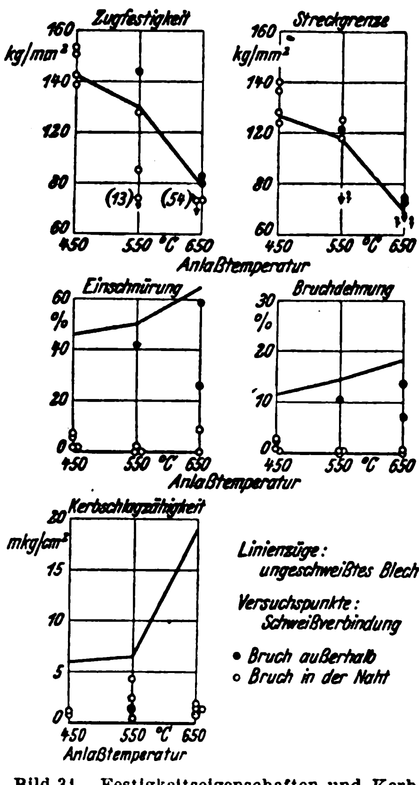


Bild 31. Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit der 20-mm-Bleche und der entsprechenden Schweißverbindungen aus Stahl A.

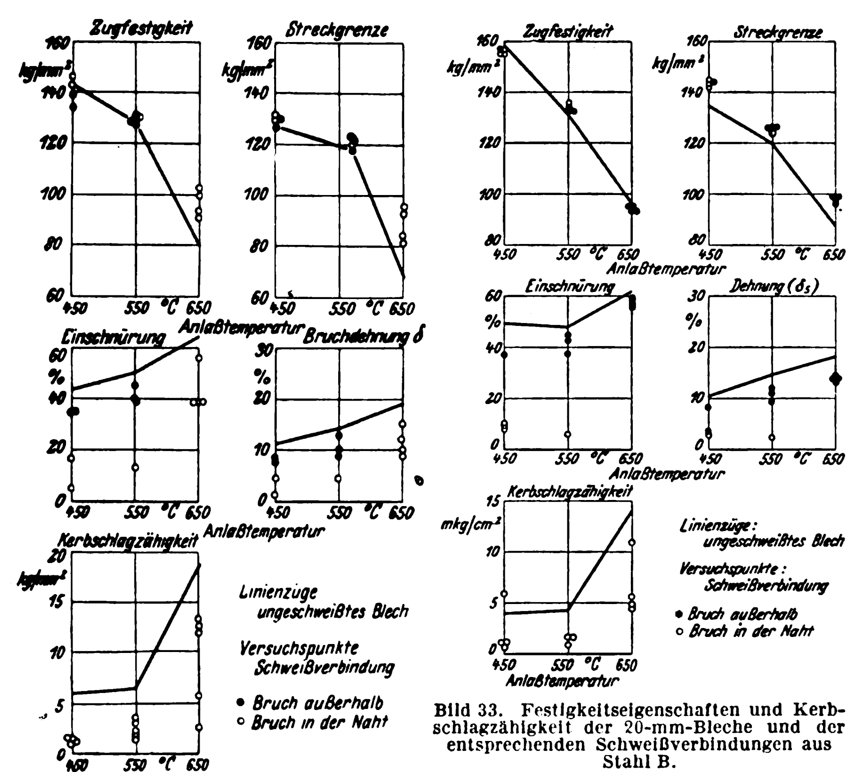


Bild 32. Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit der 20-mm-Bleche und der entsprechenden Schweißverbindungen aus Stahl A. Schweißung mit verkürzter Einspannung.

Bild 33. Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit der 20-mm-Bleche und der entsprechenden Schweißverbindungen aus Stahl B.

entnehmen ist. Mit den 20-mm-Blechen aus Stahl B wurden, ebenso wie mit den entsprechenden 12-mm-Blechen (Bild 30) auf Anhieb recht befriedigende mechanische Eigenschaften der Schweißungen nach Bild 33 erzielt. Der Bruch liegt vorwiegend außerhalb der Naht. Zugfestigkeit und Streckgrenze erreichen in allen Fällen die Werte des ungeschweißten Bleches. Dehnungen von 2% und Einschnürungen von 6% sind die Mindestwerte, die beim Bruch in der Naht bei 133 bis 157 kg/mm² Zugfestigkeit auftreten. Die Kerbschlagzähigkeit hat in diesem Festigkeitsbereich allerdings in manchen Fällen sehr kleine Werte, unter 1 mkg/cm².

Die **Dauerversuche** wurden zunächst mit Proben aus Schweißstücken durchgeführt, die auf gleiche Weise wie diejenigen geschweißt und vergütet worden waren, deren statische Festigkeitswerte in Bild 29 bis 31 und 33 wiedergegeben sind. Die Vergütungszugfestigkeit der Versuchsschweißungen lag bei 110 bis 140 kg/mm². Die für die Zugschwellversuche auf Losenhausen-Pulsatoren mit gleichgehaltener, + 10 kg/mm² betragender Mittelspannung (Lastspielfrequenz 1000/min) benutzte Stabform ist für die 20-mm-Bleche in Bild 34 wiedergegeben. Geometrisch ähnliche Stäbe (Prüfquerschnitt 8 × 15 mm²) fanden zur Prüfung der Schweißverbindungen der 12-mm-Bleche Verwendung. Die Dauerprüfstäbe wurden in der Prüfstrecke längsgeschliffen, zum Schluß mit einer Körnung des Schleifmittels entsprechend Schmirgel »0«. Aus jeweils einer Versuchsschweißung wurden zwei Dauerprüfstäbe entnommen. Die gleiche Prüfstabform und Oberflächengüte wie für die geschweißten Proben wurde auch für die Ermittlung der Zeit- und Dauerfestigkeit des ungeschweißten Bleches aus Stahl B mit 100 bis 110 kg/mm² Zugfestigkeit verwendet. Aus diesem Blech wurden außerdem ungeschweißte Stäbe mit 5 mm Querbohrung sowie mit beiderseits auf die breiten Flächen der Prüfstrecke aufgepunkteten 1-mm-Stahlblechen geprüft. Alle Dauerversuche wurden nach dem Wöhlerverfahren bis zu Grenzlastspielzahlen von 5 bis 10 · 10⁶ durchgeführt.

Kennzeichnend für die Dauerversuche mit ungeschweißten und den meisten geschweißten Proben sind die großen Streuungen der Versuchsergebnisse. Nur ausnahmsweise waren die Streuungen bei den geschweißten Proben klein, nämlich bei den Proben aus dem 12-mm-Blech des Stahles B mit 110 bis 117 kg/mm² Zugfestigkeit. Nur kleine Streuungen zeigten die quergebohrten Prüfstäbe und die Stäbe mit aufgepunkteten 1-mm-Blechen. Bild 35 gibt die Wöhlerkurven bzw. ihre Streubereiche für verschiedene Proben aus dem 20-mm-Blech des Stahles B mit rd. 110 kg/mm² Zugfestigkeit wieder. Zahlentafel 2 enthält die Ergebnisse der hier vorerst behandelten Dauerversuche. In den Fällen, in denen der Streubereich der Wöhlerkurven groß war, sind neben den Werten für die Zeitfestigkeit (10^4 Lastspiele) und die Dauerfestigkeit (10^7 Lastspiele) an der unteren Grenze auch entsprechende (eingeklammerte) Angaben für die obere Grenze des Streubereichs gemacht. Den folgenden Ausführungen werden die unteren Grenzwerte zugrunde gelegt: Die Zeitfestigkeit (10^4 Lastspiele) für die vergüteten und allseitig bearbeiteten Abbrennschweißungen liegt bei + 10 ± 41 bis ± 51 kg/mm², die Dauerfestigkeit bei + 10 ± 20 bis ± 26 kg/mm²: Es hat den Anschein, daß kein Einfluß der Versuchsvariabeln — Werkstoffart, Blechdicke, statische Zugfestigkeit — vorhanden ist. Bemerkenswert ist, daß die in einem Falle geprüften ungeschweißten Stäbe mit + 10 ± 52 kg/mm² Zeitfestigkeit und + 10 ± 32 kg/mm² Dauerfestigkeit nur eine verhältnismäßig kleine Überlegenheit über die geschweißten Stäbe haben. Offenbar haben bei der hohen

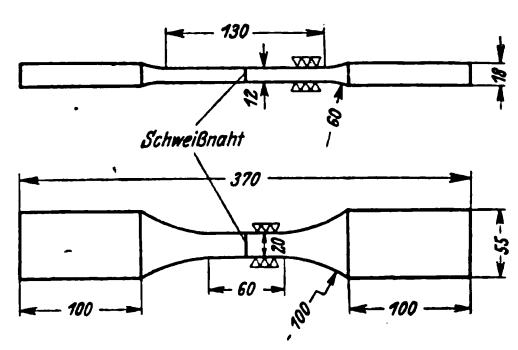


Bild 34. Probestababmessungen für die Zugschwellversuche. (20 mm dicke Bleche.)

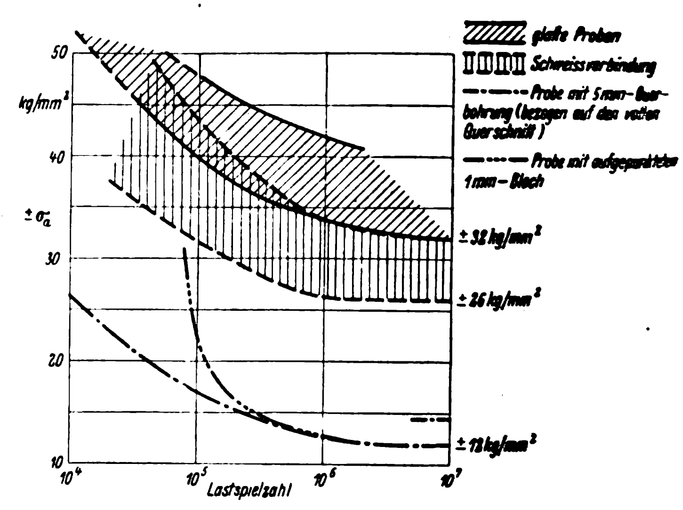


Bild 35. Wöhlerkurven (Zugschwellbeanspruchung, σ_m = + 10 kg/mm²) von Proben aus dem 20-mm-Blech des Stahles B (110 kg/mm² Zugfestigkeit).

Zahlentafel 2. Ergebnisse der Zugschwellversuche. (Schweißverbindungen nach dem Schweißen in Luft abgekühlt.)

Werkstoff	Blechdicke	Probenart	Prüfquerschnitt	Zugfestigkeit	Zeitfestigkeit 1) 10^4 Lastspiele $\sigma_{a\,z}$	Dauerfestigkeit 1) 10^7 Lastspiele $\sigma_{a\,z}$
	mm		mm²	kg/mm²	kg/mm²	kg/mm²
Stahl A	12	geschweißt 2)	8 × 15	118 – 124	± 47 (± 63)	± 23 (± 36)
	12	geschweißt	8 × 15	139 – 140	± 43 (?)	± 22 (?)
	20	geschweißt	12 × 20	113 – 118	± 45 (± 56)	± 20 (± 26)
	20	geschweißt	12 × 20	123 – 136	— (—)	± 26 (± 32)
Stahl B	12	geschweißt	8 × 15	110 – 117	± 65	± 20
	12	geschweißt	8 × 15	134 – 138	± 51 (± 56)	± 22 (± 27)
	20	ungeschweißt	12 × 20	106 – 109	± 52 (?)	± 32 (± 40)
	20	geschweißt	12 × 20	111 – 112	± 41 (± 60)	± 26 (± 32)
	20	geschweißt	12 × 20	128 – 129	— —	± 25 3)
	20	ungeschweißt	12 × 20	106 – 109	± 26,5	± 12
		Querbohrung mit 5 mm ⌀	12 × 20 ohne Bohrung	106 – 109	± 40	± 16
	20	ungeschweißt, 1 mm-Blech aufgepunktet	12 × 20	106 – 109	—	± 12

1) Nicht eingeklammerte Zahlen: untere Grenze des Streubereichs
eingeklammerte Zahlen obere " " "
2) Elektrische Widerstands-Abbrennschweißung
3) Ein Stab beim Belasten unterhalb 55 kg/mm² Zugspannung infolge mangelhafter Bindung der Schweißnaht zu Bruch gegangen.
(Zugschwellversuche mit gleichbleibender Mittellast + 10 kg/mm²)

Zugfestigkeit der Prüflinge die Bearbeitungsriefen der glatten Stäbe eine annähernd so große Kerbwirkung wie die Inhomogenitäten der Schweißungen.

Die quergebohrten Stäbe haben, wenn man die Spannung auf den ursprünglichen, also bohrungsfreien Querschnitt bezieht, eine wesentlich kleinere Zeit- und Dauerfestigkeit (+ 10 ± 26,5 und + 10 ± 12 kg/mm²) als die geschweißten Stäbe. Für die Stäbe mit aufgepunktetem Blech ergibt sich eine steile Wöhlerkurve (Bild 35), aus der die vermutlich bedeutende Zeitfestigkeit für 10^4 Lastspiele nicht entnommen werden kann. Die Dauerfestigkeit sinkt durch die Kerbwirkung der Schweißpunkte auf + 10 ± 12 kg/mm², also sehr stark ab. Die Dauerfestigkeit der Stäbe mit Querbohrung liegt, bezogen auf den bohrungsfreien Querschnitt, auf gleicher Höhe wie die Dauerfestigkeit der Stäbe mit aufgepunktetem Blech. In beiden Fällen wird also die Dauerfestigkeit der stumpfgeschweißten Verbindungen beträchtlich unterschritten.

Einige der im Zugschwellversuch gebrochenen, geschweißten Prüfstäbe wurden zur Feststellung des eigentlichen Dauerbruchausgangs metallographisch untersucht. Es zeigte sich, daß der Dauerbruch häufig von Stellen der Schweißnaht ausgeht, die eine Ansammlung von Mikrolunkern (vgl. Bild 20 bis 22) aufwiesen. Härterisse wurden in keinem Falle als Dauerbruchursache erkannt. Sie scheinen sich deshalb weniger schädlich ausgewirkt zu haben, weil sie beim Dauerversuch vorwiegend in der Zugspannungsrichtung lagen. Bindefehler (Kaltschweißungen) lassen sich metallographisch am gebrochenen Stab nicht mehr nachweisen, wenn der Bruch von ihnen ausgegangen ist. Mit ihrem Vorhandensein und ihrer die Dauerfestigkeit stark beeinträchtigenden Wirkung war bei den Versuchsschweißungen zu rechnen. So brach ein Stab aus Stahl B (vgl. Zahlentafel 2, Fußnote 3) beim Aufbringen der Last für den Dauerversuch schon vor Erreichen einer Zugspannung von 55 kg/mm² infolge eines schweren Bindefehlers. Der Vermeidung solcher Fehler muß durch geeignete Wahl der Schweißbedingungen bzw. ihrer Erfassung durch zerstörungsfreie Prüfung besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Dies gilt besonders für chromlegierte Stähle, bei denen wie bei den Versuchsstählen die Bildung von Chromoxydhäuten in der Schweißfuge während des Schweißvorganges das Entstehen von Bindefehlern begünstigen kann.

Die vorstehenden Ausführungen über die Dauerfestigkeit der Widerstands-Abbrennschweißverbindungen der Stähle A und B beziehen sich auf solche Versuchsstücke, die nach dem Schweißen in Luft abgekühlt worden sind. Dabei ist bemerkenswert, daß die Schweißverbindungen der 20-mm-Bleche aus Stahl A, die bei der Prüfung im statischen Zugversuch erhebliche Versager gezeigt hatten, bei der Dauerprüfung mit den übrigen Schweißungen durchaus vergleichbare Ergebnisse zeitigten. Man muß daraus schließen, daß die Güte der Versuchsschweißungen aus diesem Stahl besonders unterschiedlich war. Wenn auch bei der metallographischen Untersuchung der Dauerbruchstellen der nach dem Schweißen in Luft abgekühlten Versuchsstücke Härterisse nicht als unmittelbare Bruchursache festgestellt werden konnten, erschien es doch wünschenswert, Dauerversuche auch mit solchen Schweißungen durchzuführen, die infolge langsamer Abkühlung nach dem Schweißen (s. o.) mit Sicherheit frei von Härterissen waren. Derartige Versuche wurden mit den 20-mm-Blechen aus Stahl A gemacht, der stärker als der Stahl B zu Härterissen in der von der Schweißwärme beeinflußten Zone zu neigen schien. Die auf 108 bis 113 bzw. 124 bis 126 kg/mm² Zugfestigkeit vergüteten, nach dem Schweißen langsam abgekühlten Versuchsstücke hatten Zugschwellfestigkeiten von + 10 ± 20 bzw. + 10 ± 24 kg/mm². Die vergleichbaren Werte für Luftabkühlung nach dem Schweißen sind + 10 ± 20 bzw. + 10 ± 26 kg/mm². Diese Versuche zeigen eindeutig, daß eine Beeinträchtigung der Zugschwellfestigkeit durch Härterisse in der wärmebeeinflußten Zone von elektrischen Stumpfschweißverbindungen der Stähle A und B bei Luftabkühlung nach dem Schweißen nicht eingetreten ist.

Die eigenen Zugschwellversuche wurden nur bei einer Mittelspannung durchgeführt. Versuche mit Mittelspannungen von 0 bis + 70 kg/mm² an Widerstands-Abbrennschweißverbindungen aus Stahl B mit einer Vergütungszugfestigkeit von 100 bis 110 kg/mm² stammen von K. Heyer (Messerschmitt A.G.)[4]). Für 10^7 Lastspiele ergaben sich folgende Dauerfestigkeiten:

± 0 ± 28 kg/mm²; + 15 ± 20 kg/mm²;
+ 30 ± 17 kg/mm²; + 45 ± 15 kg/mm²;
+ 70 ± 11 kg/mm².

Die Versuchsergebnisse stimmen mit den eigenen bei vergleichbarer Mittelspannung gut überein. Mit zunehmender, positiver Mittelspannung sinkt der Spannungsausschlag. Die Abnahme ist für die Dauerfestigkeit besonders stark bei den Mittelspannungen zwischen 0 und + 15 kg/mm². Die Spannungsausschläge im Bereich der Zeitfestigkeit hängen in ähnlicher Weise wie die bei der Dauerfestigkeit von der Mittelspannung ab.

3. Einfluß verschiedener Warmbehandlungen auf die Güte der Widerstands-Abbrennschweißverbindungen aus Stahl B. (Statische Biege- und Zerreißversuche bei Raumtemperatur, Kerbschlagbiege- und Schlagzug-Versuche im Temperaturgebiet von + 20 bis — 75°.)

Die bisher besprochenen Untersuchungen wurden an Schweißungen durchgeführt, die vor dem Vergüten normalgeglüht und nach dem Anlassen in Öl abgeschreckt worden waren. Da das Normalglühen und das Abschrecken nach dem Anlassen bei gewissen Teilen betrieblich nur tragbar wäre, wenn es die Güte der Schweißung eindeutig günstig beeinflußte, war der Einfluß verschiedener Warmbehandlungen auf die Güte der Schweißungen zu prüfen. Um hierbei gleichzeitig das Bild von den Eigenschaften der Schweißverbindungen abzurunden, wurden solche Eigenschaften für die Kennzeichnung der Nahtgüte ermittelt, die bei den voraufgegangenen Versuchen noch nicht bestimmt worden waren: der bis zum Bruch im statischen Biegeversuch ertragene Biegewinkel, die Abhängigkeit der Kerbschlagbiegezähigkeit und der im Schlagzugversuch ermittelten Schlagarbeit, Dehnung und Einschnürung ungekerbter Proben von der Temperatur in dem Bereich von + 20 bis — 70°.

Die Versuche wurden mit 25 mm dicken Blechen aus Stahl B durchgeführt. Jeweils zwei Proben mit 25 × 120 mm² Querschnitt und 250 mm Länge wurden zu einer Verbindung verschweißt. Bei einem Stauchdruck von 12 t (4,3 kg/mm²) ergaben sich 5 bis 7 mm Stauchung. Der Abbrand betrug 12 mm, die Schweißzeit 40 bis 60 s. Die Proben kühlten nach dem Schweißen langsam ab.

[4]) Für die Erlaubnis, diese Versuche hier anzuführen, sind wir Herrn Heyer und der Messerschmitt A. G. zu großem Dank verpflichtet.

Die Warmbehandlungen wurden an den ungeteilten Schweißverbindungen (25 × 120 × 460 mm³) durchgeführt. Folgende Warmbehandlungen wurden vorgenommen:

I. 870°/1 h/Öl, 550°/1 h/Luft.
II. 870°/1 h/Luft, 870°/1 h/Rüböl, 550°/1 h/Luft.
III. 870°/1 h/Luft, 870°/1 h/Rüböl, 550°/1 h/Öl.

Die Behandlung II unterscheidet sich von I durch die Normalglühung vor dem Vergüten. Die Normalglühung wurde ursprünglich schon angewendet, weil sich gezeigt hatte, daß die Naht nach dem Schweißen mit anschließender Luftabkühlung ein Zwischenstufengefüge, die wärmebeeinflußte Zone dagegen ein martensitisches Gefüge aufweist. Es sollte versucht werden, den Konzentrationsunterschied an Kohlenstoff und wahrscheinlich Chrom, der in dem Gefüge zum Ausdruck kommt, durch eine Normalglühung zu vermindern. Die Behandlung III weicht von II insofern ab, als die Abkühlung nach dem Anlassen in Öl statt in Luft erfolgte. Durch die beschleunigte Abkühlung nach dem Anlassen sollte der Neigung des Stahles B zur Anlaßsprödigkeit Rechnung getragen werden.

Aus den Schweißverbindungen wurden die Proben für statische Zug- und Schlagzugversuche sowie für Kerbschlagbiegeversuche entsprechend dem in Bild 36 wiedergegebenen Plan entnommen. Die statischen Zugversuche wurden an Proben mit 10 mm Dmr. und 50 mm Meßlänge nur bei Raumtemperatur durchgeführt. Für die Schlagzugversuche bzw. die Kerbschlagbiegeversuche dienten Proben mit 6 mm Dmr. und 30 mm Meßlänge bzw. die DVMR-Probe mit 3 mm tiefem Rundkerb mit 1 mm Radius. Die Schlagzug- und Kerbschlagbiegeversuche erstreckten sich auf Temperaturen von + 20, — 20, — 45 und — 70° C. Neben Proben, die in der Prüfstrecke bzw. im Prüfquerschnitt die Schweißnaht enthielten, wurden Proben aus dem vollen Blech geprüft.

Statische Biegeversuche wurden mit Proben von 20, 30 und 55 mm Breite nur bei Raumtemperatur durchgeführt. Die Prüfstäbe waren einheitlich 20 mm dick, die beim Biegen gezogenen Kanten wurden mit einem Radius von 5 mm abgerundet, die gedrückten Kanten nur leicht gebrochen. Der Durchmesser der Stützrollen und des Biegedorns war gleich der vierfachen Probendicke (= 80 mm). Die Stützweite entsprach der siebenfachen Probendicke. Vorerst wurden nur Stäbe untersucht, die in ihrem höchstbeanspruchten Querschnitt die Schweißnaht enthielten. Auf die Biegefähigkeit ungeschweißter Stäbe wird später eingegangen werden. Hierbei wird auch der Einfluß der Vergütungszugfestigkeit auf das bei verschiedener Prüfstabbreite erhaltene Ergebnis des Biegeversuches mit ungeschweißten und geschweißten Stäben behandelt werden.

Die Ergebnisse der statischen Zerreißversuche enthält Zahlentafel 3. Die Versuche sollten zeigen, ob nach der durchgeführten Warmbehandlung auch die angestrebte Zugfestigkeit von 125 bis 140 kg/mm² vorlag.

Nach Zahlentafel 3 ist dies bei den ungeschweißten und geschweißten Proben der Fall. (Die erreichte Zugfestigkeit von rd. 130 kg/mm² wurde bei allen Versuchen beibehalten.) Für die Warmbehandlungen I und II ergibt sich außerdem folgendes: Streckgrenze und Zugfestigkeit sind für ungeschweißte und geschweißte Proben nahezu gleich. Dies gilt auch für Dehnung und Einschnürung, wenn der Bruch

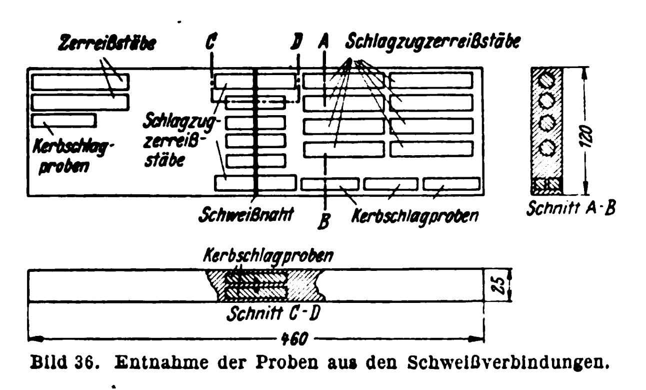


Bild 36. Entnahme der Proben aus den Schweißverbindungen.

Zahlentafel 3. Ergebnisse der Zerreißversuche.

Warmbehandlung	ungeschweißt $\sigma_{0,2}$ kg/mm²	ungeschweißt σ_B kg/mm²	ungeschweißt δ_5 %	ungeschweißt ψ %	geschweißt $\sigma_{0,2}$ kg/mm²	geschweißt σ_B kg/mm²	geschweißt δ_5 %	geschweißt ψ %	Lage des Bruches der geschweißten Stäbe
I. 870°/1 h/Öl, 550°/1 h/L	122	132	14	48	120	130	7,0	26	in der Naht
	122	132	14,2	48	120	130	12,0	46	außerh. d. N.
III. 870°/1 h/L, 870°/1 h/Öl, 550°/1 h/Öl	121	132	14	48	120	128	8,0	22	in der Naht
	121	132	14	54	118	127	6,0	10	in der Naht

der geschweißten Probe, wie es in einem Falle zutraf, außerhalb der Naht erfolgte. Tritt der Bruch, wie bei den drei übrigen geschweißten Proben, in der Naht ein, so werden kleinere Dehnungs- und Einschnürungswerte als für die ungeschweißten Proben erhalten. Die Normalglühung vor dem Vergüten und das Abschrecken in Öl nach dem Anlassen (Warmbehandlung III) machen sich in den Ergebnissen der Zerreißversuche nicht bemerkbar.

Die Ergebnisse der Kerbschlagbiegeversuche sind in Bild 37 bis 39 wiedergegeben. Bild 37 enthält die Temperaturabhängigkeit der Kerbschlagzähigkeit des ungeschweißten Grundwerkstoffs nach den Warmbehandlungen I bis III. Im Vergleich zu der einfachen Vergütung (I) ergibt die Vergütung nach Normalglühen (II) bessere Kerbschlagzähigkeiten im gesamten untersuchten Temperaturbereich. Eine weitere Verbesserung wird erzielt, wenn das Abkühlen nach dem Anlassen in Öl (III) statt in Luft vorgenommen wird. Bei — 75° sind die Wirkungen der Warmbehandlungen weniger eindeutig mit der Erwartung in Übereinstimmung. Nach Bild 38 und 39 zeigen die geschweißten Proben den Einfluß der verschiedenen Wärmebehandlungen nicht so

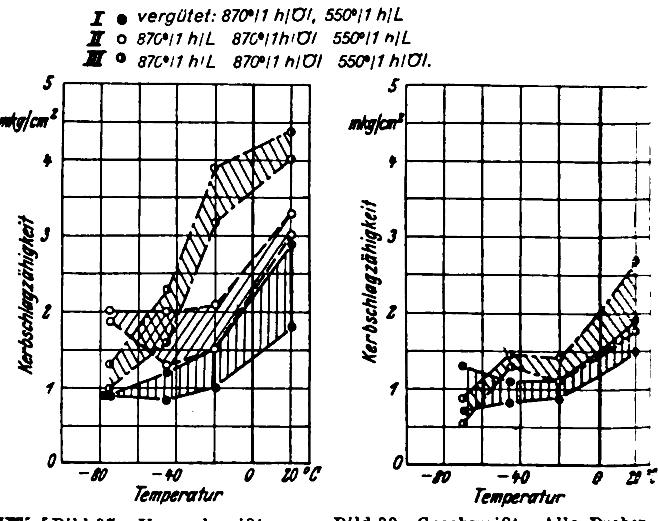


Bild 37. Ungeschweißt.

Bild 38. Geschweißt. Alle Proben je Warmbehandlung aus der gleichen Schweißverbindung.

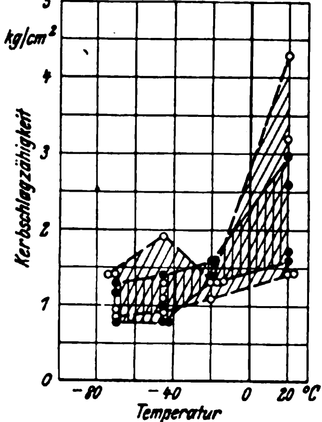


Bild 39. Geschweißt. Bei jeder Temperatur vier Proben je Warmbehandlung aus vier verschiedenen Schweißverbindungen.



Bild 37. bis 39. Ergebnisse der Kerbschlagbiegeversuche.

klar wie die ungeschweißten Proben. Bild 38 bezieht sich auf Proben, die einer einzigen Schweißverbindung je Wärmebehandlung entstammen. Die Warmbehandlung III ergibt, außer bei — 70°, etwas bessere Kerbschlagzähigkeiten als die Behandlung I. Die Streuungen der Kerbschlagzähigkeit sind innerhalb einer Schweißung nicht größer als die des ungeschweißten Grundwerkstoffs. Im Gegensatz zu Bild 38 bezieht sich Bild 39 auf Proben, die je Warmbehandlung für jede Prüftemperatur vier verschiedenen Schweißverbindungen entnommen sind. Das Bild gibt also die Streuung in der Temperaturabhängigkeit für verschiedene Schweißungen je Warmbehandlung wieder. Eine eindeutige Überlegenheit der Warmbehandlung II über I ist nicht festzustellen. Die Streuungen der Kerbschlagzähigkeit zwischen verschiedenen Schweißungen bei einheitlicher Warmbehandlung sind erheblich und viel größer als beim ungeschweißten Grundwerkstoff.

Unter Berücksichtigung aller drei Warmbehandlungen wurden nach Bild 38 und 39 folgende Mindestwerte der Kerbschlagzähigkeit für die Schweißnaht festgestellt:

Temperatur	Kerbschlagzähigkeit mkg/cm²	Warmbehandlung
+ 20	1,4	II
— 20	0,90	I
— 45	0,80	I
— 70	0,55	III

Jede Warmbehandlung ist an den Mindestwerten beteiligt. Die durch Fehler der Naht bedingten Streuungen überdecken den Einfluß der Warmbehandlung.

Die Ergebnisse der Schlagzugversuche an glatten Proben ohne und mit Schweißnaht, wärmebehandelt nach den Verfahren I und II, enthalten Bild 40 bis 45. Die ungeschweißten Proben haben bei verhältnismäßig kleinen Streuungen der Versuchswerte eine höhere Schlagarbeit, Dehnung und Einschnürung im untersuchten Temperaturbereich als die Proben mit der Schweißnaht in der Mitte der Meßstrecke. Diese geschweißten Proben besitzen darüber hinaus besonders bei den Temperaturen — 20 und — 75° einen großen Streubereich der Versuchswerte. In Einzelfällen erreichen die Schlagarbeit, Dehnung und Einschnürung Werte dicht bei Null. Ein eindeutiger Einfluß der unterschiedlichen Warmbehandlung ist bei dem ungeschweißten Werkstoff nicht sicher festzustellen. Bei den geschweißten Proben überdecken wieder die durch die Nahtfehler hervorgerufenen Streuungen den Einfluß des Unterschiedes in der Warmbehandlung vollständig. Bemerkenswert ist noch die Feststellung, daß der Grundwerkstoff an sich im Schlagzugversuch nur einem schwachen Temperatureinfluß zwischen + 20 und — 75° unterliegt.

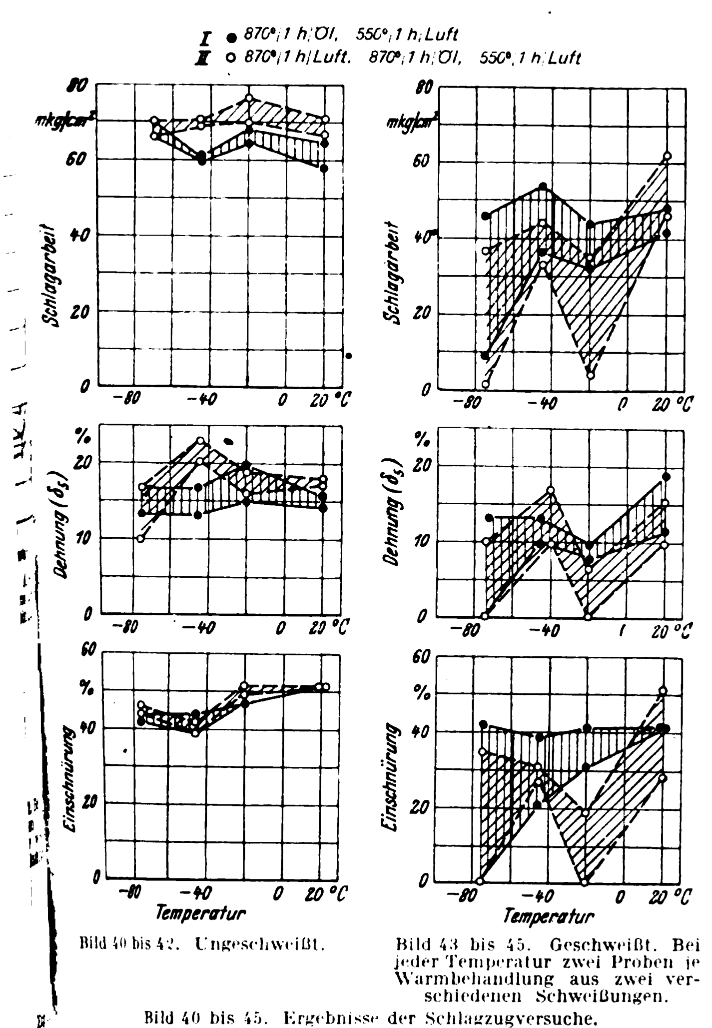


Bild 40 bis 42. Ungeschweißt.

Bild 43 bis 45. Geschweißt. Bei jeder Temperatur zwei Proben je Warmbehandlung aus zwei verschiedenen Schweißungen.

Bild 40 bis 45. Ergebnisse der Schlagzugversuche.

Die mit geschweißten Proben verschiedener Breite im statischen Biegeversuch erhaltenen Ergebnisse sind in Bild 46 und 47 dargestellt. Die Warmbehandlung II führt nicht zu besseren Ergebnissen als die einfache Vergütung I, da die Güte der Schweißnaht den Einfluß des Unterschiedes zwischen den Wärmebehandlungen I und II überdeckt. Nach beiden Warmbehandlungen treten Biegewinkel von nur 10 bis 15° mehrfach auf.

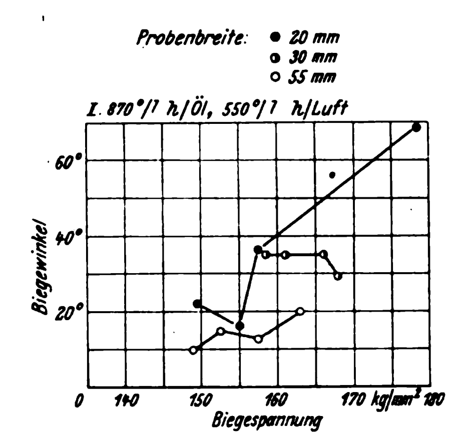
Zu hohen Biegewinkeln beim Eintritt des Bruches gehören durchweg hohe Biegespannungen. Das ist einmal darauf zurückzuführen, daß nur gesunde Schweißungen verhältnismäßig große Biegewinkel zulassen, und andererseits mit wachsendem Biegewinkel die Kaltverfestigung ansteigt.

Die Größe der beim Bruch vorliegenden Biegewinkel nimmt mit zunehmender Breite der Biegeprobe ab. Für diese Abhängigkeit ist vor allem die Art der Verformung bei den verschiedenen Probenbreiten verantwortlich. Während die Verformung (Einziehen auf der Zugseite, Breitung auf der Druckseite) im Biegeversuch bei schmalen Proben ziemlich unbehindert vor sich gehen kann, tritt mit zunehmender Probenbreite eine verstärkte Formänderungsbehinderung und damit spröderes Verhalten ein. Gegenüber diesem Einfluß der Probenbreite tritt ein anderer, entgegengesetzt gerichteter, zurück: nämlich die mit zunehmender Probenbreite abnehmende Beeinträchtigung des Biegewinkels durch Schweißfehler bestimmter Größe.

Beim Biegeversuch war kurz vor dem Bruch eine deutliche Einschnürung in der Naht selbst erkennbar. Die hiermit verbundene Verfestigung und die Wirkung der dabei entstehenden, ausgerundeten Kerbe erhöhen die Festigkeit einer gesunden Naht unter Umständen über die des Grundwerkstoffs. Demgemäß treten, wie auch beim Zerreißversuch, nicht alle Brüche in der Naht ein. Beispiele für den Bruchausgang neben der Naht zeigen Bild 49 und 51; für den häufigeren Bruchausgang von der meist nicht völlig fehlerfreien Naht sind Bild 48 und 50 kennzeichnend. Der von der Zugseite ausgehende Riß verzweigt sich zuweilen nach beiden Seiten nach dem Durchlaufen der neutralen Ebene, wie aus Bild 48 und 51 hervorgeht. Hierfür sind die Formänderungsbehinderung durch die Reibung zwischen Stab und Biegedorn und die dadurch hervorgerufene Spannungsverteilung als Ursachen anzusehen. Aus der Härte der Biegeproben leiten sich Zugfestigkeiten zwischen 125 und 132, im Mittel 130 kg/mm² (wie beim Zugversuch) ab.

D. Folgerungen und Zusammenfassung.

Die an Widerstands-Abbrennschweißverbindungen der Chrom-Molybdän-Vanadin- und Chrom-Vanadin-Versuchsstähle durchgeführten, teils orientierenden, teils eingehenden Untersuchungen des Gefüges, der Schweißhärte, der Schweißfehler, der statischen und dynamischen Festigkeitseigenschaften und der Kerbschlagzähigkeit zeigen, daß auf Zugfestigkeiten bis zu 155 kg/mm² vergütete Schweißungen eine hohe Güte aufweisen können, wenn die geeigneten Schweißbedingungen eingehalten werden. Für die prak-



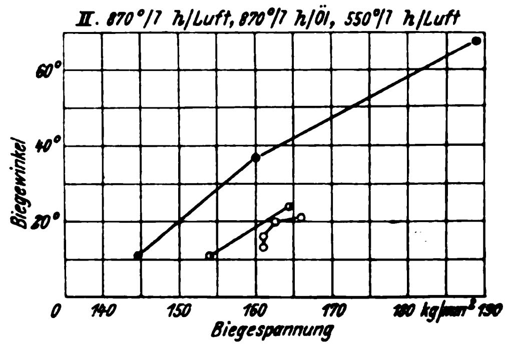


Bild 46 und 47. Ergebnisse der statischen Biegeversuche mit geschweißten Proben verschiedener Breite.

tische Anwendung hochfester Schweißungen ist eine weitgehende Fehlerfreiheit, die durch zerstörungsfreie Verfahren nachzuprüfen ist, eine besonders wichtige Forderung. Auf einen häufig auftretenden, bei den Versuchsstählen jedoch praktisch abwesenden Fehler — Reihen von Löchern und Rissen in einem gewissen Abstand von der Naht — wird eingegangen und ein Ansatz zur Deutung der Entstehung des Fehlers gemacht.

Die Geschwindigkeit der Abkühlung zwischen Luft- und Ofenabkühlung nach dem Schweißen beeinflußt die Güte der nach dem Schweißen vergüteten Schweißungen offenbar nicht. Über den Einfluß verschiedener Warmbehandlungen auf die Güte der Naht ist an Hand der Kerbschlagbiege- und Schlagzug-Versuche in dem Temperaturbereich von + 20 bis — 70° und nach statischen Biegeversuchen bei Raumtemperatur folgendes zu sagen:

Die Kerbschlagzähigkeit des Chrom-Vanadin-Stahles läßt sich zwar im ungeschweißten Zustand bei Temperaturen von + 20 bis — 70 (— 75°) durch Normalisieren vor dem Vergüten und Abkühlen nach dem Anlassen in Öl statt in Luft verbessern. Die Zähigkeit der durch die Widerstands-Abbrennschweißung in 20 mm dicken Blechabschnitten aus diesem Stahl erhaltenen Schweißnaht läßt sich bei üblicher und tiefer Temperatur durch derartige Verbesserungen der Wärmebehandlung jedoch nicht eindeutig erhöhen, da der Einfluß der Nahtfehler den der Wärmebehandlung überdecken kann. Zu entsprechenden Ergebnissen führten auch Schlagzugversuche bei + 20 bis 75° und statische Biegeversuche bei Raumtemperatur, die einen starken Einfluß der Probenbreite auf den beim Bruch ertragenen Biegewinkel ergaben. Der Biegewinkel nimmt bei den auf hohe Festigkeit vergüteten Versuchsstählen mit zunehmender Probenbreite ab und ist zuweilen sehr klein. Die Versuche zeigen, daß bei der Warmbehandlung von Widerstands-Abbrennschweißungen aus den Versuchsstählen auf eine Normalglühung vor dem Vergüten und ein Abkühlen in Öl statt in Luft nach dem Anlassen verzichtet werden kann.

Da schon schmale Biegeproben aus Abbrennschweißungen, die auf hohe Festigkeit vergütet wurden, kleine Biegewinkel aufweisen können, ist beim Richten geschweißter Bauteile mit größerem Schweißquerschnitt die Umgebung der Naht schonend zu behandeln.

Die Untersuchungen werden fortgesetzt. Dabei wird auch auf die Abhängigkeit des Biegewinkels von der Breite ungeschweißter und geschweißter Proben mit verschiedener Vergütungsfestigkeit näher eingegangen.

Herrn Ing. K. Fahsel danken wir für die sorgfältige Durchführung eines großen Teiles der Versuche.

Abgeschlossen September 1943.



Bild 49. Querschnitt: 30 × 20 mm², σ' = 168 kg/mm², α = 29°. Nicht normalgeglüht, Zugseite neben, Druckseite in der Naht gebrochen. Vergr. 1 fach.



Bild 48. Querschnitt: 20 × 20 mm², σ' = 155 kg/mm², α = 16°. Nicht normalgeglüht, Bruch in der Naht, Druckseite ausgebrochen. Vergr. 1 fach.

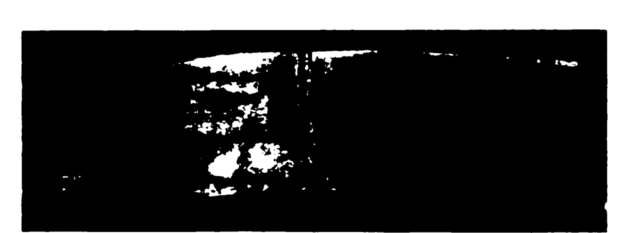


Bild 50. Querschnitt: 55 × 20 mm², σ' = 149 kg/mm², α = 10°. Nicht normalgeglüht, teils neben, teils in der Naht gebrochen. Vergr. 1 fach.

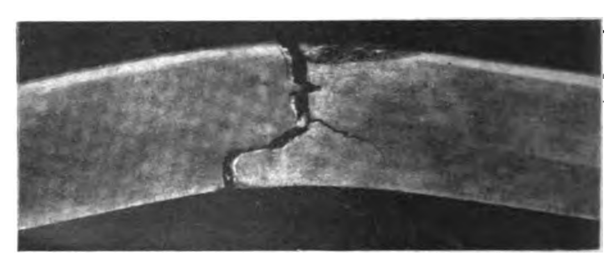


Bild 51. Querschnitt: 55 × 20 mm², σ' = 162,5 kg/mm², α = 20°. Normalgeglüht, Druckseite ausgebrochen. Bruch außerhalb der Naht.

Bild 48 bis 51. Brüche an statischen Biegeproben.



